МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЯНОЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Математики»

Методические указания для практических занятий по дисциплине «Математика»

Уфа
2017

Данные методические указания по дисциплине «Математика» предназначены для студентов всех форм обучения и специальностей, реализуемых в УГНТУ, обучающихся по программе среднего профессионального образования – программе подготовки специалистов среднего звена.

Составитель: Исламгулова Г.Ф., ст. преподаватель, каф. математики

Рецензент: Сахарова Л.А., канд. техн. наук, доцент каф. математики

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания для проведения практических заданий разработаны в соответствии с учебной программой. В зависимости от содержания они могут выполняться студентами индивидуально, в качестве текущего домашнего задания или в аудитории, под руководством преподавателя.

Практические занятия служат связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, полученных на лекционных занятиях а так же для получения практических знаний. Практическое занятие - это форма организации учебного процесса, предполагающая выполнение обучающимися практических работ по заданию и под руководством преподавателя Цель практических работ – формирование у обучающихся профессиональных умений, практических умений, необходимых для изучения последующих учебных дисциплин, а также подготовка к применению этих умений в профессиональной деятельности. Так, на практических занятиях по математике у обучающихся формируется умение решать задачи, которое в дальнейшем должно быть использовано для решения профессиональных задач по специальным дисциплинам.

Задачи, которые решаются в ходе практических занятий по математике:

- расширение и закрепление теоретических знаний по математике, полученных в ходе лекционных занятий;
- формирование у обучающихся практических умений и навыков, необходимых для успешного решения задач по математике;
- развитие у обучающихся потребности в самообразовании и совершенствовании знаний и умений в процессе изучения математики;
- формирование творческого отношения и исследовательского подхода в процессе изучения математики;
- формирование профессионально-значимых качеств будущего специалиста и навыков приложения полученных знаний в профессиональной сфере.

В ходе практических работ обучающиеся овладевают умениями пользоваться информационными источниками, инструктивными материалами, справочниками, выполнять чертежи, схемы, таблицы, решать разного рода задачи, делать вычисления.

Критерии оценки следующие.

· Ответ оценивается на «5», если:

работа выполнена полностью;

в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;

в решении нет математических ошибок (возможны некоторые неточности, описки, которая не является следствием незнания или непонимания учебного материала).

· Ответ оценивается на «4», если:

работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны;

допущены одна ошибка, или есть два – три недочёта в выкладках, рисунках, чертежах или графиках.

· Ответ оценивается на «3», если:

допущено не более двух ошибок или более двух – трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но обучающийся обладает обязательными умениями по проверяемой теме.

· Ответ оценивается на «2», если:

допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не обладает обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Преподаватель может повысить оценку за оригинальный ответ на вопрос или оригинальное решение задачи, которые свидетельствуют о высоком математическом развитии обучающегося; за решение более сложной задачи или ответ на более сложный вопрос, предложенные обучающемуся дополнительно после выполнения им каких-либо других заданий.

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

ПРИМЕР. Доказать, что $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\vec{O}$, если точка O есть центр тяжести ΔABC (рис. 2.3).

Решение. Центр тяжести т. O ΔABC находится в точке пересечения его медиан. Пусть точка P есть середина отрезка AC. Тогда по свойству медианы $\overline{OP}=\frac{1}{3}\overline{BP}=-\frac{1}{2}\overline{OB}$. Построим на векторах $\overline{OA}$ и $\overline{OC}$ параллелограмм $AOCД$.

Тогда $\overline{OД}=\overline{OA}+\overline{OC}$ и $\overline{OP}=\frac{1}{2}\overline{OД}$. Следовательно,

$$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{OД}+\overline{OB}=2\cdot\overline{OP}+\overline{OB}=-\overline{OB}+\overline{OB}=\vec{O}$$

.

Что и требовалось доказать.

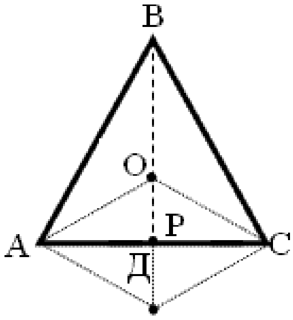


Рис. 2.3

ПРИМЕР 2.17 Вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=60^\circ$, причем $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=8$. Определить $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$.

Решение. Вектора $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$ совпадают с диагоналями АС и ВД параллелограмма (рис. 2.4). Тогда по теореме косинусов

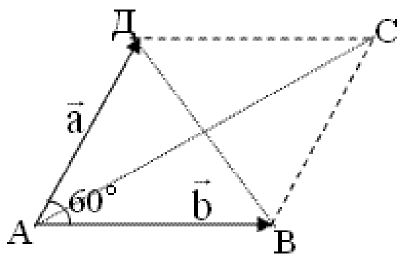


Рис. 2.4

$$ВД^2=AB^2+AД^2-2\cdot AB\cdot AД\cdot\cos\varphi\Rightarrow$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi\Rightarrow|\vec{a}-\vec{b}|^2=5^2+8^2-2\cdot5\cdot8\cdot\cos 60^\circ=$$

$$=89-80\cdot\frac{1}{2}=49\Rightarrow|\vec{a}-\vec{b}|=7.$$

Так как в параллелограмме $AC^2+ВД^2=2\cdot\left(AB^2+AД^2\right)$, то $|\vec{a}+\vec{b}|^2=2\cdot\left(8^2+5^2\right)-49=129\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{129}.$

Ответ. $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{129}$ и $|\vec{a}-\vec{b}|=7$.

ПРИМЕР. Доказать, что вектора $\vec{a}_1=\{1;2;5\}$, $\vec{a}_2=\{3;2;-1\}$, $\vec{a}_3=\{2;-1;3\}$ образуют базис в пространстве R^3.

Решение. Вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ образуют базис, если определитель Δ третьего порядка, составленный из координат данных векторов, отличен от нуля.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 - 15 - 20 - 1 - 18 = -52 \neq 0.$$

ПРИМЕР. Найти координаты вектора $\vec{a}_4 = \{3;1;8\}$ в базисе $\vec{a}_1 = \{1;2;5\}$, $\vec{a}_2 = \{3;2;-1\}$, $\vec{a}_2 = \{2;-1;3\}$.

Решение. Из примера 2.16 следует, что $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ образуют базис в пространстве R^3. Тогда вектор $\vec{a}_4$ является линейной комбинацией базисных векторов, т.е.

$$\vec{a}_4 = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{a}_3 \Leftrightarrow$$

$\lambda_1 \cdot \{1;2;5\} + \lambda_2 \cdot \{3;2;-1\} + \lambda_3 \cdot \{2;-1;3\} = \{3;1;8\}$. Приравнивая одноименные координаты векторов, получим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$: $\begin{cases} \lambda_1 + 3 \cdot \lambda_2 + 2 \cdot \lambda_3 = 3, \\ 2 \cdot \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 - \lambda_3 = 1, \\ 5 \cdot \lambda_1 - \lambda_2 + 3 \cdot \lambda_3 = 8. \end{cases}$

Решим эту систему методом Гаусса

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & -5 \\ 0 & -16 & -7 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 13 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3 \cdot \lambda_2 + 2 \cdot \lambda_3 = 3, \\ \qquad 4 \cdot \lambda_2 + 5 \cdot \lambda_3 = 5, \\ \qquad\qquad \lambda_3 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0, \\ \lambda_3 = 1. \end{cases}$$

Ответ. $\vec{a}_4 = \vec{a}_1 + \vec{a}_3 = \{1;0;1\}$.

ПРИМЕР. Дан прямоугольный треугольник ABC, у которого длина катета $AB = 3$, длина катета $AC = 4$. На стороне AB взят вектор $\vec{i}$, на стороне AC - вектор $\vec{j}$. Выразить вектор $\overline{MC}$ через векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$, если точка M - середина стороны BC.

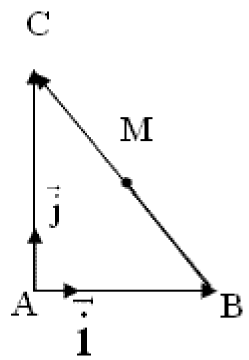


Рис. 2.5

Решение.

$$\overline{MC}=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overline{AC}-\overline{AB}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(4\cdot\vec{j}-3\cdot\vec{i}\right)=-\frac{3}{2}\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}$$

Прямоугольная декартова система координат

Если $\vec{a}=\overline{OM}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$, то

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,. \qquad (2.1)$$

Если α,β,γ - углы между вектором $\vec{a}$ и осями координат, то направляющие косинусы радиуса-вектора $\vec{a}$ точки $M(x;y;z)$ вычисляются по формулам

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (2.2)$$

Расстояние d между двумя точками $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$ находится по формуле

$$d=\left|\overline{M_1M_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\,. \qquad (2.3)$$

Если точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ делит отрезок $[M_1M_2]$, где $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ в отношении λ, т.е. $\overline{M_1M_0}=\lambda\cdot\overline{M_0M_2}$, то ее координаты находятся по формулам

$$x_0=\frac{x_1+\lambda\cdot x_2}{1+\lambda},\ y_0=\frac{y_1+\lambda\cdot y_2}{1+\lambda},\ z_0=\frac{z_1+\lambda\cdot z_2}{1+\lambda}. \qquad (2.4)$$

В частности, при $\lambda=1$ точка M_0 делит отрезок пополам, а

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2},\ y_0=\frac{y_1+y_2}{2},\ z_0=\frac{z_1+z_2}{2}. \qquad (2.5)$$

ПРИМЕР . Найти длину медианы AD треугольника ABC с вершинами $A(2;1;4)$, $B(1;7;6)$, $C(5;3;2)$.(рис. 2.5)

Решение. Точка D делит отрезок BC пополам, тогда

$$x_D=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{1+5}{2}=3,\ y_D=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{7+3}{2}=5,$$

$z_D=\dfrac{z_B+z_C}{2}=\dfrac{6+2}{2}=4$. Следовательно, $D(3;5;4)$. Согласно формуле (2.3)

$$d=\left|\overline{M_1M_2}\right|=\sqrt{(x_D-x_A)^2+(y_D-y_A)^2+(z_D-z_A)^2}=$$
$$=\sqrt{(3-2)^2+(5-1)^2+(4-4)^2}=\sqrt{17}.$$

Ответ: $\sqrt{17}$.

ПРИМЕР. Вектор $\vec{a}=\overline{AB}$ задан координатами своих концов: $A(2;1;-4)$ и $B(1;3;2)$. Найти проекции вектора $\vec{a}=\overline{AB}$ на координатные оси и его направляющие косинусы.

Решение. Находим проекции вектора $\vec{a}=\overline{AB}$ на координатные оси: $a_x=x_B-x_A=1-2=-1$, $a_y=y_B-y_A=3-1=2$, $a_z=z_B-z_A==2-(-4)=6$, а модуль вектора в этом случае определяется по формуле (2.3) $|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+6^2}=\sqrt{41}$. Направляющие косинусы вычислим, используя формулы (2.2) $\cos\alpha=\dfrac{-1}{\sqrt{41}}$; $\cos\beta=\dfrac{2}{\sqrt{41}}$; $\cos\gamma=\dfrac{6}{\sqrt{41}}$.

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Скалярным произведением $\vec{a}\cdot\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними, т.е. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$, где $0\le\varphi\le\pi$.

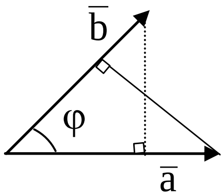


Рис.2.6

Так как $|\vec{a}|\cdot\cos\varphi=\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$, $|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$ (см. рис.2.6), то

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}. \qquad (2.6)$$

Свойства скалярного произведения:

1^0: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

2^0. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, если $\vec{a}\perp\vec{b}$ или хотя бы один из векторов есть нулевой вектор;

3^0. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$;

4^0. $(\lambda\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\cdot\vec{b})=\lambda\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$ для $\forall\lambda\in R$;

5^0. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

Если $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2. \qquad (2.7)$$

Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$. (2.8)

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (2.9)$$

ПРИМЕР. Даны вершины $A(5;6;5)$, $B(2;6;1)$, $C(9;6;2)$ треугольника ABC. Определить внутренний угол треугольника при вершине B.

Решение. Построим вектора $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$ выходящие из вершины B треугольника ABC. Имеем $\overline{BA} = \{3;0;4\}$, $\overline{BC} = \{7;0;1\}$. Тогда по формуле (2.9), получим

$$\cos\left(\overline{BA}, \overline{BC}\right) = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{\left|\overline{BA}\right| \cdot \left|\overline{BC}\right|} = \frac{3 \cdot 7 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} \cdot \sqrt{7^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \Rightarrow$$

внутренний угол треугольника при вершине B равен $\dfrac{\pi}{4}$.

ПРИМЕР. Вычислить работу по перемещению материальной точки вдоль отрезка BC из точки $B(2;4;3)$ в точку $C(6;5;8)$ под действием постоянной по величине и направлению силы $\vec{F} = \{3;4;-2\}$.

Решение. Так как работа A вычисляется по формуле $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$ и $\vec{S} = \overrightarrow{BC} = \{4;1;5\}$, то $A = \vec{F} \cdot \vec{S} = 3 \cdot 4 + 1 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 6$.

Ответ: $A = 6$.

ПРИМЕР. Даны три вектора $\vec{a} = \{2;-1;3\}$, $\vec{b} = \{1;-3;2\}$, $\vec{c} = \{3;2;-4\}$. Найти вектор $\vec{x} = \{x_1; x_2; x_3\}$, удовлетворяющий условиям: $\vec{a} \cdot \vec{x} = 9$, $\vec{b} \cdot \vec{x} = 3$ и $\vec{c} \perp \vec{x}$.

Решение. Из условия $\perp$ векторов (2.8) и формулы (2.7) имеем

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{x} = 9, \\ \vec{b} \cdot \vec{x} = 3, \\ \vec{c} \perp \vec{x}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot x_1 - x_2 + 3 \cdot x_3 = 9, \\ x_1 - 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 3, \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений методом Гаусса, получим

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 11 & -10 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -8 & -15 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -8 & -15 \\ 0 & 0 & 39 & 78 \end{array}\right)$$. Тогда, получим систему $\begin{cases} x_1 - 3\cdot x_2 + 2\cdot x_3 = 3, \\ x_2 - 8\cdot x_3 = -15, \\ 39\cdot x_3 = 78. \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = 3\cdot x_2 - 2\cdot x_3 + 3, \\ x_2 = 8\cdot x_3 - 15, \\ x_3 = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Ответ: $\vec{x} = \{2;1;2\}$.

ПРИМЕР. Вычислить проекцию вектора $\vec{a} = \{5;2;5\}$ на направление вектора $\vec{b} = \{2;-1;2\}$.

Решение**.** Согласно формуле (2.6) $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$. Воспользуемся (2.7) и (2.1):

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 5\cdot 2 + 2\cdot(-1) + 5\cdot 2 = 10 - 2 + 10 = 18$, $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$

Следовательно, $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \dfrac{18}{3} = 6$.

Ответ: $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = 6$.

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

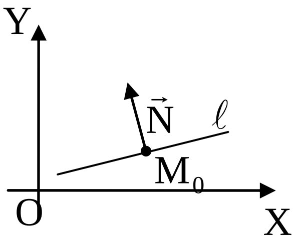


Рис. 2.2

1) Уравнение прямой ℓ по точке $M_0(x_0;y_0)$ и нормальному к прямой вектору $\vec{N}=\{A;B\}$ имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \qquad (2.3)$$

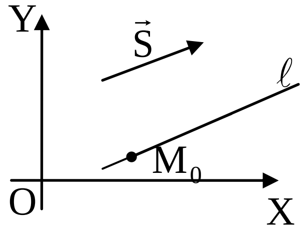


Рис.2.3

2) Уравнение прямой ℓ по точке $M_0(x_0;y_0)$ и направляющему (параллельному прямой) вектору $\vec{S}=\{m;n\}$ имеет вид

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}. \qquad (2.4)$$

3) Система уравнений
$$\begin{cases} x=x_0+m\cdot t, \\ y=y_0+n\cdot t, \end{cases} \qquad (2.5)$$

где точка $M_0(x_0;y_0)\in\ell$, $\vec{S}=\{m;n\}$ - направляющий вектор прямой, $t\in R$ параметр, называется параметрическими уравнениями прямой.

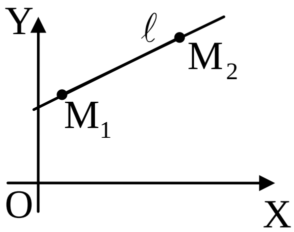


Рис.2.4

4) Уравнение прямой ℓ проходящей через две заданные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$, записывается в виде

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (2.6)$$

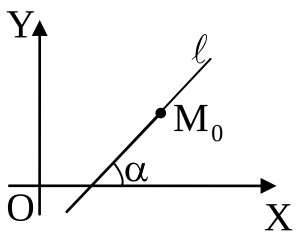


Рис.2.5

5) Уравнение прямой ℓ по точке $M_0(x_0;y_0)$ и угловому коэффициенту $k=\operatorname{tg}\alpha$ имеет вид

$$y-y_0=k\cdot(x-x_0). \qquad (2.7)$$

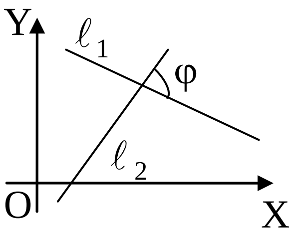


Рис.2.6

6) Если известны угловые коэффициенты k_1 , k_2 пересекающихся прямых ℓ_1 , ℓ_2 , то угол φ между прямыми (при $\varphi \neq \pi/2$) вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|. \qquad (2.8)$$

в частности, если $\ell_1 \| \ell_2$, то $k_1 = k_2$,

если же $\ell_1 \perp \ell_2$, то

$$k_1 \cdot k_2 = -1. \qquad (2.9)$$

Выражения (2.9) называются <u>условиями параллельности и перпендикулярности</u> прямых.

7) Уравнение $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$, где $A, B, C \in R$, но A и B одновременно не равны нулю, называется <u>общим уравнением прямой</u>. Вектор $\vec{N} = \{A; B\}$ является нормальным вектором прямой. Если даны две прямые ℓ_1, ℓ_2 своими общими уравнениями $A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0$ и $A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0$, то условие параллельности (2.9) прямых запишется в виде $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$, а условие перпендикулярности (2.9) – в виде $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$. (2.10)

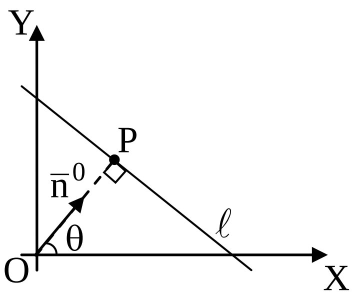


Рис.2.7

8) Если $\vec{n}^0 = \{\cos\theta, \sin\theta\}$ есть единичный вектор перпендикулярный прямой ℓ (рис.2.7), а число $p = |\overline{OP}|$ равно расстоянию от начала координат до прямой ℓ, то уравнение прямой запишется в виде

$$x \cdot \cos\theta + y \cdot \sin\theta - p = 0. \qquad (2.11)$$

Уравнение (2.11) называется <u>нормированным</u> уравнением прямой. Для приведения общего уравнения прямой $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ к нормированному виду достаточно умножить его на <u>нормирующий множитель</u> $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, знак которого противоположен знаку C.

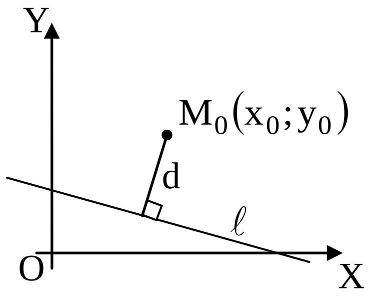


Рис.2.8

9) Расстояние d от произвольной точки $M_0(x_0;y_0)$ плоскости до прямой ℓ (рис.2.8) вычисляется по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (2.12)$$

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.1. Дана прямая $2x+3y+4=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;1)$: а) параллельно данной прямой; б) перпендикулярно к данной прямой.

Решение. а) Вычислим угловой коэффициент k_1 данной прямой. Имеем

$$2x+3y+4=0 \Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}.$$

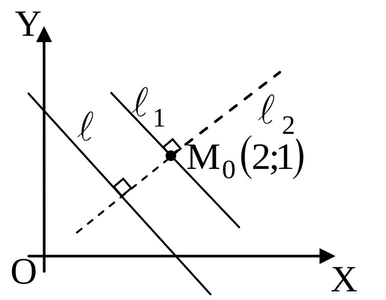


Рис. 2.9

Следовательно, $k_1=-\frac{2}{3}$. Так как $\ell_1 \| \ell_2$ (рис. 2.9), то по формуле (2.9): $k_1=k_2=-\frac{2}{3}$. Если $\ell_1 \perp \ell_2$, тогда $k_1 \cdot k_2=-1 \ \Rightarrow k_2=\frac{3}{2}$.

Точка $M_0(2;1)\in \ell_1,\ell_2$.

Следовательно, уравнения ℓ_1,ℓ_2 найдутся по формуле (2.7):

а) $\ell_1 : y-1=-\frac{2}{3}(x-2) \Leftrightarrow 2x+3y-7=0;$

б) $\ell_2 : y-1=\frac{3}{2}(x-2) \Leftrightarrow 3x-2y-4=0.$

ПРИМЕР 2.2. Даны вершины треугольника $A(1;-1)$, $B(-2;1)$, $C(3;5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B (рис. 2.10).

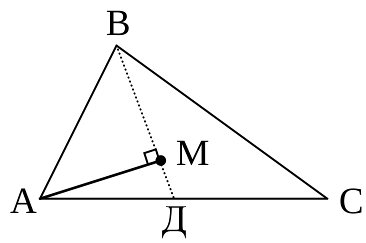


Рис.2.10

Решение. $BД$ - медиана. Так как точка $Д$ делит сторону AC пополам, то

$x_Д = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{1+3}{2} = 2$, $y_Д = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{-1+5}{2} = 2$. Найдем уравнение медианы $ВД$ как уравнение прямой, проходящей через две данные точки. По формуле (2.6) имеем

$\dfrac{x - x_B}{x_Д - x_B} = \dfrac{y - y_B}{y_Д - y_B} \Rightarrow \dfrac{x+2}{2+2} = \dfrac{y-1}{2-1} \Rightarrow y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2} \Rightarrow k_{ВД} = \dfrac{1}{4}$. Если $AM \perp ВД$, то $k_{AM} = -\dfrac{1}{k_{ВД}} = -4$. Тогда согласно формуле (2.7) уравнение высоты AM запишется в виде $y + 1 = -4(x - 1) \Leftrightarrow 4x + y - 3 = 0$.

ПРИМЕР 2.3. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x - 12y - 65 = 0$, $5x - 12y + 26 = 0$. Вычислить его площадь.

Решение. Так как коэффициенты при x и y равны между собой, то данные прямые параллельны. Точка $M_0(1; -5)$ принадлежит первой прямой, так как $5 - 12(-5) - 65 = 0$. Определим по формуле (2.12) расстояние d от точки M_0 до второй прямой. Имеем $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|5 - 12(-5) + 26|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \dfrac{91}{13} = 7$. Так как длина стороны квадрата равна 7, то $S = 49$.

ПРИМЕР 2.4. Прямая проходит через точку $(2; -3)$ и отсекает на оси ординат отрезок $b = 3$. Найти ее уравнение.

Решение. Будем искать уравнение прямой в виде $y = kx + b$. Это целесообразно сделать потому, что в задаче задан отрезок, отсекаемый прямой на оси ординат, т.е. $b = 3$. Итак, $y = kx + 3$. Следовательно, теперь осталось определить только угловой коэффициент k. По условию прямая проходит через точку $(2; -3)$. Если линия проходит через точку, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению линии. Подставим в последнее уравнение 2 вместо x и –3 вместо y. Получим уравнение для определения $k: -3 = k \cdot 2 + 3$. Решая уравнение, находим, что $k = -3$. Следовательно, искомое уравнение: $y = -3x + 3$.

ПРИМЕР 2.5. Даны вершины треугольника $A(0;0)$, $B(-6;8)$, $C(3;4)$. Определить: а) уравнение высоты CK и ее длину; б) уравнение биссектрисы AE (рис. 2.11).

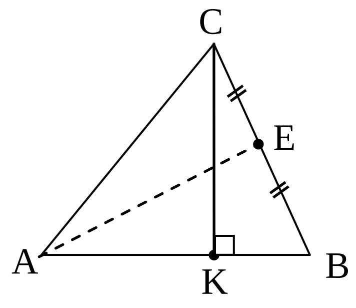


Рис.2.11

Решение. а) Чтобы написать уравнение высоты CK (рис.2.11) найдем угловой коэффициент прямой AB:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A} \Rightarrow \frac{x-0}{-6-0}=\frac{y-0}{8-0}$$

$\Rightarrow -6y=8x,\ y=-\dfrac{4}{3}x \Rightarrow k_{AB}=-\dfrac{4}{3}$ и прямая

AB имеет уравнение $4x+3y=0$.

Так как прямая CK перпендикулярна прямой AB, то $k_{CK}=-\dfrac{1}{k_{AB}}=-\dfrac{1}{-4/3}=\dfrac{3}{4}$. Тогда по формуле (2.7) уравнением CK является $y-4=\dfrac{3}{4}(x-3)\Rightarrow 4y-16=3x-9$, $3x-4y+7=0$. Длину высоты можно найти как расстояние от точки C`до прямой AB по формуле (2.12):

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|4\cdot 3+3\cdot 4|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{24}{5}.$$

б) Из свойств биссектрисы $\dfrac{|BE|}{|EC|}=\dfrac{|AB|}{|AC|}$.

$|AC|=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5$, $|AB|=\sqrt{(-6-0)^2+(8-0)^2}=10$.

Следовательно, точка E делит отрезок BC в отношении $\lambda=\dfrac{|AB|}{|AC|}=\dfrac{10}{5}=2$.

Найдем координаты точки E,

$$x_E=\frac{x_B+\lambda\cdot x_C}{1+\lambda}=\frac{-6+2\cdot 3}{1+2}=0 \text{ и } y_E=\frac{y_B+\lambda\cdot y_C}{1+\lambda}=\frac{8+2\cdot 4}{1+2}=\frac{16}{3}.$$

Итак, $E\left(0;\dfrac{16}{3}\right)$. Запишем уравнение биссектрисы AE, зная ее две точки A и E (см. формулу 2.6): $\dfrac{x-x_A}{x_E-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_E-y_A} \Rightarrow \dfrac{x-0}{0-0}=\dfrac{y-0}{16/3-0}$, $\dfrac{16}{3}\cdot x=y\cdot 0$.

Уравнение биссектрисы AE: $x=0$.

2.3. Кривые второго порядка

Геометрические образы (окружность, эллипс, гипербола, парабола) алгебраического уравнения второй степени

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

в прямоугольной декартовой системе координат называются кривыми второго порядка. Рассмотрим частные случае уравнения при $B=0$.

1^0. Множество точек плоскости XOY, равноудаленных от одной фиксированной ее точки $M_0(x_0;y_0)$, называется **окружностью.** Ее уравнение записывается в виде $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, (2.13)

где $M_0(x_0;y_0)$ есть центр окружности, R - ее радиус. Каноническое уравнение окружности записывается в виде $x^2+y^2=R^2$. (2.14)

2^0. **Эллипсом** называется множество всех точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. (2.15)

В общем случае уравнение эллипса записывается в форме

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1. \qquad (2.16)$$

3^0. **Гиперболой** называется множество всех точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний каждой из которых от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная. Канонические уравнения гиперболы с действительными осями, лежащими на осях координат OX и OY, имеют вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$. (2.17)

В общем случае уравнения гипербол записывается в форме

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \text{ и } \frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1. \qquad (2.18)$$

4^0. **Параболой** называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой. Канонические уравнения парабол с осями симметрии лежащими на осях OX и OY, записываются соответственно в форме

$y^2=2px$ и $x^2=2py$, где p - параметр параболы. (2.19)

В общем случае уравнение парабол имеют вид

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0) \text{ и } (x-x_0)^2=2p(y-y_0). \qquad (2.20)$$

Заметим, что с помощью формул параллельного переноса координат $x-x_0=x^*$, $y-y_0=y^*$ уравнения кривых (2.13), (2.16), (2.18), (2.20) приводятся к каноническим их формам.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.6. Найти координаты центра C и радиус R окружности

$$x^2+y^2-2x+4y-20=0.$$

Решение. Дополняя до полного квадрата слагаемые, содержащие переменные x и y, получим $x^2-2x+1+y^2+4y+4-20-1-4=0$ $\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=5^2$. Следовательно, $C(1;-2)$, $R=5$.

ПРИМЕР 2.7. Дан эллипс $9x^2+25y^2=225$. Найти: а) его полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения директрис.

Решение. Разделив все члены уравнения на 225, приведем уравнение эллипса к каноническому виду: $\frac{9x^2}{225}+\frac{25y^2}{225}=1$, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$. Следовательно, большая полуось эллипса $a=5$, малая полуось $b=3$. Так как фокусы эллипса расположены в точках $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$, где $c^2=a^2-b^2$, то $c^2=25-9=16 \Leftrightarrow c=4$. Тогда $F_1(4;0)$, $F_2(-4;0)$. Эксцентриситет эллипса вычисляется по формуле $\varepsilon=c/a$. Тогда $\varepsilon=4/5$. Директрисы эллипса определяются уравнениями $x=\pm a/\varepsilon$ при $a>b$ и уравнениями $y=\pm b/\varepsilon$ при $b>a$. Так как $5>3$, то директрисами являются прямые $x=\pm\frac{5}{4/5}$ или $x=\pm\frac{25}{4}$.

ПРИМЕР 2.8. Дана гипербола $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$. Найти координаты ее центра C, полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и уравнения директрис.

Решение. Методом дополнения до полного квадрата приведем уравнение гиперболы к виду (2.18). Имеем $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$ $\Leftrightarrow 9\cdot(x^2+10x+25-25)-16\cdot(y^2-2y+1-1)-367=0 \Leftrightarrow$

$$9(x+5)^2-225-16(y-1)^2+16-367=0 \Leftrightarrow 9(x+5)^2-16(y-1)^2=576$$

$\Leftrightarrow \frac{(x+5)^2}{8^2}-\frac{(y-1)^2}{6^2}=1$. Следовательно, действительная полуось, расположенная на прямой, параллельной оси OX, равна $a=8$. Мнимая полуось $b=3$. Центр гиперболы находится в точке $M_0(-5;1)$. Фокусы гиперболы F_1,F_2 удалены на расстояние, равное C, где $c^2=a^2+b^2$, тогда $c^2=64+36=100$ $\Leftrightarrow c=10$. Итак, $F_1(-15;1)$, $F_2(5;1)$. Эксцентриситет $\varepsilon=c/a$. Тогда $\varepsilon=5/4$.

Уравнения асимптоты для гипербола со смещенным центром записывается в виде: $y-y_0=\pm\frac{b}{a}(x-x_0)$. Следовательно, $y-1=\pm\frac{6}{8}(x+5)\Leftrightarrow 4y-4=\pm3(x+5)$. Уравнение директрис найдем по формуле $x-x_0=\pm a/\varepsilon$ при $a>b$. Следовательно, $x+5=\pm\frac{8}{5/4}$ $\Leftrightarrow x+5=\pm\frac{32}{5}$. Отсюда $x=\frac{7}{5}$ и $x=-\frac{57}{5}$.

ПРИМЕР 2.9. Дана парабола $y=4x^2-8x+7$. Найти координаты ее вершины A, фокуса F и величину параметра p.

Решение. Дополняя до полного квадрата, получим $y=4\cdot\left(x^2-2x+1-1\right)+7$, $y=4(x-1)^2+3\Leftrightarrow y-3=4(x-1)^2$. Следовательно, согласно формуле (2.20), ее вершина находится в т. $A(1;3)$. Так как $2p=4$, то параметр $p=2$. Фокус F параболы удален от ее вершины на расстояние $\frac{p}{2}=1$. Данная парабола симметрична относительно прямой, параллельной оси OY. Ее фокус расположен в т. $F(1;4)$.

ПРИМЕР 2.10. Определить, какая линия дана уравнением $3\rho(1-\cos\varphi)=1$ в полярных координатах.

Решение. Так как $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, то данное уравнение записывается в виде $3\sqrt{x^2+y^2}\cdot\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=1\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+y^2}=1+3x$ $\Rightarrow 9\left(x^2+y^2\right)=9x^2+6x+1\Rightarrow 9y^2=6x+1\Rightarrow y^2=\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right)$. Сравнивая это уравнение с уравнением (2.20), найдем, что кривая является параболой с осью симметрии OX, с вершиной в т. $\left(-\frac{1}{3};0\right)$, параметр которой $p=\frac{1}{3}$.

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ФУНКЦИЯ. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

Пусть даны два множества X и Y. Если каждому значению x из X ставится в соответствие единственное значение y из Y, то говорят, что задана зависимость переменной y от переменной x, которая называется функцией. Функцию обозначают $y = f(x)$. Переменную x называют ***аргументом***, y – ***значением функции***.

Множество X называется областью определения данной функции и обозначается $D(f)$, а множество всех чисел y, соответствующих различным числам $x \in X$, – областью значений этой функции и обозначается $E(f)$.

Если числу x_0 из области определения функции $f(x)$ соответствует некоторое число y_0 из области значений, то y_0 называется значением функции в точке x_0.

Функция может быть задана табличным, аналитическим, графическим способами.

ПРИМЕР 2.1. Найти область определения функций: а) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^3-1}$, б) $f(x) = \ln(x+3)$, в) $3^{\frac{1}{x}} + \arccos\dfrac{x+1}{2}$.

Решение. а) Дробь $\dfrac{2x-1}{x^3-1}$ определена, если ее знаменатель не равен нулю. Поэтому область определения находится из условия $x^3 - 1 \neq 0$, т.е. $x \neq 1$. Таким образом, $D(f) = (-\infty;1) \cup (1,\infty)$.

б) Выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительным, поэтому функция $\ln(x+3)$ определена в том и только в том случае, когда $x + 3 > 0$, то есть $x > -3$. Значит, $D(f) = (-3;\infty)$.

в) Функция a^x, $a > 0$ определена при всех действительных значениях x, при которых имеет смысл выражение $\dfrac{1}{x}$, то есть при $x \neq 0$.

Далее область определения второго слагаемого находим из двойного неравенства $-1 \leq \dfrac{x+1}{2} \leq 1$. Отсюда $-2 \leq x+1 \leq 2$, то есть $-3 \leq x \leq 1$. Область определения функции $f(x)$ есть пересечение областей определения обоих слагаемых, откуда $D(f)=[-3;0)\cup(0;1]$.

ПРИМЕР 2.2. Найти множества значений функций:

а) $f(x)=x^2+2x+5$;

б) $f(x)=3^{x^2}$;

в) $f(x)=2-3\cos 2x$.

Решение. а) так как $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$, а $(x+1)^2\geq 0$ для всех значений x, то $f(x)\geq 4$ для всех x. Поскольку к тому же функция $(x+1)^2$ принимает все значения от 0 до ∞, то $E(f)=[4;\infty)$.

б) $E(x^2)=[0;\infty)$, поэтому множество значений функции 3^{x^2} совпадает с множеством значений функции 3^x при $x\geq 0$. Отсюда $E(f)=[1;\infty)$.

в) $E(\cos 2x)=[-1;1]$, откуда $E(-3\cos 2x)=[-3;3]$. Так как $f(x)=-3\cos 2x+2$, то $E(f)=[-1;5]$.

Графиком функции в декартовой прямоугольной системе координат называется геометрическое место точек (x,y). Преимуществом графического способа является наглядность.

Аналитический способ задания функции – задание зависимости с помощью формулы. Например, $y=3x-1$.

Функция называется ***четной***, если для любого $x\in X$, $(-x)\in X$ и $f(-x)=f(x)$.

Например, $y=x^2$; так как $y(-x)=(-x)^2=x^2=y(x)$. График четной функции симметричен относительно оси $0Y$.

Функция называется ***нечетной***, если для любого $x\in X$, $(-x)\in X$ и $f(-x)=-f(x)$.

Например, $y=x^3$, так как $y(-x)=(-x)^3=-x^3=-y(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Для четной или нечетной функции достаточно построить только часть функции справа от оси $0Y$, а затем перенести по симметрии.

ПРИМЕР 2.3. Какие из следующих функций четные, какие нечетные, а какие – общего вида:

а) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+4}$; б) $f(x)=x^2-3|x|$; в) $f(x)=2^x-72^{-x}$;

г) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$.

Решение. а) $D(f)=(-\infty;\infty)$, область определения функции симметрична относительно начала координат. Кроме того,

$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2+4}=-\frac{x^3}{x^2+4}=-f(x)$, то есть данная функция нечетная.

б) $D(f)=(-\infty;\infty)$, $f(-x)=(-x)^2-3|-x|=x^2-3|x|=f(x)$.

Следовательно, функция четная.

в) $D(f)=(-\infty;\infty)$ и $f(-x)=2^{-x}-7\cdot 2^{x}\neq\pm f(x)$, то есть данная функция общего вида.

г) $D(f)=(-1;1)$, то есть область определения симметрична относительно нуля. К тому же $f(-x)=\ln\frac{1-x}{1+x}=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=-f(x)$, то есть функция нечетная.

Функция $y=f(x)$ называется ***периодической***, если существует такое число T, что если $x\in X$, то $(x+T)\in X$ и $f(x+T)=f(x)$. Наименьшее положительное из таких чисел T называется ***периодом функции*** $y=f(x)$.

Например, $y=\sin x$. $\sin(x+2\pi)=\sin(x)=\sin(x+4\pi)$. $T=2\pi$.

ПРИМЕР 2.4. Определить, является ли данная функция периодической, и найти ее наименьший положительный период, если он существует:

а) $f(x)=\sin 3x$; б) $f(x)=\cos^2 4x$; в) $f(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{5}$;

г) $f(x)=\sin 2x+\cos 3x$; д) $f(x)=x^2$.

Решение: а) Наименьшим положительным периодом функции $\sin x$ является число 2π, покажем, что наименьший положительный период $\sin 3x$ – число $\frac{2\pi}{3}$.

Действительно, $\sin 3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin(3x+2\pi)=\sin 3x$, то есть $T=\frac{2\pi}{3}$ – период данной функции. С другой стороны, если $T_1>0$ – какой-либо другой период этой функции, то $\sin 4(x+T_1)=\sin 4x$ для всех x, то есть

$\sin(4x + 4T_1) = \sin 4x,\ \ x \in R$. Отсюда следует, что $4T_1$ – период функции $\sin t$, где $t = 4x$, и, значит, $4T_1 \geq 2\pi$, то есть $T_1 \geq \dfrac{\pi}{2}$.

Таким образом, $T = \dfrac{\pi}{2}$ – наименьший положительный период функции $\sin 4x$.

Аналогично можно показать, что наименьший положительный период функций $\sin(kx + b)$ и $\cos(kx + b)$ $(k \neq 0)$ – это число $\dfrac{2\pi}{k}$.

б) Поскольку $\cos^2 4x = \dfrac{1 + \cos 8x}{2}$, то период данной функции совпадает с периодом функции $\cos 8x$. Наименьший положительный период функции $\cos 8x$ равен $\dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$. Таким образом, наименьший положительный период функции равен $\dfrac{\pi}{4}$.

в) Наименьший положительный период $\operatorname{tg} x$ равен π, поэтому наименьший положительный период функции $\operatorname{tg}\dfrac{x}{5}$ будет равен $\dfrac{\pi}{1/5} = 5\pi$.

г) Наименьшие положительные периоды функций $\sin 2x$ и $\cos 3x$ соответственно равны $\dfrac{2\pi}{2}$, то есть π и $\dfrac{2\pi}{3}$. Нетрудно показать, что наименьший положительный период суммы этих функций будет равен наименьшему общему кратному их периодов, то есть числу 2π.

д) При $x > 0$ функция определена и возрастает, поэтому не может быть периодической. Значит, и на интервале $(-\infty; \infty)$ функция не является периодической.

Монотонная, обратная и ограниченая функция

Функция $f(x)$ называется ***неубывающей (невозрастающей)*** на множестве $X \subseteq D(f)$, если для любых значений $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) \geq f(x_2)$).

Функция $f(x)$ называется ***монотонной,*** если она невозрастающая или неубывающая.

Функция $f(x)$ называется ***возрастающей (убывающей)*** на множестве $X \subseteq D(f)$, если для любых значений $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) > f(x_2)$).

Функция $f(x)$ называется ***строго монотонной***, если она возрастающая или убывающая.

Пусть для любых различных значений $x_1, x_2 \in D(f)$ справедливо, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда для любого $y \in E(f)$ найдется только одно значение $x = g(y) \in D(f)$, такое, что $y = f(x)$. Функция $x = g(x)$, определенная на $E(f)$, называется ***обратной*** для функции $f(x)$.

Отметим, что $E(g) = D(f)$.

Если функция $f(x)$ имеет обратную функцию, то каждая горизонтальная прямая $y = c$ пересекает ее график не более чем в одной точке.

Пусть функция $x = g(y)$ (иногда ее обозначают $x = f^{-1}(y)$) – обратная для функции $y = f(x)$. Если обозначить аргумент этой функции через x, то ее можно записать в виде $y = g(x)$. Тогда

$$g(f(x)) = x \text{ для всех } x \in D(f),$$
$$f(g(x)) = x \text{ для всех } x \in E(f).$$

Иными словами, если функция $g(x)$– обратная для функции $f(x)$, то функция $f(x)$– обратная для функции $g(x)$; поэтому обе эти функции называют еще ***взаимообратными.***

Пусть функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на отрезке $[a;b]$. Тогда на отрезке $[f(a);f(b)]$ соответственно, $[f(b);f(a)]$ определена возрастающая (убывающая) функция $g(x)$, обратная для функции $f(x)$.

График функции $g(x)$, обратной для функции $f(x)$, симметричен графику $f(x)$ относительно прямой $y = x$.

Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной сверху (снизу) на множестве*** $X \subset D(f)$, если существует такое число M, что

$$f(x) \leq M \ \left(f(x) \geq M \text{ для всех } x \in X \right).$$

Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной на множестве*** $X \subset D(f)$, если существует такое число $M > 0$, что

$$|f(x)| \leq M \text{ для всех } x \in X.$$

Сложная функция. Элементарные функции

Пусть область значений функции $y=f(x)$ содержится в области определения функции $g(y)$. Тогда функция

$$z=g(f(x)),\ \ x\in D(f)$$

называется ***сложной функцией.***

Основными (или ***простейшими***) ***элементарными функциями*** называются: ***постоянная функция*** $y=c$; ***степенная функция*** $y=x^{\alpha},\ \alpha\in R$; ***показательная функция*** $y=a^{x},\ a>0$; ***логарифмическая функция*** $y=\log_a x,\ \ a>0,\ a\neq 1$; ***тригонометрические функции*** $y=\sin x,\ \ y=\cos x,$ $y=\operatorname{tg} x,\ \ y=\operatorname{ctg} x,\ \ y=\sec x$ $\left(\text{где}\ \ \sec x=\dfrac{1}{\cos x}\right)$, $y=\operatorname{cosec} x$ $\left(\text{где}\operatorname{cosec} x=\dfrac{1}{\sin x}\right)$, ***обратные тригонометрические функции*** $y=\arcsin x,$ $y=\arccos x,\ \ y=\operatorname{arctg} x,\ \ y=\operatorname{arcctg} x$.

Элементарными функциями называются функции, которые получаются из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций $(+,\ -,\ \cdot,\ :)$ композиций (т.е. образования сложных функций).

ПРИМЕР 2.5. Найти сложные функции $f(g(x))$ и $g(f(x))$, где

а) $f(x)=\sqrt{x},\ \ g(x)=x^2;$

б) $f(x)=x^3,\ \ g(x)=2x-1.$

<u>Решение.</u> а) По определению сложной функции имеем $f(g(x))=\sqrt{x^2}=|x|$, $g(f(x))=\left(\sqrt{x}\right)^2=x,\ \ x\geq 0$.

б) Аналогично, $f(g(x))=(2x-1)^3,\ \ g(f(x))=2x^3-1$.

ПРИМЕР 2.6. Найти обратную функцию для данной:

а) $y=x-1;$

б) $y=\dfrac{2}{x+3};$

в) $y=\sqrt{x}$.

<u>Решение.</u> а) Функция $y=x-1$ возрастает на промежутке $(-\infty;\infty)$, а значит, для любых $x_1\neq x_2$ имеем $f(x_1)\neq f(x_2)$. Отсюда следует, что на $(-\infty;+\infty)$ эта функция имеет обратную. Для того, чтобы найти эту обратную функцию, разрешим уравнение $y=x-1$ относительно x, откуда $x=y+1$.

Записывая полученную формулу в традиционном виде (т.е. меняя x и y местами), найдем окончательно: $y = x + 1 -$ обратная функция к исходной.

б) Функция $\dfrac{2}{x+3}$ убывает на множестве $(-\infty;-3) \cup (-3;\infty)$, являющейся областью определения. Поэтому у нее есть обратная, которую найдем, разрешая уравнение $y = \dfrac{2}{x+3} - 3$ обратная к исходной.

в) Функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на промежутке $[0;\infty)$ и, стало быть, имеет обратную.

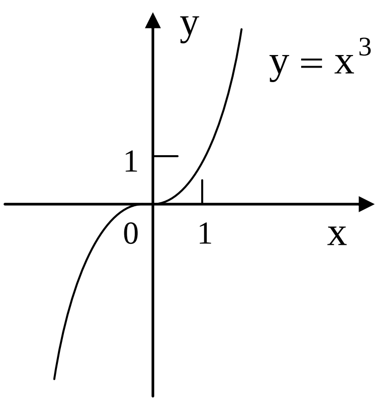
Найдем обратную, рассуждая, как в пунктах а), б), $y = x^2$, $x \in [0;\infty)$.

Область определения этой функции совпадает с областью значений исходной функции $y = \sqrt{x}$, то есть с промежутком $[0;\infty)$.

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

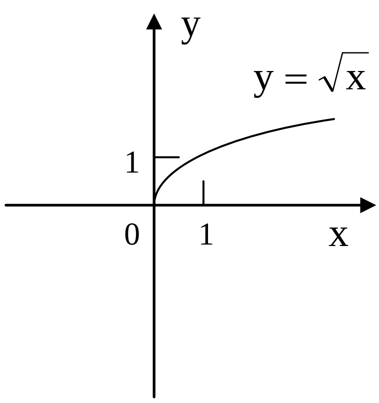
Степенная функция $y = x^m$

В зависимости от m графики этой функции различны, но все они проходят через начало координат



$y = x^{2n+1}$ $(n \in N)$

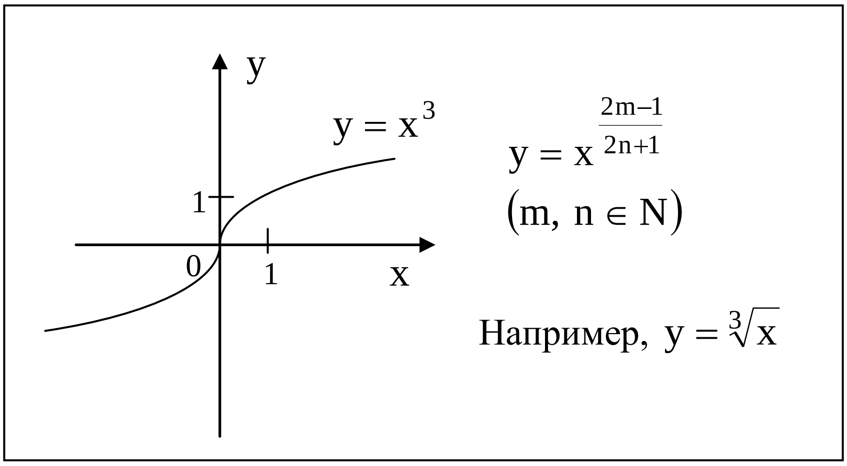
Например, $y = x^3$

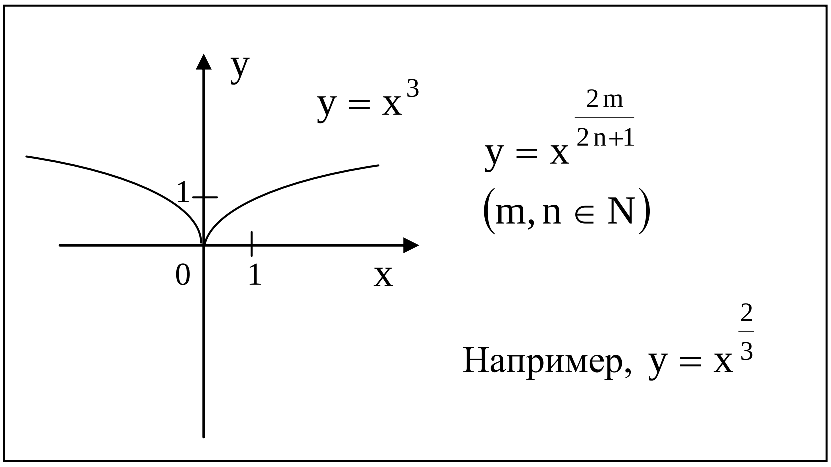


$y = x^{\frac{1}{2n}}$ $(n \in N)$

$y = \sqrt[2n]{x}$

Например, $y = \sqrt{x}$





Показательная функция $\mathbf{y = a^x}$ $\mathbf{(a > 0,\ a \neq 1)}$

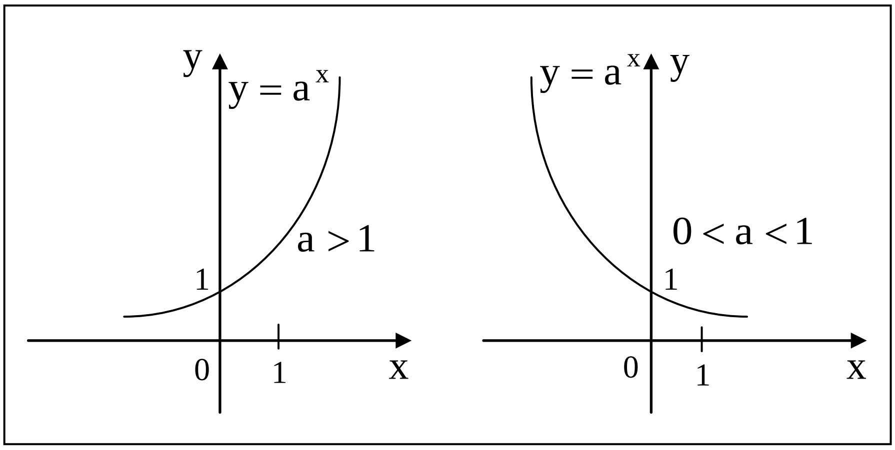
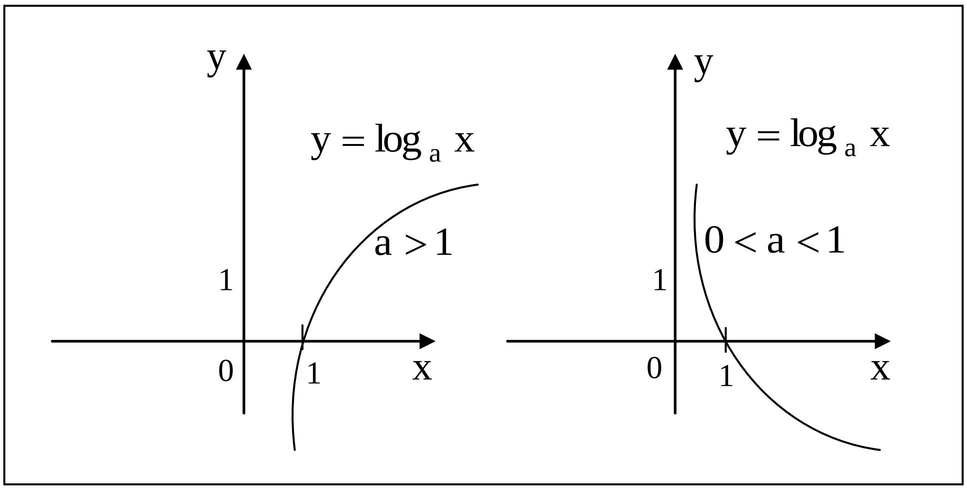


График показательной функции выше оси $0X$ и проходит через точку $(0;1)$.

Логарифмическая функция $y = \log_a x \quad (a > 0;\ a \neq 1)$



Логарифмическая кривая расположена справа от оси $0Y$ и проходит через точку $(1;0)$.

Синусоида – график функции $y = \sin x$

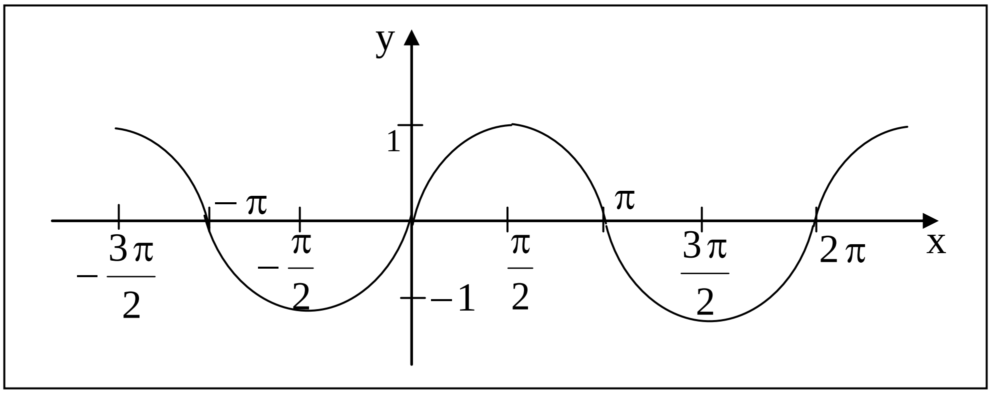
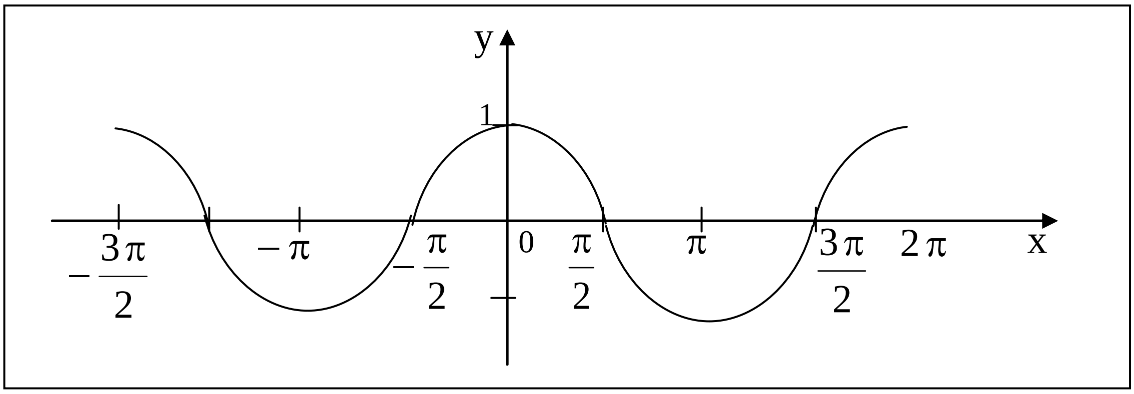


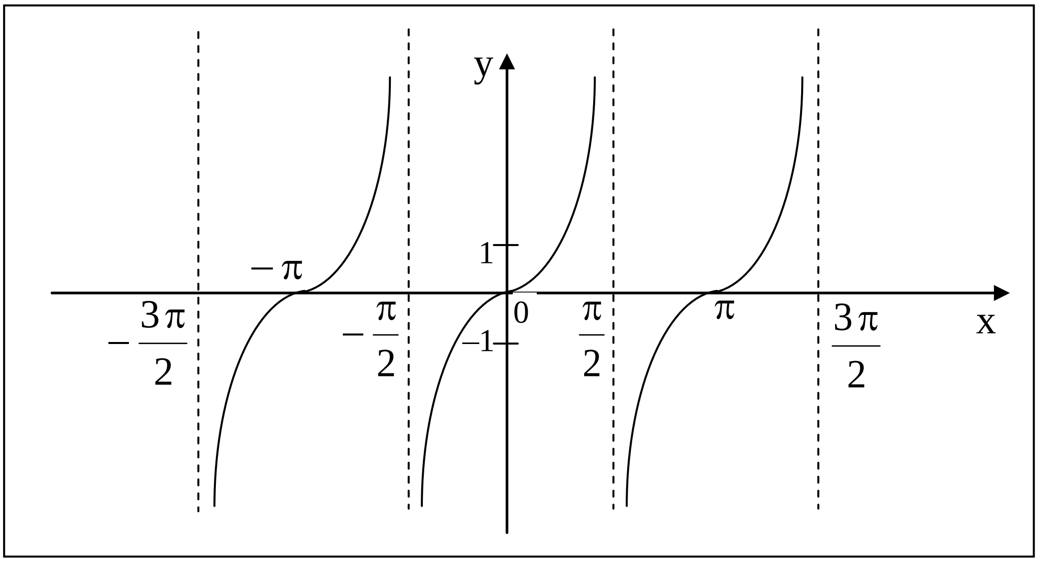
График проходит через точки $(\pi n; 0)$; $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ 1\right)$; $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ -1\right)$; $(n \in Z)$.

Косинусоида – график функции $y = \cos x$



Характерные точки графика $(2\pi n;1)$; $(\pi+2\pi n;-1)$; $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;0\right)$, где $n\in Z$.

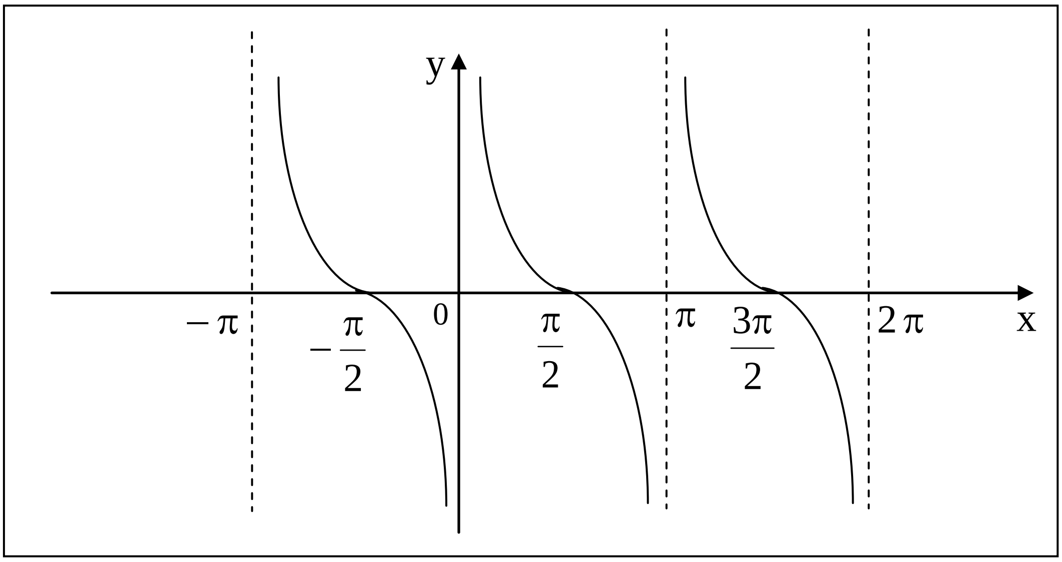
Тангенсоида – график функции $y=\operatorname{tg}x$



Точки разрыва $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$.

Характерные точки: $(\pi n;0)$; $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;1\right)$; $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n;-1\right)$, где $n\in Z$.

Котангенсоида – график функции $y=\operatorname{ctg}x$.



Точки разрыва: $x = \pi n$.

Характерные точки: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0\right)$; $\left(\frac{\pi}{4} + \pi n; 1\right)$; $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; -1\right)$, где $n \in Z$.

График $y = \arcsin x$

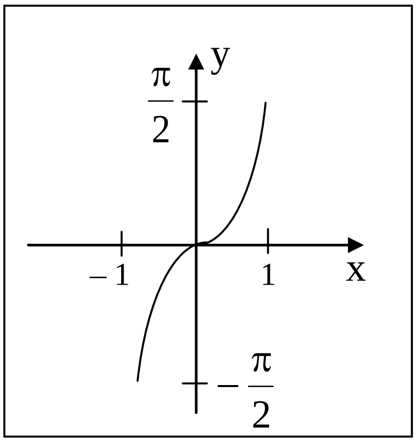


График $y = \arccos x$

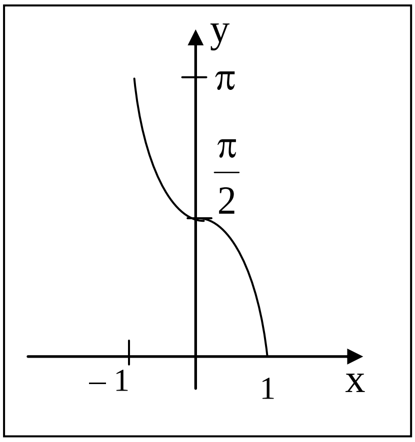
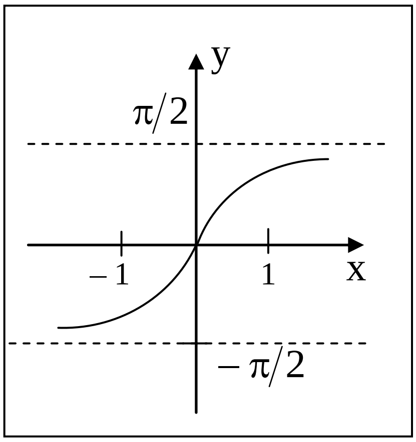


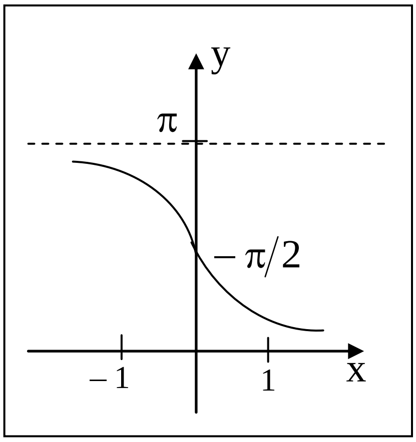
График $y = \operatorname{arctg} x$.



Прямые $y = \frac{\pi}{2}$ и $y = -\frac{\pi}{2}$ являются асимптотами.

Характерные точки $(0; 0)$; $\left(1; \frac{\pi}{4}\right)$; $\left(-1; -\frac{\pi}{4}\right)$.

График $\mathbf{y = arcctg\,x}$.



Прямые $y = 0$ и $y = \pi$ являются асимптотами.

Характерные точки $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$; $\left(1; \dfrac{\pi}{4}\right)$; $\left(-1; \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Гиперболический синус $y = \operatorname{sh} x$ $\left(\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$

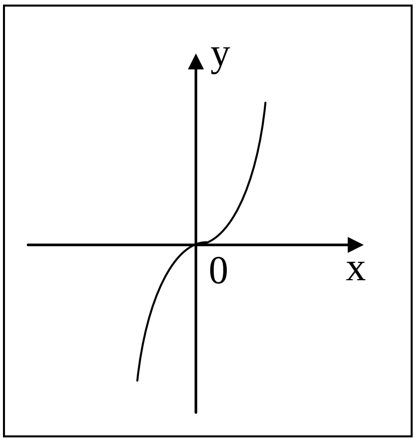


График проходит через начало координат.

Гиперболический косинус $y = \operatorname{ch} x$ $\left(\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$

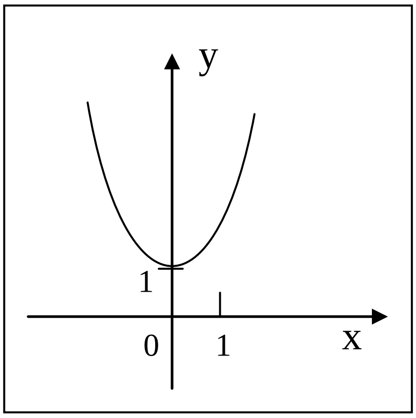
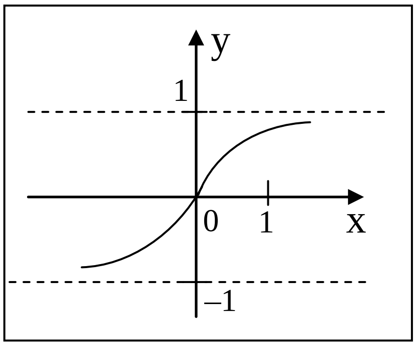


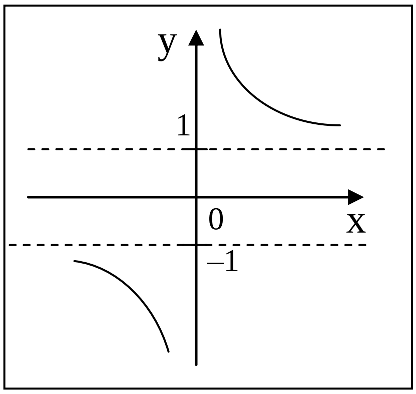
График проходит через точку (0; 1).

Гиперболический тангенс $y = \operatorname{th} x \quad \left(\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)$



Прямые $y = -1$ и $y = 1$ являются асимптотами графика. График проходит через начало координат.

Гиперболический котангенс $y = \operatorname{cth} x \quad \left(\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \right)$



Прямые $y = 1$, $y = -1$ и $x = 0$ являются асимптотами.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГРАФИКОВ

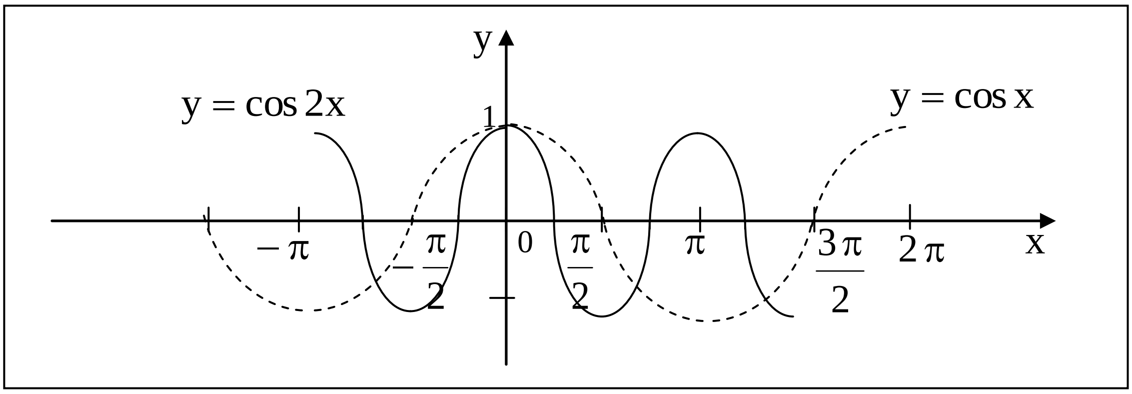
Построение графика $\mathbf{y = f(k\,x)}$, $\quad \mathbf{k \neq 1, k > 0}$.

Если $k > 1$, то график сжимается в k раз вдоль оси $0X$.

Если $0 < k < 1$, то абсциссы всех точек графика увеличиваются в $\dfrac{1}{k}$ раз (график растягивается).

ПРИМЕР 2.7. Построить график функции $y = \cos 2x$.

<u>Решение.</u> График получается из графика $y = \cos x$ путем сжатия в 2 раза вдоль оси $0X$. Точка $\left(\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$ перейдет в точку $\left(\dfrac{\pi}{4}; 0\right)$; $(\pi; -1) \to \left(\dfrac{\pi}{2}; -1\right)$; $(2\pi; 1) \to (\pi; 1)$ и т.д.


y
y = cos 2x
y = cos x
1
−π
−π/2
0
π/2
π
3π/2
2π
x

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b). Разность $\Delta x = x - x_0$ называется ***приращением аргумента в точке*** $x_0 \in (a, b)$. Разность $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется ***приращением функции в точке*** x_0.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$, то он называется ***производной функции*** $f(x)$ ***в точке*** x_0.

Отыскание производной называется ***дифференцированием функции***.

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

1. $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$	2. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$
3. $\left(e^x\right)' = e^x$	4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$
5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	6. $(\sin x)' = \cos x$
7. $(\cos x)' = -\sin x$	8. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$	10. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
11. $(\operatorname{arcctg} x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$	12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	14. $(\operatorname{sh} x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{ch} x$
15. $(\operatorname{ch} x)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \operatorname{sh} x$	16. $(\operatorname{th} x)' = \left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
17. $(\operatorname{cth} x)' = \left(\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	

Основные правила дифференцирования

Пусть $C = \mathrm{const}$; $U = U(x)$; $V = V(x)$ – функции, имеющие производные. Тогда

1. $(C)' = 0$	2. $(CU)' = C\,U'$
3. $(U \pm V)' = U' \pm V'$	4. $(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$
5. $\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V - U\,V'}{V^2}$	

6. Если $y = f(U)$ и $U = U(x)$ – дифференцируемые функции, то сложная функция $y = f(U(x))$ также дифференцируема, причем $y'_x = y'_U \cdot U'_x$.

Исходя из определения производной, найти производные следующих функций.

ПРИМЕР 2.1. $y = \sqrt{2x-1}$.

<u>Решение.</u> Найдем приращение функции $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) =$

$= \sqrt{2(x+\Delta x)-1} - \sqrt{2x-1}$. Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{2x+2\Delta x-1} - \sqrt{2x-1}}{\Delta x}$ и

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{2x+2\Delta x-1} - \sqrt{2x-1}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{2x+2\Delta x-1} - \sqrt{2x-1}\right)\left(\sqrt{2x+2\Delta x-1} + \sqrt{2x-1}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{2x+2\Delta x-1} + \sqrt{2x-1}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\sqrt{2x+2\Delta x-1} + \sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}.$$

Таким образом $y' = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$.

ПРИМЕР 2.2. $y = -\mathrm{ctg}x - x$.

<u>Решение.</u> Найдем приращение функции $\Delta y = -\mathrm{ctg}(x+\Delta x) - (x+\Delta x) +$
$+ \mathrm{ctg}\,x + x = \mathrm{ctg}\,x - \mathrm{ctg}(x+\Delta x) - \Delta x$.

Воспользуемся формулой $\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\beta = \dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$. Тогда

$$\Delta y = \frac{\sin(x + \Delta x - x)}{\sin x \sin(x + \Delta x)} - \Delta x = \frac{\sin \Delta x}{\sin x \sin(x + \Delta x)} - \Delta x,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}{\sin x \sin(x + \Delta x)} - 1 \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}{\sin x \sin(x + \Delta x)} - 1 \right) =$$

$= \dfrac{1}{\sin^2 x} - 1$. Итак $y' = \dfrac{1}{\sin^2 x} - 1$.

ПРИМЕР 2.3. $y = x^2 - 4x + 3$.

Решение. Найдем приращение функции $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - 4(x + \Delta x) + 3 - x^2 + 4x - 3 = 2x\,\Delta x + \Delta x^2 - 4\,\Delta x$.

Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x\,\Delta x + \Delta x^2 - 4\,\Delta x}{\Delta x}$ и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\,\Delta x + \Delta x^2 - 4\,\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x - 4) = 2x - 4.$$

Следовательно $y' = 2x - 4$.

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Рассмотрим множество, состоящее из n различных элементов. Требуется выбрать из них какие-нибудь k элементов и расположить эти k элементов в каком-либо порядке. Такие упорядоченные последовательности называются ***размещениями*** из n элементов по k элементов (упорядоченные – следовательно, последовательности $\{1;2\}$ и $\{2;1\}$ - различные размещения).

Если в последовательности нет одинаковых элементов, то говорят о размещении без повторений. Их количество

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Если в последовательности допускается наличие одинаковых элементов, то говорят о размещении с повторениями. Их количество

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

Любое подмножество (неупорядоченное), состоящее из k элементов, называется ***сочетанием*** из n элементов по k элементов. Различные сочетания отличаются друг от друга только самими входящими в них элементами, порядок их следования безразличен, т.е. по условию задачи подмножества $\{1;2\}$ и $\{2;1\}$ – не различны (***со***единены).

Число сочетаний без повторений

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Число сочетаний с повторениями

$$\overline{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}.$$

Количество способов переставить n элементов в заданном множестве ***(количество перестановок)*** вычисляется по формуле

$$P_n = n!$$

При решении простейших комбинаторных задач можно использовать следующую таблицу

Число множеств, состоящих из **k** элементов,
отбираемых из множества, содержащего **n** элементов

Выбор	Неупорядоченный	Упорядоченный
Без повтора	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

С повтором	$\overline{C}_n^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$	$\overline{A}_n^k = n^k$

Рассмотрим разницу между сочетаниями, размещениями с повторениями, без повторений на следующих примерах.

Примеры решения задач

Пример 2.1 В коробке 6 шаров, пронумерованных от 1 до 6. Из коробки вынимаются друг за другом 3 шара и в этом же порядке записывают полученные цифры. Сколько трехзначных чисел можно таким образом записать?

Решение: По условию задачи подмножества $\{1;2;3\}$ и $\{3;2;1\}$ – различные. Повторов в подмножестве быть не может, так как шары не возвращаются в коробку. $n = 6;\ k = 3$.

$$A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{3!} = 120.$$

Пример 2.2. В коробке 6 шаров пронумерованных от 1 до 6. Из коробки вынимаются 3 шара и записывают число в порядке возрастания цифр. Сколько трехзначных чисел можно таким образом записать?

Решение: По условию задачи подмножества $\{1;2;3\}$ и $\{3;2;1\}$ дают число 123, т.е. не являются различными.

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{3!\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 20.$$

Пример 2.3. Условие задачи 2.1 (шары возвращаются в коробку)

Решение: $\overline{A}_6^3 = 6^3 = 216.$

Пример 2.4. Условие задачи 2.2 (шары возвращаются в коробку)

Решение: $\overline{C}_6^3 = \dfrac{(6+3-1)!}{(6-1)!3!} = \dfrac{8!}{5!3!} = \dfrac{5!\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{5!\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 7\cdot 8 = 56.$

Пример 2.5. Сколько различных перестановок можно составить из букв слова «комар»?

Решение: $P_5 = 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120.$

Пример 2.6. Сколько различных перестановок можно составить из букв слова «задача»?

Решение: Если бы все шесть букв слова были различны, то число перестановок было бы 6! Но буква «а» встречается в данном слове три раза, и перестановки только этих трех букв «а» не дают новых способов расположения букв. Поэтому число перестановок букв слова «задача» будет не 6!, а в 3! раза меньше, то есть $\frac{6!}{3!}=\frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{3!}=120$.

Пример 2.7. В мастерской имеется материал 5 цветов. Поступил заказ на пошив флагов, состоящих из трех горизонтальных полос разного цвета каждый. Сколько таких различных флагов может сшить мастерская?

Решение: Флаги отличаются друг от друга как цветом полос, так и их порядком, поэтому разных флагов можно сделать $A_5^3=\frac{5!}{(5-3)!}=60$ штук.

Пример 2.8. Сколькими способами можно распределить 5 учеников по 3 параллельным классам?

Решение: Составим вспомогательную таблицу

Номер ученика	1	2	3	4	5
Вариант класса	1	1	…	…	1
	2	2	…	…	2
	3	3	…	…	3

Таким образом, видно, что если для одного ученика существует 3 варианта выбора класса, то для всех 5 учеников существует $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=3^5$ способов распределения по классам.

Пример 2.9. На книжной полке помещается 30 томов. Сколькими способами их можно расставить, чтобы при этом первый и второй том не стояли рядом?

Решение: Произведем рассуждения “от обратного”. Тридцать томов на одной полке можно разместить 30! способами.

$$\underbrace{1;2;3;\ldots;29;30}_{30\,\text{элементов}}.$$

Если 1 и 2 тома должны стоять рядом, то число вариантов расстановки сокращается до $(29!)\cdot 2$, т.к. комбинацию из 1 и 2 тома можно считать за один том, но при этом они могут стоять как (1;2) или (2;1), т.е.

$$\underbrace{(1;2);3;\ldots;29;30}_{29\,\text{элементов}},\quad \underbrace{(2;1);3;\ldots;29;30}_{29\,\text{элементов}}.$$

Тогда искомое число способов расстановки есть

$$30!-2\cdot 29!=(30-2)\cdot 29!=28\cdot 29!$$

Пример 2.10. Чемпионат, в котором участвуют 16 команд, проводится в два круга, т.е. каждая команда дважды встречается с любой другой. Определить, какое количество встреч следует провести.

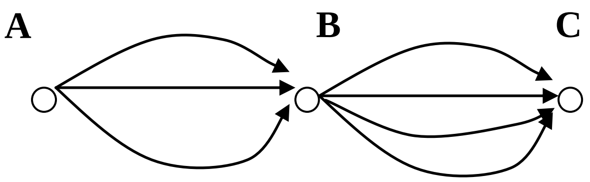
Решение: По условию задачи из 16 команд для каждой встречи требуется отобрать 2 команды. В данном случае отбор производится без повтора и порядок отбора не важен, т.е. число вариантов - C_{16}^{2}. Так как команды должны играть дважды число вариантов удваивается, т.е. $2\cdot C_{16}^{2}$.

Пример 2.11. Автомобильная мастерская имеет для окраски 10 основных цветов. Сколькими способами можно окрасить автомобиль, если смешивать от 3 до 7 основных цветов?

Решение: По условию задачи отбор цветов для окраски производится без повтора и порядок отбора не важен, т.е. число вариантов зависит лишь от числа отбираемых для окраски цветов - $C_{10}^{N}, N\in\{3;4;5;6;7\}$. Поэтому общее число вариантов есть

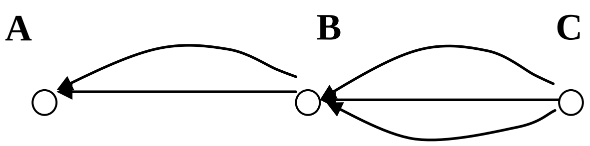
$$C_{10}^{3}+C_{10}^{4}+C_{10}^{5}+C_{10}^{6}+C_{10}^{7}=\sum_{N=3}^{7} C_{10}^{N}.$$

Пример 2.12. Турист прошел маршрут из пункта А в пункт В, из В в С и вернулся обратно. Сколько вариантов маршрута существует, если из пункта А в пункт В ведут 3 дороги, а из В в С - 4 и нельзя возвращаться той дорогой, по которой уже прошел?



Решение: Составим схему

Из рисунка видно, что вариантов маршрута из А в В существует 3, и из В в С – 4, т.е. всего маршрутов $3\cdot 4=12$.



На обратном пути вариантов маршрута из С в В существует 3 (один уже пройден), и из В в А – 2, т.е. всего возможных обратных маршрутов осталось $3 \cdot 2 = 6$. Тогда всего вариантов маршрута $12 \cdot 6 = 72$.

Пример 2.13. Двенадцати ученикам выданы два варианта контрольной работы. Сколькими способами можно посадить учеников в два ряда по 6 человек, чтобы у сидящих рядом не было одинаковых вариантов, а у сидящих друг за другом был один и тот же вариант?

Решение: Рассуждения произведем несколькими способами

I способ) Первоначально 12 учеников разбивают на 2 группы по 6 человек. Это можно сделать C_{12}^{6} способами.

Затем они могут распределиться по своим рядам согласно схеме

$$\text{I вариант} \quad \underbrace{1;2;3;4;5;6}_{6!\ \text{вариантов размещений}} \qquad \text{II вариант} \quad \underbrace{1;2;3;4;5;6}_{6!\ \text{вариантов размещений}}$$

$$\text{II вариант} \quad \underbrace{1;2;3;4;5;6}_{6!\ \text{вариантов размещений}} \quad \text{или} \quad \text{I вариант} \quad \underbrace{1;2;3;4;5;6}_{6!\ \text{вариантов размещений}} .$$

Поэтому всего способов распределения учеников будет

$$C_{12}^{6} \cdot 2 \cdot (6!)^2 = \frac{12!}{6! \cdot 6!} \cdot 2 \cdot (6!)^2 = 2 \cdot 12! .$$

II способ) Первоначально 12 учеников запускают в класс, указывая место, где каждый должен сидеть, например “второй ряд, третье место”. Так как посадочных мест также 12, то всего вариантов распределения 12!

Варианты контрольной работы могут распределиться

“I вариант – I ряд, II вариант – II ряд”

или

“II вариант – I ряд, I вариант – II ряд”,

т.е. 2 способами.

Таким образом, всего способов распределения учеников будет $2 \cdot 12!$

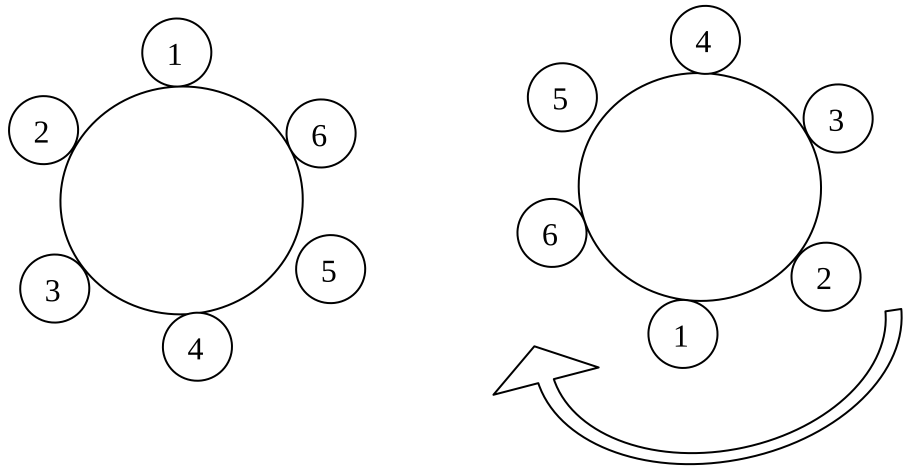
По приведенным решениям видно, что результаты решений совпадают.

Пример 2.14. Сколько существует вариантов расположения шести гостей за круглым шестиместным столом?

Решение: Эта задача имеет разные решения и, соответственно разные ответы – в зависимости от того, что понимать под **различным** расположением гостей за столом. Поэтому исследуем возможные варианты.

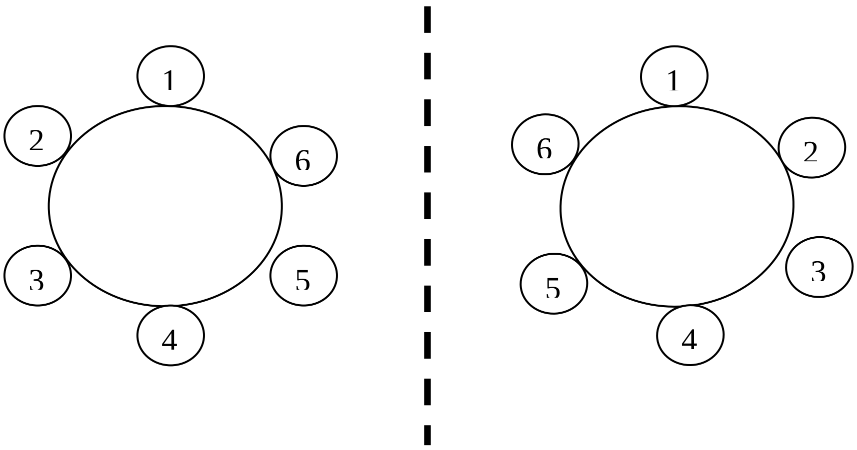
Если считать, что нам важно, кто сидит на каком стуле, то это простая задача на перестановки и, следовательно, всего вариантов $6! = 720$.

Если же важно не то, кто какой стул занял, а то, кто рядом с кем сидит, то требуется рассмотреть варианты взаимного расположения гостей. В таком случае, расположения гостей, получаемые одно из другого при повороте гостей вокруг стола, фактически являются одинаковыми (смотри рисунок).



Очевидно, что для любого расположения гостей таких одинаковых вариантов, получаемых друг из друга поворотом, - шесть. Тогда общее число вариантов уменьшается в шесть раз и их остается $5! = 120$.

В случае же, когда нас интересует только взаимное расположение гостей, то одинаковыми можно считать и такие симметричные расположения, при которых у каждого гостя остаются те же соседи за столом, только левый и правый меняются местами (смотри рисунок).



В такой постановке вопроса общее число различных вариантов расположений гостей уменьшается вдвое и составляет 60.

Отметим, что каждое решение будет считаться правильным при соответствующей постановке задачи.

Пример 2.15. Семнадцать студентов сдали экзамены по 4 предметам только на “хорошо” и “отлично”. Верно ли утверждение, что хотя бы у двух из них оценки по экзаменационным предметам совпадают?

Решение: Очевидно, что в данном случае речь идет о возможных вариантах вида

Предмет	1	2	3	4
Студент 1	4	5	4	5

Студент 2	5	5	4	5
Студент 3	5	5	4	4
…	…	…	…	…
Студент 17	4	5	4	4

Данный пример можно решить способом, изложенным в примере 1.8., и получить количество вариантов $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Приведем другой наглядный способ решения, использующий так называемое “дерево решений”, который представляет все варианты (16 штук) получения экзаменационных оценок.

Оценка

Первая 4 5

Вторая 4 5 4 5

Третья 4 5 4 5 4 5 4 5

Четвертая 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5 4 5

По “дереву решений” видно, что 16 студентов могут сдать экзамены только на “хорошо” и “отлично” так, что их результаты будут отличаться, но если студентов 17, хотя бы одно повторение обязательно будет.

При решении задач комбинаторики используются следующие правила.

Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то:

Правило суммы: выбрать либо A, либо B можно $m + n$ способами.

Правило произведения. Пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot n$ способами.

2.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ПО КЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЕ

Вероятность события A определяется формулой

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих событию A;

n – число всех возможных элементарных исходов испытания.

Предполагается, что элементарные исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу.

Примеры решения задач

Пример 2.16. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет четное число очков.

Решение: Введем события: E_1 – одно очко; E_2 - два очка; E_3 – три очка; E_4 – четыре очка; E_5 – пять очков; E_6 – шесть очков. Итак, $n = 6$.

Рассмотрим событие $A -$ выпадение четного числа очков. Данному событию благоприятствуют элементарные исходы E_2, E_4, E_6. Следовательно, $m = 3$. Тогда $P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5$.

Пример 2.17. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и помнит лишь то, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение: Событие $A -$ набраны нужные цифры.

$n -$ общее число элементарных исходов опыта равно

$$n = A_{10}^3 = \, = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

$m = 1$, так как единственная комбинация цифр благоприятствует событию A. Тогда $P(A) = \frac{1}{720}$.

Пример 2.18. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов окажутся 6 отличников.

Решение: Событие $A -$ среди отобранных студентов окажутся 6 отличников. Число n равно числу способов, которыми можно отобрать 9 студентов из 12

$$n = C_{12}^9 = \frac{12!}{9!3!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220.$$

Подсчитаем число исходов, благоприятствующих появлению события A. Из 8 отличников 6 можно отобрать C_8^6 способами. Отобрать нужно 9 человек, остальных 3 отбираем среди неотличников. Их всего 12-8=4. Троих студентов-неотличников из четырех можно отобрать C_4^3 способами. По теореме умножения комбинаторики $m = C_8^6 \cdot C_4^3$. Тогда,

$$P(A) = \frac{C_8^6 \cdot C_4^3}{C_{12}^9} = \frac{28 \cdot 4}{220} = \frac{28}{55}.$$

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература:

1. Баврин, И.И. Математический анализ: учебник и практикум для СПО / И.И. Баврин. – Люберцы: Юрайт, 2016. – 2-е изд., испр. и доп. – 327 с.
2. Беклемишева Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре /Л. А. Беклемишева, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров ; под ред. Д. В. Беклемишева. – изд. 2-е, перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 494 с.
3. Будаев, В.Д. Математический анализ. Функции одной переменной: учебник / В.Д. Будаев, М.Я. Якубсон. – СПб.: Лань, 2012. – 544 с.
4. Виленкин, Н.Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1975. – 208 с.
5. Горлач, Б.А. Математический анализ: учебное пособие / Б.А. Горлач. – СПб.: Лань, 2013. – 308 с.
6. Горлач, Б.А. Математический анализ / Б.А. Горлач. – СПб.: Лань, 2013. – 608 с.
7. Лисичкин В.Т. Математика в задачах с решениями: учеб. пособие / В. Т. Лисичкин, И. Л. Соловейчик. – изд. 3-е; стереотип. – СПб.: Лань, 2011. – 463 с.
8. Петрушко, И. М. Сборник задач по алгебре, геометрии и началам анализа :учебное пособие/И. М. Петрушко, В. И. Прохоренко, В. Ф. Сафонов. – изд. 2-е, испр. – СПб.: Лань, 2007. – 574 с.
9. Спирина, М. С. Дискретная математика: учебник для среднего профессионального образования/М. С. Спирина, П. А. Спирин. – 4-е изд., испр. – М.: Академия, 2007. – 367 с.

Дополнительная литература:

1. Бугров Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление/Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1988.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа/Г.Н. Берман. – М.: Наука, 1985.