Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уфимский государственный нефтяной технический университет»
Кафедра математики

Элементы общей теории динамических систем

Учебно-методическое пособие
к самостоятельной работе обучающихся

Уфа 2018

Данное учебно-методическое пособие предназначено для магистров горно-нефтяного факультета по направлению подготовки 21.04.01 «Нефтегазовое дело».

В пособии представлен краткий теоретический и справочный материал по дисциплине «Общая теория динамических систем», приведены решения типовых примеров, даны индивидуальные задания по вариантам (расчетно-графическая работа).

Составители: Гималтдинова А.А., к.ф.-м.н., доцент каф. математики
Мухаметзянов И.З., д.ф.-м.н., проф. каф. математики
Майский Р.А., к.т.н., доцент каф. математики

Рецензенты: Лазарев В.А., к.ф.-м.н., доцент каф. математики
Хайбуллин Р.Я., к.т.н., доцент каф. математики

Содержание

Введение

Одной из важных научных проблем естествознания является задача предсказания поведения изучаемого объекта (системы) во времени и в пространстве на основе определенных знаний о его начальном состоянии.

Динамическая система – любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния как совокупности некоторых величин в данный момент времени и задан закон, который описывает изменение (эволюцию) начального состояния с течением времени.

Динамические системы делятся на два типа – непрерывные и дискретные. Первые описывают эволюцию модели в зависимости от непрерывного времени и задаются, обычно, дифференциальными уравнениями (обыкновенными или в частных производных). Такие системы очень широко используются в науке и инженерном деле, поэтому мы уделим основное внимание именно им. В то же время дискретные системы, описывающие итерационные процессы, также оказываются полезными, поскольку дают простые примеры хаоса и служат инструментом анализа хаотических решений дифференциальных уравнений.

Наша задача состоит, прежде всего, в обсуждении поведения системы, зависящей исключительно от времени, поэтому мы будем иметь дело с обыкновенными дифференциальными уравнениями.

1. Основные теоретические сведения

1.1. Автономные динамические системы

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by, \\ \dot{y} = cx + dy, \end{cases} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где t – независимый аргумент (например, время), $x = x(t), y = y(t)$ – неизвестные функции. Системы вида (1) называются автономными, так как правые части уравнений не зависят явно от аргумента t.

Существует несколько способов построения общего решения системы (1). Рассмотрим два из них.

1 способ (метод исключения).

Сведем систему (1) к дифференциальному уравнению второго порядка. Для этого выразим из первого уравнения функцию

$$y = \frac{\dot{x} - ax}{b} \tag{2}$$

и подставим во второе уравнение:

$$\frac{\ddot{x} - a\dot{x}}{b} = cx + d \cdot \frac{\dot{x} - ax}{b},$$

$$\ddot{x} - (a+d)\dot{x} + (ad - bc)x = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) является линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - (a+d)k + (ad - bc) = 0. \tag{4}$$

Для уравнения (4) возможны случаи:

1) оно имеет два действительных различных корня k_1, k_2, тогда общее решение уравнения (3) имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2) два действительных совпавших корня $k_1 = k_2 = k$, тогда общее решение уравнения (3) имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{kt} + C_2 t e^{kt}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3) два комплексно-сопряженных корня $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \alpha, \beta \in R,$ тогда общее решение уравнения (3) имеет вид

$$x(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Функцию $y(t)$ найдем, используя соотношение (2). Тем самым будет получено общее решение системы (1).

2 способ (операционный метод).

Суть метода: при помощи преобразования Лапласа исходные («старые») функции (так называемые *оригиналы*) переходят в «новые» функции (*изображения*), при этом дифференциальные уравнения системы (1) заменяются так называемыми *операторными уравнениями*, которые являются алгебраическими (и потому намного проще решаются). Затем решение системы операторных уравнений при помощи обратного преобразования дает искомое решение системы дифференциальных уравнений (1). Более подробные сведения про преобразование Лапласа и его свойства можно найти в учебниках по теории функций комплексной переменной.

Итак, пусть искомые решения $x(t), y(t)$ являются оригиналами, обозначим их изображения соответственно $X(p)$, $Y(p)$ то есть $x(t) \rightleftarrows X(p)$, $y(t) \rightleftarrows Y(p)$. Здесь $X(p)$ – новая неизвестная функция, $p-$ новый аргумент. Знак $\rightleftarrows$ означает, что функции-оригиналу $x(t)$ соответствует функция-изображение $X(p)$, и наоборот. Найдем изображение левой и правой частей уравнений системы (1). Для этого используем утверждения об изображении производных:

$$x'(t) \rightleftarrows pX(p) - x(0) = pX(p) - C_1,$$
$$y'(t) \rightleftarrows pY(p) - y(0) = pX(p) - C_2.$$

Система (1) примет вид

$$\begin{cases} pX(p) - C_1 = aX(p) + bY(p), \\ pY(p) - C_2 = cX(p) + dY(p). \end{cases}$$

Найдем решение этой системы $X(p), Y(p)$, и с помощью таблицы оригиналов и изображений (см. таблицу 1 Приложения) найдем соответствующие им оригиналы $x(t), y(t)$, которые и будут искомым решением системы (1).

1.2. Элементы теории устойчивости

Наши представления об устойчивости динамической системы интуитивно формируются в процессе познания жизни. Первые шаги маленького ребенка дают ему вполне реальные представления об устойчивости при ходьбе, хотя они (представления) еще неосознанны. Взрослея, мы рассуждаем об устойчивости корабля в море, об устойчивости нашей нервной системы к стрессу и т. д. В каждом конкретном случае речь идет о свойствах, специфических для каждой системы. Однако есть общее, присущее любой системе. Устойчивость – это характер реакции динамической системы на малое возмущение ее состояния. Если сколь угодно малые изменения состояния системы начинают нарастать во времени, то система неустойчива. Если же малые возмущения затухают со временем, – система устойчива.

Существуют различные определения устойчивости, но наиболее часто используются: устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость.

Рассмотрим для простоты рассуждений систему двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = f_1(t, x, y), \\ \dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = f_2(t, x, y). \end{cases} \qquad (5)$$

Решение $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ системы (5), удовлетворяющее начальным условиям $\varphi(t_0) = \varphi_0, \psi(t_0) = \psi_0$, называется *устойчивым по Ляпунову,* если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ (зависящее от ε) такое, что для всякого другого решения $x=\varphi_1(t), y=\psi_1(t)$ системы (5), начальные значения которого удовлетворяют условиям

$$|\varphi_1(t_0)-\varphi_0|<\delta, \quad |\psi_1(t_0)-\psi_0|<\delta, \tag{6}$$

справедливы неравенства

$$|\varphi_1(t)-\varphi(t)|<\varepsilon, \quad |\psi_1(t)-\psi(t)|<\varepsilon \quad \text{для всех} \quad t>t_0. \tag{7}$$

Таким образом, устойчивость по Ляпунову означает, что близкие по начальным значениям решения остаются близкими для всех $t>t_0$.

Если при сколь угодно малом $\delta>0$ хотя бы для одного решения $x=\varphi(t)$ или $y=\psi(t)$ неравенство (7) не выполняется, то решение $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ называется *неустойчивым*.

Если кроме выполнения неравенств (7) при условиях (6) выполняются также условия

$$\lim_{t\to+\infty}|\varphi_1(t)-\varphi(t)|=0, \quad \lim_{t\to+\infty}|\psi_1(t)-\psi(t)|=0,$$

то решение $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ называется *асимптотически устойчивым*.

Исследование устойчивости любого решения $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ системы (5) можно привести к исследованию устойчивости нулевого (тривиального) решения. Для этого надо выполнить замену $x=\varphi(t)+\tilde{x}, y=\psi(t)+\tilde{y},$ тогда получим новую систему относительно функций $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)$ с тривиальным решением $\tilde{x}(t)\equiv 0, \tilde{y}(t)\equiv 0.$ Тогда устойчивость нулевого решения означает, что из условий $|\tilde{x}(t_0)|<\delta, |\tilde{y}(t_0)|<\delta$ следует $|\tilde{x}(t)|<\varepsilon, |\tilde{y}(t)|<\varepsilon$ при всех $t\geq t_0$.

Рассмотрим основные теоремы об устойчивости тривиального решения системы (5).

Теорема 1 (теорема Ляпунова об устойчивости). *Если существует дифференцируемая функция $v(x,y)$ (функция Ляпунова), удовлетворяющая в окрестности начала координат условиям:*

1) $v(x,y)\geq 0$, причем $v=0$ только в точке (0,0), т.е. функция $v(x,y)$ имеет строгий минимум в начале координат, *2)* $\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{\partial v}{\partial x}f_1(t,x,y)+\dfrac{\partial v}{\partial y}f_2(t,x,y)\le 0$ *при* $t\ge t_0$,

то тривиальное решение является устойчивым.

Пример 2. Исследовать на устойчивость тривиальное решение $x\equiv 0,\ y\equiv 0$ системы $\dfrac{dx}{dt}=-xy^4,\ \dfrac{dy}{dt}=yx^4.$

Рассмотрим функцию $v(x,y)=x^4+y^4$. Она удовлетворяет условиям теоремы 1, действительно:

1) $v(x,y)=x^4+y^4\ge 0,$ причем $v=0$ только в точке (0,0),

2) $\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}=4x^3(-xy^4)+4y^3(yx^4)\equiv 0$.

Следовательно, тривиальное решение устойчиво.

Теорема 2 (теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости). *Если существует дифференцируемая функция* $v(x,y)$, *удовлетворяющая условиям:*

1) $v(x,y)$ *имеет строгий минимум в начале координат:* $v(0,0)=0$,

2) $\dfrac{dv}{dt}\le 0$ *при* $t\ge t_0$, *причем вне сколь угодно малой окрестности начала координат производная* $\dfrac{dv}{dt}$ *отделена от нуля при* $t\ge t_0$, *т.е.* $\dfrac{dv}{dt}\le -\beta<0,$

то тривиальное решение является асимптотически устойчивым.

Пример 3. Исследовать на устойчивость тривиальное решение $x\equiv 0,\ y\equiv 0$ системы $\dfrac{dx}{dt}=-y-x^3,\ \dfrac{dy}{dt}=x-y^3.$

Рассмотрим функцию $v(x,y)=x^2+y^2$. Она удовлетворяет условиям теоремы 2, действительно:

1) $v(x,y)=x^2+y^2\ge 0,$ причем $v=0$ только в точке (0,0),

2) $\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}=2x(-y-x^3)+2y(x-y^3)=-2(x^4+y^4)\le 0$.

При этом вне окрестности начала координат выполняется $\frac{dv}{dt} \le -\beta < 0,$ следовательно, тривиальное решение асимптотически устойчиво.

Теорема 3 (теорема Четаева о неустойчивости). *Если существует дифференцируемая функция $v(x,y)$, удовлетворяющая условиям:*

1) в сколь угодно малой окрестности U начала координат существует область U_+, в которой $v > 0$, причем $v = 0$ на части границы области U_+, лежащей в U,

2) в области U_+ выполняется $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} f_1(t,x,y) + \frac{\partial v}{\partial y} f_2(t,x,y) > 0$,

причем в области $U_\alpha = \{(x,y) : v(x,y) > \alpha, \alpha > 0\}$ производная $\frac{dv}{dt}$ отделена от нуля при $t \ge t_0$, т.е. $\frac{dv}{dt} \ge \beta > 0,$

то тривиальное решение является неустойчивым.

Пример 4. Исследовать на устойчивость тривиальное решение $x \equiv 0, y \equiv 0$ системы $\frac{dx}{dt} = y^3 + x^5, \frac{dy}{dt} = x^3 + y^5.$

Рассмотрим функцию $v(x,y) = x^4 - y^4$. Она удовлетворяет условиям теоремы 3, действительно:

1) $v(x,y) > 0$ при $|x| > |y|$,

2) $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 4x^3(y^3 + x^5) - 4y^3(x^3 + y^5) = 4(x^8 - y^8) > 0$ при $|x| > |y|$, причем при $v \ge \alpha > 0$ выполняется $\frac{dv}{dt} \ge \beta > 0$, следовательно, тривиальное решение неустойчиво по теореме 3.

Далее рассмотрим исследование на устойчивость по первому приближению.

При исследовании на устойчивость тривиального решения $x \equiv 0, y \equiv 0$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = f_1(x, y), \\ \dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = f_2(x, y), \end{cases} \tag{8}$$

где $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ – дифференцируемые в окрестности начала координат функции, часто применяется следующий метод: функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ раскладываются по формуле Тейлора в окрестности начала координат, т.е. система (8) представляется в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = ax + by + R_1(x, y), \\ \dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + R_2(x, y), \end{cases}$$

где $R_i, i = 1, 2,$ – члены второго порядка малости относительно x и y. Тогда вместо системы (8) рассматривают *систему первого приближения*

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = ax + by, \\ \dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = cx + dy, \end{cases} \tag{9}$$

и исследуют на устойчивость тривиальное решение системы (9). Для этого сначала надо найти корни λ характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$, т.е. $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

Замечание. Отметим, что для систем с количеством уравнений $n > 2$ рассуждения будут аналогичны.

Теорема 4 (теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению). *Если все характеристические числа системы первого приближения (9) имеют отрицательные действительные части, то нулевое решение нелинейной системы (8) устойчиво асимптотически.*

Пример 5. Исследовать на устойчивость по первому приближению тривиальное решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sin x + 3y + x^5, \\ \dot{y} = 0,25x - 2y - 2y^2. \end{cases}$$

Система первого приближения имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y, \\ \dot{y} = 0,25x - 2y. \end{cases}$$

Ее характеристическое уравнение $\lambda^2 + 3\lambda + 1,25 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = -0,5, \lambda_2 = -2,5,$ поэтому по теореме 4 нулевое решение исходной нелинейной системы является асимптотически устойчивым.

Теорема 5 (теорема Ляпунова о неустойчивости по первому приближению). *Если среди характеристических чисел системы первого приближения (9) имеется хотя бы одно с положительной действительной частью, то нулевое решение нелинейной системы (8) неустойчиво.*

Теорема 6. *Если среди характеристических чисел системы первого приближения (9) нет чисел с положительными действительными частями, но есть хотя бы одно чисто мнимое число, то нулевое решение нелинейной системы (8) может быть как устойчиво, так и неустойчиво, в зависимости от влияния нелинейных частей* $R_i(x, y)$.

Пример 6. Рассмотрим две нелинейные системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -ay - x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = bx - y^3, \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -ay + x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = bx + y^3, \end{cases} \tag{11}$$

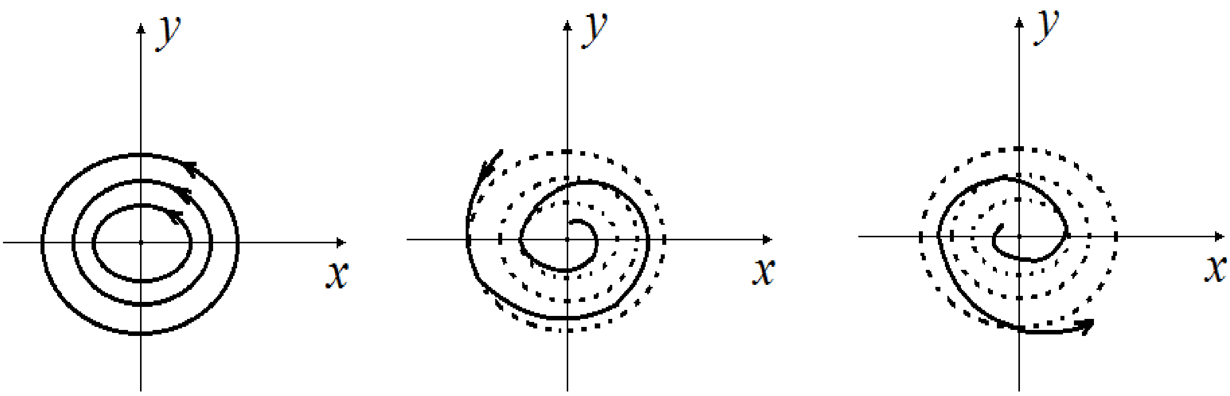
где $a > 0, b > 0.$

Тривиальное решение системы (10) является асимптотически устойчивым, так как функция $v(x,y)=bx^2+ay^2$ удовлетворяет условиям теоремы 2 Ляпунова об асимптотической устойчивости. С другой стороны, можно доказать, что тривиальное решение системы (11) является неустойчивым.

При этом для обеих систем (10) и (11) система первого приближения одна и та же:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-ay, \\ \dfrac{dy}{dt}=bx, \end{cases} \tag{12}$$

характеристическое уравнение системы (12) $\lambda^2+ab=0$ имеет чисто мнимые корни $\lambda=\pm i\sqrt{ab}$. Таким образом, добавление к линейной части нелинейных членов в системах (10) и (11) приводит к разным эффектам. Фазовые траектории $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=C$ (эллипсы) системы (12) (см. рис. 2а) превращаются в спирали: «закручивающиеся», приближающиеся к началу координат при увеличении t, для случая системы (10) (рис. 2б), и «раскручивающиеся», удаляющиеся от начала координат при увеличении t, для случая системы (11) (рис. 2в).



а) б) в)

Рис. 2.

1.3. Особые точки динамических систем

Пусть дана система (8). *Особой точкой (точкой покоя)* этой системы называется такая точка (x, y), в которой

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Далее рассмотрим линейную систему (9) с постоянными коэффициентами. Если $ad \neq bc,$ то единственной особой точкой будет (0,0). Если же $ad = bc,$ то система (9) имеет прямую особых точек $y = -\frac{a}{b}x$ (т.е. и в этом случае точка (0,0) также является особой).

Существует несколько типов особых точек системы (9). Классификация особых точек и примерный фазовый портрет в зависимости от знаков и значений корней λ приведены в таблице 2 (в Приложении).

Будем называть *сепаратрисами* такие фазовые траектории системы, которые «отделяют» фазовые траектории разных классов друг от друга. Например, в случае седла сепаратрисами будут две пересекающиеся прямые. Они же являются в этом случае асимптотами для фазовых траекторий (гипербол).

Очевидно, что понятия устойчивости тривиального решения и устойчивости особой точки тесно связаны между собой.

2. Решение типовых заданий расчетно – графической работы

Задание 1. Решить двумя способами (при помощи общего решения и операционным методом) задачу Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$x''(t)+2x'(t)-3x(t)=10e^{2t}, \tag{13}$$

$$x(0)=0,\ x'(0)=14. \tag{14}$$

Решение.

1 способ. Общее решение линейного неоднородного уравнения есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-нибудь частного решения исходного неоднородного уравнения.

Соответствующее однородное уравнение имеет вид:

$$x''+2x'-3x=0. \tag{15}$$

Характеристическое уравнение $k^2+2k-3=0$ имеет корни $k_1=1, k_2=-3,$ поэтому общее решение уравнения (15):

$$x_0(t)=C_1e^t+C_2e^{-3t},\ C_1,C_2\in \mathrm{R}.$$

Найдем какое-нибудь частное решение уравнения (13). Правая часть уравнения имеет вид:

$$f(t)=e^{2t}(10\cdot\cos(0\cdot t)+1\cdot\sin(0\cdot t)),$$

то есть $\alpha=4, \beta=0.$ Так как число $\alpha+\beta i=4$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения (13) ищем в таком же виде, какой имеет правая часть уравнения:

$$x_1(t)=A\cdot e^{2t},$$

где A – неизвестная постоянная. Для ее определения подставим функцию в уравнение (13): $x_1'=2Ae^{2t}, x_1''=4Ae^{2t}$, тогда

$$4Ae^{2t}+2\cdot 2Ae^{2t}-3\cdot Ae^{2t}=10e^{2t},\ \text{ то есть } A=2.$$

Итак, общее решение уравнения (13):

$$x(t)=x_0(t)+x_1(t)=C_1e^t+C_2e^{-3t}+2e^{2t}.$$

Для нахождения значений C_1, C_2 удовлетворим найденное решение заданным начальным условиям (14):

$$x(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 + 2e^0 = 0,$$
$$x'(t) = C_1 e^t - 3C_2 e^{-3t} + 4e^{2t},$$
$$x'(0) = C_1 e^0 - 3C_2 e^0 + 4e^0 = 14,$$

т.е. имеем систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -2, \\ C_1 - 3C_2 = 10, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = -3, \end{cases}$$

поэтому искомое решение $x(t) = e^t - 3e^{-3t} + 2e^{2t}$.

2 способ. Пусть искомое решение $x(t)$ является оригиналом, обозначим его изображение $X(p)$, то есть $x(t) \rightleftarrows X(p)$. Найдем изображение левой части уравнения (13). Для этого используем утверждения об изображении производных:

$$x'(t) \rightleftarrows pX(p) - x(0) = pX(p),$$
$$x''(t) \rightleftarrows p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) - 14.$$

Найдем изображение правой части уравнения. По таблице оригиналов и изображений имеем:

$$f(t) = 10 \cdot e^{2t} \rightleftarrows 10 \cdot \frac{1}{p-2}.$$

Тогда вместо исходной задачи для дифференциального уравнения имеем операторное уравнение

$$p^2 X(p) - 14 + 2pX(p) - 3X(p) = \frac{10}{p-2},$$
$$X(p)(p^2 + 2p - 3) = 14 + \frac{10}{p-2},$$
$$X(p) = \frac{14p - 18}{(p-2)(p-1)(p+3)}.$$

Разложим полученную дробь на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{14p-18}{(p-2)(p-1)(p+3)}=\frac{A}{p-2}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{p+3}.$$

Приведем в правой части дроби к общему знаменателю и приравняем числители:

$$A(p-1)(p+3)+B(p-2)(p+3)+C(p-2)(p-1)=14p-18,$$

$$p=1: \quad 4B=-4,$$
$$p=2: \quad 5A=10,$$
$$p=-3: \; 20C=-60,$$

откуда найдем: $A=2, B=1, C=-3$. Итак, $X(p)=\frac{2}{p-2}+\frac{1}{p-1}-\frac{3}{p+3}$.

От найденного изображения перейдем обратно к оригиналу:

$$X(p)=\frac{2}{p-2}+\frac{1}{p-1}-\frac{3}{p+3}\rightleftarrows 2e^{2t}+e^{t}-3e^{-3t}=x(t).$$

Ответ: $x(t)=e^{t}-3e^{-3t}+2e^{2t}$.

Задание 2. Решить операционным методом систему дифференциальных уравнений с заданными условиями:

$$\begin{cases} x'=x+2y-9t, & x(0)=1, \\ y'=2x+y+4e^{t}, & y(0)=2. \end{cases} \tag{16}$$

Решение. Пусть искомые функции $x(t), y(t)$ являются оригиналами, и $X(p), Y(p)$ – соответственно их изображения, тогда

$$x'(t)\rightleftarrows pX(p)-x(0)=pX(p)-1,$$
$$y'(t)\rightleftarrows pY(p)-y(0)=pY(p)-2,$$

Теперь найдем изображения правых частей уравнений системы:

$$x+2y-9t\rightleftarrows X(p)+2Y(p)-\frac{9}{p^{2}},$$

$$2x+y+4e^{t}\rightleftarrows 2X(p)+Y(p)+\frac{4}{p-1}.$$

Подставим найденные изображения в систему (16) и получим систему операторных уравнений:

$$\begin{cases} pX(p)-1=X(p)+2Y(p)-\dfrac{9}{p^2}, \\ pY(p)-2=2X(p)+Y(p)+\dfrac{4}{p-1}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (p-1)\cdot X(p)-2Y(p)=1-\dfrac{9}{p^2}, \\ -2X(p)+(p-1)Y(p)=2+\dfrac{4}{p-1}, \end{cases}$$

Неизвестные $X(p),Y(p)$ найдем по формулам Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} p-1 & -2 \\ -2 & p-1 \end{vmatrix}=(p-1)^2-4=(p-3)(p-1),$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1-\dfrac{9}{p^2} & -2 \\ 2+\dfrac{4}{p-1} & p-1 \end{vmatrix}=\frac{p^4+2p^3-4p^2+18p-9}{p^2(p-1)},$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} p-1 & 1-\dfrac{9}{p^2} \\ -2 & 2+\dfrac{4}{p-1} \end{vmatrix}=\frac{2p^3+4p^2-18}{p^2}.$$

Тогда

$$X(p)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{p^4+2p^3-4p^2+18p-9}{p^2(p-1)(p+1)(p-3)}=\frac{5}{p}-\frac{3}{p^2}-\frac{2}{p-1}-\frac{4}{p+1}+\frac{2}{p-3},$$

$$Y(p)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{2p^3+4p^2-18}{p^2(p+1)(p-3)}=-\frac{4}{p}+\frac{6}{p^2}+\frac{2}{p-3}+\frac{4}{p+1},$$

коэффициенты при простейших дробях найдены методом неопределенных коэффициентов.

Теперь найдем оригиналы:

$$X(p)=\frac{5}{p}-\frac{3}{p^2}-\frac{2}{p-1}-\frac{4}{p+1}+\frac{2}{p-3}\rightleftarrows 5-3t-2e^{t}-4e^{-t}+2e^{3t}=x(t),$$

$$Y(p)=-\frac{4}{p}+\frac{6}{p^2}+\frac{2}{p-3}+\frac{4}{p+1}\rightleftarrows -4+6t+2e^{3t}+4e^{-t}=y(t).$$

Замечание. Можно выполнить проверку: подставить в систему (16) *и убедиться, что равенства верны, и начальные условия выполнены.*

Ответ: $x(t)=5-3t-2e^{t}-4e^{-t}+2e^{3t}$, $y(t)=-4+6t+2e^{3t}+4e^{-t}$.

Задание 3. Исследовать особые точки систем, дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости XOY. Сделать вывод об устойчивости тривиального решения.

а) $\begin{cases} x'=0, \\ y'=x+y. \end{cases}$

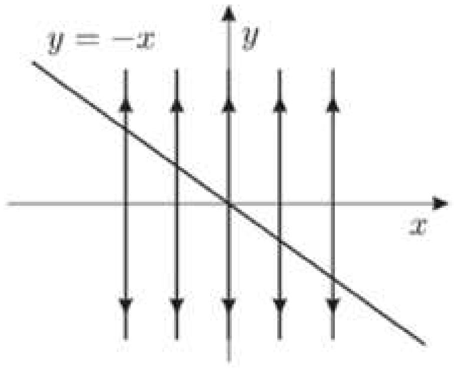
Решение. Особые точки найдем из системы $\begin{cases} 0=0, \\ x+y=0, \end{cases}$ то есть особые точки системы образуют прямую $y=-x$. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Собственные значения: $\lambda_1=0, \lambda_2=1$. Так как одно значение равно нулю, то особые точки в соответствии с таблицей 2 образуют прямую (как и отмечено выше), а так как второе значение положительно, то тривиальное решение неустойчиво. Фазовые траектории – это семейство параллельных прямых, которое задается уравнением:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{0}{x+y}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=C.$$

Фазовый портрет приведен на рисунке:



Направление движения по траекториям происходит от прямой $y=-x$ в бесконечность, так как все точки покоя являются неустойчивыми решениями.

б) $\begin{cases} x'=3x+4y, \\ y'=2x+y. \end{cases}$

Решение. Особые точки найдем из системы $\begin{cases} 3x+4y=0, \\ 2x+y=0, \end{cases}$ то есть единственная особая точка – (0,0). Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Собственные значения: $\lambda_1=5, \lambda_2=-1$. Так как они действительны и имеют разные знаки, то особая точка – седло, причем нулевое решение неустойчиво.

Найдем собственные векторы.

Значению $\lambda_1=5$ соответствует вектор $h^{(1)}=(h_1^{(1)},h_2^{(1)})$, который найдем из системы

$$\begin{cases} (3-5)h_1^{(1)}+4h_2^{(1)}=0 \\ 2h_1^{(1)}+(1-5)h_2^{(1)}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2h_1^{(1)}+4h_2^{(1)}=0 \\ 2h_1^{(1)}-4h_2^{(1)}=0 \end{cases} \Leftrightarrow h_1^{(1)}=2h_2^{(1)}.$$

Пусть $h_2^{(1)}=1$, тогда $h_1^{(1)}=2$, то есть $h^{(1)}=(2,1)$, и ему соответствует прямая $y=\frac{x}{2}$.

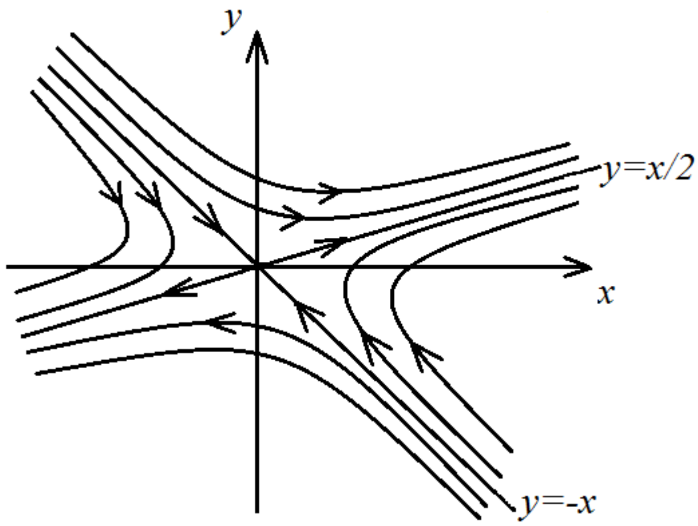
Значению $\lambda_1=-1$ соответствует вектор $h^{(2)}=(h_1^{(2)},h_2^{(2)})$, который найдем из системы

$$\begin{cases} (3+1)h_1^{(2)}+4h_2^{(2)}=0 \\ 2h_1^{(2)}+(1+1)h_2^{(2)}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4h_1^{(2)}+4h_2^{(2)}=0 \\ 2h_1^{(2)}+2h_2^{(2)}=0 \end{cases} \Leftrightarrow h_1^{(2)}=-h_2^{(2)}.$$

Пусть $h_1^{(2)}=1$, тогда $h_2^{(2)}=-1$, то есть $h^{(2)}=(1,-1)$, и прямая $y=-x$.

Движение по прямой $y=-x$, соответствующей отрицательному собственному значению, происходит к началу координат, а по прямой $y=\frac{x}{2}$, соответствующей положительному собственному значению, – от начала координат.

Фазовый портрет имеет вид:



Направление движения по гиперболам определяется в соответствии с движением по отмеченным прямым.

Замечание. Отметим, что найти уравнения прямых $y=-x$ и $y=\frac{x}{2}$ можно по-другому: так как особая точка (0,0) – седло, то должны быть две пересекающиеся прямые, проходящие через начало координат (в соответствии с таблицей 2). Найдем прямые вида $y=kx$. Так как функции $y=kx$ удовлетворяют системе (и тоже определяют фазовые траектории), то можем подставить их в уравнение $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{3x+4y}$, являющееся следствием исходной системы:

$$k=\frac{2x+kx}{3x+4kx},\quad (4k+3)k=2+k,\quad 2k^2+k-1=0,\quad k_1=-1, k_2=\frac{1}{2},$$

т.е. $y=-x$ и $y=\frac{x}{2}$. Траекториями являются гиперболы, направление движения по которым можно определить при помощи вектора скорости, например, в точке (1,0):

$$\begin{cases} x' = 3\cdot 1 + 4\cdot 0 = 3, \\ y' = 2\cdot 1 + 0 = 2. \end{cases}$$

Отметив этот вектор на чертеже, получим такой же, как и построенный первым способом, фазовый портрет.

в) $\begin{cases} x' = -3x + 2y, \\ y' = x - 4y. \end{cases}$

Решение. (0,0) – особая точка. Характеристическое уравнение:

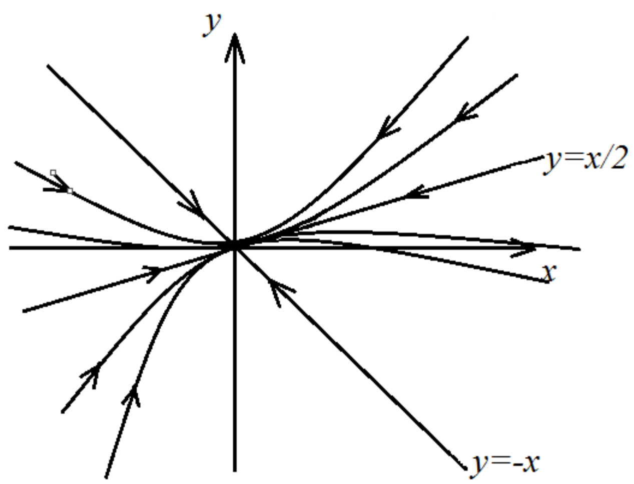
$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$ Его корни $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -5.$ Так как корни действительны, различны и одного знака, то особая точка – узел, а так как корни отрицательны, то тривиальное решение устойчиво, поэтому направление на траекториях – к началу координат.

В этом случае семейство фазовых траекторий (парабол) имеет две пересекающиеся прямые, одну из которых в особой точке касаются все параболы. Эта прямая соответствует меньшему по модулю собственному значению.

Собственному значению $\lambda_1 = -2$ соответствует вектор $h^{(1)}(2,1)$ и прямая $y = x/2$, которую касаются все кривые. Собственному значению $\lambda_1 = -5$ соответствует вектор $h^{(2)}(-1,1)$ и прямая $y = -x$.

(Уравнения прямых можно найти так же, как и в предыдущем пункте).

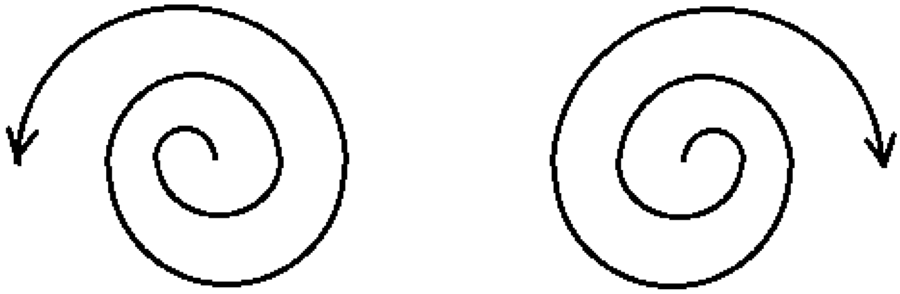
Фазовый портрет имеет схематический вид:



г) $\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$

<u>Решение</u>. Собственные значения: $\lambda = 1 \pm 2i$, то есть особая точка (0,0) – фокус. Так как действительная часть этих комплексных чисел положительна (*она равна 1*), то тривиальное решение неустойчиво. Траектории представляют собой «спирали», направление на них – от особой точки.

Возможны два случая: раскручивание против часовой стрелки и по часовой стрелке.

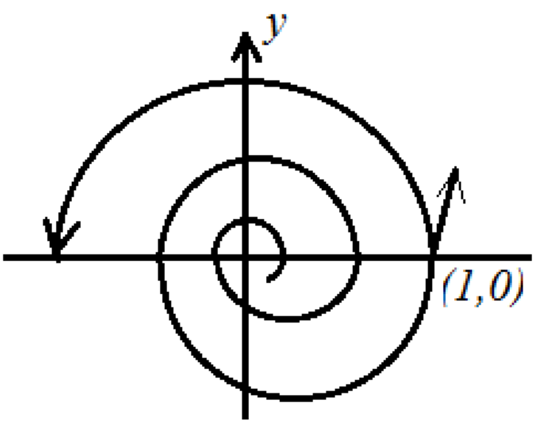


Чтобы определить, какой из двух случаев имеет место, найдем вектор скорости в какой-нибудь точке плоскости.

Определим вектор скорости в точке (1,0), получим из системы:

$\begin{cases} x' = 1 - 2 \cdot 0 = 1, \\ y' = 2 \cdot 1 + 0 = 2, \end{cases}$ то есть вектор (1,2).

Отметим этот вектор на чертеже, тогда с учетом того, что фокус неустойчивый, происходит вращение против часовой стрелки, причем спираль «раскручивается».



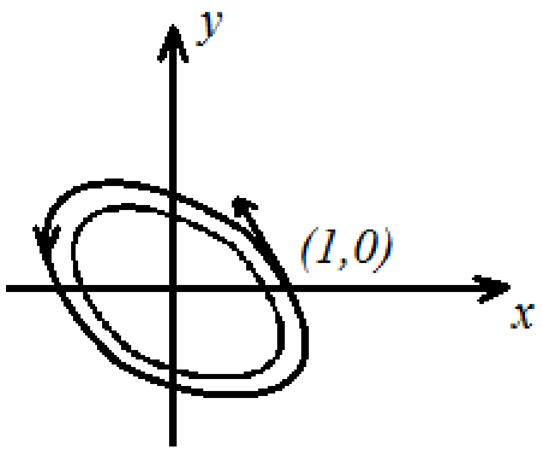
д) $\begin{cases} x' = -2x - 5y, \\ y' = 2x + 2y. \end{cases}$

Решение. Собственные значения: $\lambda = \pm i\sqrt{6}$, то есть особая точка (0,0) – центр. Тривиальное решение устойчиво. Траектории представляют собой эллипсы (*в частном случае могут быть окружности*).

Определим движение по траекториям (по или против часовой стрелки). Найдем вектор скорости в точке (1,0), получим из системы:

$\begin{cases} x' = -2 \cdot 1 - 5 \cdot 0 = -2, \\ y' = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 2, \end{cases}$ то есть вектор (-2,2).

С учетом этого вектора получим, что направления движения по траекториям – против часовой стрелки.

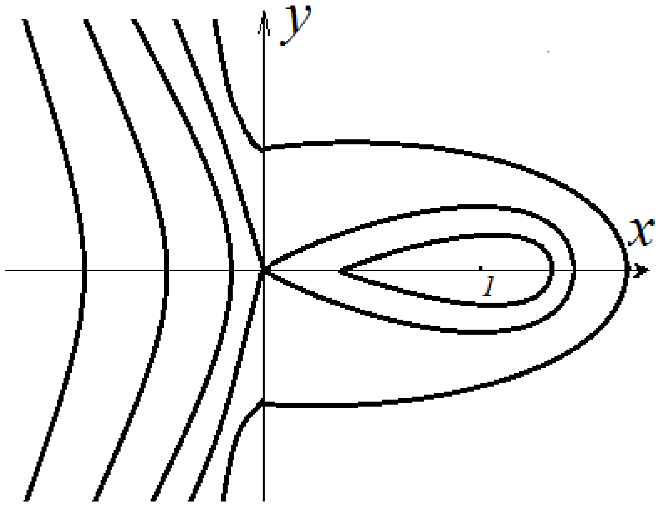


Задание 4. Начертить на фазовой плоскости траектории уравнения $\ddot{x} - x + x^2 = 0$.

Решение. Положим $\dot{x} = y$, тогда $\ddot{x} = \dot{y}$, поэтому из данного уравнения получим систему $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x - x^2, \end{cases}$ из которой почленным делением ее уравнений получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - x^2}{y} \qquad (17)$$

или (при $y \neq 0$) $ydy = (x - x^2)dx$. Тогда общий интеграл уравнения (17) имеет вид $3(y^2 - x^2) + 2x^3 = C$. Поскольку при замене y на $-y$ интегральные кривые не меняют вида своих уравнений, то все они симметричны относительно оси Ox. При различных конкретных значениях C с помощью аппарата математического анализа строим картину траекторий на фазовой плоскости:



3. Задания для выполнения расчетно – графической работы

Задание 1. Решить двумя способами (при помощи общего решения и операционным методом) задачу Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка:

1.1. $x''-3x'+2x=2e^{3t}$, $x(0)=0, x'(0)=3.$

1.2. $x''+x=\cos 3t$, $x(0)=2, x'(0)=0.$

1.3. $x''+x'-2x=e^{2t}$, $x(0)=-1, x'(0)=0.$

1.4. $x''-3x'+2x=e^{3t}$, $x(0)=1, x'(0)=1.$

1.5. $x''+9x=1$, $x(0)=0, x'(0)=1.$

1.6. $x''+4x=\sin 3t$, $x(0)=0, x'(0)=-2.$

1.7. $x''+x=\cos 2t$, $x(0)=1, x'(0)=0.$

1.8. $x''-x=\cos t$, $x(0)=0, x'(0)=1.$

1.9. $x''+x=\sin 2t$, $x(0)=-1, x'(0)=0.$

1.10. $x''+3x'+2x=e^{3t}$, $x(0)=1, x'(0)=1.$

1.11. $x''-3x'+2x=2e^{-t}$, $x(0)=0, x'(0)=2.$

1.12. $x''+4x=2\cos 3t$, $x(0)=2, x'(0)=0.$

1.13. $x''+x'-2x=e^{-t}$, $x(0)=-1, x'(0)=0.$

1.14. $x''-3x'+2x=e^{-t}$, $x(0)=1, x'(0)=0.$

1.15. $x''+4x=1$, $x(0)=0, x'(0)=1.$

1.16. $x''+9x=\sin t$, $x(0)=0, x'(0)=2.$

1.17. $x''-x=\cos 2t$, $x(0)=1, x'(0)=0.$

1.18. $x''-4x=\cos t$, $x(0)=0, x'(0)=1.$

1.19. $x''+4x=\sin t$, $x(0)=-1, x'(0)=0.$

1.20. $x''+3x'+2x=e^{2t}$, $x(0)=0, x'(0)=1.$

Задание 2. Решить операционным методом систему дифференциальных уравнений с заданными условиями. Выполнить проверку подстановкой:

2.1. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 5.$

2.2. $\begin{cases} x' = -y + 2, \\ y' = x + 1, \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 0.$

2.3. $\begin{cases} x' = 3x + 4y - 1, \\ y' = 4x - 3y, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 1.$

2.4. $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 1, \\ y' = 4x - 2y, \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 0.$

2.5. $\begin{cases} x' = -x + 3y + 1, \\ y' = x + y, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 2.$

2.6. $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2x + 2y, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 1.$

2.7. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 5.$

2.8. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y - 1, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 5.$

2.9. $\begin{cases} x' = x + 2y - 3, \\ y' = 2x + y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 5.$

2.10. $\begin{cases} x' = x - 2y + 1, \\ y' = 3x + y, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 2.$

2.11. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y - 1, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 3.$

2.12. $\begin{cases} x' = x - y + 2, \\ y' = x + 1, \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 0.$

2.13. $\begin{cases} x' = 3x + 2y, \\ y' = 4x - 3y, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

2.14. $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 1, \\ y' = 4x - 3y, \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 0.$

2.15. $\begin{cases} x' = -x + 3y + 1, \\ y' = x + 2y, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 2.$

2.16. $\begin{cases} x' = -y + 2, \\ y' = 2x + 2y, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 1.$

2.17. $\begin{cases} x' = x + 2y - 1, \\ y' = 2x + y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 5.$

2.18. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x - 1, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 2.$

2.19. $\begin{cases} x' = 2y - 3, \\ y' = 2x + y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 5.$

2.20. $\begin{cases} x' = x - y + 1, \\ y' = 3x + y, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 2.$

Задание 3. Исследовать особые точки систем, дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости XOY.

3.1. а) $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 5x - 2y, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2x + 2y, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -2x + 2y, \end{cases}$

3.2. а) $\begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = -6x - 5y, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = x, \\ y' = -5y, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = 10x - 5y, \end{cases}$

3.3. а) $\begin{cases} x' = 3x - 4y, \\ y' = x - 2y, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = -2y, \\ y' = x + 2y, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = x, \\ y' = 2x + 3y, \end{cases}$

3.4. а) $\begin{cases} x' = x, \\ y' = 2x - y, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = -3y, \\ y' = x + 4y, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = 2x - 2y, \end{cases}$

3.5. а) $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = y, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 6x - 4y, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = 3y, \\ y' = x + 2y, \end{cases}$

3.6. а) $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = x, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = -4x + y, \end{cases}$

3.7. а) $\begin{cases} x'=3x-2y, \\ y'=4x-y, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'=x, \\ y'=3y, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'=x+2y, \\ y'=3x+6y, \end{cases}$

3.8. а) $\begin{cases} x'=-2x+y, \\ y'=5x+2y, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'=x+2y, \\ y'=0, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'=-x-y, \\ y'=5x+y, \end{cases}$

3.9. а) $\begin{cases} x'=3x, \\ y'=2x+y, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'=3x-y, \\ y'=2x+y, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'=-x-y, \\ y'=2x+2y, \end{cases}$

3.10. а) $\begin{cases} x'=3x+y, \\ y'=-x+y, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'=3x, \\ y'=-y. \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'=-9y, \\ y'=x. \end{cases}$

3.11. а) $\begin{cases} x'=-x+2y, \\ y'=5x+2y, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'=-y, \\ y'=2x-2y, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'=x-y, \\ y'=-3x+3y, \end{cases}$

3.12. а) $\begin{cases} x'=-x+3y, \\ y'=-6x+5y, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'=-x, \\ y'=5y, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'=2x-y, \\ y'=-10x+5y, \end{cases}$

3.13. а) $\begin{cases} x'=-3x-4y, \\ y'=x+2y, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'=-2y, \\ y'=x-2y, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'=-x, \\ y'=2x-3y, \end{cases}$

3.4. а) $\begin{cases} x'=-x, \\ y'=2x+y, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'=-3y, \\ y'=x-4y, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'=-x-y, \\ y'=2x+2y, \end{cases}$

3.15. а) $\begin{cases} x'=-3x-2y, \\ y'=-y, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'=-3x-2y, \\ y'=6x+4y, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'=3y, \\ y'=x-2y, \end{cases}$

3.16. а) $\begin{cases} x'=-x+2y, \\ y'=2x-y, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'=-2x-y, \\ y'=x, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'=-x+y, \\ y'=-4x-y, \end{cases}$

3.17. а) $\begin{cases} x'=-3x-2y, \\ y'=4x+y, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'=-x, \\ y'=-3y, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'=-x+2y, \\ y'=3x-6y, \end{cases}$

3.18. а) $\begin{cases} x'=2x+y, \\ y'=5x-2y, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'=-x+2y, \\ y'=0, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'=x-y, \\ y'=5x-y, \end{cases}$

3.19. а) $\begin{cases} x'=-3x, \\ y'=2x-y, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'=-3x-y, \\ y'=2x-y, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'=x-y, \\ y'=2x-2y, \end{cases}$

3.20. а) $\begin{cases} x'=-3x+y, \\ y'=-x-y, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'=-3x, \\ y'=y. \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'=9y, \\ y'=-x. \end{cases}$

Задание 4. Начертить траектории на фазовой плоскости.

4.1. $\ddot{x} - x^2 + 1 = 0$,

4.2. $\ddot{x} - x^2 + 3x = 0$,

4.3. $\ddot{x} + x^2 - 4x = 0$,

4.4. $\ddot{x} + 3x^2 - 9 = 0$,

4.5. $\ddot{x} + x^2 - 4 = 0$,

4.6. $\ddot{x} + x^2 - 2x = 0$,

4.7. $\ddot{x} + 2x^2 - 8 = 0$,

4.8. $\ddot{x} + 2x^2 - 8x = 0$,

4.9. $\ddot{x} - x^2 + 9 = 0$,

4.10. $\ddot{x} + x^2 + 2x = 0$.

4.11. $\ddot{x} - x^2 - 1 = 0$,

4.12. $\ddot{x} - x^2 - 3x = 0$,

4.13. $\ddot{x} + x^2 + 4x = 0$,

4.14. $\ddot{x} + 3x^2 - 3 = 0$,

4.15. $\ddot{x} + x^2 - 2 = 0$,

4.16. $\ddot{x} + x^2 - x = 0$,

4.17. $\ddot{x} + 2x^2 - 6 = 0$,

4.18. $\ddot{x} + 2x^2 - 4x = 0$,

4.19. $\ddot{x} - x^2 - 9 = 0$,

4.20. $\ddot{x} + x^2 + x = 0$.

Задание 5. Исследовать на устойчивость по первому приближению тривиальное решение системы.

5.1. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2\sin y - y^2 \sin x, \\ \dot{y} = 2y - 3x - x^3, \end{cases}$

5.2. $\begin{cases} \dot{x} = 2e^x + 5y - 2 + x^4, \\ \dot{y} = x + 6\cos y - 6 - x^5, \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8\sin y, \\ \dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y, \end{cases}$

5.4. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y - 2x^3 + y^4, \\ \dot{y} = x - 3\sin y - 6xy - x^5, \end{cases}$

5.5. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8\sin y - 3x^2, \\ \dot{y} = 1 - e^x - 3y, \end{cases}$

5.6. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y + 2x^3, \\ \dot{y} = \sin x - 3y + 2x^2, \end{cases}$

5.7. $\begin{cases} \dot{x} = \sin(2x) - 8y, \\ \dot{y} = e^x - 1 - 3y, \end{cases}$

5.8. $\begin{cases} \dot{x} = -\operatorname{arctg} x + y - 3y^4, \\ \dot{y} = x - 3y - \arcsin x^3, \end{cases}$

5.9. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2\sin y, \\ \dot{y} = 2e^x - 2 + 3y, \end{cases}$

5.10. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y^2 - 2x^3, \\ \dot{y} = x - \sin y - x^5, \end{cases}$

5.11. $\begin{cases} \dot{x} = \sin x - 2y + y^2 \sin x, \\ \dot{y} = 2y - 3\operatorname{arctg} x - x^3, \end{cases}$

5.12. $\begin{cases} \dot{x} = 2e^x + 5\operatorname{tg} y - 2 + x^4, \\ \dot{y} = x + 6\cos y - 6 + 3x^2, \end{cases}$

5.13. $\begin{cases} \dot{x} = 2\arcsin x + 8y - 3y^2, \\ \dot{y} = 1 - x - 3y - \cos y, \end{cases}$

5.14. $\begin{cases} \dot{x} = -\sin x + y + 2x^3 - y^4, \\ \dot{y} = x - 3\sin y - 6xy - x^5, \end{cases}$

5.15. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8\sin y - 3x^2, \\ \dot{y} = -x - 3\sin y + y^6, \end{cases}$

5.16. $\begin{cases} \dot{x} = -x + \operatorname{arctg} y + 2x^3, \\ \dot{y} = \sin x - 3y + 2x^2, \end{cases}$

5.17. $\begin{cases} \dot{x} = \sin(2x) - 8y + 3xy, \\ \dot{y} = e^x - 1 - 3y, \end{cases}$

5.18. $\begin{cases} \dot{x} = -x + \operatorname{arctg} y - 3y^4, \\ \dot{y} = x - 3y + 2x^3, \end{cases}$

5.19. $\begin{cases} \dot{x} = 3\operatorname{tg} x + 2\sin y, \\ \dot{y} = 2e^x - 2 + 3y, \end{cases}$

5.20. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y^2 + 2x^3, \\ \dot{y} = x - \sin y, \end{cases}$

Библиографический список

1. Анищенко, В.С. Лекции по нелинейной динамике: учеб. пособие для вузов / В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. – 516 с.
2. Боярчук, А.К. Справочное пособие по высшей математике. - Т.5: Дифференциальные уравнения в примерах и задачах / А.К. Боярчук, Г.П. Головач. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 384 с.
3. Ляшко, С.А. Элементы теории динамических систем: учебное пособие / С.А. Ляшко.– Балашов: Изд-во «Николаев», 2005. – 104 с.
4. Филиппов, А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений: учебник / А.Ф. Филиппов. – Изд. 2-е, испр. – М.: КомКнига, 2007. – 240 с.
5. Учебно-методический комплекс дисциплины "Математика" [Электронный ресурс] / Р. Н. Бахтизин [и др.]; УГНТУ, ИАУ, каф. Математики. – Уфа: Изд-во УГНТУ. - Раздел 9: Дифференциальные уравнения: теорет. основы; метод. указания для студентов; материалы для самостоят. работы студентов. – 2010.

Приложение

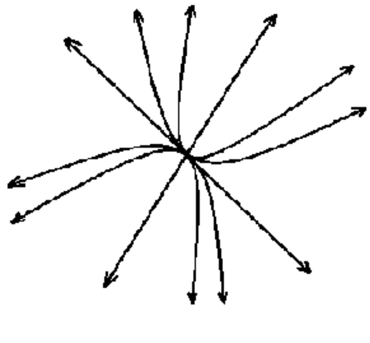
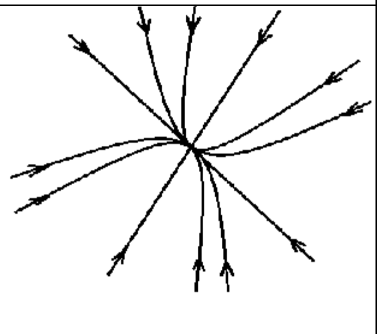
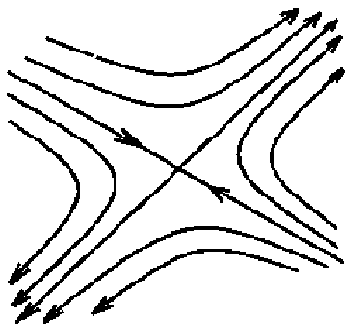
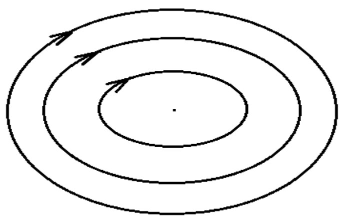
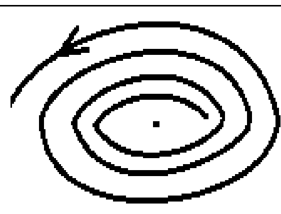
Таблица 1

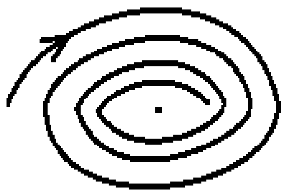
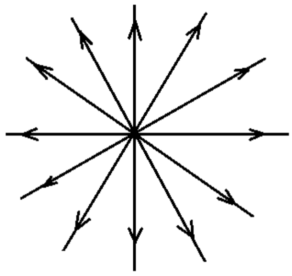
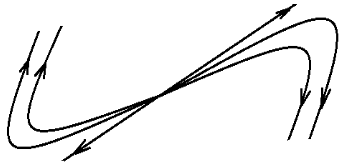
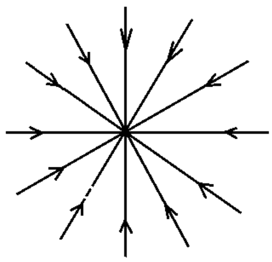
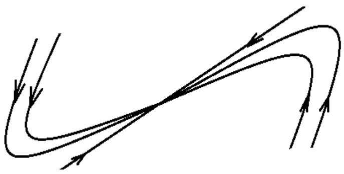
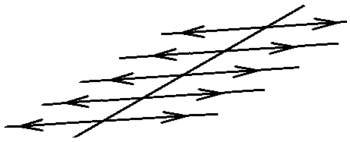
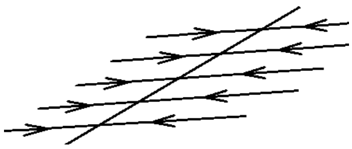
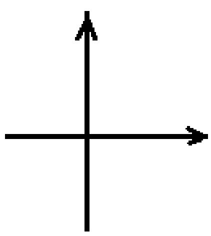
Изображение основных элементарных функций

Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$		Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
1	$\dfrac{1}{p}$		$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{p^{n+1}}$		$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{p-\alpha}$		$\dfrac{t^n}{n!}e^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}$
$\cos\beta t$	$\dfrac{p}{p^2+\beta^2}$		$t\cos\beta t$	$\dfrac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$
$\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$		$t\sin\beta t$	$\dfrac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$

Таблица 2.

Классификация особых точек и фазовые портреты

№ п/п	Корни характ-го уравнения	Тип особой точки	Фазовый портрет	Пояснение к портрету	Устойчивость по Ляпунову тривиального решения
1	$\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$	Неустойчивый узел		Есть две пересекающиеся в особой точке прямые (их лучи являются фазовыми траекториями), одну из которых касаются все остальные фазовые траектории (внешне похожи на ветви квадратных парабол). Движение по всем траекториям в 1 случае – от особой точки, во 2 случае – к особой точке	Неустойчиво
2	$\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$	Устойчивый узел			Асимптотически устойчиво
3	$\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$	Седло		Есть две пересекающиеся в особой точке прямые (их лучи являются фазовыми траекториями), являющиеся асимптотами для всех остальных фазовых траекторий (ветви гипербол). Движение по фазовым траекториям по одной прямой – от особой точки, по другой прямой – к особой точке	Неустойчиво
4	$\lambda_{1,2} = \pm\beta i$	Центр		Фазовые траектории – концентрические эллипсы (окружности). Движение по траекториям может происходить как по часовой стрелке, так и против часовой стрелки	Устойчиво
5	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, $\alpha > 0$	Неустойчивый фокус		Фазовые траектории представляют собой спирали («раскручивающиеся» в первом случае и «закручивающиеся» во втором). Движение по спирали от особой точки	Неустойчиво

6	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i,$ $\alpha < 0$	Устойчивый фокус		или к ней может происходить как по часовой стрелке, так и против часовой стрелки	Асимптотиче ски устойчиво
7	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda,$ $\lambda > 0$	Дикритический неустойчивый узел (только в случае системы $\dot{x} = \lambda x, \dot{y} = \lambda y$)		Фазовые траектории – пучок прямых в особой точке, направление движения – от особой точки	Неустойчивр
		Вырожденный неустойчивый узел		Существует прямая (проходящая через особую точку), которую все фазовые траектории касаются по обе стороны от неё. Фазовые траектории внешне похожи на кубические параболы	
8	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda,$ $\lambda < 0$	Дикритический устойчивый узел (только в случае системы $\dot{x} = \lambda x, \dot{y} = \lambda y$)		Фазовые траектории – пучок прямых в особой точке, направление движения – к особой точке.	Асимптотиче ски устойчиво
		Вырожденный устойчивый узел		Существует прямая (проходящая через особую точку), которую все фазовые траектории касаются по обе стороны от неё. Направление движения – к особой точке.	
9	$\lambda_1 = 0,$ $\lambda_2 > 0$	Прямая особых точек		Существует прямая особых точек. Фазовые траектории – пучок параллельных прямых.	Неустойчиво
10	$\lambda_1 = 0,$ $\lambda_2 < 0$				Устойчиво
11	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$	Вся фазовая плоскость		Каждая точка фазовой плоскости является особой. Фазовые траектории – точки.	Устойчиво