

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЯНОЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Математики»

**Конспект лекций
по дисциплине «Математика»**

Учебное пособие

Уфа
2017

Данный конспект лекций по дисциплине «Математика» предназначен для студентов всех форм обучения и специальностей, реализуемых в УГНТУ, обучающихся по программе среднего профессионального образования – программе подготовки специалистов среднего звена.

Составитель: Исламгулова Г.Ф., ст. преподаватель, каф. математики

Рецензенты: Сахарова Л.А., канд. техн. наук, доцент каф. математики
Гарифуллин Р.Н., канд. физ-мат. наук, ст. науч. сотрудник отдела
дифферен. уравнений ИМВЦ УНЦ РАН

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1 Элементы векторной алгебры.....	6
2 Элементы аналитической геометрии.....	23
3 Введение в математический анализ.....	40
4 Дифференцирование функции одной переменной.....	49
5 Элементы комбинаторики.....	53
Литература.....	60

ВВЕДЕНИЕ

В современных условиях специалист среднего звена должен получить более широкую подготовку, чтобы иметь возможность продолжить образование и самообразование, быть востребованным на рынке труда. Это осуществимо при наличии хорошей подготовки специалиста по основополагающим дисциплинам, к которым относится математика. Современный специалист должен постоянно осваивать новые технологии, уметь грамотно и четко излагать мысли, аргументировать выводы. Развитие математической культуры обучающегося предполагает знание им места и роли математики в современном образовании, повышение уровня его фундаментальной математической подготовки. Важно сформировать у студентов научное мировоззрение, показать взаимосвязь наук, рассмотреть происхождение математических понятий из потребностей практики, наполнить абстрактные понятия конкретным содержанием.

Данный конспект лекций предназначен для студентов I курса по специальностям: 15.02.06 Монтаж и техническая эксплуатация холодильно-компрессорных машин и установок (по отраслям), изучающих дисциплину «Математика» по учебной программе в объеме 150 часов; 54.02.01 Дизайн (по отраслям), изучающих дисциплину «Математика» в объеме 58 часов. Так как большая часть объема учебной нагрузки студентов отведена на самостоятельную работу, то целью данного конспекта является помощь студентам выработать навыки решения практических задач по математике. Конспект не заменяет учебник, но помогает как в усвоении теории, так и в приобретении навыков решения задач. Конспект лекций включает в себя основной теоретический материал и образцы решения типовых задач. В предлагаемом курсе отдельные темы изложены с учетом принципа «строгости», а отдельные темы на уровне разъяснения. Курс лекций сопровождается иллюстрирующим материалом, решением математических задач. При изучении и конспектировании любых литературных источников следует обращать внимание на основные теоретические положения, использовать не всю информацию, а только ту, которая имеет отношение к изучаемой теме. Положения, взятые из литературных источников лучше излагать своими словами, сохраняя при этом смысловую идею.

Задачами курса математики являются:

- раскрыть студентам мировоззренческое значение математики, углубить их представление о роли и месте математики в изучении окружающего мира;
- дать студентам необходимые математические знания, сформировать умения для глубокого овладения его содержанием;
- способствовать развитию мышления;
- развивать умения самостоятельной работы с математической литературой.

Данный курс лекций ставит задачу усиления прикладной и профессиональной направленности подготовки специалиста среднего звена. Эта направленность заложена в отборе материала, в уровне его изложения. Прикладная направленность курса математики заключается в решении следующих задач:

- привить студентам навыки применения математического аппарата к решению задач, возникающих при изучении дисциплин профессиональной подготовки;
- помочь развитию способностей студентов, формированию умений и навыков общего характера, овладению общенаучными методами;
- выработать у студентов навыки самостоятельного приобретения знаний, умение работать со справочным материалом;
- активизировать использование студентами приемов логического мышления (анализ, синтез, аналогию, обобщение и др.);
- развить творческое мышление студентов, которое является одним из обязательных качеств гармонически развитой личности;
- сформировать научное мировоззрение.

Конспект лекций будет полезен тем обучающимся, которые по различным причинам не смогли посетить все учебные занятия. Также будет полезен для подготовки к практическим занятиям, для более успешного понимания и усвоения материала, для выполнения заданий, предназначенных для самостоятельного изучения.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **равными**, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковую длину. Равенство векторов записывается в виде $\vec{a} = \vec{b}$.

Из определения равенства векторов следует, что вектор можно перенести параллельно самому себе из одной точки пространства в любую другую его точку.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Вектор $(-\vec{a})$ называется **противоположным вектором** для вектора $\vec{a}$, если он ему коллинеарен, имеет одинаковую с $\vec{a}$ длину, но направлен в противоположную сторону. Векторы $\vec{a}$ и $-\vec{a}$ называются **взаимно противоположными векторами**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным вектором** и обозначается символом $\vec{e}$.

Линейные операции над векторами

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Операции сложения и вычитания векторов и умножения вектора на число называются **линейными операциями над векторами**.

Сложение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$, при условии, что начало вектора $\vec{b}$ приложено к концу вектора $\vec{a}$ (рис. 1.2).

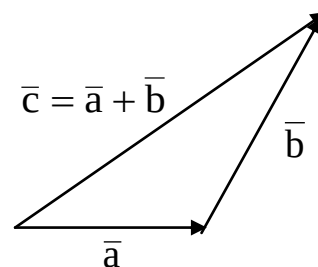


Рис. 1.2

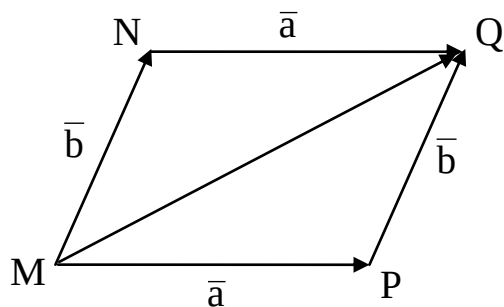


Рис.1.3

Сумма векторов может быть найдена и по правилу параллелограмма (рис. 1.3). Из определения суммы векторов следует, что сложение векторов подчиняется переместительному закону $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. Действительно, пусть $\vec{MP} = \vec{a}$, $\vec{MN} = \vec{b}$ и $MNQP$ есть параллелограмм. Тогда $\vec{NQ} = \vec{a}$, $\vec{PQ} = \vec{b}$ и $\vec{MQ} = \vec{MP} + \vec{PQ} = \vec{a} + \vec{b}$,

$\vec{MQ} = \vec{MN} + \vec{NQ} = \vec{b} + \vec{a}$. Отсюда, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Понятие суммы векторов, введенное для двух векторов, можно обобщить на сумму любого конечного числа слагаемых. Например, если заданы три вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$, то суммой этих векторов называется вектор $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$, определяемый по правилу $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \vec{a}_3$. Аналогично, если заданы векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$, где $k > 3, k \in \mathbb{N}$, то суммой этих векторов называется вектор

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_k = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_{k-1}) + \vec{a}_k.$$

Покажем, что сложение векторов подчиняется сочетательному закону $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (рис. 1.4).

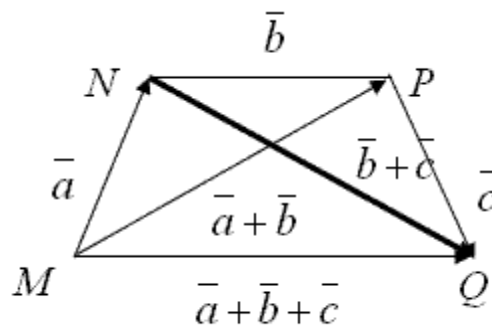


Рис. 1.4

Пусть $\overline{MN} = \vec{a}$, $\overline{NP} = \vec{b}$, $\overline{PQ} = \vec{c}$. Тогда $\overline{MP} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overline{NQ} = \vec{b} + \vec{c}$, $\overline{MQ} = \overline{MP} + \overline{PQ} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$, $\overline{MQ} = \overline{MN} + \overline{NQ} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$. Следовательно, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Разность векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, что $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

Для построения вектора $\vec{a} - \vec{b}$ по данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно воспользоваться одним из способов, сущность которых пояснена на рис. 1.5 и рис. 1.6

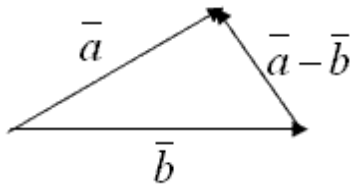


Рис 1.5

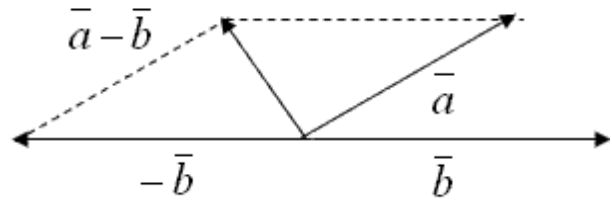


Рис 1.6

Умножение вектора на число

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть даны вектор $\vec{a}$ и число λ . **Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ** называется вектор $\lambda \vec{a}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$ и то же направление, что и вектор $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположное направление, если $\lambda < 0$. Если $\lambda = 0$, то $\lambda \vec{a} = \vec{0}$.

Следствие 1. Из определения умножения вектора на число следует, что если $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, то векторы $\vec{b}$ и $\vec{a}$ коллинеарны. Очевидно, что если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные векторы, то $\vec{b} = \lambda \vec{a}$. Таким образом, два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

Следствие 2. Противоположный вектор $-\vec{a}$ можно рассматривать как произведение вектора $\vec{a}$ на $\lambda = -1$, то есть $-\vec{a} = (-1)\vec{a}$.

Следствие 3. Пусть дан вектор $\vec{a}$. Рассмотрим вектор $\vec{a}^0$, коллинеарный $\vec{a}$, направленный, как $\vec{a}$, имеющий длину, равную единице. Тогда, согласно операции умножения вектора на число, следует, что

$$\vec{a} = |\vec{a}| \vec{a}^0 \quad (1.33)$$

Умножение вектора на число подчиняется распределительным законам

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}, (\lambda_1 + \lambda_2) \vec{a} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{a} \text{ и сочетательному закону } (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \vec{a} = \lambda_1 (\lambda_2 \vec{a}).$$

Покажем, например, справедливость первого из распределительных законов. Построим на векторах $\vec{MN} = \vec{a}$, $\vec{MQ} = \vec{b}$ параллелограмм $MNPQ$, на векторах $\vec{MN}' = \lambda \vec{a}$, $\vec{MQ}' = \lambda \vec{b}$ параллелограмм $MN'P'Q'$ (рис. 1.7). Из подобия этих параллелограммов следует, что $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$.

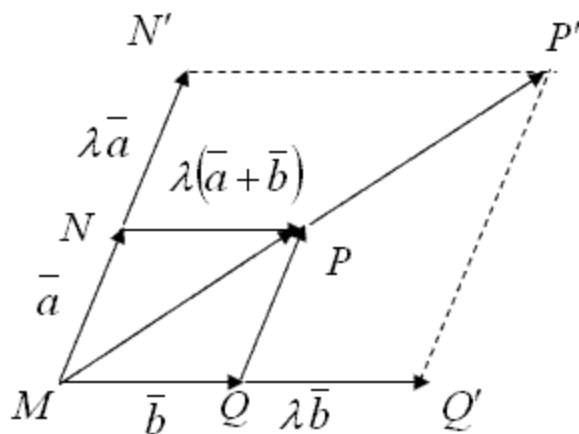


Рис. 1.7

Аналогично можно убедиться и в справедливости оставшихся законов.

ПРИМЕР 1.20 Точка O является центром тяжести треугольника ABC .

Доказать, что $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$.

Решение. Известно, что центр тяжести треугольника находится в точке пересечения его медиан. Обозначим через P середину стороны AC и построим вектор $\vec{OP}$ (рис. 1.8).

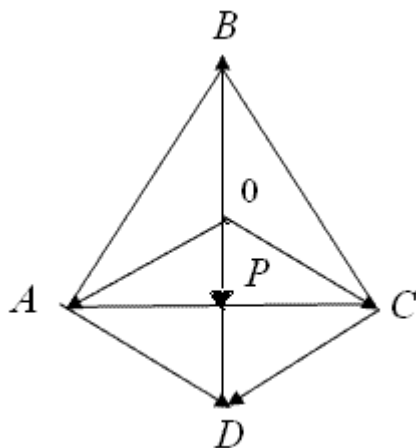


Рис. 1.8

Тогда, согласно операции умножения вектора на скаляр и свойства медианы, получим $\vec{OP} = \frac{1}{3}\vec{BP} = -\frac{1}{3}\vec{OB}$. Построим на векторах $\vec{OA}$ и $\vec{OC}$ параллелограмм $OADC$ (рис. 1.8).

Тогда, согласно операции сложения векторов, $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OC}$. Точка P является точкой пересечения диагоналей этого параллелограмма.

Следовательно, $\vec{OP} = \frac{1}{2}\vec{OD}$ или

$$\vec{OP} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OC}). \text{ Итак,}$$

$$\overline{OP} = -\frac{1}{2}(\overline{OB}) = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OC}).$$

$$\text{Отсюда } \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OC}) + \frac{1}{2}\overline{OB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \vec{0}.$$

Угол между векторами. Проекция вектора на ось

Пусть заданы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Выберем в пространстве произвольную точку O и отложим от этой точки векторы $\overline{OA} = \vec{a}$ и $\overline{OB} = \vec{b}$.

Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется наименьший угол φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$), на который нужно повернуть один из заданных векторов до его совпадения со вторым (рис. 1.9).

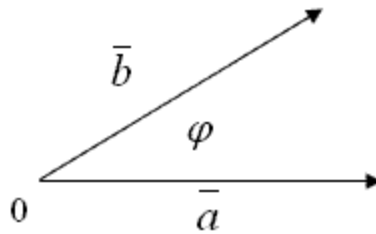


Рис. 1.9

Пусть в пространстве заданы вектор $\overline{AB}$ и ось ℓ (рис. 1.10).

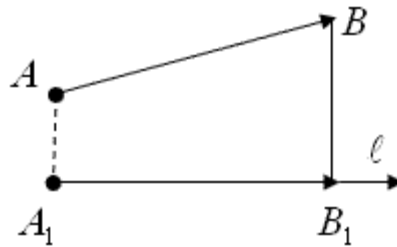


Рис. 1.10

Обозначим через A_1 и B_1 проекции на ось ℓ точек A и B соответственно. Построим вектор $\overline{A_1B_1}$ и назовем его компонентом вектора $\overline{AB}$ по оси ℓ .

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось ℓ называется длина его компоненты $\overline{A_1B_1}$ по этой оси, если компонента направлена в ту же сторону, что и ось ℓ ; противоположное число, если компонента и ось имеют разные направления; нуль,

если компонента есть нулевой вектор. Проекция вектора на ось обозначается в виде $\text{пр}_\ell \overline{AB}$ или $\text{пр}_\ell \overline{a}$.

Выберем на оси ℓ единичный вектор $\overline{e}$ имеющий то же направление, что и ось ℓ . Углом между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{e}$ называется угол между вектором $\overline{AB}$ и осью ℓ .

Теорема 1.7. Проекция вектора $\overline{a}$ на ось ℓ равна модулю вектора $\overline{a}$, умноженному на косинус угла φ между вектором и осью:

$$\text{пр}_\ell \overline{a} = |\overline{a}| \cos \varphi. \quad (1.34)$$

Доказательство: Пусть $\overline{a} = \overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$ является компонентой вектора

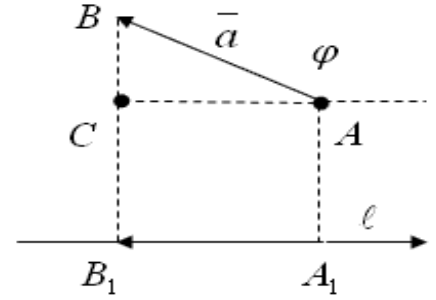
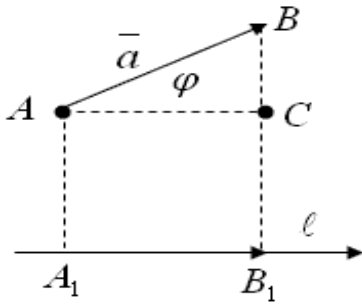


Рис. 1.11

$\overline{AB}$ на ось ℓ (рис. 1.11).

Если угол φ между $\overline{a}$ и осью острый, то компонента $\overline{A_1B_1}$ направлена в ту же сторону, что и ось ℓ . Тогда $\text{пр}_\ell \overline{a} = \text{пр}_\ell \overline{AB} = |\overline{A_1B_1}|$. Из треугольника ABC следует, что $|\overline{A_1B_1}| = |\overline{AC}| = |\overline{AB}| \cos \varphi = |\overline{a}| \cos \varphi$. Тогда $\text{пр}_\ell \overline{a} = |\overline{a}| \cos \varphi$.

Если же $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$, то компонента $\overline{A_1B_1}$ направлена в противоположную по отношению к оси ℓ сторону. Следовательно, $\text{пр}_\ell \overline{a} = \text{пр}_\ell \overline{AB} = -|\overline{A_1B_1}|$. Из треугольника ABC следует, что $|\overline{A_1B_1}| = |\overline{AC}| = |\overline{AB}| \cos(\pi - \varphi) = -|\overline{AB}| \cdot \cos \varphi$. Тогда $\text{пр}_\ell \overline{a} = -|\overline{A_1B_1}| = |\overline{AB}| \cos \varphi = |\overline{a}| \cos \varphi$.

Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то компонента есть нулевой вектор. Тогда и $\text{пр}_\ell \overline{a} = 0$.

Итак, для любых углов $\varphi (0 \leq \varphi \leq \pi)$ $\text{пр}_\ell \overline{a} = |\overline{a}| \cos \varphi$. Опираясь на ранее рассмотренные линейные операции над векторами, можно убедиться, что для проекций векторов на ось справедливы следующие теоремы (без доказательств).

Теорема Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекции слагаемых векторов на ту же ось:

$$\text{пр}_\ell (\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_k) = \text{пр}_\ell \bar{a}_1 + \text{пр}_\ell \bar{a}_2 + \dots + \text{пр}_\ell \bar{a}_k. \quad (1.35)$$

Теорема. Если вектор $\bar{a}$ умножить на число λ , то его проекция на ось умножится на это число:

$$\text{пр}_\ell (\lambda \bar{a}) = \lambda \text{пр}_\ell \bar{a}. \quad (1.36)$$

Линейная комбинация векторов. Базис

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть заданы векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ и числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Выражение $\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_k \bar{a}_k$ называется **линейной комбинацией векторов** $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$. Очевидно, что линейная комбинация векторов является вектором. Рассмотрим особый случай, когда

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_k \bar{a}_k = \bar{0}. \quad (1.37)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если равенство (1.37) возможно только при всех $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, равных нулю, то векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ называются **линейно-независимыми**. Если же это равенство справедливо не при всех $\lambda_i = 0$, где $i = 1, 2, \dots, k$, то векторы называются **линейно-зависимыми**.

Пусть $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ линейно-зависимы. Тогда среди λ_i найдется хотя бы одно не равное нулю число. Пусть $\lambda_1 \neq 0$. Разделив обе части равенства (1.37) на λ_1 , получим

$$\bar{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \bar{a}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \bar{a}_3 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \bar{a}_k = \mu_2 \bar{a}_2 + \mu_3 \bar{a}_3 + \dots + \mu_k \bar{a}_k,$$

$$\text{где } \mu_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \mu_3 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_1}, \dots, \mu_k = -\frac{\lambda_k}{\lambda_1}.$$

Выражение $\mu_2 \bar{a}_2 + \mu_3 \bar{a}_3 + \dots + \mu_k \bar{a}_k$ является линейной комбинацией векторов $\bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_k$. Итак, если векторы линейно-зависимы, то хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных.

Справедливо и обратное утверждение: если хотя бы один вектор является линейной комбинацией других векторов, то вся группа векторов линейно-зависима. Пусть, например, $\bar{a}_1 = \mu_2 \bar{a}_2 + \mu_3 \bar{a}_3 + \dots + \mu_k \bar{a}_k$.

Тогда $-\bar{a}_1 + \mu_2 \bar{a}_2 + \mu_3 \bar{a}_3 + \dots + \mu_k \bar{a}_k = \bar{0}$ и коэффициент при $\bar{a}_1$ отличен от нуля. Это означает, что вектора $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ линейно-зависимы.

Примерами линейно-зависимых векторов являются любые два вектора прямой; любые три вектора плоскости; любые четыре вектора пространства (рис. 1.12-1.13).

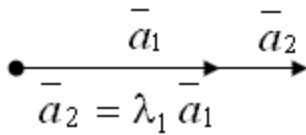


Рис. 1.12

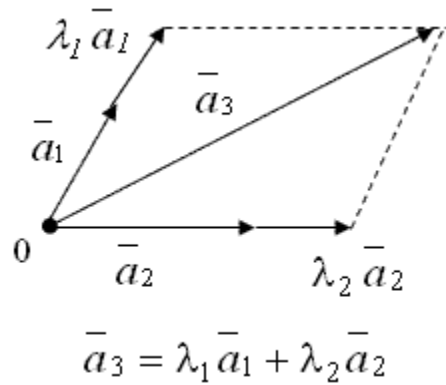


Рис. 1.13

В то же время два неколлинеарных вектора $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ плоскости (рис. 1.13) или три некомпланарных вектора $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ пространства (рис. 1.14) являются примерами линейно-независимых векторов.

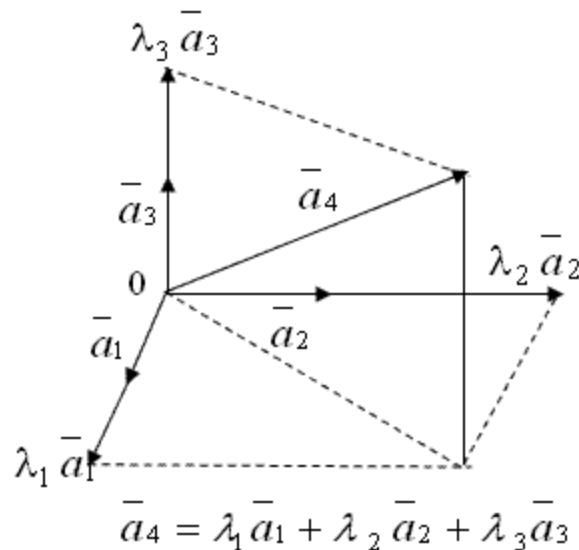


Рис. 1.14

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Любая группа, составленная из максимального числа линейно-независимых векторов некоторого пространства R^n , называется **базисом** этого пространства. Число векторов базиса **называется размерностью пространства**. Так, базисом на прямой (пространство R^1) является любой

ненулевой вектор этой прямой. Размерность прямой равна единице. Базисом на плоскости (пространство R^2) являются любые два неколлинеарных вектора этой плоскости. Размерность плоскости равна двум. Базисом в объемном пространстве (пространство R^3) являются любые три некомпланарные вектора. Размерность этого пространства равна трем.

Пусть векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ образуют базис R^n . Тогда любой вектор $\vec{a}$ этого пространства является линейной комбинацией базисных векторов, то есть

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n. \quad (1.38)$$

Представление вектора $\vec{a}$ в форме (1.38) называется разложением этого вектора по базисным векторам.

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ разложения называются **координатами вектора** $\vec{a}$ по базису $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. Этот факт записывается в виде $\vec{a} = \{\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n\}$.

Векторы $\lambda_1 \vec{a}_1, \lambda_2 \vec{a}_2, \dots, \lambda_n \vec{a}_n$ называется компонентами вектора $\vec{a}$ по базисным векторам $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Если векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, образующие базис, имеют общее начало O и вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$, где M — некоторая точка пространства, то числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ называются также координатами этой точки. Этот факт записывают в виде $M(\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n)$.

Прямоугольная декартова система координат

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Пусть в пространстве R^3 векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ образуют базис этого пространства. Выберем в R^3 произвольную точку O и отложим с началом в этой точке базисные векторы. Совокупность точки O и трех базисных векторов называется **системой координат** в пространстве R^3 . Ввиду произвольности выбора точки и выбора базисных векторов в R^3 можно построить бесконечное множество систем координат. Выберем в качестве базисных векторов три взаимно перпендикулярных единичных вектора $\vec{i} = \vec{a}_1^0, \vec{j} = \vec{a}_2^0, \vec{k} = \vec{a}_3^0$. Совокупность точки O и базисных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называется **прямоугольной декартовой системой координат** в пространстве R^3 .

Выберем в R^3 произвольную точку M и построим вектор $\overrightarrow{OM}$. Так как векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ образуют базис, то согласно (1.38) вектор $\overrightarrow{OM}$ можно разложить на компоненты по этому базису:

$$\overrightarrow{OM} = \lambda_1 \vec{i} + \lambda_2 \vec{j} + \lambda_3 \vec{k}, \quad (1.39)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – координаты вектора $\overline{OM}$ в заданном базисе.

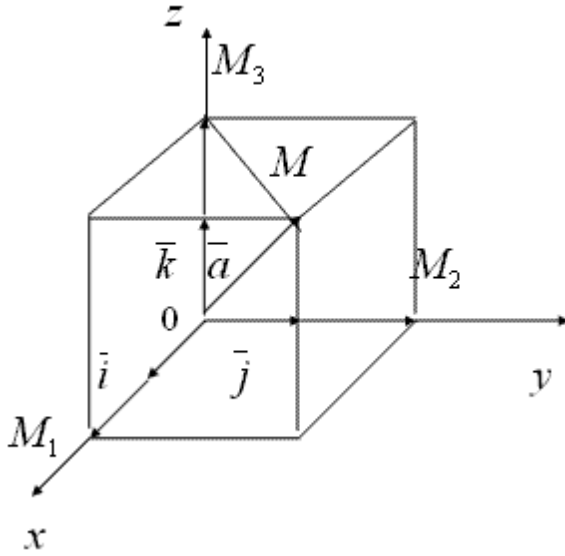


Рис. 1.15

Проведем через точку O в направлении векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ оси OX, OY, OZ соответственно и спроектируем вектор $\overline{OM}$ на каждую из осей (рис. 1.15).

Пусть точки M_1, M_2, M_3 есть проекции точки M на оси абсцисс, ординат и аппликат соответственно.

Тогда

$$\overline{OM} = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 + \overline{OM}_3 = \text{pr}_{OX} \overline{OM} \bar{i} + \text{pr}_{OY} \overline{OM} \bar{j} + \text{pr}_{OZ} \overline{OM} \bar{k}. \quad (1.40)$$

Из сравнения (1.40) с (1.39) следует, что координаты вектора $\overline{OM}$ определяется по формулам

$$\lambda_1 = \text{pr}_{OX} \overline{OM}, \lambda_2 = \text{pr}_{OY} \overline{OM}, \lambda_3 = \text{pr}_{OZ} \overline{OM}.$$

В прямоугольной декартовой системе эти координаты принято обозначать через x, y, z соответственно и называть прямоугольными декартовыми координатами вектора $\overline{OM}$ или декартовыми координатами точки $M \in R^3$. Итак,

$$\overline{OM} = \lambda_1 \bar{i} + \lambda_2 \bar{j} + \lambda_3 \bar{k} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = \{x; y; z\}. \quad (1.41)$$

Координаты точки $M \in R^3$ записываются в форме $M(x; y; z)$ Пусть вектор $\bar{a} = \overline{OM}$ задан в координатной форме $\bar{a} = \{x; y; z\}$. Так как этот вектор совпадает с диагональю прямоугольного параллелепипеда (рис.1.15), то его длина равна длине этой диагонали. Следовательно,

$$|\bar{a}| = |\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.42)$$

Обозначим через α, β, γ углы, между вектором $\bar{a}$ и осями координат OY, OY, OZ . Тогда из прямоугольных треугольников OMM_1, OMM_2, OMM_3 получим

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (1.43)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Косинусы углов α, β, γ , определяемые по (1.43), называются *направляющими косинусами вектора $\vec{a}$* . Нетрудно проверить, что направляющие косинусы связаны между собой соотношением

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (1.44)$$

ПРИМЕР 1.21 Доказать, что в прямоугольной декартовой системе координат векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ имеют координаты

$$\vec{i} = \{1; 0; 0\}, \vec{j} = \{0; 1; 0\}, \vec{k} = \{0; 0; 1\}.$$

Доказательство. Так как векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ образуют базис прямоугольной декартовой системы координат, то $\vec{i} \perp \vec{j}, \vec{i} \perp \vec{k}, \vec{j} \perp \vec{k}, |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$. Следовательно, $\text{пр}_{\vec{i}} \vec{i} = 1, \text{пр}_{\vec{j}} \vec{i} = 0, \text{пр}_{\vec{k}} \vec{i} = 0$

$$\text{Но } \text{пр}_{\vec{i}} \vec{i} = \text{пр}_{OX} \vec{i}, \text{пр}_{\vec{j}} \vec{i} = \text{пр}_{OY} \vec{i}, \text{пр}_{\vec{k}} \vec{i} = \text{пр}_{OZ} \vec{i}$$

По формуле (1.38) получим, что

$$\vec{i} = (\text{пр}_{OX} \vec{i})\vec{i} + (\text{пр}_{OY} \vec{i})\vec{j} + (\text{пр}_{OZ} \vec{i})\vec{k} = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \{1; 0; 0\}.$$

Аналогично доказываются оставшиеся равенства.

Линейные операции над векторами, заданными в координатной форме

Пусть векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ заданы в координатной форме:

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \{x_1; y_1; z_1\} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \\ \vec{a}_2 &= \{x_2; y_2; z_2\} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Непосредственно из теорем 1.5 и 1.6 о проекциях векторов на ось и определения координат вектора (1.38) вытекают правила:

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2, \text{ если } x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2; \quad (1.46)$$

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}; \quad (1.47)$$

$$\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} + (z_1 - z_2)\vec{k}; \quad (1.48)$$

$$\lambda \vec{a}_1 = \lambda x_1\vec{i} + \lambda y_1\vec{j} + \lambda z_1\vec{k}, \text{ где } \lambda \in \mathbb{R} \quad (1.49)$$

ПРИМЕР 1.22 (Условие коллинеарности двух векторов).

Установить условие коллинеарности векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, если

$$\vec{a}_1 = \{x_1; y_1; z_1\}, \vec{a}_2 = \{x_2; y_2; z_2\}.$$

Решение. Так как векторы коллинеарны, то $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2$, где λ — некоторое число. Согласно (1.46) - (1.49) имеем

$$\begin{aligned}
 x_1 \bar{i} + y_1 \bar{j} + z_1 \bar{k} &= \lambda x_2 \bar{i} + \lambda y_2 \bar{j} + \lambda z_2 \bar{k} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x &= \lambda x_2, y_1 = \lambda y_2, z_1 = \lambda z_2 \Rightarrow \lambda = \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \quad (1.50)
 \end{aligned}$$

Легко проверяется, что если координаты векторов удовлетворяют равенствам (1.50), то $\bar{a}_1 = \lambda \bar{a}_2$

Равенства (1.50) называются **условием коллинеарности двух векторов**.

ПРИМЕР 1.23 (Координаты единичного вектора).

Определить координаты единичного вектора $\bar{a}^0$, если $\bar{a} = \{x; y; z\}$.

Решение. Согласно формуле (1.33) $\bar{a} = |\bar{a}| \bar{a}^0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \bar{a}^0 &= \frac{1}{|\bar{a}|} \bar{a} = \frac{x \bar{i} + y \bar{j} + z \bar{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \\
 &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \bar{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \bar{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \bar{k}.
 \end{aligned}$$

Из (1.43) следует, что

$$\bar{a}^0 = \cos \alpha \bar{i} + \cos \beta \bar{j} + \cos \gamma \bar{k} = \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}.$$

Под простейшими задачами аналитической геометрии понимаются задачи определения расстояния между двумя точками и деления некоторого отрезка в данном отношении.

Задача определения расстояния между двумя точками

Пусть в пространстве R^3 заданы своими координатами две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Построим векторы $\overline{OM_1}, \overline{OM_2}, \overline{M_1M_2}$ (рис. 1.16).

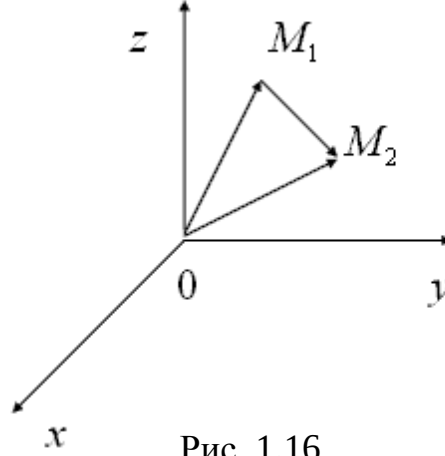


Рис 1.16

Тогда $\overline{OM_1} = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\overline{OM_2} = \{x_2; y_2; z_2\}$, $\overline{M_1M_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1}$

Согласно правилу (1.48)

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}.$$

Так как длина вектора $\overline{M_1M_2}$ равна расстоянию между точками M_1 и M_2 , то $d = |\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ (1.51)

Заметим, что в процессе решения этой задачи установлена формула определения координат вектора, если заданы координаты его начальной и конечной точек:

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k} \quad (1.52)$$

Задача деления отрезка в данном отношении

Пусть даны две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Требуется на прямой M_1M_2 (рис. 1.17) найти точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, которая разделила бы отрезок $[M_1M_2]$ в заданном отношении λ , т.е. так, что $\overline{M_1M_0} = \lambda \overline{M_0M_2}$. Согласно формуле (1.52)

$$\overline{M_1M_0} = \{x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_0 - z_1\},$$

$$\overline{M_0M_2} = \{x_2 - x_0; y_2 - y_0; z_2 - z_0\}.$$

Тогда по правилу (1.49) равенство $\overline{M_1M_0} = \lambda \overline{M_0M_2}$ примет вид $x_0 - x_1 = \lambda(x_2 - x_0)$, $y_0 - y_1 = \lambda(y_2 - y_0)$, $z_0 - z_1 = \lambda(z_2 - z_0)$.

Определяя x_0, y_0, z_0 из этих равенств, получим

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}, \quad (1.53)$$

где $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq -1$.

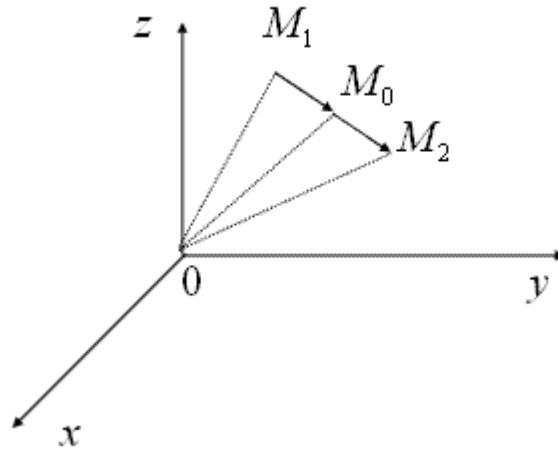


Рис. 1.17

Формулы (1.53) являются формулами деления отрезка в данном отношении. В частности, при $\lambda = 1$ получим формулы деления отрезка пополам:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (1.54)$$

ПРИМЕР 1.24 Вершины треугольника ABC имеет координаты $A(2;4;0)$, $B(0;3;5)$, $C(2;5;7)$. Найти длину медианы AD этого треугольника.

Решение. Точка D делит отрезок $[BC]$ пополам. Тогда, согласно формул (1.54), получим:

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{0 + 2}{2} = 1, y_D = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4,$$

$$z_D = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{5 + 7}{2} = 6.$$

Искомое расстояние найдем по формуле (1.51)

$$\begin{aligned} d = |AD| &= \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 + (z_D - z_A)^2} = \\ &= \sqrt{1 + 0 + 36} = \sqrt{37}. \end{aligned}$$

Скалярное произведение векторов

Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. В векторной алгебре рассматриваются два вида умножения векторов: скалярное, результатом которого является число, и векторное, результатом которого является вектор.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению модулей перемножаемых векторов на косинус угла φ между ними (рис.1.18). Скалярное произведение обозначается символом $\vec{a}\vec{b}$. Итак,

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi. \quad (1.55)$$

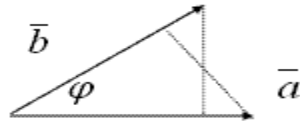


Рис. 1.18

Так как $|\vec{b}| \cos \varphi = \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$, $|\vec{a}| \cos \varphi = \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$,
то $\vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$. (1.56)

Из (1.56) следует, что скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно модулю одного из векторов, умноженному на проекцию другого на направление первого вектора.

Свойства скалярного произведения векторов:

- 1) $\vec{a} \vec{b} = \vec{b} \vec{a}$;
- 2) $\vec{a} \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \perp \vec{b}$ или хотя бы один из векторов есть нулевой вектор (справедливо и обратное утверждение);
- 3) $\vec{a} \vec{a} = |\vec{a}|^2$;
- 4) $\lambda(\vec{a} \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \vec{b} = \vec{a}(\lambda \vec{b})$ для $\forall \lambda \in \mathbb{R}$;
- 5) $(\vec{a} + \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} \vec{c} + \vec{b} \vec{c}$.

Справедливость первых четырех свойств непосредственно следует из определения скалярного произведения. Докажем справедливость распределительного свойства 5. Согласно формуле (1.56) и теореме 1.5 о проекции имеем

$$(\vec{a} + \vec{b}) \vec{c} = |\vec{c}| \text{пр}_{\vec{c}} (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{c}| (\text{пр}_{\vec{c}} \vec{a} + \text{пр}_{\vec{c}} \vec{b}) = |\vec{c}| \text{пр}_{\vec{c}} \vec{a} + |\vec{c}| \text{пр}_{\vec{c}} \vec{b} = \vec{c} \vec{a} + \vec{c} \vec{b} = \vec{a} \vec{c} + \vec{b} \vec{c}.$$

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами:

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, \quad \vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}.$$

Найдем скалярное произведение $\vec{a} \vec{b}$. Вычислим предварительно скалярные произведения единичных векторов.

Имеем $\vec{i} \vec{i} = |\vec{i}| |\vec{i}| \cos 0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, $\vec{j} \vec{j} = 1$, $\vec{k} \vec{k} = 1$. Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ взаимно перпендикулярны. Тогда, согласно свойству 2, их произведения друг на друга равны нулю.

Используя распределительный закон скалярного произведения, получим

$$\vec{a} \vec{b} = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = x_1 x_2 \vec{i} \vec{i} + x_1 y_2 \vec{i} \vec{j} + x_1 z_2 \vec{i} \vec{k} +$$

$$+ y_1 x_2 \bar{i} \bar{j} + y_1 y_2 \bar{j} \bar{j} + y_1 z_2 \bar{j} \bar{k} + z_1 x_2 \bar{k} \bar{i} + z_1 y_2 \bar{k} \bar{j} + z_1 z_2 \bar{k} \bar{k} = \\ = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Итак, если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами, то

$$\bar{a}\bar{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (1.57)$$

Следствие 1. Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $\bar{a}\bar{b} = 0$ или

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0. \quad (1.58)$$

Условие (1.58) называется **условием перпендикулярности двух векторов**,

Следствие 2. Так как $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos \varphi$, то

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}, \quad (1.59)$$

ПРИМЕР 1.25 Вычислить работу по перемещению материальной точки вдоль отрезка, из точки $B(1; -2; 3)$ в точку $C(3; 4; 2)$ под действием постоянной по величине и направлению силы $\bar{F} = \{2; 1; 5\}$.

Решение. Из курса физики известно, что работа A , совершаемая при указанных в примере условиях, находится по формуле $A = \bar{F} \cdot \bar{S} = \bar{F} \cdot \overline{BC}$. Так как $\overline{BC} = \{2; 6; -1\}$, $\bar{F} = \{2; 1; 5\}$, то

$$A = \bar{F} \overline{BC} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 5 \cdot (-1) = 5.$$

Ответ: 5.

ПРИМЕР 1.26 Даны вершины треугольника $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$ и $C(3; -2; 1)$. Определить внутренний угол треугольника при вершине B (рис. 1.19).

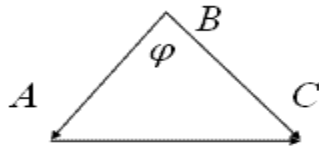


Рис. 1.19

Решение. Построим векторы $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$. Имеем $\overline{BA} = \{3; 0; 4\}$, $\overline{BC} = \{7; 0; 1\}$.

Тогда

$$\cos \varphi = \cos \left(\overline{BA} \wedge \overline{BC} \right) = \frac{\overline{BA} \overline{BC}}{|\overline{BA}| |\overline{BC}|} = \frac{3 \cdot 7 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1}{\sqrt{9 + 0 + 16} \sqrt{49 + 0 + 1}} =$$

$$= \frac{25}{5\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Из приведенных примеров следует, что скалярное произведение векторов широко применяется в геометрии при поиске величин углов, в физике - при определении работы.

2. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

ВВЕДЕНИЕ

Аналитическая геометрия как наука занимается изучением свойств геометрических объектов средствами алгебры. Основным методом этой науки является метод координат, позволяющий определять положение точки в некотором пространстве с помощью чисел-координат этой точки.

Так как в геометрии ее объекты (линии, поверхности, фигуры) определяются как множества точек, обладающих некоторым общим геометрическим свойством, то метод координат позволил описывать эти объекты, используя связи между числами - координатами точек объектов, т.е. средствами алгебры.

2.1. ПЛОСКАЯ ЛИНИЯ И ЕЕ УРАВНЕНИЕ В $\mathbb{R}^2$

В геометрии плоская линия ℓ определяется как множество точек плоскости (геометрическое место точек), обладающих некоторым общим для всех точек линии свойством. Например, окружность радиуса R есть множество всех точек плоскости, удаленных на расстояние R от некоторой точки O этой плоскости.

Введем аналитическое определение плоской линии. Пусть на плоскости введена декартова система координат. Выберем на этой плоскости произвольную точку $M(x; y)$. Рассмотрим вместе со множеством точек координатной плоскости множество уравнений вида $F(x, y) = 0$. Будем говорить, что числа $x = x_0, y = y_0$ удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, если $F(x_0, y_0) \equiv 0$ и ему не удовлетворяют, если $F(x_0, y_0) \neq 0$. Например числа $x_0 = 1, y_0 = 5$ удовлетворяют уравнению $5x - y = 0$ и не удовлетворяют уравнению $3x + y + 2 = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Уравнение $F(x, y) = 0$, связывающее между собой переменные x и y называют *уравнением плоской линии* ℓ в выбранной системе координат, если координаты x и y любой точки M этой линии ему удовлетворяют, а координаты всех точек, не лежащих на ней, ему не удовлетворяют.

Множество всех точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, будем называть плоской линией (плоской кривой).

Заметим, что это множество точек может содержать сколько угодно точек, быть конечным или даже оказаться пустым. Например, уравнению $y = x^2$ удовлетворяют координаты бесконечного множества точек; уравнению $x^2 + y^2 = 0$ удовлетворяют координаты только одной точки $O(0; 0)$;

уравнению $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не удовлетворяют координаты всех точек плоскости. В первом случае плоская кривая является обычной кривой (парабола); во втором - кривая представляет собой точку; в третьем - мнимую плоскую кривую (мнимая окружность).

Из определения 1.1. следует, что любое уравнение вида $F(x, y) = 0$ в общем случае определяет на координатной плоскости XOY некоторую линию. Для ее построения можно воспользоваться обычным методом точек.

ПРИМЕР 1.1. Построить линию, заданную уравнением $y = \sqrt{x}$

Придавая переменной x различные числовые значения и вычисляя соответствующие значения y , построим таблицу:

x	0	1	4	9	...
y	0	1	2	3	...

Введем на плоскости декартову систему координат и построим на этой плоскости соответствующие точки с координатами x, y . Соединяя построенные точки линией, получим искомую кривую (рис. 1.1)

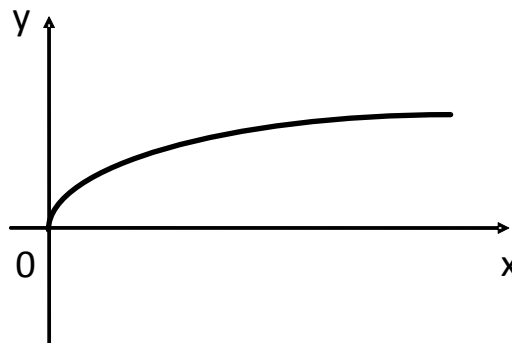


Рис. 1.1

В аналитической геометрии из бесконечного множества уравнений наиболее полно изучаются так называемые алгебраические уравнения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Уравнение $F(x, y) = 0$ называется алгебраическим, если выражение $F(x, y)$ есть сумма конечного числа слагаемых вида $Ax^k y^m$, где k, m – целые неотрицательные числа, A – действительное число. При этом наибольшая из сумм степеней $k + m$ называется **степенью уравнения**.

Например, уравнения $2x - 3y + 5 = 0$, $xy - 7 = 0$ есть алгебраические уравнения соответственно первой и второй степеней. Уравнение $y - \sqrt{x} = 0$ алгебраическим не является.

Уравнение $Ax + By + C = 0$, где A, B, C – действительные числа, является наиболее общим алгебраическим уравнением первой степени. Уравнение

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + Q = 0$ - общее алгебраическое уравнение второй степени.

Задача изучения свойств линии по известному ее уравнению является одной из главных задач аналитической геометрии. Второй центральной задачей этой науки является решение обратной задачи, т.е. задачи определения уравнения линии, если известны все ее точки. Например, непосредственно из определения окружности с центром в начале координат (рис.1.2) следует, что

$$|\overline{OM}| = R \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = R \Leftrightarrow x^2 + y^2 = R^2,$$

если произвольная точка плоскости $M(x; y)$ принадлежит окружности, и $|\overline{OM}| \neq R$, если точка $M(x; y)$ не принадлежит окружности. Следовательно, $x^2 + y^2 = R^2$, если $M \in \ell$ или $x^2 + y^2 \neq R^2$, если $M \notin \ell$. Тогда, согласно определения 1.1. уравнение $x^2 + y^2 = R^2$ есть уравнение искомой окружности.

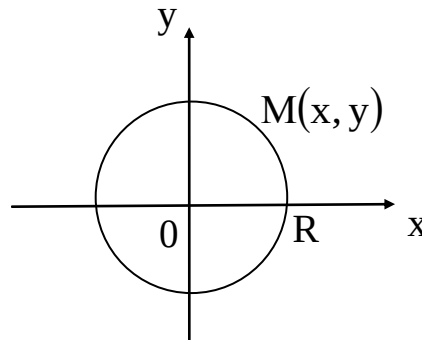


Рис. 1.2

2.2 ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ТОЧКЕ И НОРМАЛЬНОМУ ВЕКТОРУ

Положение прямой ℓ на координатной плоскости XOY вполне определяется заданием:

- 1) любых двух ее точек;
- 2) точки и вектора, параллельного ℓ ;
- 3) точки и вектора, перпендикулярного ℓ ;
- 4) углового коэффициента и отрезка, отсекаемого прямой от оси OY ;
- 5) других величин.

Поставим задачу определения уравнения прямой ℓ в каждом из перечисленных способов ее задания.

Уравнение прямой по точке и нормальному вектору

Пусть на плоскости XOY дана точка $M_0(x_0; y_0)$ и вектор $\overline{N} = A\bar{i} + B\bar{j}$ (рис.1.3). Требуется определить уравнение прямой ℓ проходящей через точку M_0

перпендикулярно вектору $\vec{N}$ (вектор $\vec{N} \perp \ell$ называется **нормальным вектором прямой**).

Выберем на плоскости произвольную точку $M(x; y)$ и построим вектор $\vec{M_0M} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j}$.

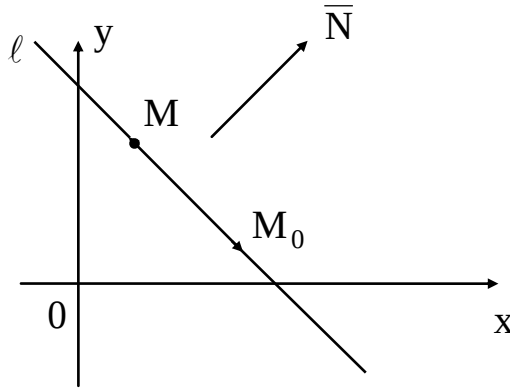


Рис. 1.3

Рассмотрим два случая:

1) пусть точка $M \in \ell$. Тогда $\vec{M_0M} \perp \vec{N} \Rightarrow \vec{M_0M} \cdot \vec{N} = 0$ или

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0; \quad (1.1)$$

2) если точка $M \notin \ell$, то векторы $\vec{M_0M}$ и $\vec{N}$ не перпендикулярны. Следовательно $\vec{M_0M} \cdot \vec{N} \neq 0$ или $A(x - x_0) + B(y - y_0) \neq 0$. Из 1) и 2) и определения 1.1. уравнения плоской линии следует, что уравнение (1.1) является уравнением искомой прямой ℓ .

Уравнение (1.1) называется уравнением прямой по точке и нормальному вектору $\vec{N} = \{A; B\}$.

ПРИМЕР 1.2. Найти уравнение прямой ℓ , проходящей через точку $M_0(2; 3)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{4; 5\}$.

Решение. Уравнение прямой ℓ будем искать в виде $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. По условию $A = 4, B = 5, x_0 = 2, y_0 = 3$. Тогда для ℓ получим $4(x - 2) + 5(y - 3) = 0 \Leftrightarrow 4x + 5y - 23 = 0$.

2.3. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ТОЧКЕ И НАПРАВЛЯЮЩЕМУ ВЕКТОРУ

Пусть на плоскости XOY дана точка $M_0(x_0; y_0)$ и вектор $\vec{S} = m\vec{i} + n\vec{j}$ (рис 1.4).

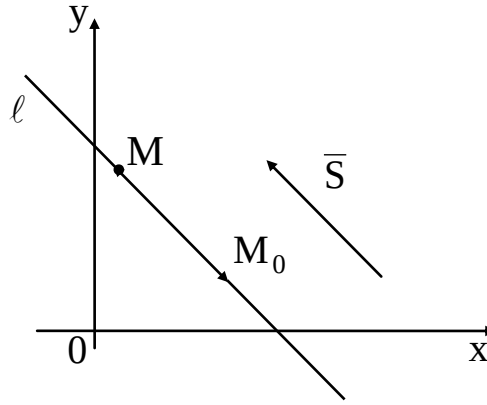


Рис. 1.4

Требуется определить уравнение прямой ℓ проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ параллельно вектору $\bar{S}$ (вектор $\bar{S}$ называется **направляющим вектором прямой**).

Выберем на плоскости XOY произвольную точку $M(x; y)$ и построим вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0)\bar{i} + (y - y_0)\bar{j}$.

Рассмотрим два случая:

1) пусть точка $M \in \ell$. Тогда $\overline{M_0M} \parallel \bar{S}$. Следовательно, векторы $\overline{M_0M}$ и $\bar{S}$ коллинеарны. Итак, $\overline{M_0M} = \lambda \bar{S}$, где λ - некоторое действительное число. Тогда

$$\begin{aligned} (x - x_0)\bar{i} + (y - y_0)\bar{j} &= \lambda(m\bar{i} + n\bar{j}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = m\lambda \\ y - y_0 = n\lambda \end{cases} &\Rightarrow \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \lambda \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}; \end{aligned} \quad (1.2)$$

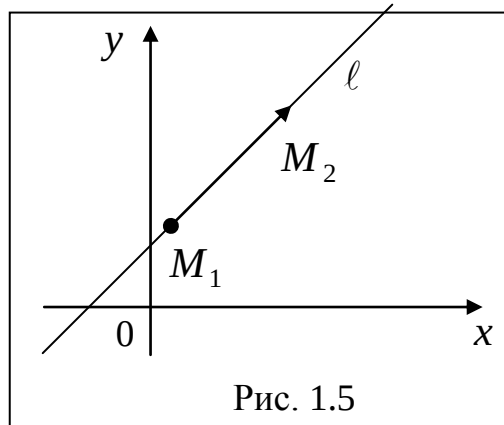
2) пусть точка $M \notin \ell$. Тогда $\overline{M_0M} \neq \lambda \bar{S}$ при любом λ . Отсюда и $\frac{x - x_0}{m} \neq \frac{y - y_0}{n}$. Из 1) и 2) и определения 1.1 уравнения линии следует, что уравнение (1.2) является уравнением искомой прямой ℓ . Уравнение (1.2) называется уравнением прямой по точке и направляющему вектору $\bar{S} = \{m; n\}$. Его также называют каноническим уравнением прямой.

Замечание. Если прямая ℓ проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$ и параллельна оси OX , то направляющий вектор $\bar{S}$ также параллелен этой оси. Следовательно, $\bar{S} = \{m; 0\}$. Хотя его проекция $n = 0$, уравнение этой прямой условились записывать в канонической форме, т.е. в форме $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{0}$.

Последнее уравнение считается другой формой записи уравнения этой прямой $y = y_0$. Аналогично каноническое уравнение вида $\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n}$ означает другую форму записи уравнения прямой $x = x_0$, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ параллельно оси OY .

2.4. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ДВУМ ТОЧКАМ

Пусть на плоскости XOY даны две точки $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$ и требуется найти уравнение прямой ℓ , проходящей через эти точки (рис.1.5). Согласно формуле (1.2) уравнение любой прямой проходящей через точку M_1 , запишется в виде



$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}, \quad (1.3)$$

где m и n проекции неизвестного направляющего вектора $\vec{S}$ этой прямой.

Примем за направляющий вектор $\vec{S}$ вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$. Тогда $m = x_2 - x_1, n = y_2 - y_1$. Подставляя найденные числа в уравнение (1.3), получим уравнение искомой прямой ℓ .

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) называется уравнением прямой, проходящей через две данные точки.

ПРИМЕР 1.3. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(1;3)$ и $M_2(5;4)$.

Решение. Полагая в (1.4) $x_1 = 1, y_1 = 3, x_2 = 5, y_2 = 4$, получим искомое уравнение $\frac{x-1}{5-1} = \frac{y-3}{4-3} \Leftrightarrow x - 4y + 11 = 0$.

2.5. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ТОЧКЕ И УГЛОВОМУ КОЭФФИЦИЕНТУ

Пусть на плоскости XOY проведена некоторая прямая ℓ (рис.1.6). Углом наклона α прямой к оси OX называется угол, на который нужно повернуть вокруг начала координат против движения часовой стрелки ось абсцисс так, чтобы она стала параллельна данной прямой.

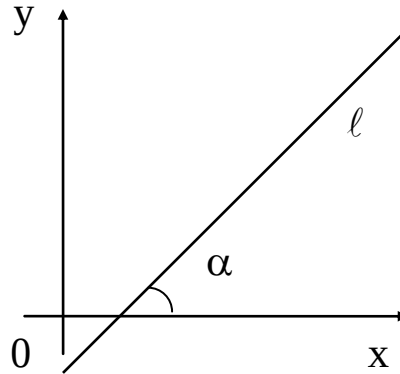


Рис.1.6

Тангенс угла наклона α прямой называется угловым коэффициентом прямой и обозначается буквой k . Итак,

$$k = \operatorname{tg} \alpha \quad (1.5)$$

Заметим, что если α острый угол, то $k > 0$, если тупой, то $k < 0$, если $\alpha = 0$, то $k = 0$, если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то k не существует.

Пусть требуется найти уравнение прямой ℓ , если ℓ проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$ и имеет угловой коэффициент k (рис.1.7). Согласно формуле (1.2) уравнение любой прямой проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ запишется в виде

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n},$$

где m и n есть координаты направляющего вектора $\vec{S}$. В качестве направляющего вектора прямой ℓ примем единичный вектор $\vec{S}^0 = \{\cos \alpha; \cos \beta\}$, составляющий с осью OX тот же угол α , что и прямая ℓ .

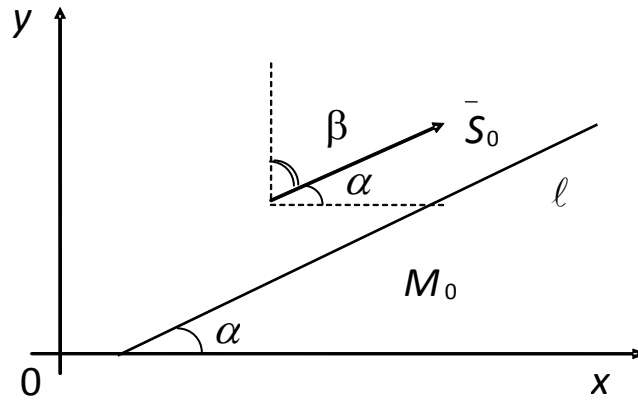


Рис. 1.7

Так как $\cos \beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$, то $\bar{S}^0 = \{\cos \alpha; \sin \alpha\}$.

Полагая $m = \cos \alpha$, $n = \sin \alpha$, получим

$$\begin{aligned} \frac{x - x_0}{\cos \alpha} &= \frac{y - y_0}{\sin \alpha} \Leftrightarrow y - y_0 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (x - x_0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y - y_0 = \operatorname{tg} \alpha (x - x_0) \Leftrightarrow y - y_0 = k(x - x_0) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Уравнение (1.6) называется уравнением прямой по точке и угловому коэффициенту.

2.6. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ С УГЛОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ. УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ

Пусть прямая ℓ наклонена под углом $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ к оси OX и пересекает ось OY в точке $B(0; b)$ (рис.1.8). Уравнение ℓ согласно формуле (1.6) при $x_0 = 0, y_0 = b$ запишется в виде

$$y - b = kx \Leftrightarrow y = kx + b. \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7) называется уравнением прямой с угловым коэффициентом.
Частные случаи:

- 1) если $b = 0$, то уравнением примет вид $y = kx$. Это есть уравнение прямой, проходящей через начало координат;
- 2) если $k = 0$, то $y = b$ есть уравнение прямой, параллельной оси OX ;
- 3) если $k = b = 0$, то $y = 0$ - уравнение самой оси OX .

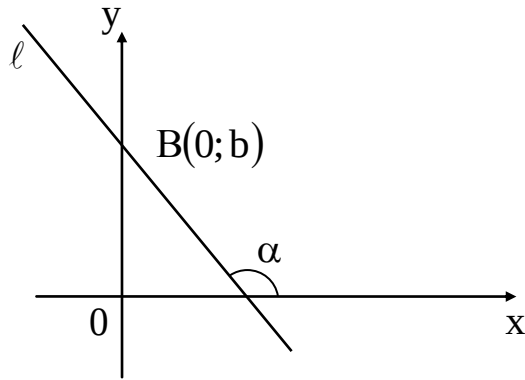


Рис. 1.8

Пусть на плоскости XOY даны две пересекающиеся прямые ℓ_1 и ℓ_2 . (рис.1.9).

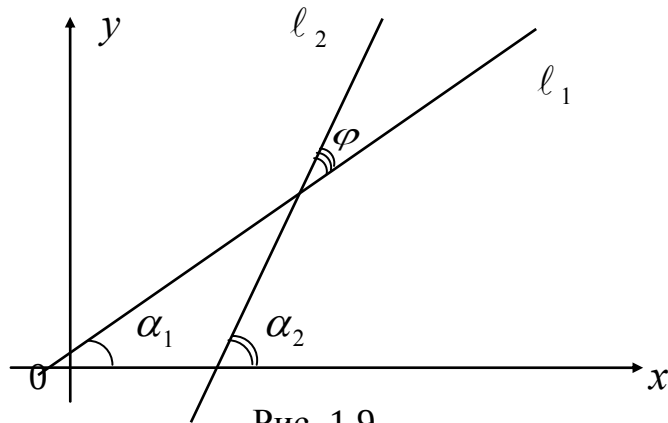


Рис. 1.9

Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 даны уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Требуется определить угол φ между ними. Предположим, что прямые не перпендикулярны и вычислим $\operatorname{tg} \varphi$. Непосредственно из рис.1.9 найдем, что $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$.

Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}.$$

Но

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1, \operatorname{tg} \alpha_2 = k_2.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad (1.8)$$

Итак, если угол φ отсчитывается от прямой ℓ_1 к прямой ℓ_2 и $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, то угол между прямыми может быть найден с помощью формулы (1.8).

Заметим, что если $\ell_1 \parallel \ell_2$, то $\alpha_1 = \alpha_2$. Тогда $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$.

Следовательно,

$$k_1 = k_2 \quad (1.9)$$

Обратно, если $k_1 = k_2$, то

$$\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow \ell_1 \parallel \ell_2.$$

Таким образом, равенство (1.9) является необходимым и достаточным условием параллельности двух прямых.

Пусть $\ell_1 \perp \ell_2$, тогда формула (1.8) теряет свой смысл. Но в этом случае $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$. Тогда $\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1 \right) = -\operatorname{ctg} \alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1}$.

Следовательно,

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \text{ или } k_1 \cdot k_2 = -1. \quad (1.10)$$

Нетрудно проверить, что из $k_1 \cdot k_2 = -1$ следует, что $\ell_1 \perp \ell_2$. Условие (1.10) является условием перпендикулярности двух прямых.

ПРИМЕР 1.4. Найти проекцию точки $P(-6;4)$ на прямую $y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}$.

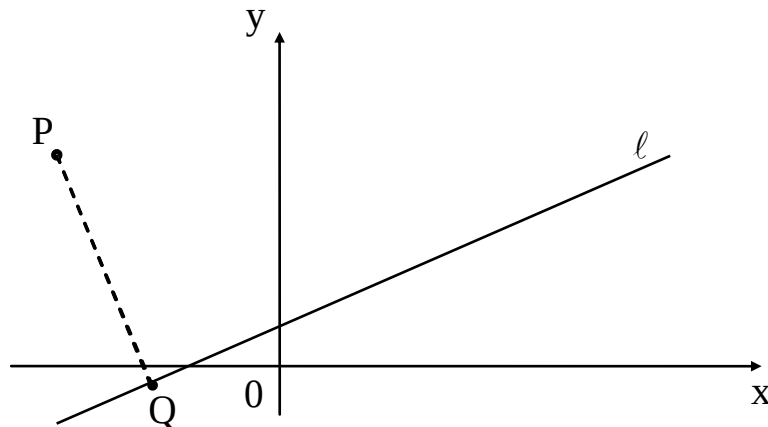


Рис. 1.10

Решение. На плоскости XOY проведем прямую ℓ и построим точку P . Обозначим через Q проекцию точки P на прямую ℓ (рис.1.10).

Уравнение прямой (PQ) будем искать в форме уравнения прямой по точке и угловому коэффициенту, т.е. в форме $y - y_p = k_{PQ}(x - x_p)$. Подставляя значения $x_p = -6, y_p = 4$, получим $y - 4 = k_{PQ}(x + 6)$. Прямые (PQ) и ℓ перпендикулярны. Тогда согласно формуле (1.10) $k_\ell \cdot k_{PQ} = -1$. Но $k_\ell = \frac{4}{5}$,

тогда $k_{PQ} = -\frac{5}{4}$. Следовательно, уравнение (PQ) запишется в виде:

$$y - 4 = -\frac{5}{4}(x + 6) \text{ или } y = -\frac{5}{4}x - \frac{7}{2}.$$

Точка Q принадлежит обеим прямым ℓ и (PQ) . Следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнениям обеих прямых. Тогда, координаты точки Q найдутся из системы

$$\begin{cases} y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}, \\ y = -\frac{5}{4}x - \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}, \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5} = -\frac{5}{4}x - \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}, \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1, \\ x = -2. \end{cases}$$

Ответ : $Q(-2; -1)$.

2.7. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Как уже известно, уравнение $Ax + By + C = 0$, где A, B, C - действительные числа, является общим алгебраическим уравнением первой степени относительно двух переменных x и y . Установленные ранее формы уравнения прямой являются также алгебраическими уравнениями первой степени относительно x и y и при помощи простейших действий могут быть приведены к форме

$$Ax + By + C = 0 \tag{1.11}$$

Покажем, что уравнение при любых A, B, C , кроме $A = B = 0$, определяет прямую на координатной плоскости XOY . Действительно, полагая одно из чисел A или B , например B , не равным нулю, получим

$$Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow Ax + B\left(y + \frac{C}{B}\right) = 0 \Leftrightarrow A(x - 0) + B\left(y + \frac{C}{B}\right) = 0$$

Сравнивая это уравнение с уравнением $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$,

найдем, что оно есть уравнение прямой, проходящей через точку $\left(0; -\frac{C}{B}\right)$ перпендикулярно вектору $\bar{N} = \{A; B\}$. Следовательно, и уравнение $Ax + By + C = 0$ есть уравнение прямой.

Уравнение (1.11) называется общим уравнением прямой.

Частные случаи:

1) если $C = 0$, то $Ax + By = 0$. Это есть уравнение прямой, проходящей через начало координат;

2) если $A = 0, B \neq 0$, то $y = -\frac{C}{B}$ есть уравнение прямой, параллельной оси Ox ;

3) если $B = 0, A \neq 0$, то $x = -\frac{C}{A}$. Это уравнение прямой параллельной оси Oy . В частности, при $C = 0$ получим $x = 0$ - уравнение оси Oy .

ПРИМЕР 1.5. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;1)$ параллельно данной прямой.

Решение. Так как $2x + 3y + 4 = 0$ то $y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$. Сравнивая полученное уравнение с уравнением $y = kx + b$, получим, что $k = -\frac{2}{3}$.

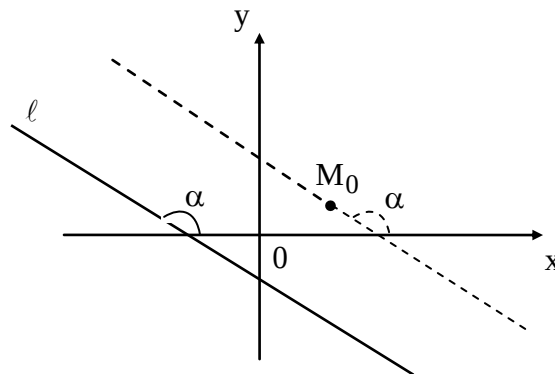


Рис. 1.11

Искомая прямая должна быть параллельна данной прямой. Следовательно, согласно формуле (1.9) ее угловой коэффициент $k = -\frac{2}{3}$. Итак, для искомой прямой известна ее точка $M_0(2;1)$ и угловой коэффициент $k = -\frac{2}{3}$. Тогда ее уравнение найдем по формуле (1.6)

$$y - y_{M_0} = k(x - x_{M_0}) \Rightarrow y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 2) \Leftrightarrow 2x + 3y - 7 = 0.$$

Заметим попутно, что коэффициенты $A = 2, B = 3$ у искомой и данной прямых оказались равными. Этот факт не случаен (доказать самостоятельно).

Ответ: $2x + 3y - 7 = 0$.

ВЫВОД. Заканчивая изложение вопроса о прямой линии на плоскости, еще раз отметим, что всякое алгебраическое уравнение первой степени относительно двух переменных x и y , т.е. уравнение вида $Ax + By + C = 0$, есть уравнение прямой линии на плоскости $ХОУ$. И наоборот, уравнение любой прямой на этой плоскости является алгебраическим уравнением вида $Ax + By + C = 0$.

2.8 КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ОКРУЖНОСТЬ

В следующих параграфах рассматриваются геометрические образы алгебраического уравнения второй степени относительно двух переменных:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + Q = 0, \quad (1.12)$$

где A, B, C, D, E, Q - действительные числа;

A, B, C одновременно не равны нулю.

Линия, определяемая уравнением (1.12), называется кривой второго порядка.

Пусть на координатной плоскости $ХОУ$ дана окружность радиуса R с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$ и требуется определить ее уравнение (рис.1.12).

Выберем на этой плоскости произвольную точку $M(x; y)$.

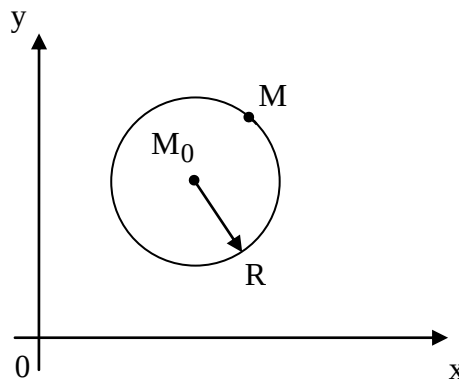


Рис. 1.12

Тогда:

1) если точка M лежит на окружности, то

$$\begin{aligned} |M_0M| = R &\Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \end{aligned} \quad (1.13)$$

2) если точка M не лежит на окружности, то для внутренних точек круга $|M_0M| < R$, а для внешних точек круга $|M_0M| > R$. Следовательно, для всех

точек, не лежащих на окружности, $\left| \overline{M_0 M} \right| \neq R \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \neq R^2$.

Из 1) и 2) и определения 1.1. уравнения плоской кривой, следует, что уравнение (1.13) есть уравнение искомой окружности.

Уравнение (1.13) является уравнением второй степени относительно x и y . Следовательно, окружность есть кривая второго порядка. Раскрыв скобки в уравнении (1.13), получим, что

$$\begin{aligned} x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 - R^2 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 &= 0 \end{aligned}$$

Сравнивая с (1.12), найдем, что $A=1, B=0, C=1, D=-2x_0, E=-2y_0, Q=x_0^2 + y_0^2 - R^2$. Рассматривая полученные коэффициенты $A, B, \dots, Q$, легко заметить, что для окружности выполнены два условия:

1) коэффициент B при произведении $xу$ равен нулю;

2) коэффициенты при x^2 и y^2 равны между собой. Покажем, что если в (1.12) старшие коэффициенты A, B и C удовлетворяют условиям $A=C \neq 0, B=0$, то это уравнение определяет либо действительную окружность с $R > 0$, либо точку ($R=0$), либо мнимую окружность ($R < 0$). Полагая для простоты выкладок $A=C=1, B=0$ в уравнение (1.12), получим

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + Dx + Ey + Q &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x^2 + 2 \cdot \frac{D}{2} x + \frac{D^2}{4} \right) + \left(y^2 + 2 \cdot \frac{E}{2} y + \frac{E^2}{4} \right) + Q - \frac{D^2}{4} - \frac{E^2}{4} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{D}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{E}{2} \right)^2 &= \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - Q \end{aligned} \quad (1.14)$$

Обозначим $\frac{D}{2} = -x_0, \frac{E}{2} = -y_0, \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - Q = a$.

Рассмотрим три случая:

1) $a > 0$. Тогда уравнение (1.14) запишется в виде $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (\sqrt{a})^2$, т.е. определяет действительную окружность радиуса $R = \sqrt{a}$ с центром в точке $O_1(x_0; y_0)$.

2) $a = 0$. Тогда (1.14) запишется в виде $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0. \end{cases}$ т.е. уравнение (1.14) определяет единственную точку $O_1(x_0; y_0)$

, которую можно рассматривать как "окружность" радиуса нуль.

3) $a < 0$. Тогда уравнение (1.14) не удовлетворяется ни при каких

значениях x и y . Следовательно, уравнение (1.14), не определяет никакой действительно существующей кривой или для общности говорят, что оно определяет мнимую окружность с $R < 0$.

Итак, если в уравнение (1.13) старшие коэффициенты удовлетворяют условиям $A = C, B = 0$, то уравнение определяет некоторую окружность.

2.9. ПАРАБОЛА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Выберем на плоскости произвольную точку F и произвольную прямую (NP) , не проходящую через эту точку. Назовем точку F фокусом, а прямую (NP) директрисой. Обозначим расстояние от точки F до прямой (NP) через p и построим систему координат XOY так, как это изображено на рис 1.16.

Тогда фокус будет расположен в точке $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, а директриса будет иметь

уравнение $x = -\frac{p}{2}$.

Пусть точка $M(x; y)$ произвольная точка плоскости XOY . Предположим, что точка M лежит на параболе. Тогда, по определению этой кривой $|\overline{MF}| = |\overline{MN}|$, где $(MN) \perp (NP)$. Точка N по построению имеет координаты $N\left(-\frac{p}{2}; y\right)$. Следовательно, равенство $|\overline{MF}| = |\overline{MN}|$ запишется в виде

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} \Leftrightarrow x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

Освобождаясь от иррациональности, получим

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 \Leftrightarrow y^2 = 2px. \quad (1.21)$$

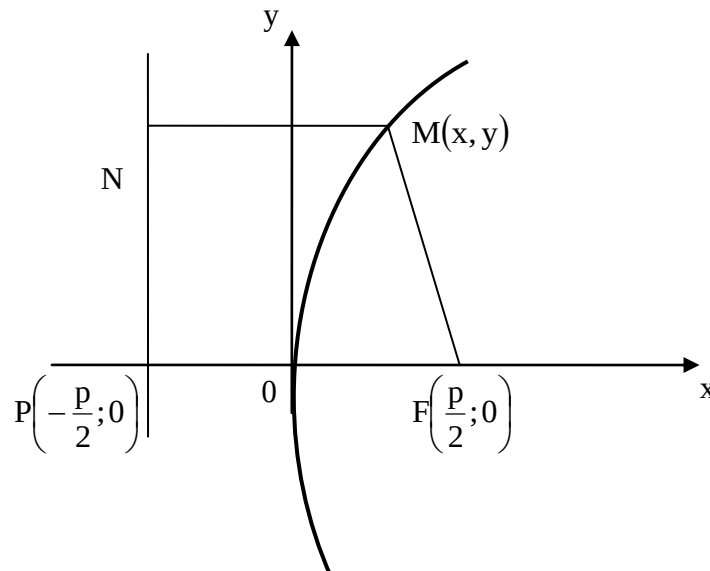


Рис. 1.16

Пусть точка M не лежит на параболе. Тогда $|\overline{MF}| \neq |\overline{MN}|$. Следовательно, и $y^2 \neq 2px$.

Итак, согласно определения 1.1 уравнения плоской кривой, уравнение (1.21) является уравнением искомой параболы. Оно называется каноническим уравнением параболы, а число $p > 0$ называется ее параметром.

Определим форму параболы. В уравнение (1.21) переменная y входит в четной степени. Следовательно, кривая симметрична относительно оси Ox . При $x = 0, y = 0$. Значит, кривая проходит через начало координат. При $-\infty < x < 0, y \in \emptyset$, так как по условию $p > 0$. При $0 < x < +\infty$ y существует, причем при увеличении x переменная y также увеличивается. По полученным данным построим параболу (рис.1.16).

Терминология, Точка $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ называется **фокусом параболы**. Точка

$O(0;0)$ называется **вершиной параболы**. Прямая $x = -\frac{p}{2}$ называется **директрисой**. Ось, на которой расположен фокус, называется **фокальной осью**. Расстояние p от фокуса до директрисы называется **параметром параболы**.

Дополнение. Если фокальную ось параболы принять за ось OY , то уравнение параболы запишется в виде

$$x^2 = 2py. \quad (1.22)$$

ПРИМЕР 1.8. Найти фокус и уравнение директрисы параболы $y^2 = 24x$.

Решение. Так как каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$, то

$2p = 24$. Следовательно, $p = 12$, а $\frac{p}{2} = 6$. Фокус параболы расположен в точке

$F(6;0)$. Директриса имеет уравнение $x = -\frac{p}{2} = -6$.

Уравнение параболы, ось симметрии которой параллельна оси абсцисс, вершина которой находится в точке $O'(x_0; y_0)$, а ее параметр равен p , имеет вид

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0). \quad (1.26)$$

Если же ось параболы параллельна оси ординат, то

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0). \quad (1.27)$$

3. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Понятие множества является одним из основных неопределяемых понятий математики. Под **множеством** понимают совокупность некоторых объектов, объединенных в одно целое по какому-либо признаку. Так, можно говорить о множестве студентов университета, о множестве корней уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$, о множестве целых чисел и т.д.

Объекты, из которых состоит множество, называют его **элементами**. Множество принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита $A, B, \dots, X, Y, \dots$, а их элементы – малыми буквами $a, b, \dots, x, y, \dots$.

Если элемент x принадлежит множеству X , то записывают $x \in X$; запись $x \notin X$ или $x \notin X$ означает, что элемент x не принадлежит множеству X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом $\emptyset$.

Множество задается двумя способами: перечислением и описанием. Например, запись $A = \{2, 4, 10\}$ означает, что множество A состоит из трех чисел 2, 4 и 10; запись $X = \{x : 0 \leq x \leq 3\}$ означает, что множество X состоит из всех действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $0 \leq x \leq 3$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество A называется подмножеством множества B , если каждый элемент множества A является элементом множества B . Символически это обозначают так: $A \subset B$. (A содержится в B).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Два множества A и B называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов, и пишут $A = B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Объединением или суммой множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из этих множеств. Объединение множеств обозначают $A \cup B$ (или $A + B$). Кратко можно записать $A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пересечением или произведением множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит множеству A и множеству B . Пересечение множеств обозначают $A \cap B$ (или $A \cdot B$). Кратко можно записать $A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Разностью множеств A и B называется множество, каждый элемент которого является элементом множества A и не является элементом множества B . Разность множеств обозначают A / B . По определению $A / B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Множества, элементами которых являются числа, называются числовыми. Примерами числовых множеств являются:

$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ – множество натуральных чисел;

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots\}$ – множество целых чисел;

$$Q = \left\{ \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} - \text{множество рациональных чисел};$$

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел. Множество $\mathbb{R}$ содержит рациональные и иррациональные числа. Всякое рациональное число выражается или конечной десятичной дробью, или бесконечной периодической дробью. Так, $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{1}{3} = 0,333\dots$ – рациональные числа.

Иррациональное число выражается бесконечной непериодической десятичной дробью. Так, $\sqrt{2} = 1,4142356\dots$, $\pi = 3,1415926\dots$ – иррациональные числа.

Введем некоторые наиболее часто встречающиеся подмножества множества действительных чисел $\mathbb{R}$. Пусть a и b – действительные числа, причем $a < b$. Тогда

$[a; b] = \{x : a \leq x \leq b\}$ – отрезок (сегмент, замкнутый промежуток);

$(a; b) = \{x : a < x < b\}$ – интервал (открытый промежуток);

$[a; b) = \{x : a \leq x < b\}$,

$(a; b] = \{x : a < x \leq b\}$ – полуоткрытые интервалы;

$(-\infty; b] = \{x : x \leq b\}$, $[a; +\infty) = \{x : x \geq a\}$,

$(-\infty; \infty) = \{x : -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$ – бесконечные интервалы.

Пусть x_0 – любое действительное число.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Окрестностью точки x_0 называется любой интервал $(a; b)$, содержащий точку x_0 . В частности, интервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется ε – окрестностью точки x_0 . Число x_0 называется центром, а число ε – радиусом.

Если $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, то выполняется неравенство $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, или, что то же, $|x - x_0| < \varepsilon$. Выполнение последнего означает попадание точки x в ε – окрестность точки x_0 .

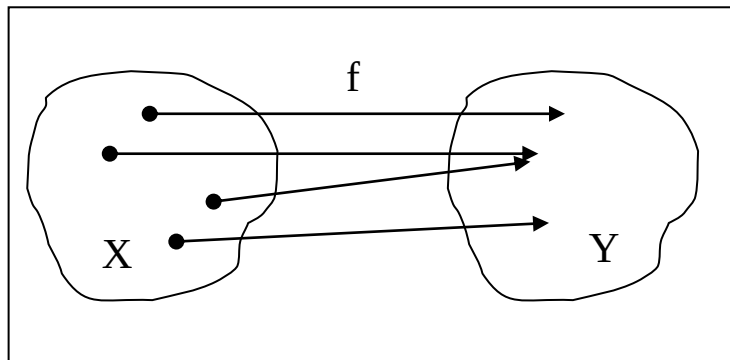
ФУНКЦИЯ

Понятие функции

Понятие функции является одним из основных понятий математики. С помощью этого понятия выявляются зависимости (связи) между элементами двух множеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть даны два непустых множества X и Y . Соответствие f , которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один единственный элемент $y \in Y$, называется функцией и записывается $y = f(x)$, $x \in X$ или $f : X \rightarrow Y$.

Говорят еще, что функция f отображает множество X на множество Y .



Множество X называется областью определения функции f и обозначается $D(f)$. Множество всех $y \in Y$ называется множеством значений функции f и обозначается $E(f)$.

Числовые функции. Способы задания функций

Пусть задана функция $f : X \rightarrow Y$. Если элементами множеств X и Y являются действительные числа, то функцию f называют **числовой функцией**. В дальнейшем мы будем изучать только числовые функции и их записывать: $y = f(x)$.

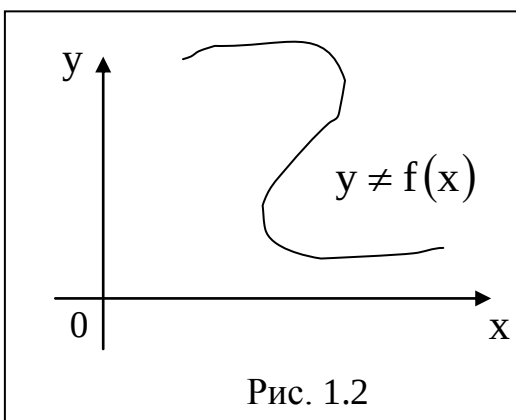
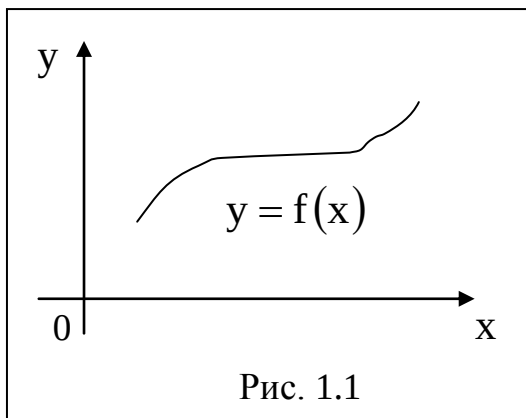
Переменная x называется аргументом или независимой переменной, а y — функцией или зависимой переменной.

Пусть каждой паре чисел x и y , где $y = f(x)$, поставлена в соответствие точка (x, y) координатной плоскости. Множество всех точек (x, y) плоскости таких, что $x \in D(f)$ и $y \in E(f)$, называется **графиком функции**.

В зависимости от характера соответствия f различают функции, заданные таблично, графически и аналитически.

Табличный способ задания функции заключается в перечислении значений аргумента и соответствующих значений функции. Такой способ задания функции особенно часто встречается в различных справочниках. Например, таблицы значений тригонометрических функций, логарифмические таблицы и т.д.

На практике часто приходится пользоваться таблицами значений функций, полученных опытным путем или в результате наблюдений.



При графическом способе задается график функции. Преимуществом графического задания является его наглядность, недостатком — его неточность. Следует заметить, что далеко не всякая линия является графиком функции (рис. 1.2).

При аналитическом способе функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений.

$$\text{Например, } y = x^3; \quad y = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{при } x < 0; \\ x - 1 & \text{при } x \geq 0; \end{cases} \quad y^2 - 4x + 5 = 0.$$

Рассмотрим простейшие свойства функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T > 0$, что для всех x из области определения, числа $x \pm T$ также принадлежат области определения и справедливо равенство $f(x \pm T) = f(x)$.

При этом наименьшее из чисел T называют *периодом* функции. Если T – период функции, то всякое число nT , где $n = \pm 1; \pm 2, \dots$ также является периодом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $y = f(x)$, область определения которой симметрична относительно нуля и для каждого x из области определения $f(-x) = f(x)$, называется *четной*; *нечетной* – если $\forall x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат, а нечетной – симметричен относительно начала координат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть функция $y = f(x)$ определена в области D . Если для любых $x_1, x_2 \in X \subset D(f)$, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется *возрастающей* на множестве X ; если же $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функция называется *неубывающей* на множестве X ; если $f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется *убывающей* на множестве X ; если же $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функция называется *невозрастающей* на множестве X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функции только возрастающие (неубывающие) или только убывающие (невозрастающие) на множестве X называются *монотонными* на этом множестве.

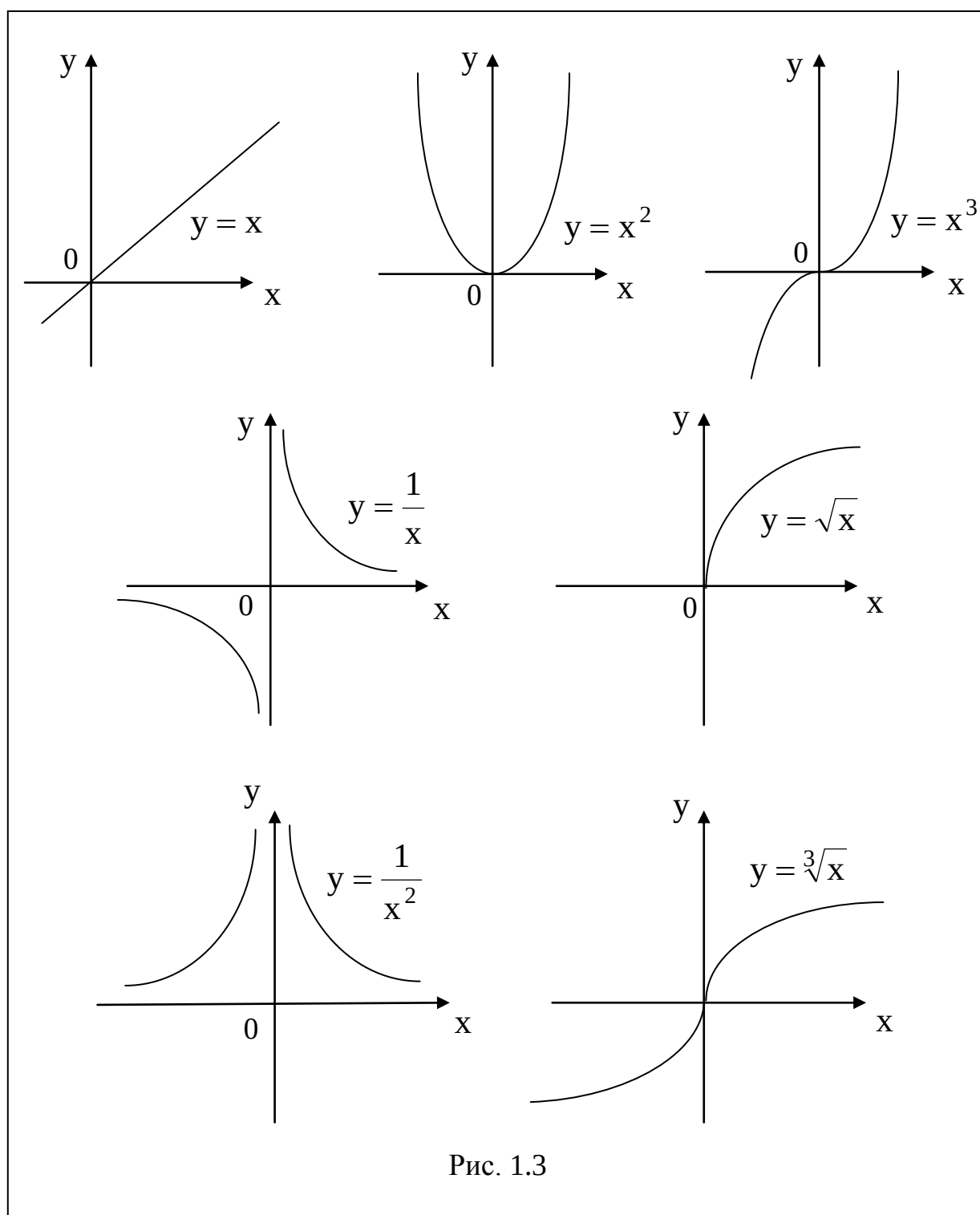
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* на множестве X , если существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$.

Например, функция $y = \sin x$ является ограниченной на всей числовой прямой ($|\sin x| \leq 1$), а функция $y = 2x + 5$ не ограничена на $\mathbb{R}$.

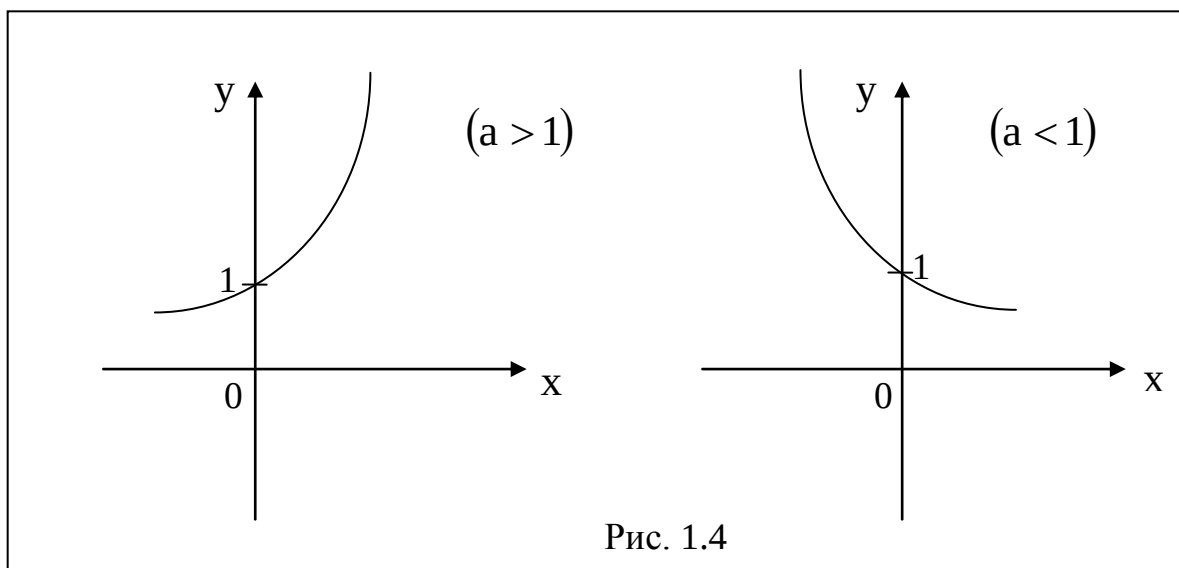
Основные элементарные функции и их графики

1. Степенная функция $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

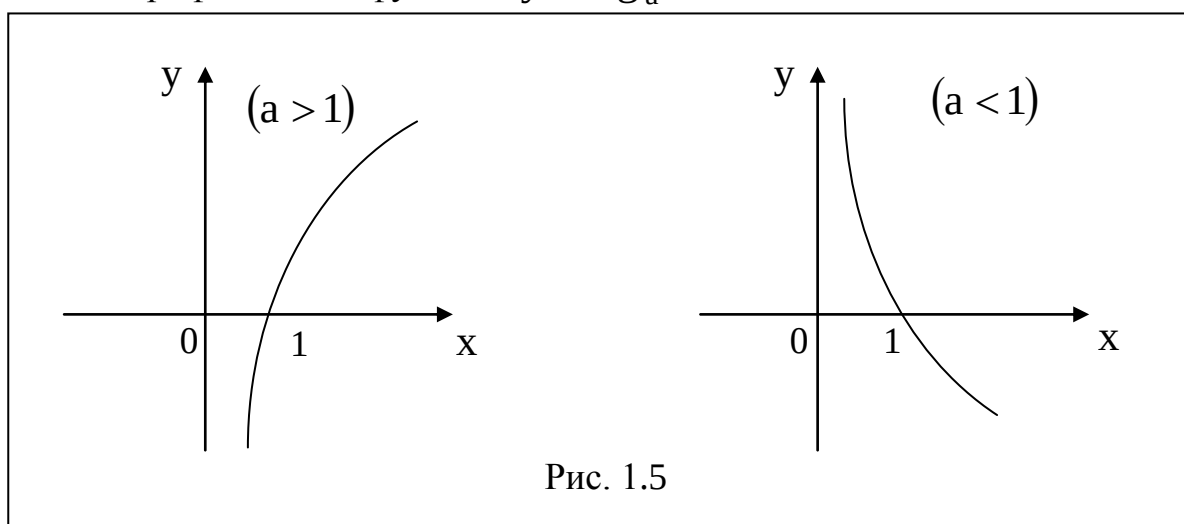
Графики степенных функций, соответствующих различным показателям степени, представлены на рис. 1.3.



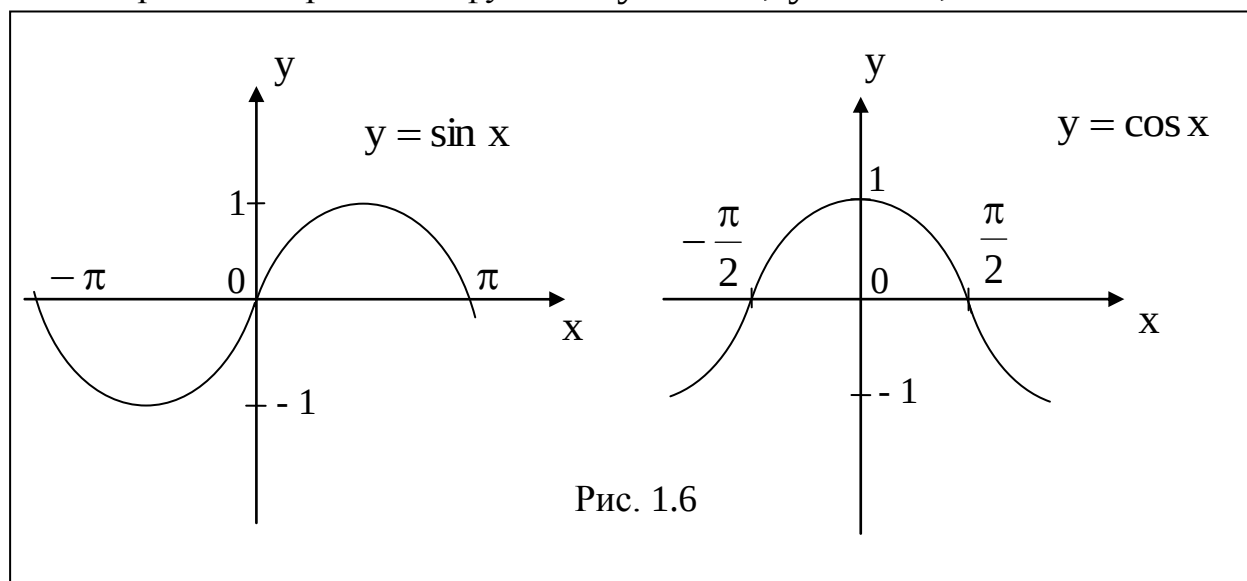
2. Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$;



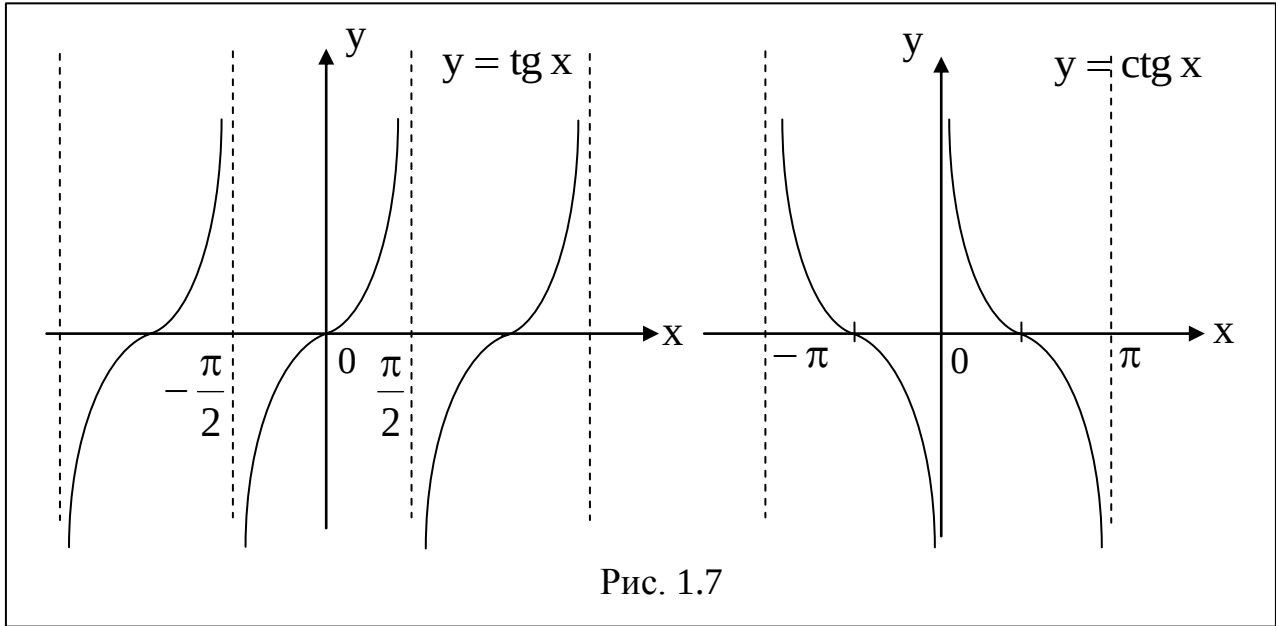
3. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;



4. Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$,



$$y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$$



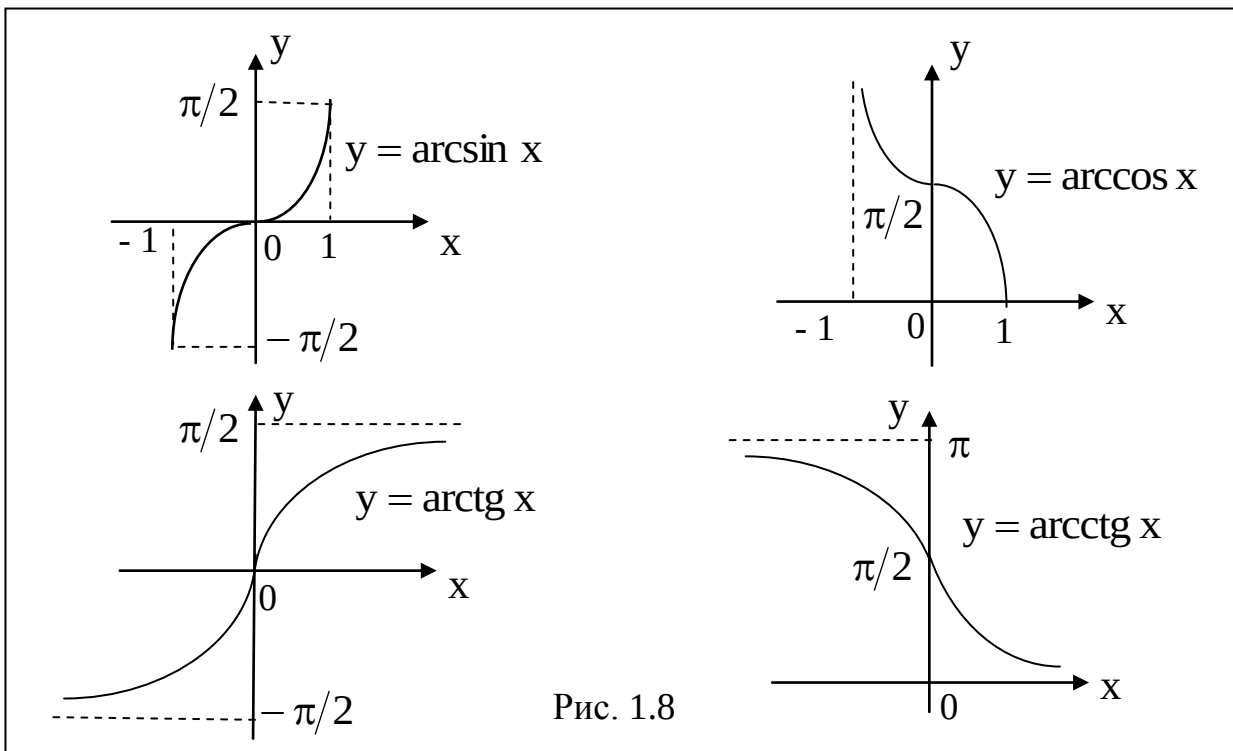
5. Обратные тригонометрические функции

$$y = \arcsin x, \quad D(f) = [-1; 1], \quad E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$y = \arccos x, \quad D(f) = [-1; 1], \quad E(f) = [0; \pi];$$

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad D(f) = \mathbb{R}, \quad E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y = \operatorname{arcctg} x, \quad D(f) = \mathbb{R}, \quad E(f) = (0; \pi).$$



Функция, задаваемая одной формулой, составленной из основных элементарных функций и постоянных величин с помощью конечного числа арифметических операций сложения, вычитания, умножения, деления и операций взятия функции от функции, называется **элементарной функцией**.

Примерами элементарных функций являются:

$y = ax + b$ - линейная функция $a, b \in \mathbb{R}$;

$y = ax^2 + bx + c$ - квадратичная функция $a, b, c \in \mathbb{R}$;

$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ - целая рациональная функция или многочлен степени n $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$;

$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}$, $a_0, a_n, b_0, \dots, b_m \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}$ -

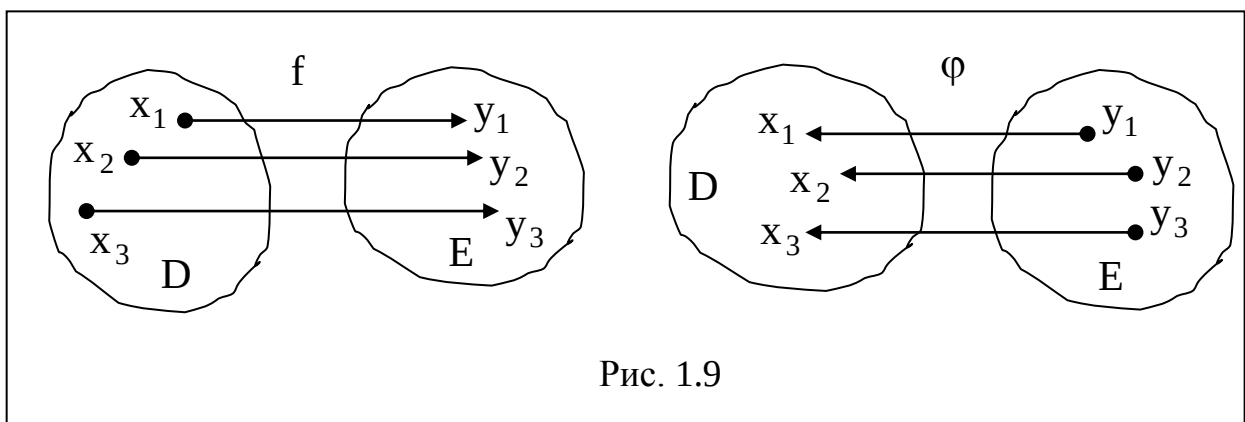
дробно-рациональная функция; частным случаем дробно-рациональной функции является дробно-линейная функция $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Примерами неэлементарных функций могут служить

$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, \quad y = |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Обратная функция

Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения D и множеством значений E . Тогда каждому значению $x \in D$ соответствует единственное значение $y \in E$. Пусть, в свою очередь, каждому значению $y \in E$ соответствует единственное значение $x \in D$, тогда мы получаем новую функцию $x = \varphi(y)$ с



областью определения E и множеством значений D (рис. 1.9).

Такая функция $\varphi(y)$ называется обратной к функции $f(x)$.

Из определения вытекает, что для функции $y = f(x)$ существует обратная функция тогда и только тогда, когда соответствие f между множествами D и E является взаимно однозначным. Отсюда следует, что любая строго монотонная функция имеет обратную.

Чтобы найти функцию $x = \varphi(y)$, обратную к функции $y = f(x)$, достаточно решить уравнение $f(x) = y$ относительно x (если это возможно).

ПРИМЕР 1.1. Для функции $y = 3x + 5$ обратной функцией является $x = \frac{1}{3}y - \frac{5}{3}$.

ПРИМЕР 1.2. Для функции $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$ обратной функцией является $x = \sqrt{y}$, $y \in [0; +\infty)$; заметим, что для функции $y = x^2$, заданной в промежутке $(-\infty; \infty)$, обратной не существует, так как одному значению y соответствуют два значения x .

Графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ симметричны относительно прямой $y = x$.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ПРОИЗВОДНЫЕ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

$$\begin{aligned} \text{Имеем } \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \\ &= \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}}. \end{aligned}$$

Перейдя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \left| \begin{array}{l} \frac{\Delta x}{x} = \alpha, \Delta x = \alpha \cdot x \\ \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow 0 \end{array} \right| = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \log_a (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha x}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{x} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \log_a (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \\ &= \frac{1}{x} \log_a e, \text{ то есть } (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e. \end{aligned}$$

Здесь воспользовались вторым замечательным пределом. Если $a = e$, то

$$\log_e x = \ln x \text{ и } (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

Логарифмируя равенство $y = a^x$, получим $\ln y = x \ln a$. Дифференцируя полученное равенство по переменной x по правилу дифференцирования неявной функции, получим $\frac{1}{y} \cdot y' = \ln a \Rightarrow y' = y \ln a$ или $y' = a^x \ln a$. Итак,

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Если основание $a = e$, то $\ln e = 1$ и мы получим формулу $(e^x)' = e^x$.

ПРИМЕР 1.9. Найти производную функции $y = \ln(e^x - x^5 + 1)$.

$$\text{Решение: } y' = \frac{1}{e^x - x^5 + 1} \cdot (e^x - x^5 + 1)' = \frac{e^x - 5x^4}{e^x - x^5 + 1}.$$

Степенная функция $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Логарифмируя равенство $y = x^\alpha$, получим $\ln y = \alpha \ln x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = \alpha \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \alpha \cdot \frac{y}{x} = \alpha \cdot \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}, \text{ то есть } (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Отметим, что производные тригонометрических и обратных тригонометрических функций были нами рассмотрены ранее.

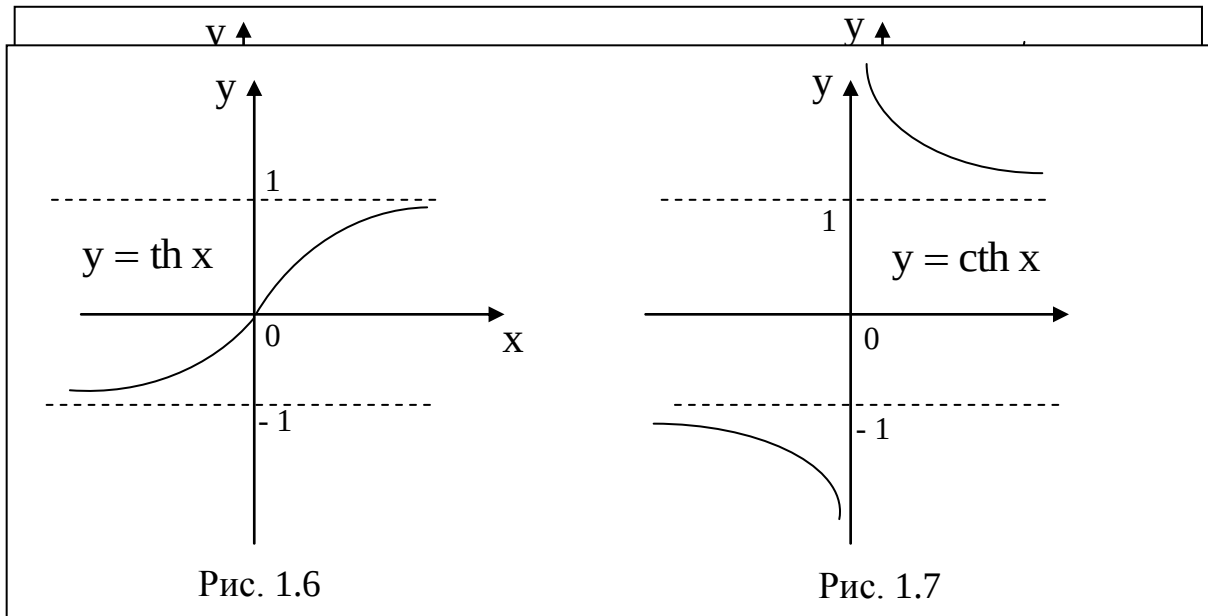
Производные гиперболических функций

Гиперболические функции определяются следующими формулами:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ — гиперболический синус;}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ — гиперболический косинус;}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \text{ — гиперболический тангенс и котангенс.}$$



Найдем производные этих функций

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \text{ то есть } (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x, \text{ то есть } (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \cdot \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \cdot (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \text{ то}$$

$$\text{есть } (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \right)' = \frac{(\operatorname{ch} x)' \cdot \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \cdot (\operatorname{sh} x)'}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \text{ то}$$

$$\text{есть } (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

В последних двух формулах мы воспользовались зависимостью $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, которая легко получается из определения гиперболических функций.

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

Правила дифференцирования

$$1. (u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$2. (u \cdot v)' = u'v + uv';$$

$$3. \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

4. $y' = y'_u \cdot u'_x$, если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ (дифференцирование сложной функции);

5. $y'_x = \frac{1}{x'_y}$, если $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ (дифференцирование обратной функции).

Формулы дифференцирования

$$1. (C)' = 0;$$

$$2. (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1};$$

$$3. (a^x)' = a^x \cdot \ln a;$$

$$4. (e^x)' = e^x;$$

$$5. (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a};$$

$$10. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$11. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$12. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$13. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$14. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$6. (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$7. (\sin x)' = \cos x;$$

$$8. (\cos x)' = -\sin x;$$

$$9. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$15. (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$$

$$16. (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$17. (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$18. (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

5. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Краткая историческая справка

Математика занимается изучением математических моделей реальных явлений. Явления окружающего нас мира можно условно разделить на закономерные (причинно-следственные) и случайные.

Закономерные явления – это явления, исход которых однозначно определяется некоторыми условиями. Примером успешно работающей математической модели закономерных явлений является механика, построенная на системе законов Ньютона. Основу математического аппарата таких моделей составляет теория дифференциальных уравнений.

Случайные явления – это явления, исход которых неоднозначен при повторении опытов с сохранением условий их проведения. К неоднозначности исхода приводит влияние большого числа случайных факторов, каждый из которых сам по себе не может изменить результат опыта. Примеры: броуновское движение, выпадение герба или решки при бросании монеты, рассеивание снарядов при стрельбе по цели и т.д.

Между случайными и закономерными явлениями нет четкой границы. В силу всеобщей связи и взаимозависимости любое явление подвержено влиянию множества случайных факторов, и в этом смысле все явления можно считать случайными. В некоторых случаях действием случайных факторов можно пренебречь, и мы приходим к закономерному явлению. В тех же случаях, когда для правильного описания явления необходимо учитывать действие случайных факторов, мы имеем дело со случайным явлением.

А есть ли вообще закономерности у случайных явлений? Такие закономерности есть, но они обнаруживаются лишь при массовом (многократном) наблюдении случайного явления в одинаковых (однородных) условиях, носят иной, чем для закономерных явлений, характер и нуждаются для своего описания в ином математическом аппарате.

Итак, предметом теории вероятностей является изучение закономерностей массовых однородных случайных явлений, а теория вероятностей – это раздел математики, изучающий математические модели случайных явлений. Теория вероятностей, как и другие разделы математики, возникла из потребностей практики.

Зарождение теории вероятностей относится к середине XVII века и связано с именами Гюйгенса (1629 – 1695), Паскаля (1623 – 1662), Ферма (1601 – 1665) и Якоба Бернулли (1654 – 1705), которые исследовали закономерности, присущие азартным играм.

Потребности естествознания и общественной практики (теория ошибок наблюдений, задачи теории стрельбы, проблемы страхования и демографии) привели к дальнейшему развитию теории вероятностей. Важную роль в развитии аналитических методов теории вероятностей сыграли Муавр (1667 – 1754), Лаплас (1749 – 1827), Гаусс (1777 – 1855), Пуассон (1781 – 1840).

С середины XIX века развитие теории вероятностей в значительной мере связано с именами русских ученых: П.Л.Чебышева (1821 – 1894), А.А.Маркова (1856 – 1922), А.М.Ляпунова (1857 – 1918).

Большой вклад в развитие теории вероятностей внесли советские математики С.Н.Бернштейн (1880 -1968), А.Н.Колмогоров (1903 – 1987), А.Я. Хинчин (1894 – 1959). Отечественная теория вероятностей занимает ведущее положение в мире.

Методы теории вероятностей широко применяются в современной физике, астрономии, электротехнике, радиоэлектронике, теории автоматического регулирования, геодезии, теории надежности, теории информации, теории массового обслуживания, биологии, экономике, медицине и т.д.

Испытания и события. Классификация событий

Как любая наука, теория вероятностей имеет свои исходные понятия, через которые определяются другие понятия. К основным понятиям теории вероятностей относятся: испытание, событие, вероятность события.

Изучение явлений происходит путем наблюдений и опытов, проводимых при определенных условиях. Испытанием в теории вероятностей называется осуществление какого-либо комплекса условий, при котором наблюдается данное явление. Предполагается, что данный комплекс условий может быть воспроизведен сколь угодно большое число раз. Итак, в теории вероятностей вместо слов “произведено наблюдение при осуществлении определенного комплекса условий” говорят кратко “произведено испытание”.

Событием называется всякий факт, который может наступить в результате испытания.

Примеры:

- 1) бросание монеты - испытание, выпадение герба – событие;
- 2) стрельба по цели – испытание, промах – событие;
- 3) бросание игральной кости – испытание, выпало пять очков – событие.

События можно классифицировать по степени возможности их появления и по характеру взаимосвязи.

Достоверным называется *событие*, которое в данном испытании всегда наступает, его обозначают U или Ω .

Невозможным называется *событие*, которое в данном испытании никогда не наступает, его обозначают V или $\emptyset$.

Случайным называется *событие*, которое в данном испытании может наступить, а может не наступить. Случайные события обозначают заглавными буквами латинского алфавита $A, B, C, \dots$

Примеры:

1) В урне три белых и пять красных шаров. Из урны наугад извлекается один шар – испытание.

События: $A = \{\text{шар красный}\}$ – случайное;
 $B = \{\text{шар синий}\}$ – невозможное;
 $C = \{\text{шар красный или белый}\}$ – достоверное.

2) По цели произведен пуск двух ракет – испытание.

События: $A = \{\text{попадание в цель не более двух ракет}\}$ – достоверное;

$B = \{ \text{попадание в цель трех ракет} \}$ – невозможное;

$C = \{ \text{одно попадание в цель} \}$ – случайное.

События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других событий в данном испытании. В противном случае события называются совместными. Примеры несовместных событий: появление герба и цифры при одном бросании монеты, попадание и промах при одном выстреле. Те же попадание и промах при двух выстрелах являются уже совместными событиями.

Несколько событий образуют полную группу событий, если в результате испытания обязательно наступит хотя бы одно из них. В частности, если события образуют полную группу и несовместны, то в результате испытания появится одно и только одно из этих событий.

Суммой событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.

$$B = A_1 + A_2 + \dots + A_n.$$

Произведением событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

$$C = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n.$$

Относительная частота события, свойства

Вероятность события – числовая величина, характеризующая степень объективной возможности наступления события. В обыденной речи часто используем выражения: «более вероятно», «менее вероятно», «невероятно», «достоверно». Чтобы подобные высказывания сделать строгими, в теории вероятностей каждому событию по определенным правилам приписывается некоторое число, которое характеризует объективную возможность наступления этого события. Следует отметить, что не существует общего определения вероятности, позволяющего сразу находить ее числовые значения. О существовании вероятности как меры объективной возможности наступления события говорит практика.

Пусть произведена серия из n испытаний в одинаковых условиях, в каждом из которых могло появиться или не появиться событие A .

Частотой (относительной частотой) события A называется отношение числа испытаний m , в которых событие A появилось, к числу всех испытаний n :

$$P^*(A) = m/n. \quad (1.1)$$

Экспериментально установлено, что частота обладает свойством устойчивости. Это свойство заключается в том, что частота мало меняется от серии к серии при большом числе испытаний в серии n , колеблясь около некоторого числового значения. В качестве примера приведём результаты испытаний с монетой, в которых подсчитывали число появлений гербов.

Испытатель	Число	Число появления	Частота
------------	-------	-----------------	---------

	испытаний n	герба m	$P^*(A)$
Бюффон	4040	2048	0,5069
I серия (Пирсон)	12000	6019	0,5016
II серия	2400	12012	0,5005

Из приведенного примера следует, что частоты выпадения герба группируются около числа $P=0,5$, тем меньше отличаясь от него, чем больше n . Число $P=0,5$ принимают за вероятность выпадения герба при одном бросании монет.

Классическое определение вероятности

В некоторых простейших случаях вероятности событий можно вычислять непосредственно, исходя из условий испытания. Для этого нужно, чтобы различные исходы испытания обладали симметрией и в силу этого были объективно одинаково возможными.

События называют **равновозможными** в данном испытании, если по условиям симметрии есть основание считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

События, образующие полную группу несовместных и равновозможных событий, назовем случаями (шансами). Про испытания, исходы которых образуют полную группу попарно несовместных и равновозможных событий, говорят, что они сводятся к “схеме случаев” или “схеме урн”.

По отношению к любому событию, связанному с данным испытанием, случаи делятся на благоприятные, при наступлении которых это событие происходит, и неблагоприятные при наступлении которых это событие не происходит.

Вероятностью $P(A)$ события A называется отношение числа случаев $N(A)$ благоприятных A к общему числу случаев $N(\Omega)$:

$$P(A) = N(A)/N(\Omega) \quad (1.2)$$

Формула (2) дает классическое определение вероятности.

Так как $0 \leq N(A) \leq N(\Omega)$, то классическое определение вероятности обладает всеми свойствами частоты, а следовательно, и статистической вероятности:

$$1. \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$2. \quad P(\Omega) = 1$$

$$3. \quad P(\emptyset) = 0$$

$$4. \quad P(A+B) = P(A) + P(B),$$

где A и B – несовместные события.

$$5. \quad P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B), \quad \text{где } P(A/B) \text{ и } P(B/A) \text{ – условные вероятности.}$$

Пример 1.1. В урне находится 2 белых и 3 красных шара.

Из урны наугад извлекается шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение. Событие A – извлечение белого шара.

$N(\Omega) = 5$ – общее число случаев, $N(A) = 2$ – число случаев, благоприятных A .

По формуле (2) имеем

$$P(A)=2/5.$$

Пример 1.2. Монета бросается один раз. Событие A – выпал герб. Найти $P(A)$.

Решение. $N(\Omega) = 2$; $N(A)=1$ $P(A)=1/2=0.5$ ($p=0.5$).

Преимуществом классического определения является то, что с его помощью вероятность можно вычислять непосредственно по формуле до опыта. Недостаток классического определения состоит в том, что оно применимо, только когда имеет место «схема случаев». Задачи, при решении которых можно исходить из соображения симметрии, встречаются на практике весьма редко.

Элементы комбинаторики

Комбинаторика изучает количества комбинаций (наборов), подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов заданного конечного множества. При непосредственном вычислении вероятностей формулы комбинаторики часто используются. Из конечного множества $E=\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, состоящего из n различных элементов, можно образовывать различные наборы, состоящие из m ($m \leq n$) элементов.

Перестановками из n различных элементов называются наборы, содержащие по n элементов и отличающиеся только порядком их расположения (упорядоченные наборы без повторений из n элементов по n). Число всех таких перестановок обозначают P и определяют по формуле

$$P = n!, \text{ где } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \text{ (} n \text{ - факториал).} \quad (1.3)$$

Конечное множество называется упорядоченным, если его элементы перенумерованы некоторым образом. Каждое упорядочение заключается в том, что какой-то элемент получает номер 1, какой-то – номер 2, ..., какой-то номер – n . Номер 1 может получить любой элемент множества E ; значит, выбор первого элемента можно произвести n способами. Если первый элемент выбран, то на второе место остается лишь $(n-1)$ кандидат, так как повторить сделанный выбор нельзя. Третий элемент можно выбрать $(n-2)$ способами и т.д. Последний элемент можно выбрать лишь одним способом, он и займет n -е место. Общее число способов упорядочения равно:

$$n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n! \Rightarrow P_n = n$$

Здесь мы воспользовались правилом произведения: если элемент x можно выбрать m способами, а элемент y можно выбрать n способами, то упорядоченную пару (x, y) можно выбрать $m \cdot n$ способами.

Пример 1.3 Сколькими способами можно трех студентов рассадить на трех стульях?

Решение. Искомое число: $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Размещениями называются наборы из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком (упорядоченные наборы без повторений из n элементов по m). Число всех размещений равно:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1) = n! / (n-m)! \quad (1.4)$$

Пример 1.4 Сколькими способами из 7 студентов группы можно отобрать для участия в олимпиадах по математике и физике по одному студенту.

Решение. $A_7^2 = 7 \cdot 6 = 42$.

Сочетаниями называются наборы, составленные из n различных элементов по m (неупорядоченные наборы без повторений из n элементов по m). Их число обозначается C_n^m . Так как каждый набор можно упорядочить $P_m = m!$ способами, то имеем

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m, \text{ откуда получаем } C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (1.5)$$

Пример 1.5 Сколькими способами из 6 студентов можно отобрать для участия в соревнованиях 2 студента?

Решение. $C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{4!5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 4!} = 15.$

Для чисел C_n^m , называемых также биномиальными коэффициентами, справедливы следующие тождества, часто оказывающиеся полезными при решении задач.

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$ (свойства симметрии)
2. $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}, C_n^0 = 1$ (рекуррентное соотношение)
3. $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$ (следствие биннома Ньютона).

Если выбор m элементов из n различных элементов производится с возвращением (отобранный элемент возвращается в исходное множество и может быть снова выбран – схема выбора с возвращением) и с упорядочиванием, то различные наборы будут с повторениями, отличаясь либо составом элементов, либо порядком их следования. Получаемые в результате комбинации называются размещениями с повторениями, а их общее число определяется формулой

$$\bar{A}_n^m = n^m. \quad (1.6)$$

Если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т.д., то число перестановок с повторениями определяются формулой

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}, \quad (1.7)$$

где $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Число сочетаний с повторениями из n элементов по m равно числу сочетаний без повторений из $n+m-1$ элементов по m элементов, т.е.

$$(C_n^m)_{\text{с повт.}} = C_{n+m-1}^m. \quad (1.8)$$

При решении задач комбинаторики используют следующие правила.

Правило суммы. Если некоторый объект A может быть выбран из множества объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A , либо B можно $m+n$ способами.

Правило произведения. Если объект A можно выбрать из множества объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot n$ способами.

Пример 1.6 Кодовый замок имеет четыре диска, посаженных на одну ось. Каждый диск разбит на сектора с номерами 0, 1, 2, 3, 4. Замок открывается при установке одной определенной комбинации цифр. Найти вероятность того, что в результате набора наугад цифровой комбинации в окне замка он откроется.

Решение. Имеем схему урн. Общее число случаев равно числу размещений с повторениями из 5 элементов по 4, т.е. $N(\Omega)=5^4$.

Событие А – замок открылся. Этому событию благоприятен лишь один случай $N(A)=1$. Поэтому $P(A)=1/5^4=0,0016$.

Пример 1.7 Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр 1; 1; 1; 2; 2; 2?

Решение. Здесь нужно найти число перестановок с повторениями, которое определяется формулой (1.7). При $k=2$, $n_1=3$, $n_2=3$, $n=6$ по формуле получаем

$$P(3;3) = 6!/(3! \cdot 3!) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 / (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3) = 20.$$

Пример 1.8 Из букв слова РОТОР, составленного с помощью разрезной азбуки, наудачу последовательно извлекают 3 буквы и складывают в ряд. Какова вероятность того, что получится слово ТОР?

Решение. Чтобы отличить одинаковые буквы друг от друга, снабдим их номерами: r_1, r_2, o_1, o_2 . Общее число случаев равно: $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Слово “тор” получится в случаях ($to_1r_1, to_1r_2, to_2r_1, to_2r_2$). Искомая вероятность равна

$$P=4/60=1/15.$$

При подсчете числа благоприятных случаев воспользовались правилом произведения: букву “т” можно выбрать одним способом, букву “о” – двумя, букву “р” – двумя способами.

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература:

1. Баврин, И.И. Математический анализ 2-е изд., испр. и доп. учебник и практикум для спо / И.И. Баврин. – Люберцы: Юрайт, 2016. – 327 с.
2. Беклемишева Л.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре /Л. А. Беклемишева, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров; под ред. Д. В. Беклемишева. – Изд. 2-е, перераб. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 494 с.
3. Будаев В.Д. Математический анализ. Функции одной переменной: учебник / В.Д. Будаев, М.Я. Якубсон – СПб.: Лань, 2012. – 544 с.
4. Виленкин Н.Я. Комбинаторика/ Н.Я. Виленкин. – М.: Наука, 1975. – 208 с.
5. Горлач Б.А. Математический анализ: учебное пособие / Б.А. Горлач. – СПб.: Лань, 2013. – 308 с.
6. Горлач Б.А. Математический анализ / Б.А. Горлач. – СПб.: Лань, 2013. – 608 с.
7. Лисичкин В.Т. Математика в задачах с решениями: учеб. пособие / В. Т. Лисичкин, И. Л. Соловейчик. – Изд. 3-е; стереотип. – СПб.: Лань, 2011. – 463 с.
8. Петрушко И.М. Сборник задач по алгебре, геометрии и началам анализа: учебное пособие/И. М. Петрушко, В. И. Прохоренко, В. Ф. Сафонов. – Изд. 2-е, испр. – СПб.:Лань, 2007. – 574 с.
9. Спирина М.С. Дискретная математика: учебник для среднего профессионального образования/М. С. Спирина, П. А. Спирин. – 4-е изд., испр. – М.:Академия, 2007. – 367 с.

Дополнительная литература:

1. Бугров Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учеб. для вузов/ Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М.: Наука, 1988. – 432 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальные и интегральные исчисления в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука. Т.1. – 13-е изд. – 1985. – 432 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальные и интегральные исчисления в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука. Т.2. – 13-е изд. – 1985. – 560 с.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа [Текст] : учеб. пособие для вузов / Г. Н. Берман. – 20-е изд. – М. : Наука, 1985. – 384 с.