

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЯНОЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра математики

Типовые задания по дисциплине
«Математическое моделирование в задачах нефтегазовой
отрасли» (экономические аспекты)
для магистров по направлениям подготовки 38.04.01
«Экономика», 38.04.02 «Менеджмент»

Учебно-методическое пособие
к выполнению практических и самостоятельных работ
обучающихся

Уфа 2018

Типовые задания по дисциплине «Математическое моделирование в задачах нефтегазовой отрасли» предназначено для практического закрепления навыков математического моделирования и содержит типовые прикладные задачи экономики и управления нефтегазового бизнеса. Практикум формирует навыки количественного и качественного анализа и практическим навыкам закрепления и усвоения методов проведения научных исследований и принятия решений на основе математического моделирования.

Задачи актуализированы применительно к условиям современной экономики и менеджмента и рекомендуются для получения навыков математического моделирования при решении экономических задач с использованием MS Excel.

Пособие предназначается для магистров направления подготовки 38.04.01 «Экономика» и 38.04.02 «Менеджмент».

Составитель: Мухаметзянов И.З., профессор, д-р физ.-мат. наук

Рецензенты: Сулейманов И.Н., канд. техн. наук, доц. каф. Математики
Мусина Д.Р., канд. экон. наук, доц. каф. ЭНГП

Содержание

	с.
1	Производственные функции 5
1.1	Основные понятия и краткая теория 5
1.2	Методические указания к выполнению работы. Примеры 9
1.2.1	Производственная функция Леонтьева 9
1.2.2	Линейная производственная функция 13
1.2.3	Производственная функция Кобба-Дугласа 19
1.3	Варианты заданий 40
2	Статическая модель межотраслевого баланса 47
2.1	Основные понятия и краткая теория 47
2.2	Методические указания к выполнению работы. Пример 51
2.3	Варианты заданий 57
3	Регрессионные модели. Корреляционный и регрессионный анализ в экономических расчетах 60
3.1	Основные понятия и краткая теория 60
3.2	Методические указания к выполнению работы. Пример 63
3.3	Варианты заданий 82
4	Прогнозирование. Экстраполяция тенденций и динамики развития финансово-экономических показателей 89
4.1	Основные понятия и краткая теория 89
4.1.1	Прогнозирование на основе моделей временных рядов 92
4.1.2	Прогнозирование на основе адаптивной модели Брауна 95
4.2	Методические указания к выполнению работы. Примеры 99
4.3	Варианты заданий 108
5	Ресурсная модель оптимального планирования производства 111
5.1	Основные понятия и краткая теория 111
5.2	Методические указания к выполнению работы. Пример решения одноиндексной задачи ЛП 113
5.3	Анализ чувствительности целочисленные задачи. Решение в MS Excel 126
5.4	Варианты заданий 136
6	Транспортная задача 144

6.1	Основные понятия и краткая теория	144
6.2	Методические указания к выполнению работы. Пример	145
6.4	Варианты заданий	149
7	Многокритериальные методы принятия решений	157
7.1	Основные понятия и краткая теория	157
7.2	Методические указания к выполнению работы. Пример	161
7.4	Варианты заданий	164
8	Отчетность, оформление работы	181

Тема 1 Производственные функции

Рассматриваются производственные функции модели Леонтьева, линейная и функция Кобба-Дугласа, методы их построения и характеристики. Проводится содержательный экономический анализ результатов модели.

1.1 Основные понятия и краткая теория

Производственная функция показывает возможный максимальный выпуск продукции (Q) при определенном сочетании производственных факторов и избранной технологии.

Для каждой технологии производства существует своя особая функция. В наиболее общем виде она записывается:

$$Q = f(K, L, M),$$

где Q – объем производства; K – капитал; L – труд; M – природные ресурсы.



Рис. 1.1 Производственная функция

Производственная функция характеризуется определенными **свойствами**:

1. Существует предел для роста объема производства, который может быть достигнут за счет увеличения объема использования одного фактора при условии, что другие факторы производства не меняются. Данное свойство получило название **закона убывающей**

производительности фактора производства. Он действует в краткосрочном периоде.

2. Существует определенная взаимодополняемость факторов производства, но без сокращения производства возможна и определенная взаимозаменяемость этих факторов.

3. Изменения в использовании факторов производства более эластичны на продолжительном отрезке времени, чем за короткий период.

Производственная функция может рассматриваться как однофакторная и многофакторная. Однофакторная полагает, что при прочих равных условиях, изменяется только фактор производства. Многофакторная предполагает изменение всех факторов производства.

Для краткосрочного периода используется однофакторная, а для долгосрочного – многофакторная.

Краткосрочный период – это такой период, в течение которого хотя бы один фактор остаётся неизменным.

Долгосрочный период – это период времени, в течение которого все факторы производства изменяются.

При анализе производства используются такие понятия как **общий продукт (TR)** – объём товаров и услуг, произведенных за определённый период времени.

Средний продукт (AP) характеризует количество продукции, приходящейся на единицу используемого фактора производства. Он характеризует производительность фактора производства и рассчитывается по формуле:

$$AP_L = \frac{TR}{L} = \frac{\text{общий продукт}}{\text{объём труда}}$$

Предельный продукт (MP) - дополнительная продукция, произведенная дополнительной единицей фактора производства. MP характеризует производительность дополнительно нанятой единицы фактора производства.

$$MP_L = \frac{\Delta TP}{\Delta L} = \frac{TP_2 - TP_1}{L_2 - L_1}$$

Производственная функция Леонтьева

Иногда факторы производства абсолютно не заменяемы: пропорции их использования строго фиксированы. Применение определенного количества капитала требует соответствующего количества труда. Например, на токарном станке может работать лишь 1 рабочий (или 2, если в 2 смены). Использование 2 станков 1 человеком не приведет к увеличению выпуска продукции.

Такой производственный процесс характеризуется производственной функцией фиксированных пропорций (Леонтьевской производственной функцией):

$$Q = \min \{aK; bL\}$$

Функция производственная, предусматривающая прямую пропорциональную зависимость между выпуском продукции и затратами какого-либо фактора на ее производство. Общий выпуск однозначно определяется объемом лимитирующего фактора.

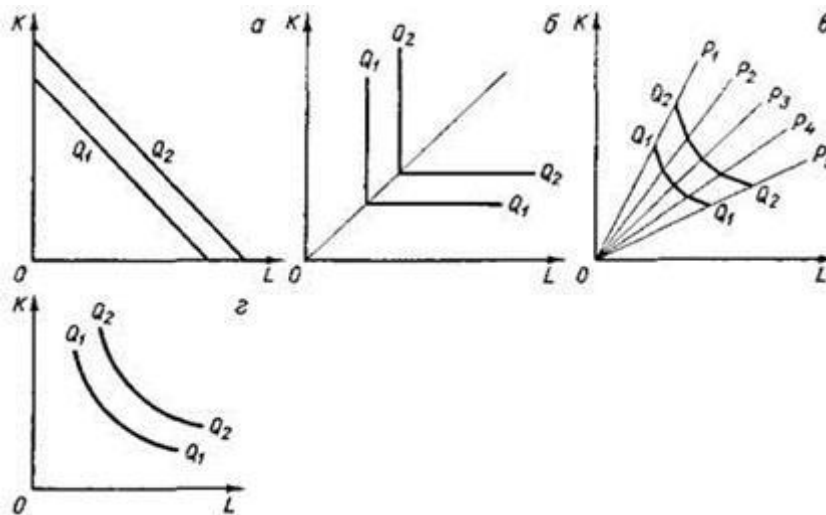


Рис. 1.2 Возможные конфигурации изоквант

Изокванта, представленная на рис. 1.2, характерна для случая жесткой дополняемости ресурсов. Известен лишь один метод производства данного продукта: труд и капитал комбинируются в единственно возможном соотношении, предельная норма замещения равна нулю. Такую изокванту иногда называют изоквантой леонтьевского типа, по имени американского экономиста русского происхождения В.В. Леонтьева, который положил такой тип изокванты в основу разработанного им метода затраты–выпуск.

Производственная функция Кобба-Дугласа устанавливает зависимость величины созданного общественного продукта от совокупных затрат живого труда L и суммарного объема применяемого капитала K производственных фондов. Она имеет следующий вид:

$$Q = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta},$$

где A - коэффициент, учитывающий влияние факторов, не вошедших в это уравнение, коэффициенты α , β показывают доли труда и капитала в общем объеме затрат. Каждый из них меньше 1.

Отдача от масштаба:

1. $\alpha + \beta < 1$, - убывающая отдача от масштаба
2. $\alpha + \beta = 1$, - постоянная отдача от масштаба
3. $\alpha + \beta > 1$, - возрастающая отдача от масштаба

Линейная производственная функция строится в случаях, когда объем выпуска пропорционален затратам, ее можно использовать для приближения реальных функций на небольших локальных участках изменения их аргументов.

Изокванта — это кривая, отражающая все возможные комбинации факторов производства, которые обеспечивают одинаковый максимально - возможный объем производства. Изокванты подчеркивают, насколько различны могут быть комбинации факторов при одном и том же выпуске. Эта информация позволяет производителю эффективно реагировать на изменения на рынке, меняя комбинацию затрат.

1.2 Методические указания к выполнению работы. Примеры

1.2.1 Производственная функция Леонтьева

Для производства одной электронной платы нужно c_1 чипов и c_2 соединительных проводов. Записать производственную функцию Леонтьева. Построить графики кривых производства для а) N_1 чипов; б) N_2 проводов. Построить изокванты и определить оптимальные затраты для выпуска q_1 , q_2 и q_3 плат.

Пример варианта задания

	A	B	C	D	E	F
1	Задание 1. Производственная функция Леонтьева					
2	Выполнил: Иванов И.И.			группа 000-Д		
3						
4	Вариант	0				
5	c_1	25				
6	c_2	60				
7	N_1	300				
8	N_2	1400				
9	q_1	100				
10	q_2	200				
11	q_3	300				

Указания к выполнению

Производственная функция:

$$y = \min \left\{ \frac{x_1}{c_1}; \frac{x_2}{c_2} \right\} = \min \left\{ \frac{x_1}{25}; \frac{x_2}{60} \right\},$$

где y – количество плат, x_1 – количество чипов, x_2 – количество проводов.

Кривая выпуска для модели Леонтьева состоит из двух прямых, для их построения достаточно трех точек:

- 1) нулевой выпуск;
- 2) выпуск при равных затратах (оптимальные затраты):

$$y = \frac{x_1}{c_1} = \frac{x_2}{c_2};$$

- 3) выпуск при затратах ресурса больше оптимального.

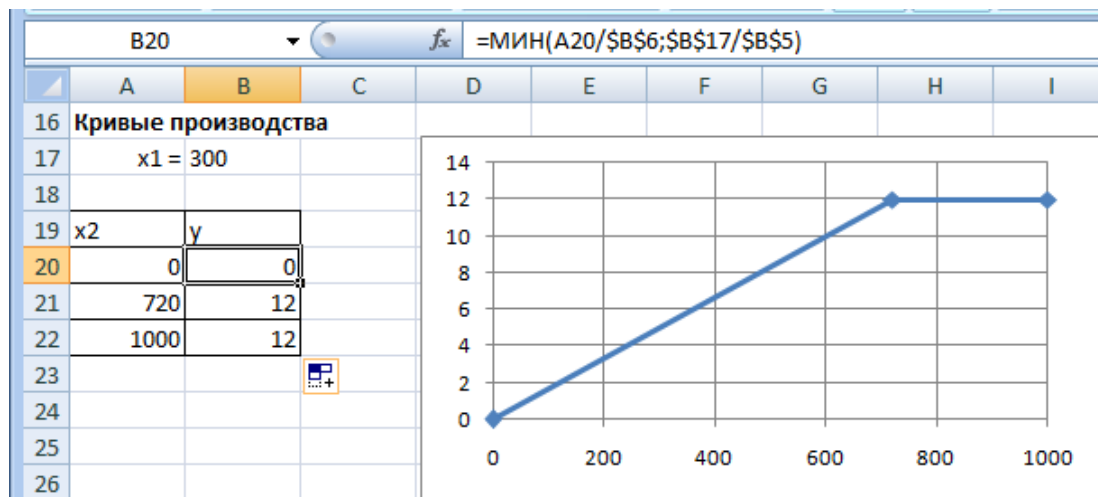
Определим оптимальные затраты проводов при затратах чипов $N_1 = 300$:

$$x_2 = \frac{c_2}{c_1} x_1 = \frac{60}{25} 300 = 720$$

При этом выпуск равен:

$$y = \frac{x_2}{c_2} = \frac{720}{60} = 12$$

Расчеты и кривая выпуска в Excel (тип диаграммы – точечная с прямыми отрезками и маркерами):



Аналогично для затрат проводов $N_2 = 1400$

$$x_1 = \frac{c_1}{c_2} x_2 = \frac{25}{60} 1400 \approx 583,33$$

Но треть чипа впаять на плату невозможно, его можно использовать только целиком! И целую плату нельзя произвести, используя 20 или 30 проводов, нужны все 60. Поэтому правильнее переписать формулы так:

$$y = \min \left\{ \left\lfloor \frac{x_1}{25} \right\rfloor; \left\lfloor \frac{x_2}{60} \right\rfloor \right\},$$

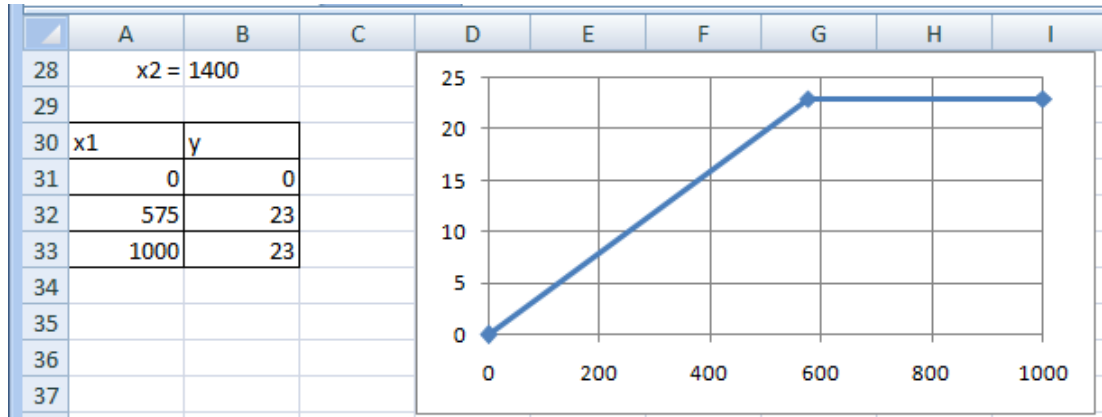
$$x_1 = c_1 \left\lfloor \frac{x_2}{c_2} \right\rfloor = 25 \left\lfloor \frac{1400}{60} \right\rfloor = 25 \cdot \lfloor 23,33 \rfloor = 25 \cdot 23 = 575$$

Скобки $\lfloor \rfloor$ означают округление вниз до целых. В Excel используйте функцию ОКРУГЛВНИЗ(число; знаков_после_запятой). Для округления до целых знаков_после_запятой=0.

При этом выпуск равен:

$$y = \frac{x_1}{c_1} = \frac{575}{25} = 23$$

Расчеты и кривая выпуска в Excel:



Для построения изоквант также потребуется три точки, включая оптимальные затраты:

$$y = \frac{x_1}{c_1} = \frac{x_2}{c_2}$$

$$x_1 = c_1 y \quad x_2 = c_2 y$$

Для объема выпуска $q_1 = 100$:

$$x_1 = 25 \cdot 100 = 2500 \quad x_2 = 60 \cdot 100 = 6000$$

Еще 2 точки возьмем для затрат каждого ресурса больше оптимальных, например 10 000 и 24 000 (эти числа лучше брать одинаковыми для всех трех изоквант, и чтобы они делились на c_1 и c_2).

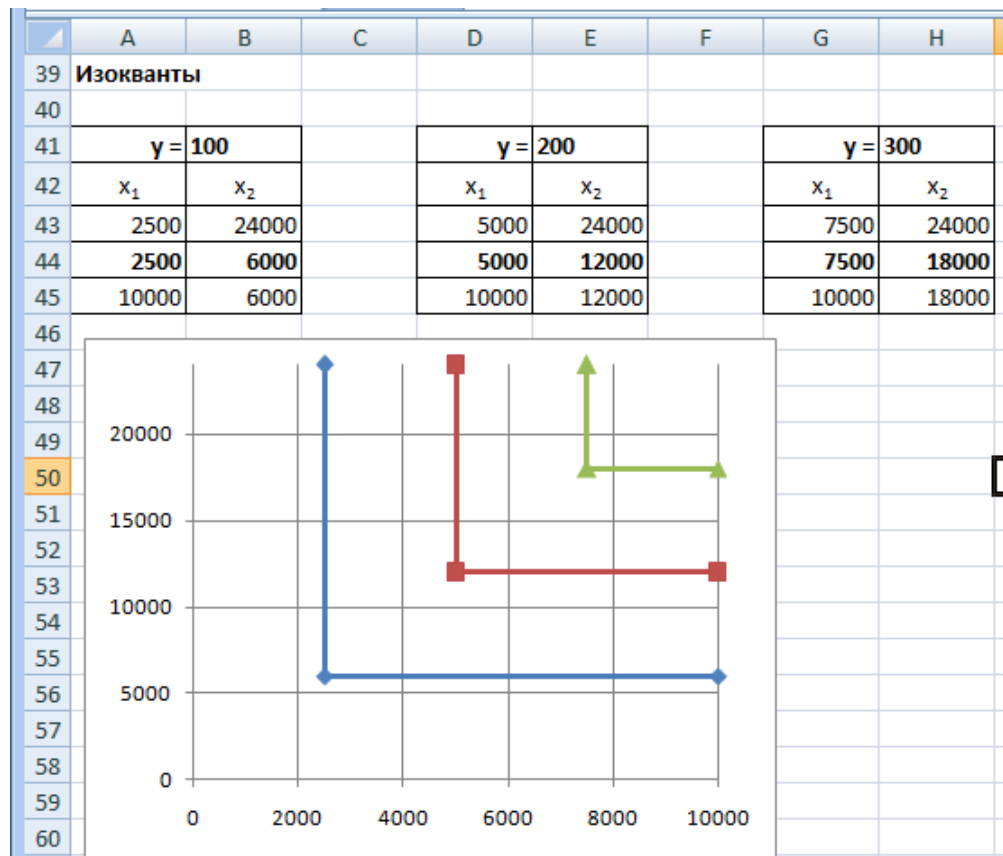
По определению изокванты, выпуск для всех трех точек будет одинаковым:

$$y = \min \left\{ \frac{10000}{25}; \frac{6000}{60} \right\} = \min \{ 400; 100 \} = 100,$$

$$y = \min \left\{ \frac{2500}{25}; \frac{24000}{60} \right\} = \min \{ 100; 400 \} = 100,$$

Для q_2 и q_3 расчеты аналогичные.

Графики изоквант, оптимальные затраты выделены жирным:



1.2.2 Линейная производственная функция

Для производства продукции y (шт.) фирма использует свои производственные мощности x_1 (чел.-дни) и нанимает надомных работников x_2 (чел.). Собрана статистика производства за последние 12 месяцев. Необходимо:

1. Построить линейную производственную функцию, определить ее параметры.
2. Вычислить характеристики производственной функции в декабре. Какова средняя производительность труда на производстве и средняя производительность надомных работников? Предельная производительность?
3. Построить кривые выпуска для значений x_1 и x_2 за июнь.
4. Построить изокванты для объемов производства за январь, июнь и ноябрь.
5. Спрогнозировать объем производства на следующий месяц, исходя из плановых затрат ресурсов, и отметить его на соответствующей изокванте.

Пример варианта задания

	A	B	C	D	E	F
1	Задание 2. Линейная производственная функция					
2	Выполнил: Иванов И.И.		группа 000-Д			
3						
4	Вариант 0					
5	Месяц	y	x_1	x_2		
6	1	4300	3880	38		
7	2	4500	2190	45		
8	3	4900	3280	42		
9	4	4500	2990	44		
10	5	4600	2300	49		
11	6	5200	2930	44		
12	7	4100	2620	41		
13	8	3900	2450	46		
14	9	3300	2050	35		
15	10	4200	2190	37		
16	11	3700	2200	49		
17	12	4100	2790	36		
18	план		2700	44		

Указания к выполнению

1) Для построения производственной функции по статистическим данным необходимо воспользоваться методами эконометрики.

Линейная модель:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \varepsilon$$

По методу наименьших квадратов (МНК) необходимо минимизировать сумму квадратов ошибок:

$$\sum \varepsilon^2 = \sum (y - a_0 - a_1x_1 - a_2x_2)^2 \rightarrow \min$$

Для этого воспользуемся «Поиском решения» в Excel.

Сначала необходимо задать любые значения a_0, a_1, a_2 и для них рассчитать сумму квадратов остатков:

	A	B	C	D
19	a0 = 0			
20	a1 = 1			
21	a2 = 1			
22	Месяц	y*	ε	ε ²
23	1	=B\$19+B\$20*C6+B\$21*D6	=B6-B23	=C23^2
24	2	=B\$19+B\$20*C7+B\$21*D7	=B7-B24	=C24^2
25	3	=B\$19+B\$20*C8+B\$21*D8	=B8-B25	=C25^2
26	4	=B\$19+B\$20*C9+B\$21*D9	=B9-B26	=C26^2
27	5	=B\$19+B\$20*C10+B\$21*D10	=B10-B27	=C27^2
28	6	=B\$19+B\$20*C11+B\$21*D11	=B11-B28	=C28^2
29	7	=B\$19+B\$20*C12+B\$21*D12	=B12-B29	=C29^2
30	8	=B\$19+B\$20*C13+B\$21*D13	=B13-B30	=C30^2
31	9	=B\$19+B\$20*C14+B\$21*D14	=B14-B31	=C31^2
32	10	=B\$19+B\$20*C15+B\$21*D15	=B15-B32	=C32^2
33	11	=B\$19+B\$20*C16+B\$21*D16	=B16-B33	=C33^2
34	12	=B\$19+B\$20*C17+B\$21*D17	=B17-B34	=C34^2
35			Сумма	=СУММ(D23:D34)

«Поиск решения»:

Поиск решения

Установить целевую ячейку: 

Равной: ☐ максимальному значению ☐ значению: ☐ минимальному значению

Изменяя ячейки: 

Ограничения:

Результат:

	A	B	C	D
19	a0 =	1057,87		
20	a1 =	0,52743		
21	a2 =	43,0759		
22	Месяц	y^*	ϵ	ϵ^2
23	1	4741,18	-441,18	194637
24	2	4151,35	348,645	121553,7
25	3	4597,02	302,977	91794,77
26	4	4530,22	-30,221	913,3149
27	5	4381,68	218,325	47665,74
28	6	4498,58	701,425	491996,4
29	7	4205,85	-105,85	11203,17
30	8	4331,56	-431,56	186245,5
31	9	3646,76	-346,76	120239,5
32	10	3806,75	393,253	154647,6
33	11	4328,93	-628,93	395555,9
34	12	4080,13	19,8716	394,8814
35			Сумма	1816847

Таким образом, линейная производственная функция имеет вид:

$$y^* = 1057,9 + 0,527x_1 + 43,1x_2$$

2) Вычислим характеристики производственной функции:

Средняя производительность:

$$A_1 = \frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2}{x_1}, \quad A_2 = \frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2}{x_2}.$$

Предельная производительность:

$$M_1 = a_1, \quad M_2 = a_2.$$

Эластичность:

$$E_1 = \frac{a_1 x_1}{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2}, E_2 = \frac{a_2 x_2}{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2}, E = E_1 + E_2.$$

Технологическая и предельная нормы замены:

$$R_{12} = MRS_{12} = \frac{a_1}{a_2} \quad R_{21} = MRS_{21} = \frac{a_2}{a_1}$$

	A	B	C	D	E	F
37	Характеристики производственной функции (декабрь)					
38		A	M	E		
39	1	1,46	0,53	0,361		
40	2	113,3	43,1	0,380		
41						
42		E = 0,741				
43		R12=MRS12=	0,01224			
44		R21=MRS21=	81,6716			

Таким образом, *средняя производительность труда* на производстве в декабре была равна 1,46 ед. продукции за 1 человеко-час, средняя производительность наемного труда равна 113,3 ед. продукции на человека.

Предельная производительность на собственном производстве составила 0,53, наемного труда – 43,1.

Сравнивать между собой эти величины нельзя, т.к. они измеряются в разных единицах (человеко-часов и человек).

Эластичность труда на собственном производстве была равна 0,36%, при использовании наемных работников – 0,38%. Это означает, что производительность труда наемных работников в данном случае оказалась выше, чем на собственном производстве.

Общая эластичность равна 0,741%, т.е., если увеличить рабочие часы на производстве на 1% и одновременно нанять на 1% больше наемных рабочих, то объем производства увеличится на 0,741%.

Предельные нормы замены равны 0,012 и 81,7, т.е. для замены одного человека-часа необходим труд 0,012 наемных работников, а для замены труда одного наемного рабочего необходимо 81,7 человеко-часов. Их значения не зависят от x_1 и x_2 , поэтому будут одинаковыми для всех месяцев.

3) Кривые выпуска линейной производственной функции – прямые линии.

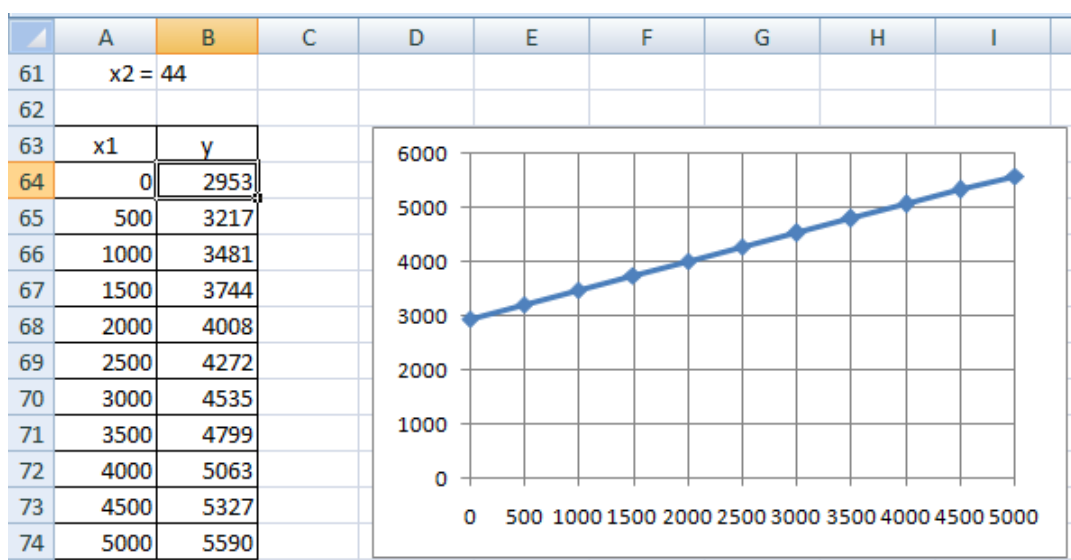
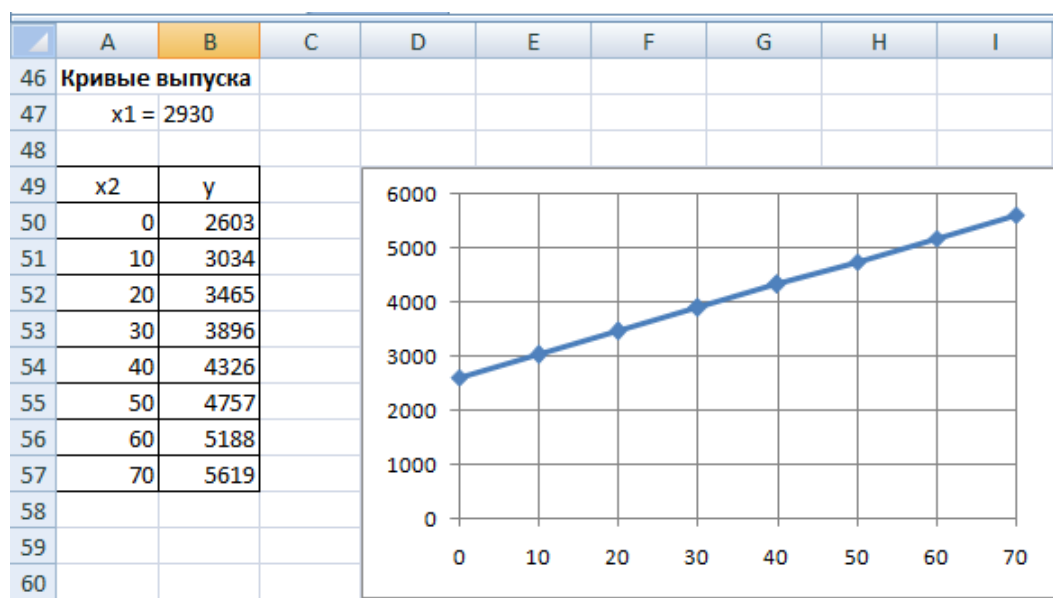
По условию, в июне $x_1 = 2930$. Подставим это значение в производственную функцию:

$$y^* = 1057,9 + 0,527 \cdot 2930 + 43,1x_2 = 2603 + 43,1x_2$$

Аналогично, для $x_2 = 44$:

$$y^* = 1057,9 + 0,527x_1 + 43,1 \cdot 44 = 2953 + 0,527x_1$$

Для построения графика прямой достаточно двух точек, но мы рассчитаем значения для большего их количества (для наглядности):



Значения x_1 и x_2 для построения графика следует выбирать, исходя из значений в исходных данных. В примере x_1 изменяется в пределах приблизительно от 2000 до 4000, а x_2 – 30 до 50. Поэтому x_1 строился от 0 до 5000 с шагом 500, а x_2 – от 0 до 70 с шагом 10.

4) Изокванты линейной производственной функции также прямые.

Например, для января ($y = 4300$):

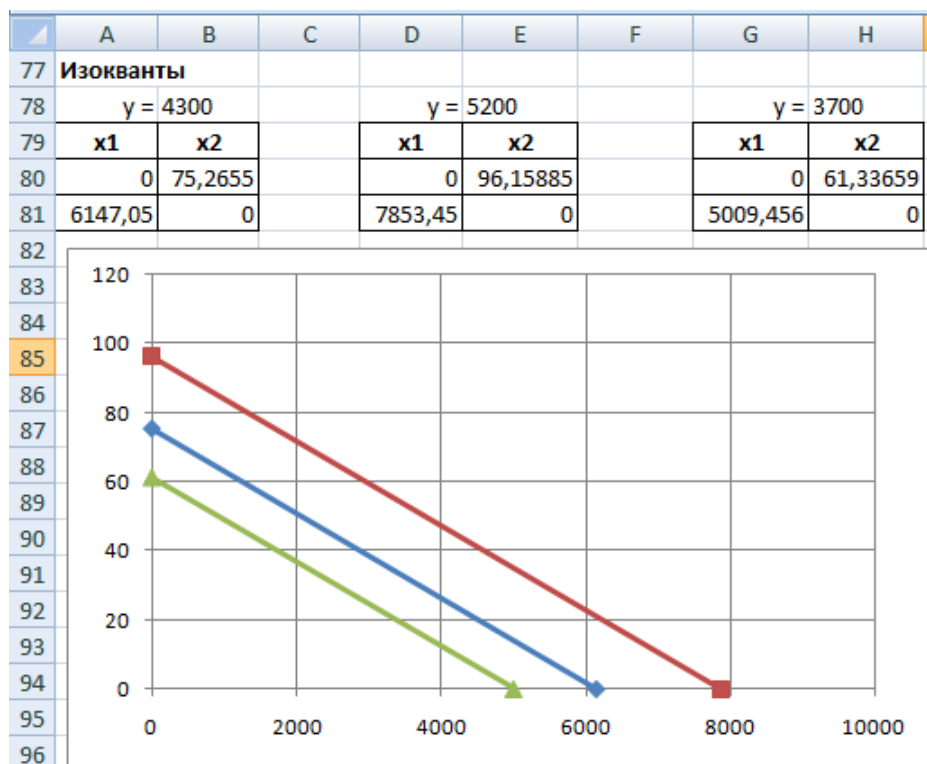
$$4300 = 1057,9 + 0,527x_1 + 43,1x_2$$

$$x_1 = \frac{4300 - 1057,9 - 43,1x_2}{0,527} \approx 6147,05 - 81,7x_2$$

$$x_2 = \frac{4300 - 1057,9 - 0,527x_1}{43,1} \approx 75,3 - 0,012x_1$$

Обратите внимание, значения коэффициентов перед x_1 и x_2 равны предельным нормам замены.

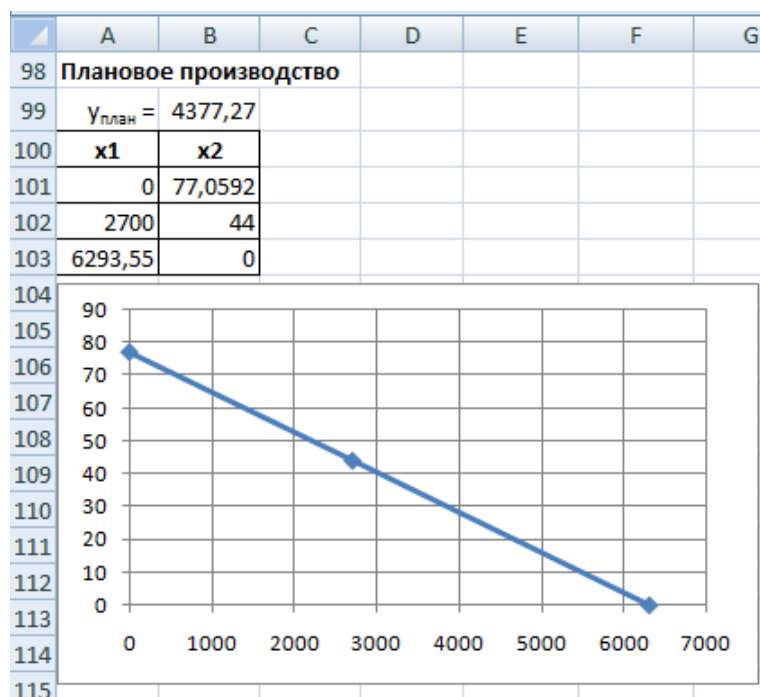
Изокванты будем строить по 2 точкам, в которых один из ресурсов равен нулю.



5) Вычислим объем производства для заданных плановых затрат ресурсов:

$$y_{\text{план}} = 1057,9 + 0,527 \cdot 2700 + 43,1 \cdot 44 = 4377$$

Изокванта для него строится аналогично, нужно лишь добавить точку для плановых затрат ресурсов:



1.2.3 Производственная функция Кобба-Дугласа

Имеются данные об объеме выпуска (д.е.), затратах труда (ед.) и капитала (д.е.) некоторого предприятия за последние 20 лет. Необходимо:

1. Определить параметры функции Кобба-Дугласа.
2. Охарактеризовать точность модели.
3. Вычислить характеристики производственной функции Кобба-Дугласа для каждого года.
4. Построить кривые выпуска по всем значениям L и K .
5. Построить изокванты по значениям Q за 1, 10, 20 годы.
6. Построить прогноз объема производства на следующий год, предварительно спрогнозировав L и K по тренду.

Пример варианта задания

	A	B	C	D	E	F	G
1	Задание 3. Производственная функция Кобба-Дугласа						
2	Выполнил: Иванов И.И.						
3							
4	Вариант 0						
5	i	Q	K	L			
6	1	841,3	45,63	29			
7	2	507,05	22,36	28			
8	3	509,41	22,21	40			
9	4	970,69	50,1	36			
10	5	993,84	44,99	42			
11	6	915,1	41,65	43			
12	7	927,01	48,29	45			
13	8	1261,37	47,35	54			
14	9	1297,88	55,51	49			
15	10	890,99	49,23	47			
16	11	1164,03	42,19	57			
17	12	1428,9	65,48	55			
18	13	1339,25	46,96	59			
19	14	1499,9	69,21	55			
20	15	1273,09	56,83	57			
21	16	1082,52	48,84	57			
22	17	1517,47	61,68	57			
23	18	1341,68	56,36	66			
24	19	1449,58	76,04	66			
25	20	1856,76	76,06	69			

Указания к выполнению

Чтобы определить параметры A , α , β функции Кобба-Дугласа, воспользуемся эконометрическими методами.

Функция Кобба-Дугласа – это нелинейная множественная регрессия:

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}\varepsilon.$$

Чтобы применить метод наименьших квадратов, ее необходимо линеаризовать путем логарифмирования:

$$\begin{aligned}\ln Q &= \ln(AK^{\alpha}L^{\beta}\varepsilon) = \ln A + \ln(K^{\alpha}) + \ln(L^{\beta}) + \ln \varepsilon = \\ &= \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L + \ln \varepsilon\end{aligned}.$$

Введем обозначение $\gamma = \ln A$, откуда $A = e^{\gamma}$.

$$\ln Q = \gamma + \alpha \ln K + \beta \ln L + \ln \varepsilon.$$

Теперь можно найти параметры α , β , γ помощью МНК:

$$\sum (\ln Q - \gamma - \alpha \ln K - \beta \ln L)^2 \rightarrow \min.$$

Для расчетов как и в предыдущем задании воспользуемся «Поиском решения», но сначала необходимо вычислить логарифмы:

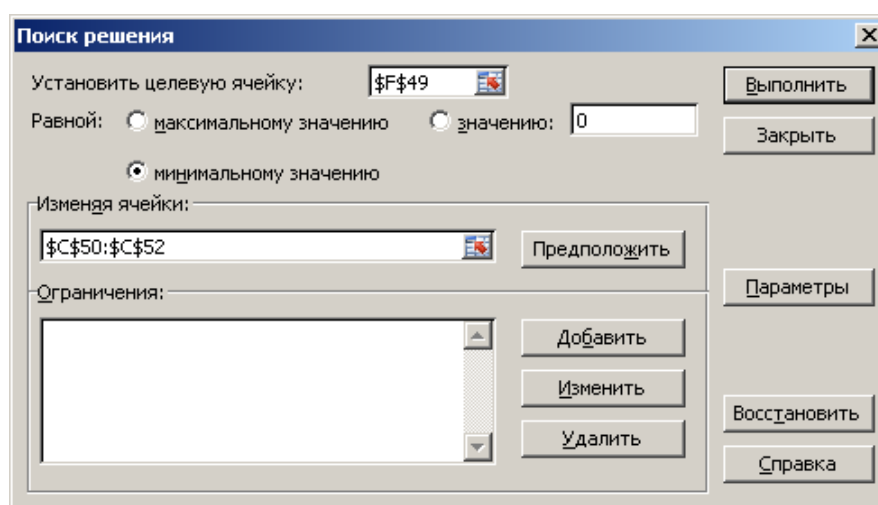
B29		f_x	=LN(B6)	
A	B	C	D	E
27	MHK			
28	i	ln(Q)	ln(K)	ln(L)
29	1	6,734948	3,820565	3,367296
30	2	6,22861	3,107274	3,332205
31	3	6,233253	3,100543	3,688879
32	4	6,878007	3,914021	3,583519
33	5	6,901576	3,80644	3,73767
34	6	6,819033	3,729301	3,7612
35	7	6,831964	3,877224	3,806662
36	8	7,139954	3,857567	3,988984
37	9	7,168487	4,016563	3,89182
38	10	6,792333	3,896503	3,850148
39	11	7,059643	3,742183	4,043051
40	12	7,26466	4,181745	4,007333
41	13	7,199865	3,849296	4,077537
42	14	7,313154	4,237145	4,007333
43	15	7,149202	4,040064	4,043051
44	16	6,987047	3,88855	4,043051
45	17	7,3248	4,12196	4,043051
46	18	7,201678	4,03176	4,189655
47	19	7,279029	4,33126	4,189655
48	20	7,526588	4,331523	4,234107

Зададим произвольные значения параметров (например, $\gamma=1$, $\alpha=0,5$, $\beta=0,5$) и вычислим ошибки модели в логарифмах, квадраты ошибок и их сумму:

	A	B	C	D	E	F
27	MH					
28	i	ln(Q)	ln(K)	ln(L)	ln(ε)	ln ² (ε)
29	1	=LN(B6)	=LN(C6)	=LN(D6)	=(B29-\$C\$52-\$C\$50*C29-\$C\$51*D29)	=E29^2
30	2	=LN(B7)	=LN(C7)	=LN(D7)	=(B30-\$C\$52-\$C\$50*C30-\$C\$51*D30)	=E30^2
31	3	=LN(B8)	=LN(C8)	=LN(D8)	=(B31-\$C\$52-\$C\$50*C31-\$C\$51*D31)	=E31^2
32	4	=LN(B9)	=LN(C9)	=LN(D9)	=(B32-\$C\$52-\$C\$50*C32-\$C\$51*D32)	=E32^2
33	5	=LN(B10)	=LN(C10)	=LN(D10)	=(B33-\$C\$52-\$C\$50*C33-\$C\$51*D33)	=E33^2
34	6	=LN(B11)	=LN(C11)	=LN(D11)	=(B34-\$C\$52-\$C\$50*C34-\$C\$51*D34)	=E34^2
35	7	=LN(B12)	=LN(C12)	=LN(D12)	=(B35-\$C\$52-\$C\$50*C35-\$C\$51*D35)	=E35^2
36	8	=LN(B13)	=LN(C13)	=LN(D13)	=(B36-\$C\$52-\$C\$50*C36-\$C\$51*D36)	=E36^2
37	9	=LN(B14)	=LN(C14)	=LN(D14)	=(B37-\$C\$52-\$C\$50*C37-\$C\$51*D37)	=E37^2
38	10	=LN(B15)	=LN(C15)	=LN(D15)	=(B38-\$C\$52-\$C\$50*C38-\$C\$51*D38)	=E38^2
39	11	=LN(B16)	=LN(C16)	=LN(D16)	=(B39-\$C\$52-\$C\$50*C39-\$C\$51*D39)	=E39^2
40	12	=LN(B17)	=LN(C17)	=LN(D17)	=(B40-\$C\$52-\$C\$50*C40-\$C\$51*D40)	=E40^2
41	13	=LN(B18)	=LN(C18)	=LN(D18)	=(B41-\$C\$52-\$C\$50*C41-\$C\$51*D41)	=E41^2
42	14	=LN(B19)	=LN(C19)	=LN(D19)	=(B42-\$C\$52-\$C\$50*C42-\$C\$51*D42)	=E42^2
43	15	=LN(B20)	=LN(C20)	=LN(D20)	=(B43-\$C\$52-\$C\$50*C43-\$C\$51*D43)	=E43^2
44	16	=LN(B21)	=LN(C21)	=LN(D21)	=(B44-\$C\$52-\$C\$50*C44-\$C\$51*D44)	=E44^2
45	17	=LN(B22)	=LN(C22)	=LN(D22)	=(B45-\$C\$52-\$C\$50*C45-\$C\$51*D45)	=E45^2
46	18	=LN(B23)	=LN(C23)	=LN(D23)	=(B46-\$C\$52-\$C\$50*C46-\$C\$51*D46)	=E46^2
47	19	=LN(B24)	=LN(C24)	=LN(D24)	=(B47-\$C\$52-\$C\$50*C47-\$C\$51*D47)	=E47^2
48	20	=LN(B25)	=LN(C25)	=LN(D25)	=(B48-\$C\$52-\$C\$50*C48-\$C\$51*D48)	=E48^2
49	Σ					=CYMM(F29:F48)
50		α = 0,5				
51		β = 0,5				
52		γ = 1				
53		A = =EXP(C52)				

	A	B	C	D	E	F
27	МНК					
28	i	ln(Q)	ln(K)	ln(L)	ln(ε)	ln ² (ε)
29	1	6,734948	3,820565	3,367296	2,141018	4,583957
30	2	6,22861	3,107274	3,332205	2,008871	4,035561
31	3	6,233253	3,100543	3,688879	1,838542	3,380237
32	4	6,878007	3,914021	3,583519	2,129237	4,533651
33	5	6,901576	3,80644	3,73767	2,129521	4,534861
34	6	6,819033	3,729301	3,7612	2,073783	4,300574
35	7	6,831964	3,877224	3,806662	1,990021	3,960183
36	8	7,139954	3,857567	3,988984	2,216678	4,913663
37	9	7,168487	4,016563	3,89182	2,214296	4,903105
38	10	6,792333	3,896503	3,850148	1,919008	3,682591
39	11	7,059643	3,742183	4,043051	2,167026	4,696002
40	12	7,26466	4,181745	4,007333	2,170121	4,709426
41	13	7,199865	3,849296	4,077537	2,236448	5,001701
42	14	7,313154	4,237145	4,007333	2,190914	4,800106
43	15	7,149202	4,040064	4,043051	2,107644	4,442165
44	16	6,987047	3,88855	4,043051	2,021246	4,085437
45	17	7,3248	4,12196	4,043051	2,242294	5,027884
46	18	7,201678	4,03176	4,189655	2,090971	4,372158
47	19	7,279029	4,33126	4,189655	2,018572	4,074633
48	20	7,526588	4,331523	4,234107	2,243774	5,034521
49	Σ					89,07242
50		α =	0,5			
51		β =	0,5			
52		γ =	1			
53		A =	2,718282			

Теперь найдем значения параметров через «Поиск решения». Необходимо минимизировать сумму квадратов, изменяя значения параметров:



В результате получим значения параметров:

	A	B	C
50		$\alpha =$	0,709083
51		$\beta =$	0,467971
52		$\gamma =$	2,418041
53		A =	11,22385

Вывод: функция Кобба-Дугласа для рассматриваемого предприятия имеет вид:

$$Q^* = 11,2K^{0,709}L^{0,468}.$$

Сумма $\alpha + \beta = 1,18$ больше 1, в данном случае наблюдается *возрастающая отдача от масштаба*.

Для проверки точности модели вычислим среднюю относительную ошибку MAPE.

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum \left| \frac{Q - Q^*}{Q} \right| \cdot 100\%.$$

Заполним столбцы для Q^* , $|Q - Q^*|$ и $\left| \frac{Q - Q^*}{Q} \right|$:

	A	B	C	D
55	Mo			
56	i	Q^*	$ Q - Q^* $	$ (Q - Q^*)/Q $
57	1	=C\$53*C6^C\$50*D6^C\$51	=ABS(B6-B57)	=C57/B6
58	2	=C\$53*C7^C\$50*D7^C\$51	=ABS(B7-B58)	=C58/B7
59	3	=C\$53*C8^C\$50*D8^C\$51	=ABS(B8-B59)	=C59/B8
60	4	=C\$53*C9^C\$50*D9^C\$51	=ABS(B9-B60)	=C60/B9
61	5	=C\$53*C10^C\$50*D10^C\$51	=ABS(B10-B61)	=C61/B10
62	6	=C\$53*C11^C\$50*D11^C\$51	=ABS(B11-B62)	=C62/B11
63	7	=C\$53*C12^C\$50*D12^C\$51	=ABS(B12-B63)	=C63/B12
64	8	=C\$53*C13^C\$50*D13^C\$51	=ABS(B13-B64)	=C64/B13
65	9	=C\$53*C14^C\$50*D14^C\$51	=ABS(B14-B65)	=C65/B14

	A	B	C	D
55	Модель			
56	i	Q*	Q-Q*	(Q-Q*)/Q
57	1	814,7964	26,50359	3,15%
58	2	483,3462	23,70381	4,67%
59	3	568,4276	59,01756	11,59%
60	4	963,3264	7,363618	0,76%
61	5	959,341	34,49899	3,47%
62	6	918,3332	3,233205	0,35%
63	7	1041,821	114,8108	12,39%
64	8	1118,907	142,4631	11,29%
65	9	1196,767	101,1126	7,79%
66	10	1077,873	186,8833	20,97%

Вычислим MAPE-оценку:

C78		fx		=СУММ(D57:D76)/20		
	A	B	C	D	E	F
73	17	1384,211652	133,2583	8,78%		
74	18	1390,658821	48,97882	3,65%		
75	19	1719,696787	270,1168	18,63%		
76	20	1756,172295	100,5877	5,42%		
77						
78		MAPE =	7,43%			

Вывод: Средняя относительная ошибка меньше 10%, модель достаточно точная.

К характеристикам производственной функции относятся:

1) Средняя производительность:

$$A_K = AK^{\alpha-1}L^{\beta} - \text{средняя капиталододача},$$

$$A_L = AK^{\alpha}L^{\beta-1} - \text{средняя производительность труда}.$$

2) Предельная производительность:

$$M_K = A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta} - \text{предельная капиталододача},$$

$$M_L = AK^{\alpha}\beta L^{\beta-1} - \text{предельная капиталододача},$$

3) Частная эластичность:

$$E_K = \alpha, E_L = \beta.$$

Технологическая (предельная) норма замены $R_{KL} = MRS_{KL} = \frac{\alpha L}{\beta K}$

Большинство показателей зависят от K и L , т.е. будут разными в разные годы. Частные эластичности зависят только от α и β , поэтому будут одинаковыми для всех лет.

Для удобства расчетов скопируйте исходные данные и значения параметров ниже на лист. Разметьте ячейки для расчетов:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
80	Характеристики производственной функции								
81	$\alpha =$	0,70908		$E_K =$					
82	$\beta =$	0,46797		$E_L =$					
83	$A =$	11,2239		$E =$					
84	i	Q	K	L	A_K	A_L	M_K	M_L	R_{KL}
85	1	841,3	45,63	29					
86	2	507,05	22,36	28					
87	3	509,41	22,21	40					

Выполним расчеты по приведенным выше формулам:

	A	B	C	D	E	F
80	Хара					
81	$\alpha =$	=C50		$E_K =$	=B81	
82	$\beta =$	=C51		$E_L =$	=B82	
83	$A =$	=C53		$E =$	=E81+E82	
84	i	Q	K	L	A_K	A_L
85	1	841,3	45,63	29	=B\$83*C85^(\$B\$81-1)*D85^\$B\$8	=B\$83*C85^\$B\$81*D85^(\$B\$82-1)
86	2	507,05	22,36	28	=B\$83*C86^(\$B\$81-1)*D86^\$B\$8	=B\$83*C86^\$B\$81*D86^(\$B\$82-1)
87	3	509,41	22,21	40	=B\$83*C87^(\$B\$81-1)*D87^\$B\$8	=B\$83*C87^\$B\$81*D87^(\$B\$82-1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
80	Хара								
81	$\alpha =$	=C50		$E_K =$	=B81				
82	$\beta =$	=C51		$E_L =$	=B82				
83	$A =$	=C53		$E =$	=E81+E82				
84	i	Q	K	L	A_K	A_L	M_K	M_L	R_{KL}
85	1	841,3	45,63	29	=B\$83*C85^(\$B\$81-1)*D85^\$B\$81	=F85*\$B\$82	=B\$81*D85/(\$B\$82*C85)		
86	2	507,05	22,36	28	=B\$83*C86^(\$B\$81-1)*D86^\$B\$81	=F86*\$B\$82	=B\$81*D86/(\$B\$82*C86)		
87	3	509,41	22,21	40	=B\$83*C87^(\$B\$81-1)*D87^\$B\$81	=F87*\$B\$82	=B\$81*D87/(\$B\$82*C87)		

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
80	Характеристики производственной функции								
81	$\alpha =$	0,7091		$E_K =$	0,709				
82	$\beta =$	0,468		$E_L =$	0,468				
83	A =	11,224		E =	1,177				
84	i	Q	K	L	A_K	A_L	M_K	M_L	R_{KL}
85	1	841,3	45,63	29	17,86	28,10	12,66	13,15	0,96
86	2	507,05	22,36	28	21,62	17,26	15,33	8,08	1,90
87	3	509,41	22,21	40	25,59	14,21	18,15	6,65	2,73
88	4	970,69	50,1	36	19,23	26,76	13,63	12,52	1,09
89	5	993,84	44,99	42	21,32	22,84	15,12	10,69	1,41
90	6	915,1	41,65	43	22,05	21,36	15,63	9,99	1,56
91	7	927,01	48,29	45	21,57	23,15	15,30	10,83	1,41
92	8	1261,4	47,35	54	23,63	20,72	16,76	9,70	1,73
93	9	1297,9	55,51	49	21,56	24,42	15,29	11,43	1,34
94	10	890,99	49,23	47	21,89	22,93	15,53	10,73	1,45
95	11	1164	42,19	57	25,06	18,55	17,77	8,68	2,05
96	12	1428,9	65,48	55	21,69	25,82	15,38	12,08	1,27
97	13	1339,3	46,96	59	24,69	19,65	17,51	9,20	1,90
98	14	1499,9	69,21	55	21,34	26,86	15,13	12,57	1,20
99	15	1273,1	56,83	57	22,98	22,91	16,30	10,72	1,52
100	16	1082,5	48,84	57	24,02	20,58	17,03	9,63	1,77
101	17	1517,5	61,68	57	22,44	24,28	15,91	11,36	1,40
102	18	1341,7	56,36	66	24,67	21,07	17,50	9,86	1,77
103	19	1449,6	76,04	66	22,62	26,06	16,04	12,19	1,32
104	20	1856,8	76,06	69	23,09	25,45	16,37	11,91	1,37

Таким образом, эластичность производства по капиталу в 1,5 раза выше, чем по труду: при увеличении капитала на 1%, объем производства возрастает на 0,71%, а при увеличении трудовых ресурсов на 1%, объем производства возрастает лишь на 0,47%.

Из 1 д.е. капитала в среднем производилось от 17,9 до 25,6д.е. продукции, а из 1ед. трудовых ресурсов – от 14,2 до 28,1, а в последний год – 23,1 и 25,4д.е. соответственно.

При увеличении затрат капитала на 1ед., объем производства возрастал в среднем на 12,5-18,5д.е., а в последний год на 16,4д.е. При увеличении затрат труда на 1ед. объем производства возрастал на 6,7-13,2д.е., в последний год – на 11,9 д.е.

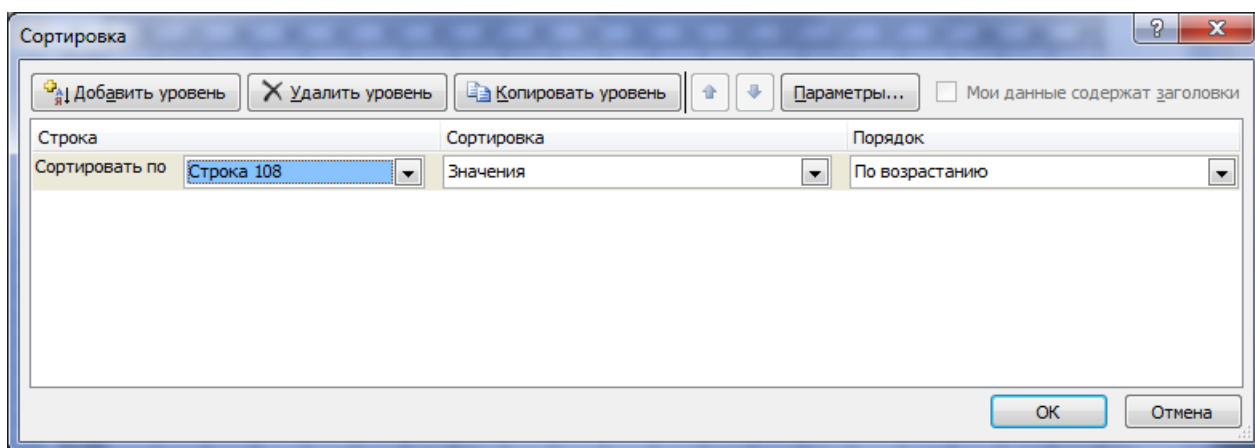
В последний год, 1д.е. капитала можно заменить на 1,37ед. труда, без изменения объема выпуска. В некоторые годы предельная норма замещения капитала на труд превышала 2, и только в первый год меньше 1.

В целом, на данном предприятии выгоднее повышать объем производства за счет вложения капитала, чем за счет увеличения трудовых ресурсов. Возможно, имеет смысл повысить капиталоемкость производства.

Для построения кривых выпуска используем все сочетания капитала и трудовых затрат из исходных данных.

Вынесем труд в заголовки столбцов (транспонированием), капитал а– в заголовки строк. Получим таблицу 20х20 (не считая заголовков). Значения необходимо отсортировать по возрастанию.

Чтобы отсортировать значения L, выделите их, выберите на ленте на вкладке Главная – Сортировка и фильтр – Настраиваемая сортировка. На запрос Excel выберите «сортировать в пределах указанного выделения». Нажмите кнопку «Параметры...», сортировать «столбцы диапазона». Сортировать по – выберите строку со значениями L (в списке она должна быть одна).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
106	Кривые выпуска																				
107		L																			
108	K	28	29	36	40	42	43	45	47	49	54	55	55	57	57	57	57	59	66	66	69
109	22,21																				
110	22,36																				
111	41,65																				
112	42,19																				
113	44,99																				
114	45,63																				
115	46,96																				
116	47,35																				
117	48,29																				
118	48,84																				
119	49,23																				
120	50,1																				
121	55,51																				
122	56,36																				
123	56,83																				
124	61,68																				
125	65,48																				
126	69,21																				
127	76,04																				
128	76,06																				

Заполним таблицу расчетными значениями производственной функции.

Для этого необходимо правильно зафиксировать ячейки. Значения L находятся в одной строке, но в разных столбцах. Следовательно, нужно зафиксировать строку, а столбец – не нужно. Для K – наоборот.

B109		fx		=SC\$53*\$A109^SC\$50*B\$108^SC\$51																	
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
106	Кривые выпуска																				
107		L																			
108	K	28	29	36	40	42	43	45	47	49	54	55	55	57	57	57	57	59	66	66	69
109	22,21	481	489	541	568	582	588	601	613	625	654	660	660	671	671	671	671	682	719	719	734
110	22,36	483	491	544	571	584	591	604	616	628	657	663	663	674	674	674	674	685	722	722	737
111	41,65	751	764	845	888	908	918	938	957	976	1022	1030	1030	1048	1048	1048	1048	1065	1122	1122	1146
112	42,19	758	771	853	896	917	927	947	966	985	1031	1040	1040	1057	1057	1057	1057	1075	1133	1133	1156
113	44,99	794	807	893	938	959	970	991	1011	1031	1079	1088	1088	1107	1107	1107	1107	1125	1185	1185	1210
114	45,63	802	815	902	947	969	980	1001	1021	1041	1090	1099	1099	1118	1118	1118	1118	1136	1197	1197	1222
115	46,96	818	832	920	967	989	1000	1021	1042	1063	1112	1122	1122	1141	1141	1141	1141	1159	1222	1222	1248
116	47,35	823	836	926	972	995	1006	1027	1049	1069	1119	1129	1129	1148	1148	1148	1148	1166	1229	1229	1255
117	48,29	834	848	939	986	1009	1020	1042	1063	1084	1135	1144	1144	1164	1164	1164	1164	1183	1246	1246	1273
118	48,84	841	855	946	994	1017	1028	1050	1072	1093	1144	1154	1154	1173	1173	1173	1173	1192	1256	1256	1283
119	49,23	846	860	951	1000	1023	1034	1056	1078	1099	1150	1160	1160	1180	1180	1180	1180	1199	1263	1263	1290
120	50,1	856	871	963	1012	1035	1047	1069	1091	1113	1165	1175	1175	1194	1194	1194	1194	1214	1279	1279	1306
121	55,51	921	936	1036	1088	1113	1126	1150	1174	1197	1252	1263	1263	1285	1285	1285	1285	1305	1376	1376	1405
122	56,36	931	946	1047	1100	1126	1138	1162	1186	1210	1266	1277	1277	1298	1298	1298	1298	1320	1391	1391	1420
123	56,83	937	952	1053	1107	1132	1145	1169	1193	1217	1273	1284	1284	1306	1306	1306	1306	1327	1399	1399	1428
124	61,68	993	1009	1116	1173	1200	1213	1239	1265	1290	1350	1361	1361	1384	1384	1384	1384	1407	1483	1483	1514
125	65,48	1035	1053	1165	1224	1252	1266	1293	1319	1345	1408	1420	1420	1444	1444	1444	1444	1468	1547	1547	1579
126	69,21	1077	1095	1211	1273	1302	1316	1345	1372	1399	1464	1477	1477	1502	1502	1502	1502	1526	1609	1609	1642
127	76,04	1151	1170	1295	1360	1392	1407	1438	1467	1496	1566	1579	1579	1606	1606	1606	1606	1632	1720	1720	1756
128	76,06	1152	1171	1295	1361	1392	1408	1438	1467	1496	1566	1579	1579	1606	1606	1606	1606	1632	1720	1720	1756

Эта таблица содержит большой объем информации, которую можно использовать для анализа различных вариантов производства. В ней представлены объемы производства для всех сочетаний труда и капитала.

Но если построить все эти кривые выпуска на графике одновременно, их будет слишком много. Мы построим по 3 кривых выпуска для капитала и труда: для минимального, максимального и значения из середины таблицы.

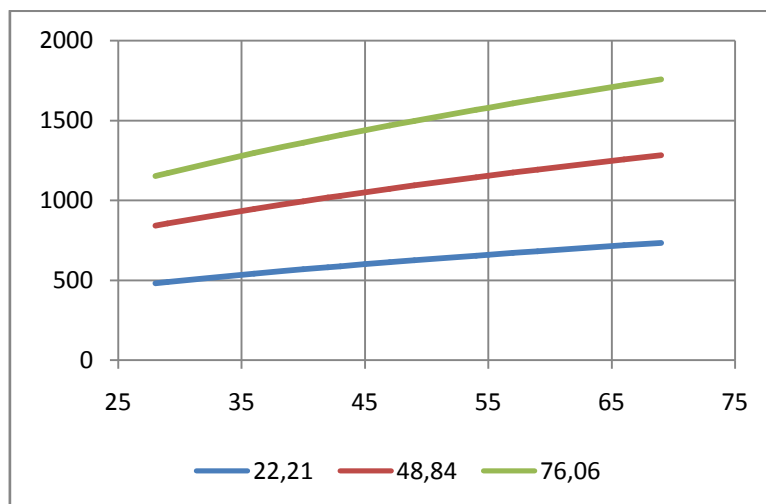
Выделите, зажав клавишу Ctrl, значения L, а затем первую, 10-ю и последнюю строки таблицы. Добавьте диаграмму типа Точечная – Точечная с гладкими кривыми.

На графике добавьте названия рядов – значения K из соответствующих строк: правый клик – Выбрать данные. Для каждого ряда Изменить – назначить Имя ряда.

Добавьте вертикальные линии сетки, настройте минимальное и максимальное значение горизонтальной оси.

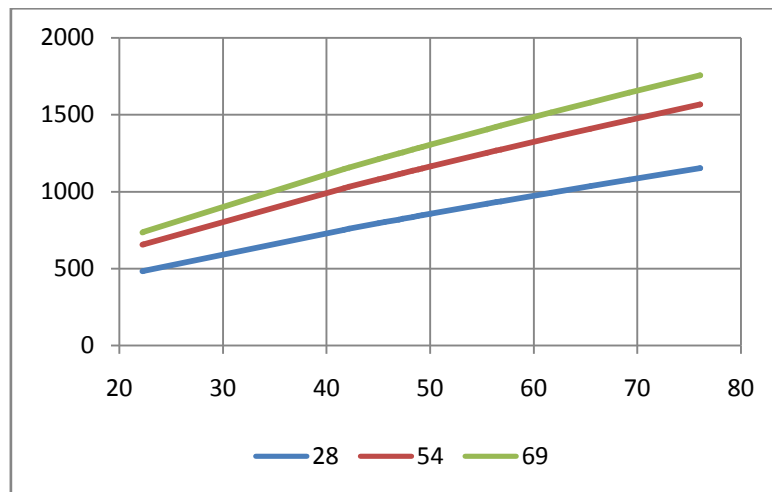
Легенду можно переместить вниз.

Семейство кривых выпуска для капитала:



По аналогии постройте графики кривых выпуска для первого, 10-го и последнего столбца.

Семейство кривых выпуска для труда:



Построим изокванты для объемов выпуска за 1 год (в примере 841д.е.), 10 год (891д.е.) и последний год (1857д.е.).

Изокванты функции Кобба-Дугласа нелинейны, для их построения нужно несколько точек. По горизонтальной оси будем откладывать K , а по вертикальной L .

Выразим из функции Кобба-Дугласа L через K :

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

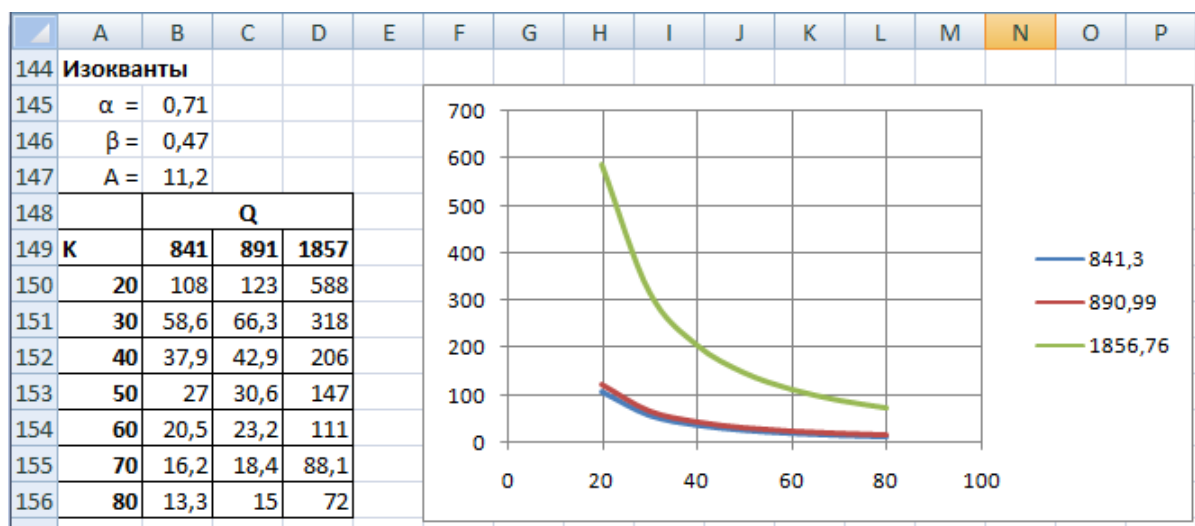
$$L^{\beta} = \frac{Q}{AK^{\alpha}}$$

$$L = \left(\frac{Q}{AK^{\alpha}} \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

В исходных данных значения K в диапазоне 20-80. Вычислим для них значения L при $Q = 841$ (для первого года).

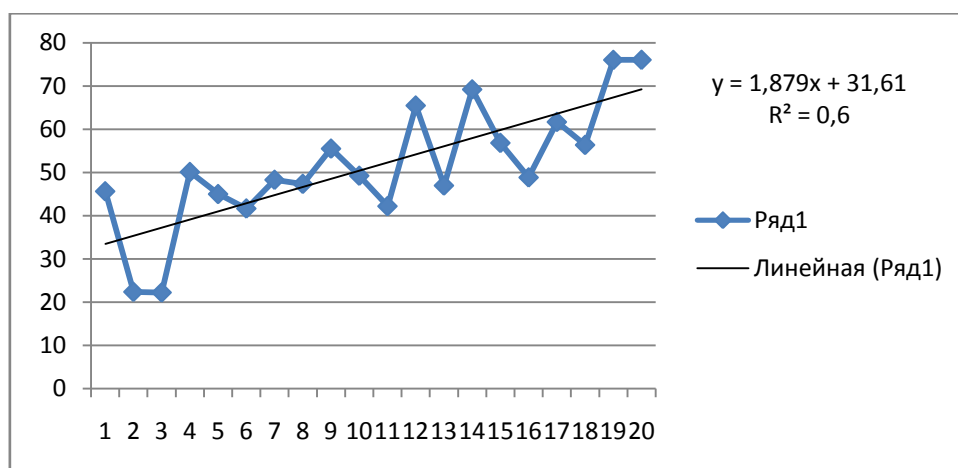
B150		fx =(B\$149/(\$B\$147*\$A150^\$B\$145))^(1/\$B\$146)												
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	
144	Изокванты													
145	α = 0,71													
146	β = 0,47													
147	A = 11,2													
148	Q													
149	K	841	891	1857										
150	20	108												
151	30	58,6												
152	40	37,9												
153	50	27												
154	60	20,5												
155	70	16,2												
156	80	13,3												

Аналогично рассчитаем изокванты для двух других значений Q и построим график.



6. Сначала необходимо спрогнозировать значения K и L.

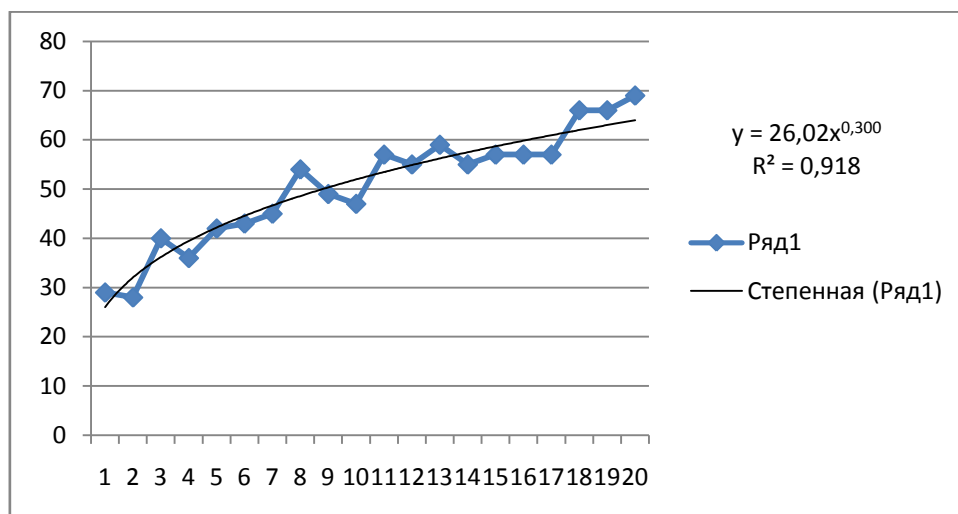
Построим график K и добавим линии тренда. По коэффициенту R^2 необходимо выбрать наилучший тренд. В примере это линейная модель с $R^2 = 0,6$.



Используя полученное уравнение тренда, спрогнозируем K на следующий (21-й) год.

B159			f_x		=1,879*21 + 31,61			
	A	B	C	D	E	F	G	H
158	Прогноз							
159	$K_{21} =$	71,069						

Аналогично спрогнозируем L . Но для него наилучшей оказалась степенная модель.



B160		f_x	$=26,02*21^{0,3}$				
	A	B	C	D	E	F	G
158	Прогноз						
159	$K_{21} =$	71,069					
160	$L_{21} =$	64,8594					

Наконец, вычислим прогноз объема выпуска:

$$Q_{21} = AK_{21}^{\alpha} L_{21}^{\beta} = 11,2 \cdot 71,1^{0,71} \cdot 64,9^{0,47} = 1625,9$$

B161		fx		=\$C\$53*B159^\$C\$50*B160^\$C\$51						
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
158	Прогноз									
159	$K_{21} =$	71,069								
160	$L_{21} =$	64,8594								
161	$Q_{21} =$	1625,88								

Таким образом, на следующий год можно ожидать объем выпуска 1625,9д.е.

Примечание Такой подход можно использовать для прогнозирования развития конкурентного бизнеса, когда мы не можем назначать объем трудовых ресурсов и капитала на следующий год.

Дополнение

Модели, нелинейные по параметрам

Модели, нелинейные по параметрам уравнения, являясь разновидностью внутренне линейных моделей, также могут быть приведены к линейному виду путем логарифмирования по любому основанию.

Приведение степенных функций к линейному виду

Степенная функция имеет вид:

$$y = b_0 x^{b_1} \cdot u,$$

где y – эндогенная переменная;

x – экзогенная (объясняющая) переменная;

b_0, b_1 – параметры уравнения;

u – случайная компонента.

Преобразование функции данного вида путем логарифмирования будет осуществлено следующим образом:

$$\ln y = \ln b_0 + b_1 \cdot \ln x + \ln u,$$

где $\ln$ – натуральный логарифм y, b_0, x, u соответственно; b_1 – параметр уравнения.

Далее следует произвести замену прологарифмированных параметров и переменных: $\ln y = Y$; $\ln b_0 = B_0$; $\ln x = X$, $\ln u = U$. Тогда исходное уравнение примет вид:

$$Y = B_0 + B_1 X + U$$

Примечание: в степенных функциях показатель степени представляет собой коэффициент эластичности.

Приведение показательных функций к линейному виду

Показательная функция имеет вид:

$$y = b_0 \cdot b_1^x \cdot u,$$

где y – эндогенная (зависимая) переменная;

x – экзогенная (независимая) переменная;

b_0, b_1 – параметры уравнения;

u – случайная компонента.

Приведение показательной функции к линейному виду происходит тем же путем, что и степенной, то есть с помощью процедуры логарифмирования:

$$\ln y = \ln b_0 + x \cdot \ln b_1 + \ln u ,$$

где $\ln$ – натуральные логарифмы y , b_0 , b_1 , u соответственно;

x – объясняющая переменная.

Далее по аналогичной схеме производим замену: $\ln b_0=B_0$; $\ln b_1=B_1$;

$\ln y=Y$, $\ln u=U$. Исходное уравнение примет вид

$$Y=B_0+B_1 x+U.$$

Внутренне нелинейные модели

Внутренне нелинейными моделями называются такие модели, которые нельзя привести к линейному виду. Для внутренне нелинейных моделей используют приближенные процедуры для определения их параметров.

Рассмотрим внутренне нелинейную модель, отражающую степенную зависимость эндогенной переменной Y от объясняющей переменной X : .

В данном случае целесообразно использовать метод подбора значения степени экзогенной переменной x_1 . Критерием отбора будет значение коэффициента детерминации R^2 , благодаря которому возможно определить точность описания регрессионной моделью эмпирических данных.

Результаты моделирования линейной производственной функции

Регрессионная статистика		Дисперсионный анализ		Коэффициенты		Р-Значение	
Множественный R	0,971	Значимость F	9,573E-14	Y-пересечение	-4,8552	0,3709	
				K	0,1586	0,0005	
Нормированный R-квадрат	0,937	F	171,9278	L	0,91661	2,21E-06	

Регрессионная модель линейной производственной функции показывает высокую точность описания эмпирических данных (93,7%). Модель адекватна при уровне значимости, так как $0,03 > 9,573E-14$.

Коэффициенты уравнения регрессии значимы при ($0,4 > 0,3709$; $0,4 > 0,0005$; $0,4 > 2,21E-06$).

Результаты моделирования функции Кобба-Дугласа в MS Excel (Анализ данных-Регрессия)

Функция Кобба-Дугласа является разновидностью степенных функций. Для придания ей линейного вида, необходимо воспользоваться методом логарифмирования. Результаты моделирования сведем в таблицу:

Результаты моделирования производственной функции Кобба-Дугласа

Регрессионная статистика		Дисперсионный анализ		Коэффициенты		Р-Значение	
Множественный R	0,978	Значимость F	4,038E-15	Y-пересечение	-0,1773	0,3436	
				K	0,23305	0,0007	
Нормированный R-квадрат	0,953	F	236,12192	L	0,80728	8,007E-06	

Скорректированный R-квадрат, равный 95,3% свидетельствует о точности регрессионной модели по отношению к эмпирическим данным. Модель является адекватной при уровне значимости 5%, поскольку $0,05 > 4,038E-15$. Также значимыми оказались и коэффициенты при ($0,4 > 0,3436$; $0,4 > 0,0007$; $0,4 > 8,007E-06$). Однако значение коэффициента b_0 оказалось искаженным после проведения логарифмирования. Вернем параметру b_0 действительную величину: $b_0 = \exp(B_0) = 0,838$.

Построение регрессионной модели степенной функции

Для приведения данного уравнения к линейному виду была использована процедура логарифмирования.

Результаты моделирования степенной функции .

Регрессионная статистика		Дисперсионный анализ		Коэффициенты		Р-Значение	
Множественный R	0,954	Значимость F	7,9E-11	Y-пересечение	2,3691	4,65E-11	
R-квадрат	0,91	F	180,9614	lnx	-1,059	3,93E-11	

Множественный R, равный 95,4% говорит о наличии тесной связи между экзогенной и эндогенной переменными. Точность описания регрессионной моделью эмпирических данных тоже высока и составляет 91%.

Регрессионная модель адекватна при уровне значимости ($0,03 > 7,9E-11$). Также значимыми оказались коэффициенту уравнения регрессии, так как ($0,03 > 4,65E-11$; $0,03 > 3,93E-11$). Однако коэффициент b_0 принял искаженное значение в связи с предшествующим логарифмированием. Его истинное значение оказалось равным $b_0 = \exp(B_0) = 10,688$.

Уравнение регрессии степенной функции приобрело вид:

Построение регрессионной модели показательной функции

Как и в предыдущем задании, для приведения функции данного вида к линейной, необходимо произвести логарифмирование.

Таблица №1

Результаты моделирования показательной функции .

Регрессионная статистика		Дисперсионный анализ		Коэффициенты		Р-Значение	
Множественный R	0,987	Значимость F	1,2E-15	Y-пересечение	1,708	1,554E-15	
R-квадрат	0,974	F	661,806	x	-0,151	6,004E-16	

Высокие значения множественного R и коэффициента детерминации, равные 98,7% и 97,4% говорят о высокой связи между объясняющей и зависимой переменной и высокой точности модели соответственно. Модель оказалась адекватна при уровне значимости , так как ($0,03 > 1,2E-15$).

Коэффициенты уравнения также оказались значимыми при уровне значимости ($0,03 > 1,554E-15$; $0,03 > 6,004E-16$), однако значения коэффициентов нельзя принять равным ранее вычисленным в связи с их искажением в процессе логарифмирования. Применим процедуру потенцирования: $b_0 = \exp(B_0) = 5,517$; $b_1 = \exp(B_1) = 0,8603$.

Уравнение регрессии показательной функции приобрело вид:

Построение регрессионной модели степенной функции

Данную функцию не удастся привести к линейному виду. Для определения параметров уравнения регрессии и степени экзогенной переменной необходимо методом подбора степени получить искомые данные. Индикатором выбора будет служить значение коэффициента детерминации – чем выше значение, тем более точно регрессионная модель опишет эмпирические значения.

Результаты подбора значений степени объясняющей переменной.

Значение степени	Значение коэффициента детерминации R^2 , %
0,4	87,19
0,2	91,75
-0,9	94,62
-0,4	98,83
-1,5	83,50

Судя по значениям R-квадрат, можно сказать, что наивысшая точность описания моделью регрессионных данных 98,83% была достигнута при значении степени. Менее точной регрессионная модель оказалась при . Для построения уравнения регрессии будем использовать наиболее точную модель.

Результаты моделирования степенной функции при .

Регрессионная статистика		Дисперсионный анализ		Коэффициенты		Р-Значение	
Множественный R	0,9941	Значимость F	7,96E-19	Y-пересечение	-2,492	1,11E-14	
R-квадрат	0,9883	F	1513,96	$z = x^{(-0,4)}$	9,1794	3,98E-19	

При уровне значимости 3% нулевая гипотеза будет отвергнута и модель принять адекватной, так как $(0,03 > 7,96E-19)$. Проверка параметров модели на значимость при также дала положительный результат: $(0,03 > 1,11E-14; 0,03 > 3,98E-19)$, и коэффициенты следует принять равными ранее вычисленным $b_0 = -2,492$; $b_1 = 9,179$; в связи с отсутствием логарифмирования значения параметров не искажены. Уравнение регрессии будет иметь вид:

1.3 Варианты заданий

Известны динамические ряды по основному капиталу, численности рабочих и ВВП за 20-летний период деятельности некоторой хозяйственной системы

Требуется определить параметры производственных функций различного вида, методы их построения и характеристики: 1) модель Леонтьева, 2) линейная и 3) функция Кобба-Дугласа.

Для полученных функций построить графики кривых производства, построить изокванты и определить оптимальные затраты для выпуска заданного объема. Спрогнозировать объем производства на следующий период, исходя из плановых затрат ресурсов, и отметить его на соответствующей изокванте. Определить эластичность по труду и капиталу.

Исходные данные для эконометрического моделирования производственных функций представлены в таблице (номер варианта = порядковому номеру студента в списке группы)

B-1	Y	K	L	B-2	Y	K	L
	2.27	112.5			2.27		2.12
	1.94	116.4	42.1		1.94	42.1	2.2
	2.32	111.6	42.3		2.32	42.3	2.11
	2.49	108.9	43.7		2.49	43.7	2.03
	2.57	116.5	42.8		2.57	42.8	2.21
	2.01	104.5	41.8		2.01	41.8	1.88
	1.87	102.7			1.87		1.91
	2.39	110.2	44.4		2.39	44.4	
	2.18	104.7	51.2		2.18	51.2	1.9

	2.17	109.4	54.6		2.17	54.6	1.99
	1.8	101.1	57.4		1.8	57.4	1.54
	2.36	102.6	53.2		2.36	53.2	1.74
	2.5	128.5	57.6		2.5	57.6	2.23
	2.27	122.5	58.3		2.27	58.3	2.14
	2.33	105.2	55.7		2.33	55.7	1.87
B-3	Y	K	L	B-4	Y	K	L
	112.5	2.27	2.12		112.5	2.27	3.45
	116.4	1.94	2.2		116.4	1.94	3.48
	111.6	2.32	2.11		111.6	2.32	3.06
	108.9	2.49	2.03		108.9	2.49	3.66
	116.5	2.57	2.21		116.5	2.57	3.79
	104.5	2.01	1.88		104.5	2.01	3.85
	102.7	1.87	1.91		102.7	1.87	3.44
	110.2	2.39			110.2	2.39	4.08
	104.7	2.18	1.9		104.7	2.18	4.5
	109.4	2.17	1.99		109.4	2.17	4.31
	101.1	1.8	1.54		101.1	1.8	3.57
	102.6	2.36	1.74		102.6	2.36	3.55
	128.5	2.5	2.23		128.5	2.5	4.61
	122.5	2.27	2.14		122.5	2.27	3.99
	105.2	2.33	1.87		105.2	2.33	4.78
B-5	Y	K	L	B-6	Y	K	L
	10.11	0.43	3.45		10.11	3.45	0.43
	13.65	0.77	3.48		13.65	3.48	0.77
	13.75	1.35	3.06		13.75	3.06	1.35
	11.64	1.99	3.66		11.64	3.66	1.99
	12.87	0.88	3.79		12.87	3.79	0.88
	12.43	0.98	3.85		12.43	3.85	0.98
	14.33	1.56	3.44		14.33	3.44	1.56
	15.26	2.09	4.08		15.26	4.08	2.09
	15.9	1.44	4.5		15.9	4.5	1.44
	18.21	2.13	4.31		18.21	4.31	2.13
	13.22	1.17	3.57		13.22	3.57	1.17
	13.45	1.44	3.55		13.45	3.55	1.44
	12.22	1.87	4.61		12.22	4.61	1.87
		2.66	3.99			3.99	2.66
	13.07	2.05	4.78		13.07	4.78	2.05
B-7	Y	K	L	B-8	Y	K	L

	3.45	2.27			15.16	2.12	32.1
	3.48	1.94	42.1		16.7	2.2	
	3.06	2.32	42.3		15.44	2.11	32.4
	3.66	2.49	43.7		15.65	2.03	33.2
	3.79	2.57	42.8		13.13	2.21	31.2
	3.85	2.01	41.8		14.22	1.88	34.8
	3.44	1.87			16.73	1.91	35.4
	4.08	2.39	44.4		17.8		
	4.5	2.18	51.2		16.88	1.9	34.8
	4.31	2.17	54.6		15.67	1.99	33.3
	3.57	1.8	57.4		15.99	1.54	36.1
	3.55	2.36	53.2		14.33	1.74	38.3
	4.61	2.5	57.6		15.77	2.23	30.6
	3.99	2.27	58.3		15.28	2.14	32.1
	4.78	2.33	55.7		17.04	1.87	37.6
B-9	Y	K	L	B-10	Y	K	L
	15.16	32.1	24.56			2.27	112.5
	16.7		23.7		42.1	1.94	116.4
	15.44	32.4	23.78		42.3	2.32	111.6
	15.65	33.2	24.1		43.7	2.49	108.9
	13.13	31.2			42.8	2.57	116.5
	14.22	34.8	23.67		41.8	2.01	104.5
	16.73	35.4	24.9			1.87	102.7
	17.8		32.75		44.4	2.39	110.2
	16.88	34.8	26.24		51.2	2.18	104.7
	15.67	33.3	25.37		54.6	2.17	109.4
	15.99	36.1	25.66		57.4	1.8	101.1
	14.33	38.3	24.34		53.2	2.36	102.6
	15.77	30.6	22.1		57.6	2.5	128.5
	15.28	32.1	20.57		58.3	2.27	122.5
	17.04	37.6	24.61		55.7	2.33	105.2
B-11	Y	K	L	B-12	Y	K	L
	112.5	3.45	2.12		201.6	3.15	0.43
	116.4	3.48	2.2			3.54	0.77
	111.6	3.06	2.11		202.6	3.66	1.35
	108.9	3.66	2.03		201.8	3.15	1.99
	116.5	3.79	2.21		203.3	3.26	0.88
	104.5	3.85	1.88		203.4	3.27	0.98
	102.7	3.44	1.91		204.7	3.76	1.56

	110.2	4.08			204.3	3.88	2.09
	104.7	4.5	1.9		204.5	3.91	1.44
	109.4	4.31	1.99		203.9	4.01	2.13
	101.1	3.57	1.54		202.7	3.71	1.17
	102.6	3.55	1.74		205.8	4.65	1.44
	128.5	4.61	2.23		209.5	4.22	1.87
	122.5	3.99	2.14		204.3	3.29	2.66
	105.2	4.78	1.87		202.8	4.06	2.05
B-13	Y	K	L	B-14	Y	K	L
	3.45	32.1	24.56		201.6	3.15	3.45
	3.48		23.7			3.54	3.48
	3.06	32.4	23.78		202.6	3.66	3.06
	3.66	33.2	24.1		201.8	3.15	3.66
	3.79	31.2			203.3	3.26	3.79
	3.85	34.8	23.67		203.4	3.27	3.85
	3.44	35.4	24.9		204.7	3.76	3.44
	4.08		32.75		204.3	3.88	4.08
	4.5	34.8	26.24		204.5	3.91	4.5
	4.31	33.3	25.37		203.9	4.01	4.31
	3.57	36.1	25.66		202.7	3.71	3.57
	3.55	38.3	24.34		205.8	4.65	3.55
	4.61	30.6	22.1		209.5	4.22	4.61
	3.99	32.1	20.57		204.3	3.29	3.99
	4.78	37.6	24.61		202.8	4.06	4.78
B-15	Y	K	L	B-16	Y	K	L
	10.11	3.15	0.43		10,11	3,45	6,17
	13.65	3.54	0.77		13,65	3,48	7,55
	13.75	3.66	1.35		13,75	3,06	6,93
	11.64	3.15	1.99		11,64	3,66	6,55
	12.87	3.26	0.88		12,87	3,79	6,71
	12.43	3.27	0.98		12,43	3,85	7,73
	14.33	3.76	1.56		14,33	3,44	7,43
	15.26	3.88	2.09		15,26	4,08	7,55
	15.9	3.91	1.44		15,9	4,5	7,6
	18.21	4.01	2.13		18,21	4,31	6,88
	13.22	3.71	1.17		13,22	3,57	6,5
	13.45	4.65	1.44		13,45	3,55	4,37
	12.22	4.22	1.87		12,22	4,61	6,82
		3.29	2.66			3,99	7,33

	13,07	4,06	2,05		13,07	4,78	6,1
B-17	Y	K	L	B-18	Y	K	L
	10,45	9,08			7,58	8,48	39,10
	10,48	7,76	126,3		8,35	8,8	7,00
	10,06	9,28	126,9		7,72	8,44	39,40
	10,66	9,96	131,1		7,83	8,12	40,20
	10,79	10,28	128,4		6,57	8,84	38,20
	10,85	8,04	125,4		7,11	7,52	41,80
	10,44	7,48			8,37	7,64	42,40
	11,08	9,56	133,2		8,90	0	7,00
	11,50	8,72	153,6		8,44	7,6	41,80
	11,31	8,68	163,8		7,84	7,96	40,30
	10,57	7,2	172,2		8,00	6,16	43,10
	10,55	9,44	159,6		7,17	6,96	45,30
	11,61	10	172,8		7,89	8,92	37,60
	10,99	9,08	174,9		7,64	8,56	39,10
	11,78	9,32	167,1		8,52	7,48	44,60
B-19	Y	K	L	B-20	Y	K	L
	22,16	128,4	73,68		0,00	9,08	119,50
	23,70		71,1		21,05	7,76	123,40
	22,44	129,6	71,34		21,15	9,28	118,60
	22,65	132,8	72,3		21,85	9,96	115,90
	20,13	124,8			21,40	10,28	123,50
	21,22	139,2	71,01		20,90	8,04	111,50
	23,73	141,6	74,7			7,48	109,70
	24,80		98,25		22,20	9,56	117,20
	23,88	139,2	78,72		25,60	8,72	111,70
	22,67	133,2	76,11		27,30	8,68	116,40
	22,99	144,4	76,98		28,70	7,2	108,10
	21,33	153,2	73,02		26,60	9,44	109,60
	22,77	122,4	66,3		28,80	10	135,50
	22,28	128,4	61,71		29,15	9,08	129,50
	24,04	150,4	73,83		27,85	9,32	112,20
B-21	Y	K	L	B-22	Y	K	L
	119,50	13,8	6,36		100,80	12,6	7,43
	123,40	13,92	6,6			14,16	7,77
	118,60	12,24	6,33		101,30	14,64	8,35
	115,90	14,64	6,09		100,90	12,6	8,99

	123,50	15,16	6,63		101,65	13,04	7,88
	111,50	15,4	5,64		101,70	13,08	7,98
	109,70	13,76	5,73		102,35	15,04	8,56
	117,20	16,32			102,15	15,52	9,09
	111,70	18	5,7		102,25	15,64	8,44
	116,40	17,24	5,97		101,95	16,04	9,13
	108,10	14,28	4,62		101,35	14,84	8,17
	109,60	14,2	5,22		102,90	18,6	8,44
	135,50	18,44	6,69		104,75	16,88	8,87
	129,50	15,96	6,42		102,15	13,16	9,66
	112,20	19,12	5,61		101,40	16,24	9,05
B-23	Y	K	L	B-24	Y	K	L
	10,45	128,4	73,68		100,80	12,6	10,45
	10,48		71,1		0,00	14,16	10,48
	10,06	129,6	71,34		101,30	14,64	10,06
	10,66	132,8	72,3		100,90	12,6	10,66
	10,79	124,8			101,65	13,04	10,79
	10,85	139,2	71,01		101,70	13,08	10,85
	10,44	141,6	74,7		102,35	15,04	10,44
	11,08	0	98,25		102,15	15,52	11,08
	11,50	139,2	78,72		102,25	15,64	11,50
	11,31	133,2	76,11		101,95	16,04	11,31
	10,57	144,4	76,98		101,35	14,84	10,57
	10,55	153,2	73,02		102,90	18,6	10,55
	11,61	122,4	66,3		104,75	16,88	11,61
	10,99	128,4	61,71		102,15	13,16	10,99
	11,78	150,4	73,83		101,40	16,24	11,78
B-25	Y	K	L	B-26	Y	K	L
	17,11	12,6	1,29		5,06	13,8	13,17
	20,65	14,16	2,31		6,83	13,92	14,55
	20,75	14,64	4,05		6,88	12,24	13,93
	18,64	12,6	5,97		5,82	14,64	13,55
	19,87	13,04	2,64		6,44	15,16	13,71
	19,43	13,08	2,94		6,22	15,4	14,73
	21,33	15,04	4,68		7,17	13,76	14,43
	22,26	15,52	6,27		7,63	16,32	14,55
	22,90	15,64	4,32		7,95	18	14,60
	25,21	16,04	6,39		9,11	17,24	13,88
	20,22	14,84	3,51		6,61	14,28	13,50

	20,45	18,6	4,32		6,73	14,2	11,37
	19,22	16,88	5,61		6,11	18,44	13,82
	7,00	13,16	7,98			15,96	14,33
	20,07	16,24	6,15		6,54	19,12	13,10

Дополнение: Отсутствующие данные восстановить линейной интерполяцией.

Тема 2 Статическая модель межотраслевого баланса

2. 1 Основные понятия и краткая теория

Идея сбалансированности лежит в основе всякого рационального функционирования хозяйства. Суть ее в том, что все затраты должны компенсироваться доходами хозяйства. В основе создания балансовых моделей лежит *балансовый метод* – взаимное сопоставление имеющихся ресурсов и потребностей в них.

Межотраслевой баланс отражает производство и распределение валового национального продукта по отраслям, межотраслевые производственные связи, использование материальных и трудовых ресурсов, создание и распределение национального дохода.

Пусть весь производственный сектор народного хозяйства разбит на n чистых отраслей. Чистая отрасль – это условное понятие – некоторая часть народного хозяйства, более или менее цельная. Такими отраслями могут служить энергетика, машиностроение, станкостроение, приборостроение, сельское хозяйство и т.д.

Каждая отрасль выпускает некоторый продукт, часть которого потребляется другими отраслями (промежуточный продукт), а другая часть идет на конечное потребление и накопление (конечный продукт).

Обозначим через X_i – валовый продукт i -й отрасли, $i = 1, 2, \dots, n$; x_{ij} – стоимость продукта, произведенного в i -й отрасли и потребленного в j -й отрасли для изготовления продукции стоимостью X_j ; y_i – конечный продукт i -й отрасли, z_j – условно-чистая продукция j -й отрасли, $j = 1, 2, \dots, n$.

Рассмотрим основные соотношения межотраслевого баланса. Валовая продукция i -й производящей отрасли (X_i) равна сумме материальных затрат потребляющих ее продукцию отраслей и конечной продукции данной отрасли:

$$X_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.1)$$

Коэффициент прямых затрат a_{ij} показывает, какое количество продукции i -й отрасли необходимо, учитывая только прямые затраты, для производства единицы продукции j -й отрасли:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.2)$$

Числа a_{ij} характеризуют технологию j -й отрасли. С учетом формулы (1.2) систему уравнений баланса можно переписать в виде

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3)$$

Если ввести в рассмотрение матрицу коэффициентов прямых затрат $A = (a_{ij})$, вектор-столбец валовой продукции $X = (X_i)$ и вектор столбец конечной продукции $Y = (y_i)$, то *экономико-математическая модель межотраслевого баланса* примет вид

$$X = AX + Y. \quad (1.4)$$

Модель межотраслевого баланса часто называют моделью В.Леонтьева или моделью «затраты-выпуск».

Заметим, что вывод уравнения (1.4) основан на двух важных допущениях. Первое допущение состоит в неизменности сложившейся технологии производства, когда элементы матрицы $A = (a_{ij})$ постоянны. Второе допущение состоит в предположении линейности существующих технологий, т.е. для выпуска j -й отраслью продукции объема x требуется ресурсов (продукции i -й отрасли) в количестве $a_{ij}x$ единиц.

Важным вопросом в рассматриваемой модели является вопрос о существовании решения уравнения (1.4). Разумеется, с учетом экономической интерпретации вектор производства $X = (X_i)$ должен быть неотрицательным. Поэтому говорят, что модель Леонтьева **продуктивна**, если уравнение (1.4) имеет неотрицательное решение для любого $Y \geq 0$, т.е.

матрица коэффициентов прямых затрат A позволяет произвести любой неотрицательный вектор потребления.

Теорема. Модель Леонтьева с матрицей A продуктивна тогда и только тогда, если существует неотрицательная матрица, обратная к матрице $E - A$, где E – единичная матрица.

Можно доказать также, что модель Леонтьева продуктивна, если она позволяет произвести хоть какой-нибудь строго положительный вектор потребления; из этого вытекает, что можно произвести и любой неотрицательный вектор потребления.

Одним из признаков продуктивности матрицы A является следующий: если сумма элементов столбцов (строк) матрицы A не превосходит единицы, причем хотя бы для одного из столбцов (одной из строк) сумма элементов строго меньше единицы, то матрица продуктивна.

Из (1.4) следует, что

$$(E - A)X = Y,$$

откуда

$$X = (E - A)^{-1}Y. \quad (1.5)$$

Обозначим обратную матрицу как $B = (E - A)^{-1} = (b_{ij})$. Тогда $X = BY$. Это значит, что для любой i -й отрасли справедливо соотношение:

$$X_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} y_j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.6)$$

Коэффициент полных затрат b_{ij} показывает, какое количество продукции i -й отрасли нужно произвести, чтобы с учетом прямых и косвенных затрат этой продукции получить единицу конечной продукции j -й отрасли. Полные затраты отражают использование ресурса на всех этапах изготовления и равны сумме прямых и косвенных затрат на всех предыдущих стадиях производства продукции.

С помощью модели межотраслевого баланса можно выполнять три варианта расчетов:

1. Определить объем конечной продукции каждой отрасли, зная величины валовой продукции каждой отрасли:

$$Y = (E - A)X .$$

2. Определить величины валовой продукции каждой отрасли, зная величины конечной продукции каждой отрасли:

$$X = (E - A)^{-1}Y .$$

3. Определить величины конечной продукции ряда отраслей и объемы валовой продукции остальных отраслей, зная величины валовой продукции первых отраслей и объемы конечной продукции остальных отраслей.

Валовая продукция j -й потребляющей отрасли X_j равна сумме ее материальных затрат $\sum_{i=1}^n x_{ij}$ и условно чистой продукции z_j :

$$X_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} + z_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.7)$$

Межотраслевой баланс можно представить табл. 2.1.

Таблица 2.1 Межотраслевой баланс

Произво- дящие отрасли	Потребляющие отрасли				Конечны й продукт	Валовый продукт
	1	2	...	n		
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	y_2	X_2
...	...	...	...	...	...	...
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}	y_n	X_n
Условно- чистая продук- ция	z_1	z_2	...	z_n	$\sum_{j=1}^n z_j = \sum_{i=1}^n y_i$	
Валовый продукт	X_1	X_2	...	X_n		$\sum_{i=1}^n X_i$

Он состоит из четырех квадрантов. Первый квадрант (светло-бирюзовый) отражает межотраслевые потоки продукции. Второй (бледно-зеленый) характеризует отраслевую материальную структуру национального дохода. Третий (светло-желтый) представляет национальный доход как стоимость условно-чистой продукции. Четвертый квадрант (светло-коричневый) показывает конечное распределение и использование национального дохода.

Основной недостаток статической модели межотраслевого баланса состоит в том, что она не позволяет установить связи между планами производства отраслей и планами капитальных вложений, обеспечивающих развитие этих отраслей, т.е. модель не учитывает динамику самой экономики.

2. 2 Методические указания и пример выполнения работы

Задание

Для n -отраслевой экономической системы известны

- матрица коэффициентов прямых материальных затрат $A = (a_{ij})$;

- вектор конечной продукции $Y = (y_i)$.
- Требуется составить межотраслевой баланс. С этой целью

необходимо

- определить продуктивность модели;
- найти коэффициенты полных материальных затрат;
- определить вектор валовой продукции;
- вычислить межотраслевые потоки продукции;
- определить условно-чистую продукцию каждой отрасли;
- представить полученную информацию в виде межотраслевого

баланса производства и распределения продукции

- изобразить диаграммы производства и потребления продукции для различных отраслей.

Пример:

Для трехотраслевой экономической системы заданы матрица коэффициентов прямых материальных затрат и вектор конечной продукции:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Выполним расчеты, необходимые для составления межотраслевого баланса.

1) Продуктивность модели

Просуммируем элементы каждой строки матрицы A . Получим

$$0,3 + 0,1 + 0,4 = 0,8;$$

$$0,2 + 0,5 = 0,7;$$

$$0,3 + 0,1 + 0,2 = 0,6.$$

Поскольку суммы элементов каждой строки меньше единицы, то модель межотраслевого баланса продуктивна.

2) Коэффициенты полных материальных затрат

Определим коэффициенты полных материальных затрат.

Находим матрицу $E - A$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 & -0,4 \\ -0,2 & 0,5 & 0,0 \\ -0,3 & -0,1 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Вычислим обратную матрицу $B = (E - A)^{-1}$, используя известные методы высшей математики. Получим

$$B = \begin{pmatrix} 2,04 & 0,61 & 1,02 \\ 0,82 & 2,24 & 0,41 \\ 0,87 & 0,51 & 1,68 \end{pmatrix}.$$

3) Вектор валовой продукции

Определим величины валовой продукции трех отраслей, используя процедуру умножения матрицы на вектор:

$$X = BY = \begin{pmatrix} 2,04 & 0,61 & 1,02 \\ 0,82 & 2,24 & 0,41 \\ 0,87 & 0,51 & 1,68 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 775,5 \\ 510,2 \\ 729,6 \end{pmatrix}.$$

4) Матрица межотраслевых потоков продукции

Для определения элементов матрицы межотраслевых потоков продукции воспользуемся формулой

$$x_{ij} = a_{ij} X_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

вытекающей из (1.2). Тогда получим

$$x_{11} = a_{11} X_1 = 0,3 \cdot 775,5 = 232,65;$$

$$x_{12} = a_{12} X_2 = 0,1 \cdot 510,2 = 51,02;$$

$$x_{13} = a_{13} X_3 = 0,4 \cdot 729,6 = 291,84;$$

$$x_{21} = a_{21} X_1 = 0,2 \cdot 775,5 = 155,10;$$

$$x_{22} = a_{22} X_2 = 0,5 \cdot 510,2 = 255,10;$$

$$x_{23} = a_{23} X_3 = 0 \cdot 729,6 = 0;$$

$$x_{31} = a_{31} X_1 = 0,3 \cdot 775,5 = 232,65;$$

$$x_{32} = a_{32} X_2 = 0,1 \cdot 510,2 = 51,02;$$

$$x_{33} = a_{33} X_3 = 0,2 \cdot 729,6 = 145,92.$$

5) Вектор условно-чистой продукции

Из (1.7) следует, что условно-чистая продукция j -й потребляющей отрасли z_j равна разности валовой продукции за вычетом суммы ее материальных затрат, т.е.

$$z_j = X_j - \sum_{i=1}^n x_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда находим компоненты вектора условно-чистой продукции Z :

$$z_1 = X_1 - (x_{11} + x_{21} + x_{31}) = 775,5 - (232,65 + 155,10 + 232,65) = 155,10;$$

$$z_2 = X_2 - (x_{12} + x_{22} + x_{32}) = 510,2 - (51,02 + 255,10 + 51,02) = 153,06;$$

$$z_3 = X_3 - (x_{13} + x_{23} + x_{33}) = 729,6 - (291,84 + 0 + 145,92) = 291,84.$$

Выполнение и расчеты в MS Excel

В табл. 2.2 показан один из возможных вариантов заполнения листа Excel и использования необходимых процедур для составления межотраслевого баланса.

Таблица 2.2 Вариант заполнения листа Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	E			A - матрица прямых материальных затрат				E-A					
2	1	0	0		0,3	0,1	0,4		0,7	-0,1	-0,4		
3	0	1	0		0,2	0,5	0		-0,2	0,5	0		
4	0	0	1		0,3	0,1	0,2		-0,3	-0,1	0,8		
5													
6					Матрица межотраслевых потоков продукции			B = (E-A) ⁻¹			Y	X	
7					232,653	51,020	291,837		2,041	0,612	1,020	200	775,510
8					155,102	255,102	0,000		0,816	2,245	0,408	100	510,204
9					232,653	51,020	145,918		0,867	0,510	1,684	300	729,592
10													
11					Z	155,102	153,061	291,837					
12					X	775,510	510,204	729,592					

Приведем последовательность вычислений:

1. В блок ячеек A2 : C4 помещается единичная матрица E. В блок ячеек E2 : G4 помещаются коэффициенты матрицы прямых материальных затрат A.

2. Матрица E – A рассчитывается в блоке I2 : K4 следующим образом: в ячейку I2 помещается формулу

$$= A2 - E2,$$

которая протягивается на весь блок I2 : K4.

3. Для вычисления обратной матрицы выделяется блок ячеек I7 : K9, вызывается функция

$$=МОБР(I2:K4)$$

и нажимается комбинация трех клавиш: CTRL + SHIFT + ENTER.

4. В блок ячеек L7 : L9 вводятся компоненты вектора конечной продукции Y.

5. В блоке ячеек М7 : М9 рассчитываются компоненты вектора валовой продукции Х. Для этого выделяется указанный блок и используется функция

$$=МУМНОЖ(I7:K9;L7:L9)$$

и нажимается комбинация трех клавиш: CTRL + SHIFT + ENTER.

6. В блок ячеек Е12 : G12 переписываются компоненты вектора валовой продукции Х. При этом можно выделить указанный блок, применить функцию транспонирования

$$=ТРАНСП(М7:М9)$$

и нажать комбинацию трех клавиш: CTRL + SHIFT + ENTER.

7. Блок ячеек Е7 : G9 предназначен для расчета межотраслевых потоков продукции. Для этого в ячейку Е7 записывается формула

$$= E2 * E\$12,$$

которая протягивается на указанный блок.

8. В ячейках блока Е11 : G11 вычисляются значения условно-чистой продукции. Для этого в ячейку Е11 помещается формула

$$=E12-СУММ(Е7:Е9),$$

которая протягивается на ячейки указанного блока.

Межотраслевой баланс (пример выполнения)

Составим межотраслевой баланс производства и распределения продукции и поместим его в табл. 2.3.

Таблица 2.3 Межотраслевой баланс производства и распределения продукции

	А	В	С	Д	Е	Ф
1	Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечный продукт	Валовый продукт
2		1	2	3		
3	1	232,7	51,02	291,8	200	775,5
4	2	155,1	255,1	0	100	510,2
5	3	232,7	51,02	145,9	300	729,6
6	Условно-чистая продукция	155,1	153,1	291,8	600	
7	Валовый продукт	775,5	510,2	729,6		2015,3

В первом квадранте светло-бирюзового цвета помещаются межотраслевые потоки продукции. Во втором квадранте бледно-зеленого цвета помещаются конечный и валовый доход. В третьем светло-желтом квадранте помещаются условно-чистая продукция и валовый доход. В четвертом светло-коричневом квадранте помещаются суммарные значения по всем отраслям конечного и валового продукта.

На рис. 2.1 представлена диаграмма распределения продукции каждой производящей отрасли по потребляющим отраслям с учетом конечного продукта. Для построения диаграммы следует выделить блок ячеек В3 : Е5 и выбрать линейчатую диаграмму с накоплением, поменяв при этом строки со столбцами.

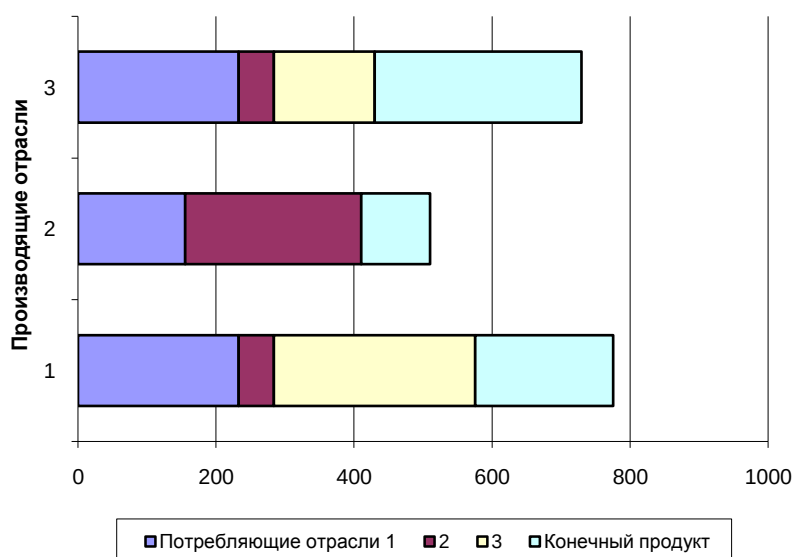


Рис. 2.1. Распределение продукции для каждой производящей отрасли

На рис. 2.2 представлена диаграмма потребления продукции каждой отраслью с учетом условно-чистого продукта. Для построения этой диаграммы выделяется блок ячеек В3 : D6, выбирается столбиковая гистограмма с накоплением и меняются строки со столбцами.

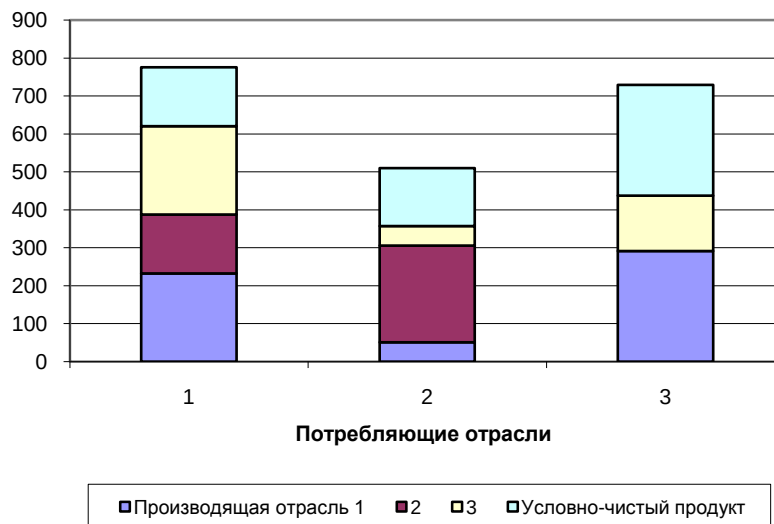


Рис. 2.2. Потребление продукции каждой отраслью

2.3 Варианты заданий

Задание

- Для n -отраслевой экономической системы известны
- матрица коэффициентов прямых материальных затрат $A = (a_{ij})$;
- вектор конечной продукции $Y = (y_i)$.
- Требуется составить межотраслевой баланс. С этой целью необходимо
 - определить продуктивность модели;
 - найти коэффициенты полных материальных затрат;
 - определить вектор валовой продукции;
 - вычислить межотраслевые потоки продукции;
 - определить условно-чистую продукцию каждой отрасли;
 - представить полученную информацию в виде межотраслевого баланса производства и распределения продукции
 - изобразить диаграммы производства и потребления продукции для различных отраслей.

**Исходные данные для эконометрического моделирования (номер
варианта = порядковому номеру студента в списке группы)**

		A		Y			A		Y
B-1	0,14	0,05	0,12	116	B-2	0,32	0,30	0,18	476
	0,08	0,15	0,14	151		0,22	0,21	0,10	673
	0,17	0,04	0,17	656		0,05	0,23	0,09	307
B-3	0,13	0,14	0,29	605	B-4	0,24	0,28	0,30	705
	0,28	0,08	0,27	157		0,09	0,20	0,14	700
	0,03	0,26	0,09	370		0,19	0,09	0,11	532
B-5	0,14	0,04	0,21	407	B-6	0,28	0,30	0,30	726
	0,26	0,06	0,12	768		0,22	0,12	0,16	363
	0,11	0,10	0,32	178		0,31	0,20	0,25	331
B-7	0,21	0,03	0,14	233	B-8	0,26	0,30	0,13	328
	0,25	0,16	0,08	396		0,22	0,21	0,14	285
	0,09	0,20	0,02	353		0,23	0,00	0,12	255
B-9	0,30	0,07	0,04	346	B-10	0,11	0,02	0,22	550
	0,09	0,14	0,26	728		0,25	0,07	0,23	200
	0,03	0,26	0,16	543		0,13	0,13	0,24	430
B-11	0,17	0,31	0,08	363	B-12	0,13	0,04	0,06	404
	0,12	0,02	0,25	135		0,03	0,23	0,16	566
	0,18	0,25	0,33	289		0,25	0,06	0,06	589
B-13	0,14	0,05	0,12	380	B-14	0,23	0,17	0,08	475
	0,08	0,15	0,14	636		0,02	0,27	0,05	699
	0,17	0,04	0,17	205		0,04	0,17	0,14	523
B-15	0,15	0,07	0,06	626	B-16	0,07	0,33	0,16	113
	0,33	0,33	0,07	233		0,14	0,23	0,25	677
	0,27	0,20	0,07	408		0,16	0,17	0,11	345
B-17	0,32	0,19	0,05	125	B-18	0,17	0,16	0,12	208
	0,07	0,14	0,19	361		0,05	0,29	0,31	545
	0,18	0,25	0,24	378		0,13	0,27	0,12	663
B-19	0,26	0,04	0,27	563	B-20	0,01	0,03	0,27	543
	0,03	0,18	0,16	466		0,00	0,19	0,19	767
	0,23	0,21	0,33	497		0,29	0,03	0,16	563

B-21	0,12	0,23	0,03	687	B-22	0,04	0,14	0,13	487
	0,00	0,20	0,07	725		0,11	0,06	0,12	325
	0,14	0,09	0,13	571		0,11	0,07	0,30	407
B-23	0,16	0,22	0,27	107	B-24	0,05	0,19	0,17	532
	0,16	0,18	0,32	690		0,12	0,03	0,33	747
	0,19	0,27	0,28	708		0,06	0,09	0,17	278
B-25	0,22	0,24	0,17	417	B-26	0,12	0,10	0,25	316
	0,06	0,03	0,21	774		0,10	0,28	0,04	278
	0,13	0,08	0,27	324		0,02	0,29	0,17	280

Содержание отчета по работе

- Отчет должен содержать следующие пункты:
- задание на работу с конкретными исходными данными студента,
- доказательство продуктивности модели, смысл этого понятия;
- вычисление коэффициентов полных материальных затрат;
- расчет вектора валовой продукции;
- вычисление межотраслевых потоков продукции;
- расчет вектора условно-чистой продукции;
- межотраслевой баланс производства и распределения продукции по отраслям;
- диаграммы производства и потребления продукции;
- выводы по работе.

Тема 3 Регрессионные модели. Корреляционный и регрессионный анализ в экономических расчетах

3.1 Основные понятия и краткая теория

Общая постановка задачи

При изучении корреляционной зависимости между переменными возникают следующие задачи:

1. Измерение силы (тесноты) связи.
2. Отбор факторов, оказывающих наиболее существенное влияние на результат признака.
3. Обнаружение неизвестных причин связей.
4. Построение корреляционной модели и оценка ее параметров.
5. Проверка значимости параметров связи.
6. Интервальное оценивание параметров связи.

Основные предпосылки

В настоящее время при построении корреляционных моделей исходят из условия нормальности многомерного закона распределения генеральной совокупности. Эти условия обеспечивают линейный характер связи между изучаемыми признаками, что делает правомерным использование в качестве показателей тесноты связи: парного, частного и множественного коэффициентов корреляции.

На практике не всегда строго соблюдаются предпосылки корреляционного анализа: один из признаков оказывается величиной не случайной или признаки не имеют совместного нормального распределение. Для изучения связи между признаками в этом случае существует общий показатель зависимости признаков, который называется корреляционным отношением.

В практике статистического анализа возможны случаи, когда с помощью корреляционных моделей обнаруживают достаточно сильную

"зависимость" признаков, в действительности не имеющих причинной связи друг с другом. Такие корреляции называют ложными.

Множественность результатов при анализе связи **X** и **У** объясняется прежде всего тем, что зависимая переменная **у** испытывает влияние не только фактора **X**, но и целого ряда других факторов, которые не учитываются. Кроме того, влияние выделенного фактора может быть не прямым, а проявляется через цепочку других факторов.

Цель работы - проведение с применением компьютера статистического исследования выборочной совокупности предприятий по признакам

Среднегодовая стоимость основных производственных фондов и Выпуск продукции.

Инструментарий MS Excel для выполнения

1. Для проведения автоматизированного статистического анализа совокупности используем пакет **Анализ Данных** и **Статистические функции** пакета Excel.

В **Анализ данных** используем функции:

- 1) Описательная статистика
- 2) Гистограмма
- 3) Регрессия

Статистические функции:

НОРМРАСП(х; μ ; σ ;ЛОЖЬ)

возвращает плотность вероятности нормального закона распределения **х**- значение случайной величины; μ – выборочное среднее; σ - стандартное отклонение; ЛОЖЬ – возвращает плотность вероятности.

ПИРСОН(A2:A6;B2:B6)

Возвращает коэффициент корреляции Пирсона **r**, безразмерный индекс в интервале от -1 до 1 включительно, который отражает степень линейной зависимости между двумя множествами данных.

СТЮДРАСПОБР(A2;A3)

Возвращает t-значение распределения Стьюдента как функцию вероятности и числа степеней свободы.

РАНГ(A3;A2:A6;порядок)

Возвращает ранг числа A3 в списке чисел A2:A6 . Ранг числа — это его величина относительно других значений в списке. (Если список отсортировать, то ранг числа будет его позицией.) Порядок — число, определяющее способ упорядочения. 0 – в порядке убывания, 1- в порядке возрастания

Другие функции см. по тексту).

3. 2 Методические указания к выполнению работы. Примеры

Постановка задачи

При проведении статистического наблюдения за деятельностью предприятий корпорации получены выборочные данные по 32-м предприятиям, выпускающим однородную продукцию, о среднегодовой стоимости основных производственных фондов и о выпуске продукции за год.

Задание 1 изучить структуру исследуемой совокупности предприятий, на основе обобщающих показателей выявляются типические черты и закономерности, присущие наблюдаемой совокупности в целом; провести анализ распределения единиц совокупности по признаку *Среднегодовая стоимость основных производственных фондов* (признак X) и *Выпуск продукции* (признак Y).

1. Выявление и исключение из выборки аномальных единиц наблюдения.
2. Оценка описательных статистических параметров совокупности.
3. Построение гистограмм по признаку X и Y.

Задание 2 изучить взаимосвязь между факторным признаком *Среднегодовая стоимость основных производственных фондов* (признак X) и результативным признаком *Выпуск продукции* (признак Y).

Задание 3

Считая, что исходные данные есть некоторые экспертные оценки (при отсутствии информации) *стоимости основных производственных фондов* и *выпуску продукции*, построить ранговую таблицу данных и посчитать коэффициент ранговой корреляции Спирмена

Задание 4

Построить однофакторную линейную регрессионную модель связи признаков X и Y, используя инструмент **Регрессия** надстройки **Пакет**

анализа, и рассчитать доверительные интервалы коэффициентов уравнения линейной регрессии.

Построить теоретическую кривую регрессии. Дать экономическую интерпретацию коэффициента регрессии. Рассчитать коэффициент эластичности и дать его экономическую интерпретацию.

Задание 5

С использованием корреляционного отношения дать оценку нелинейности связи. В случае нелинейности найти наиболее адекватное уравнение регрессии с помощью средств инструмента **Мастер диаграмм**.

Задание 6

Введем еще две переменные, влияющие на выпуск продукции – **Производительность труда** и **Коэффициент использования основных фондов** (загруженность оборудования).

Построить множественную регрессию

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3.$$

Провести регрессионный анализ совокупности по признакам X1, X2, X3. с использованием функции **Регрессия в Анализ данных**.

Дать его экономическую интерпретацию полученных результатов.

Исходные данные (пример):

№ предприятия	Х, руб	тыс. Y тыс.руб
1	260	257
2	307	282
3	317	315
4	335	350
5	215	175
6	352	300
7	362	405
8	270	275
9	332	322
10	385	402
11	370	390
12	422	425
13	320	335
14	352	365
15	405	442
16	465	475
17	345	320
18	382	380
19	302	237
20	387	325
21	432	437
22	295	247
23	232	232
24	395	372
25	352	325
26	327	307
27	252	200
28	342	312
29	397	342
30	360	390
31	377	325
32	275	290

Выполнение задания 1

Шаг 1. В пакете **Анализ данных** используем функцию **Описательная статистика** последовательно, сначала для ячеек фактора Х (входной интервал), затем то же самое делаем для признака Y.

Окно функции:

Описательная статистика

Входные данные

Входной интервал: 

Группирование: ☒ по столбцам ☐ по строкам

☐ Метки в первой строке

Параметры вывода

☒ Выходной интервал: 

☐ Новый рабочий лист:

☐ Новая рабочая книга

☒ Итоговая статистика

☒ Уровень надежности: %

☒ К-ый наименьший:

☒ К-ый наибольший:

OK Отмена Справка

Получим следующие результаты:

X		Y	
Среднее	341,3	Среднее	329,9
Стандартная ошибка	10,4	Стандартная ошибка	12,6
Медиана	348,5	Медиана	325,0
Мода	352,0	Мода	325,0
Стандартное отклонение	58,8	Стандартное отклонение	71,5
Дисперсия выборки	3457,2	Дисперсия выборки	5117,8
Экссесс	-0,2	Экссесс	-0,3
Асимметричность	-0,2	Асимметричность	-0,1
Интервал	250,0	Интервал	300,0
Минимум	215,0	Минимум	175,0
Максимум	465,0	Максимум	475,0
Сумма	10921,0	Сумма	10556,0
Счет	32,0	Счет	32,0
Наибольший(1)	465,0	Наибольший(1)	475,0
Наименьший(1)	215,0	Наименьший(1)	175,0
Уровень надежности(95,0%)	21,2	Уровень надежности(95,0%)	25,8

В процессе исследования совокупности необходимо решить ряд статистических задач для выборочной и генеральной совокупностей.

Статистический анализ выборочной совокупности:

1. Выявить наличие среди исходных данных резко выделяющихся значений признаков («выбросов» данных) с целью исключения из выборки аномальных единиц наблюдения.

2. Рассчитать обобщающие статистические показатели совокупности по изучаемым признакам: среднюю арифметическую, моду, медиану, размах вариации, дисперсию, средние отклонения – линейное и квадратическое, коэффициент вариации, структурный коэффициент асимметрии К.Пирсона.

3. На основе рассчитанных показателей в предположении, что распределения единиц по обоим признакам близки к нормальному, оценить:

- а) степень колеблемости значений признаков в совокупности;
- б) степень однородности совокупности по изучаемым признакам;
- в) устойчивость индивидуальных значений признаков;
- г) количество попаданий индивидуальных значений признаков в диапазоны $(\bar{x} \pm \sigma)$, $(\bar{x} \pm 2\sigma)$, $(\bar{x} \pm 3\sigma)$.

4. Дать сравнительную характеристику распределений единиц совокупности по двум изучаемым признакам на основе анализа:

- а) вариации признаков;
- б) количественной однородности единиц;
- в) надежности (типичности) средних значений признаков;
- г) симметричности распределений в центральной части ряда.

Аномальных наблюдений не наблюдается. Можно проверить на аномальность минимальное и максимальное значения в выборке.

Шаг 2. Построим интервальный вариационный ряд и гистограмму распределения единиц совокупности по признакам X и Y с использованием функции **Гистограмма** в **Анализ данных**

Окно функции:

Гистограмма

Входные данные

Входной интервал:

Интервал карманов:

☐ Метки

OK

Отмена

Справка

Параметры вывода

☒ Выходной интервал:

☐ Новый рабочий лист:

☐ Новая рабочая книга

☐ Парето (отсортированная гистограмма)

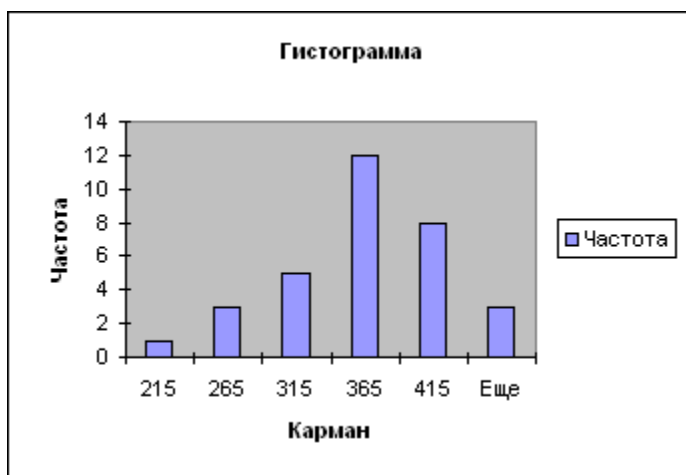
☐ Интегральный процент

☐ Вывод графика

Получим следующие результаты:

Карман	Частота
215	1
265	3
315	5
365	12
415	8
Еще	3

Карман	Частота
175	1
235	2
295	6
355	12
415	7
Еще	4



Визуальный анализ гистограмм, а также основных описательных статистик позволяет выдвинуть гипотезу о нормальном законе распределении генеральных совокупностей X и Y.

Для расчета теоретических частот используем группированные по интервалам (карманам) данные полученные на предыдущем шаге.

Теоретическая частота рассчитывается по нормальному закону распределения так:

$$=n*h*NORMPASP(x; \mu; \sigma; ЛОЖЬ),$$

где n- объем выборки, h – величина интервала, x- значение «кармана» ; μ – выборочное среднее; σ - стандартное отклонение; ЛОЖЬ – для функции NORMPASP возвращает плотность вероятности. Пример из расчета
 $1,08=32*50*NORMPASP(G48;341,3;58,8;ЛОЖЬ)$

Для X	ср	по	частота	теорет частота		
	инт					
	215		1		1,08	0,00655
	265		3		4,68	0,93804
	315		5		9,82	4,6508
	365		12		10,01	0,33046
	415		8		4,95	1,16363
	455		3		1,67	0,58622
				Chi2_Набл		7,68
				Chi2_Крит		7,81473
				Chi2_Набл<=Chi2_Крит		
				нет оснований отвергать		
				гипотезу нормальности X		

Для Y	ср	по	частота	теорет частота		
	инт					
	175		1		0,20	0,6417
	235		2		2,12	0,00699
	295		6		7,96	0,64151
	355		12		10,56	0,17163
	415		7		4,95	0,60099
	465		4		1,19	1,9776
				Chi2_Набл		4,04
				Chi2_Крит		7,81473
				Chi2_Набл<=Chi2_Крит		
				нет оснований отвергать		
				гипотезу нормальности Y		

Выводы

X и Y – две нормальные генеральные совокупности, к которым можно обоснованно применять методы корреляционно- регрессионного анализа.

Выполнение задания 2

Результаты с применением статистических функций:

коэф.корреляции
Пирсона= 0,91
Значение Т критерия
Т= 11,97
Ткр (Стьюдента) 2,04
Т>Ткр, => нулевую гипотезу о равенстве нулю
выборочного коэфф. корреляции Пирсона
отвергаем

коэф.корреляции Пирсона
=ПИРСОН(В3:В34;С3:С34)

Значение Т критерия
=В41*КОРЕНЬ(А34-2)/КОРЕНЬ(1-В41*В41)

Ткр (Стьюдента)
=СТЮДРАСПОБР(0,05;А34-2)

Вывод:

Связь между Х и Y сильная

Выполнение задания 3

Считая, что исходные данные есть некоторые экспертные оценки (при отсутствии информации) *стоимости основных производственных фондов и выпуску продукции*, построить ранговую таблицу данных и посчитать коэффициент ранговой корреляции Спирмена по формуле

$$r_s = 1 - 6 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (R_{x_i} - R_{y_i})^2}{n^3 - n}$$

Пересчитаем ранги Х и Y используя статистическую функцию РАНГ(x_i ; $x_1:x_n$; 1). Затем по формуле найдем r_s .

Реализация:

Ранг X	Ранг Y	$(x_i - y_i)^2$	
4	6	4	
9	8	1	
10	13	9	
14	21	49	
1	1	0	
17	10	49	
21	28	49	
5	7	4	
13	15	4	
25	27	4	
22	25	9	
30	29	1	
11	19	64	
17	22	25	
29	31	4	
32	32	0	
16	14	4	
24	24	0	
8	4	16	
26	16	100	
31	30	1	
7	5	4	
2	3	1	
27	23	16	
17	16	1	
12	11	1	
3	2	1	
15	12	9	
28	20	64	
20	25	25	
23	16	49	
6	9	9	32
		577	
0,893692			
Спирмен=	0,894245		

Выполнение задания 4

Проведем регрессионный анализ совокупности по признакам X и Y с использованием функции **Регрессия** в **Анализ данных**. Итоги выведем на новый рабочий лист.

Окно функции:

Регрессия

Входные данные

Входной интервал Y:

Входной интервал X:

☐ Метки ☐ Константа - ноль

☐ Уровень надежности: %

Параметры вывода

☐ Выходной интервал:

☒ Новый рабочий лист:

☐ Новая рабочая книга

Остатки

☒ Остатки ☒ График остатков

☒ Стандартизованные остатки ☒ График подбора

Нормальная вероятность

☒ График нормальной вероятности

OK Отмена Справка

Вывод результатов

Регрессионная статистика	
Множественный R	0,91
R-квадрат	0,83
Нормированный R-квадрат	0,82
Стандартная ошибка	30,26
Наблюдения	32,00

Дисперсионный анализ					
	df	SS	MS	F	Значимость F
Регрессия	1	131181,88	131181,88	143,27	5,94802E-13
Остаток	30	27469,62	915,65		
Итого	31	158651,50			

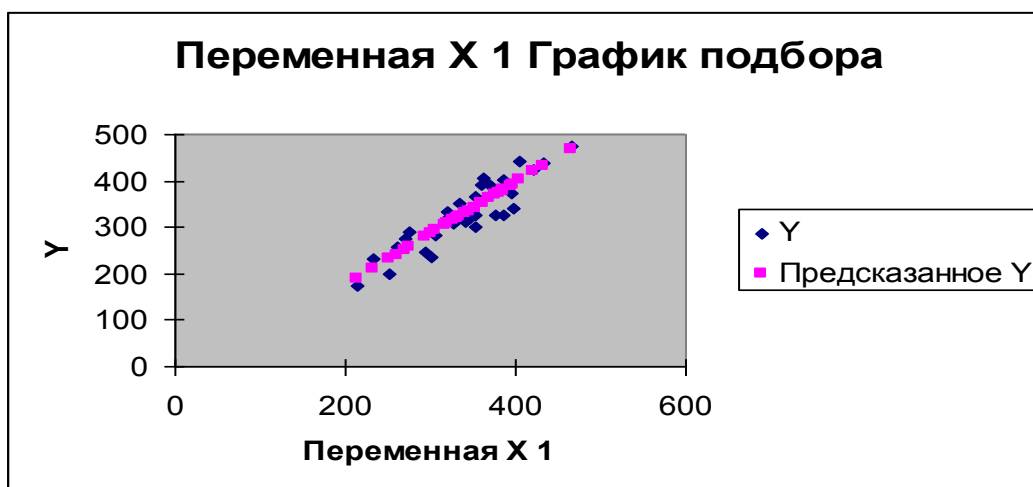
Выполним строгую оценку статистической надежности моделирования с помощью **F-критерия Фишера**. Для этого проверим нулевую гипотезу H_0 о статистической незначимости полученного уравнения регрессии. Т.к. расчетное значение F-критерия $F = 143,27$ больше его критического значения ($F_{\text{КРИТ}}$) при очень малом значении уровня значимости $\alpha = 5,94802\text{E-}13$, то нулевая гипотеза отвергается и полученное уравнение регрессии принимается значимым.

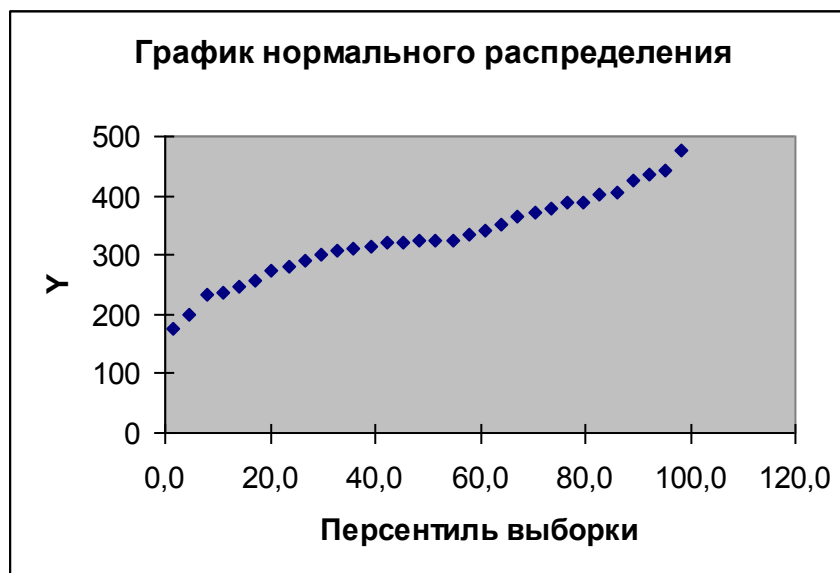
	Кэфф. модели	Станд. ошибка	t- статистика	P- Значение	Нижние 95%	Верхние 95%	Нижние 95,0%	Верхние 95,0%
Y- пересечение	-47,70	32,00	-1,49	0,15	-113,04	17,64	-113,04	17,64
Переменная X 1	1,11	0,09	11,97	0,00	0,92	1,30	0,92	1,30

Остатки

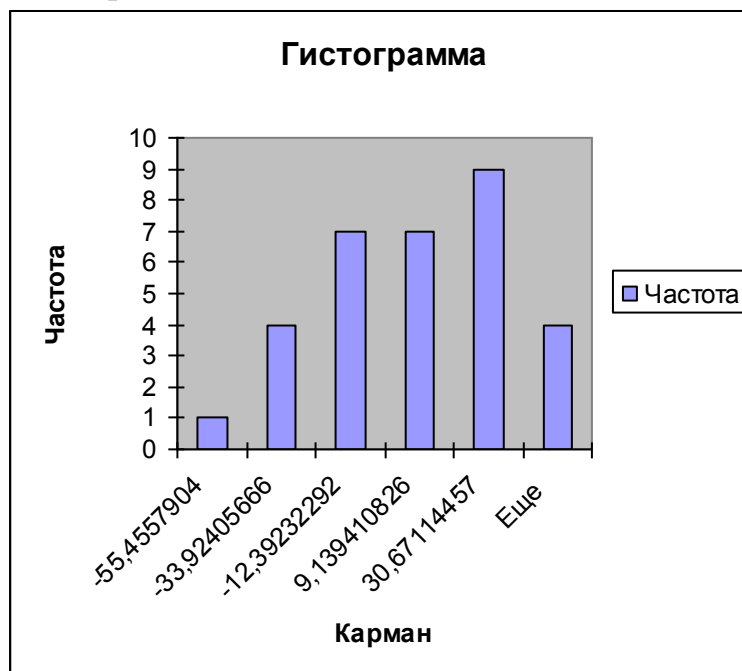
Y тыс.руб	Предсказанное Y	Остатки
257	239,9	17,1
282	291,9	-9,9
315	303,0	12,0
350	322,9	27,1
175	190,2	-15,2
300	341,7	-41,7
405	352,8	52,2
275	251,0	24,0
322	319,6	2,4
402	378,2	23,8
390	361,6	28,4
425	419,2	5,8
335	306,3	28,7
365	341,7	23,3
442	400,4	41,6
475	466,8	8,2
320	334,0	-14,0
380	374,9	5,1
237	286,4	-49,4
325	380,5	-55,5
437	430,2	6,8
247	278,7	-31,7
232	209,0	23,0
372	389,3	-17,3
325	341,7	-16,7
307	314,1	-7,1
200	231,1	-31,1
312	330,7	-18,7

342	391,5	-49,5
390	350,6	39,4
325	369,4	-44,4
290	256,5	33,5





Гистограмма остатков



Нормальность
остатков:

	Карман	Частота		
h= 21,53173	-55,46	1	9,2274	67,69
	-33,92	4	9,1497	6,6297
	-12,39	7	8,9809	0,5606
	9,14	7	8,9809	0,5606
	30,67	9	8,8202	0,0036
	52,20	4	9,1497	6,6297
	Chi2_Набл			82,07
	Chi2_Крит(0,05; 3)			7,8147

$$\chi^2_{\text{Набл}} > \chi^2_{\text{Крит}}$$

Вывод: гипотезу нормальности остатков отвергаем для уровня значимости 0,05.

Выполнение задания 5

(С использованием корреляционного отношения провести оценку нелинейности связи).

Вычислить корреляционное отношение выборочных данных по формуле

$$\eta_{yx} = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{S_{\text{ост}}^2}{S_y^2}}$$

С использованием результатов **Регрессии**, полученных на предыдущем шаге

$$S_{\text{ост}} = SS_{\text{остаток}} = 27469,6$$

$$S_y = SS_{\text{итого}} = 158651,5$$

$$\eta = \frac{S_{\text{ост}}}{S_y} = \frac{27469,62}{158651,50} = 0,90932$$

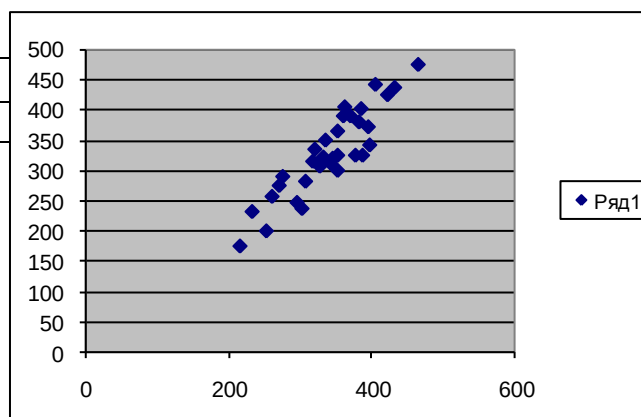
В качестве одного из простых критериев оценки нелинейной связи можно использовать следующий: если $K_H > 2,5$, то корреляционную связь можно считать нелинейной, где

$$K_H = \frac{\sqrt{n}}{0,67499} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\eta_{yx}^2 - r_{yx}^2}$$

Результат выполнения

Оценка нелинейности связи			
	K=	6,244E-08	< 2,5

Вывод: Корреляционную связь можно считать линейной



Выполнение задания 6

Исходные данные для новых факторов сгенерировать в Excel по нормальному закону распределения с параметрами Mean и StDev с наложением шума $StDev \cdot (1 - rnd(1))$ следующим образом:

Задать Среднее (Mean) и Стандартное отклонение (St.Dev) для переменных X1 и X2 в ячейки B и C.

		B	C
2	Mean	100	0,5
3	St.Dev	20	0,3

С помощью генератора случайных чисел $rnd(1)$ – функция EXCEL: СЛЧИС() генерирует число в интервале (0;1) – задать случайные значения в столбце D (в задаче 32 значения).

Затем, используя функцию EXCEL НОРМОБР(вероятность; среднее; стандартное отклонение) получим требуемые случайные числа X

	D	F	E
	СлЧисло	X1	X2
4			
5	0,081564	79,4	
формула	= СЛЧИС()	=НОРМОБР(\$D5;B\$2;B\$3)- B\$3*(СЛЧИС()-0,5)	=НОРМОБР(\$D5;C\$2;C\$3)- C\$3*(СЛЧИС()-0,5)

Замечание – при выполнении работы у Вас будут ссылки на другие ячейки табличного процессора Excel. В примере ниже - X2 сгенерировано с другими значениями Mean и StDev.

Исходные данные

X1	X2	X3	Y
141,6	110,5	260	257
124,2	108,7	307	282
123,5	115,6	317	315
124,4	110,1	335	350
134,8	115,9	215	175
116	92	352	300
92,5	67,2	362	405
119,5	101,5	270	275
131,2	109,8	332	322
103,8	81	385	402
100,2	72,3	370	390

115,2	106,7	422	425
106	85,4	320	335
149,9	129,8	352	365
114,5	82,1	405	442
109,4	68,7	465	475
118,7	110,9	345	320
131,2	107,9	382	380
112,2	77,3	302	237
127,6	98,5	387	325
128,7	110,8	432	437
123	101,4	295	247
136,1	129,5	232	232
156,3	147,1	395	372
124,5	95	352	325
130,3	109,9	327	307
119,3	114,1	252	200
116,4	87,3	342	312
101,1	75,3	397	342
129,4	107,4	360	390
141,8	113,3	377	325
111,3	77	275	290

Множественная регрессионная линейная модель имеет вид

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3.$$

Проведем регрессионный анализ совокупности по признакам X1, X2, X3 и Y с использованием функции **Регрессия** в **Анализ данных**. Итоги выведем на новый рабочий лист. Окно функции выглядит, как и в случае двух переменных. Необходимо входной интервал X задать как область данных переменных X1, X2, X3.

Соответственно результаты регрессии аналогичные, с отличием - определяются коэффициент множественной регрессии и оценки коэффициентов линейной модели для всех переменных. В данном случае b_0 , b_1 , b_2 , b_3 .

Результаты множественной линейной регрессии

<i>Регрессионная статистика</i>	
Множественный R	0,912786133
R-квадрат	0,833178524
Нормированный R-квадрат	0,815304795
Стандартная ошибка	30,74461473
Наблюдения	32

Дисперсионный анализ

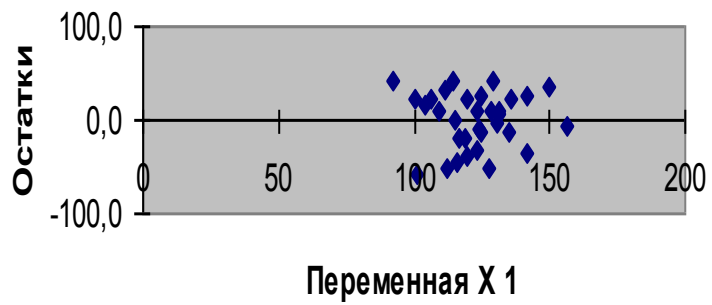
	<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Значимость F</i>
Регрессия	3	132185,02	44061,67	46,6147	5,1481E-11
Остаток	28	26466,477	945,2313		
Итого	31	158651,5			

	<i>Кэф. b_i</i>	<i>Станд. ошибка</i>	<i>t-статистика</i>	<i>P-Значение</i>	<i>Нижние 95%</i>	<i>Верхние 95%</i>	<i>Нижние 95,0%</i>	<i>Верхние 95,0%</i>
Y-перес	11,058	65,873	0,168	0,868	-123,876	145,993	-	-
X 1	-0,699	0,856	-0,817	0,421	-2,452	1,054	-2,452	1,054
X 2	0,289	0,656	0,440	0,663	-1,055	1,632	-1,055	1,632
X 3	1,100	0,098	11,200	0,000	0,899	1,301	0,899	1,301

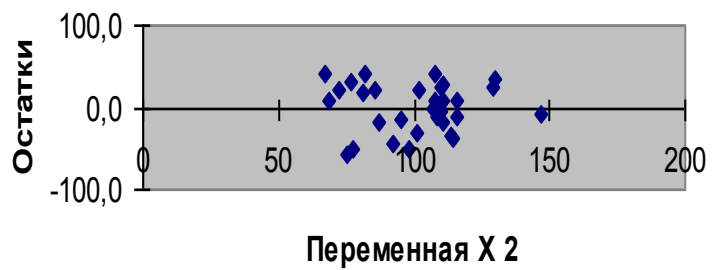
ВЫВОД ОСТАТКА

Y	<i>Предсказанное Y</i>	<i>Остатки</i>
257	229,9	27,1
282	293,2	-11,2
315	306,7	8,3
350	324,3	25,7
175	186,7	-11,7
300	343,6	-43,6
405	363,9	41,1
275	253,7	21,3
322	316,1	5,9
402	385,2	16,8
390	368,7	21,3
425	425,4	-0,4
335	313,5	21,5
365	330,8	34,2
442	400,1	41,9
475	465,7	9,3
320	339,5	-19,5
380	370,6	9,4
237	287,0	-50,0
325	375,9	-50,9
437	428,1	8,9
247	278,7	-31,7
232	208,4	23,6
372	378,6	-6,6
325	338,5	-13,5
307	311,3	-4,3
200	237,7	-37,7
312	331,0	-19,0
342	398,7	-56,7
390	347,5	42,5
325	359,2	-34,2
290	257,9	32,1

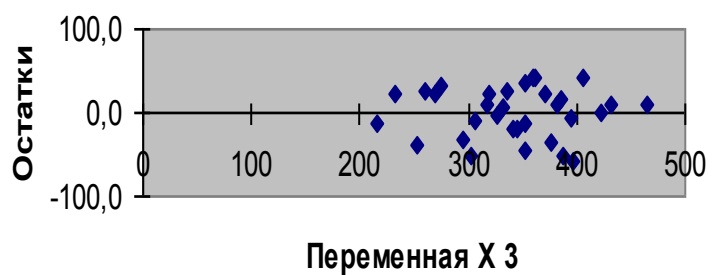
Переменная X 1 График остатков



Переменная X 2 График остатков



Переменная X 3 График остатков



Отчетность по работе

По результатам выполнения работы студент подготавливает отчет, который должен содержать Текстовую часть и Приложение.

Текстовая часть включает:

- выводы о статистических свойствах изучаемой совокупности, сделанные на основе анализа таблиц и графиков, полученных в результате компьютерных расчетов;
- экономическую интерпретацию полученных статистических характеристик, раскрывающую их экономический смысл применительно к изучаемой совокупности предприятий.
- выводы о наличии статистической и корреляционной связи результативного и факторного признаков;
- оценку тесноты взаимосвязи признаков, сделанную на основе анализа показателей аналитической таблицы;
- математическую модель взаимосвязи исследуемых признаков в виде однофакторного линейного уравнения регрессии (построенного с помощью инструмента Регрессия надстройки Пакет анализа), а также результаты анализа адекватности этой модели;
- математические модели зависимости между исследуемыми признаками в виде однофакторных нелинейных уравнений регрессии (построенных с помощью инструмента Мастер диаграмм) и обоснование выбора наиболее адекватной из них.
- Приложение к отчету должно включать:
 - таблицу исходных данных и результативные таблицы с рассчитанными обобщающими показателями;
 - рисунки статистических графиков.
 - графики нелинейных уравнений регрессии.

3.3 Варианты заданий

Исходные данные к заданиям 1-5

При проведении статистического наблюдения за деятельностью предприятий корпорации получены выборочные данные по 32-м предприятиям, выпускающим однородную продукцию, о среднегодовой стоимости основных производственных фондов и о выпуске продукции за год.

Среднегодовая стоимость основных производственных фондов (признак X) и Выпуск продукции (признак Y).

Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3		Вариант 4		Вариант 5	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
110,5	32,9	141,6	417,9	305,2	256,6	129,7	592,2	323,7	808,3
108,7	30,2	124,2	395,2	301,4	253,2	121,5	567,6	311,4	748,7
115,6	31,3	123,5	419,7	305,1	252,2	126,1	579,2	303,9	764,1
110,1	31,0	124,4	406,9	299,4	247,7	121,6	565,7	309,1	749,9
115,9	33,6	134,8	413,9	302,0	257,3	123,3	580,4	325,9	810,3
92,0	25,8	116,0	374,8	295,5	246,3	116,4	535,5	288,7	718,6
67,2	23,1	92,5	361,4	292,2	226,9	109,7	508,8	257,7	648,0
101,5	28,2	119,5	409,9	297,8	251,1	117,7	553,0	306,1	729,7
109,8	33,9	131,2	409,8	300,1	254,4	121,2	575,1	312,1	798,6
81,0	28,4	103,8	384,0	298,2	246,1	114,0	545,3	287,2	703,1
72,3	26,3	100,2	359,5	295,6	236,7	111,8	513,6	278,1	710,8
106,7	28,5	115,2	392,1	298,4	255,7	122,6	561,1	304,1	740,5
85,4	27,1	106,0	381,0	295,6	233,1	112,1	520,4	285,6	692,7
129,8	37,5	149,9	442,9	309,1	270,1	129,2	586,0	329,4	827,8
82,1	29,7	114,5	391,7	297,6	245,8	114,1	526,2	297,3	738,8
68,7	24,8	109,4	378,9	294,0	235,3	114,2	521,6	271,3	685,5
110,9	30,1	118,7	404,7	302,5	253,1	122,6	551,4	301,4	736,4
107,9	33,2	131,2	418,8	304,1	254,6	124,3	576,2	314,6	785,2
77,3	25,2	112,2	374,4	296,1	237,4	110,3	527,5	280,6	689,2
98,5	29,5	127,6	414,5	299,3	254,0	118,7	557,5	297,6	770,2
110,8	32,8	128,7	408,0	300,8	260,8	122,1	555,5	310,4	763,3
101,4	30,6	123,0	409,4	300,4	248,0	120,3	558,9	288,8	745,3
129,5	34,6	136,1	433,2	304,8	262,7	125,9	585,2	335,7	801,5
147,1	38,3	156,3	453,7	310,3	276,9	140,5	623,2	358,0	873,4
95,0	31,4	124,5	411,8	300,1	254,3	119,2	554,7	312,8	775,3
109,9	34,5	130,3	425,0	302,7	254,4	128,9	585,8	309,8	789,3
114,1	29,6	119,3	409,7	302,7	255,4	121,8	557,4	308,7	784,9
87,3	26,9	116,4	377,1	297,1	246,1	118,7	533,4	297,7	724,3
75,3	23,4	101,1	368,8	294,8	233,2	112,7	498,2	269,6	673,1
107,4	30,3	129,4	414,8	299,5	250,5	120,9	559,7	297,3	782,2
113,3	36,0	141,8	430,2	303,9	258,9	128,1	566,3	321,0	780,9
77,0	26,2	111,3	379,0	293,3	240,1	112,0	507,8	279,4	686,1

Вариант 6		Вариант 7		Вариант 8		Вариант 9		Вариант 10	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
71,0	25,1	100,7	366,9	292,5	240,2	115,8	506,6	268,7	697,3
76,3	28,2	105,3	370,8	294,5	241,2	114,5	526,7	294,4	735,7
103,3	29,5	114,4	396,8	299,9	245,9	118,1	547,3	290,4	762,5
115,1	32,3	130,8	405,1	301,3	261,9	127,3	554,1	301,4	782,0
109,5	32,1	130,4	414,3	305,9	258,8	126,1	585,8	308,9	802,4
68,2	25,8	100,1	364,2	294,5	232,6	108,5	502,8	263,6	679,9
100,6	30,1	122,5	401,5	299,4	251,2	118,3	552,5	302,7	740,4
109,2	29,0	119,3	397,0	299,3	250,3	120,4	541,5	290,4	753,6
72,2	21,9	102,5	373,6	289,9	226,8	108,9	489,8	268,9	667,0
98,4	26,9	115,2	392,7	297,6	246,8	118,0	536,9	295,8	722,7
108,2	31,4	123,1	395,0	302,1	244,6	123,1	556,6	295,0	740,5
102,2	31,5	119,9	413,6	300,6	251,6	124,6	567,0	299,1	788,7
111,2	34,3	133,9	413,2	306,1	254,8	127,3	569,5	322,4	770,1
132,3	34,2	141,1	441,3	306,8	259,8	128,1	581,2	331,5	837,9
96,6	30,3	127,7	406,1	301,5	256,1	120,7	554,4	293,6	736,5
102,3	30,9	128,7	423,1	304,7	261,4	122,4	552,2	311,7	789,2
136,7	40,0	157,0	439,1	311,0	275,8	133,9	612,2	338,5	857,1
74,2	26,6	114,1	367,6	296,9	238,0	116,9	516,2	284,1	727,7
93,7	28,1	106,4	378,9	299,4	239,5	117,4	544,1	289,3	718,4
72,1	22,3	87,2	365,1	289,7	231,3	110,5	508,5	273,8	676,2
124,1	32,8	131,8	426,4	305,8	266,6	127,1	580,7	314,2	779,3
138,5	36,3	150,7	446,3	307,0	268,8	129,4	600,8	328,4	829,8
115,5	31,7	120,7	417,2	301,7	250,7	121,1	550,0	303,6	759,5
80,3	26,5	103,7	379,5	296,3	238,8	112,9	529,4	276,2	694,9
92,6	27,3	110,9	385,1	296,5	246,2	114,6	541,8	286,3	718,8
64,5	25,5	100,4	358,8	290,7	237,5	112,6	498,1	270,1	667,5
91,9	30,5	122,5	408,7	300,1	243,8	117,6	547,0	304,6	725,4
108,0	29,8	122,0	401,4	302,9	249,1	120,9	545,7	313,8	791,1
107,2	32,7	133,5	415,3	301,3	251,8	123,9	561,3	313,9	760,3
90,6	25,1	103,9	383,2	296,5	236,2	117,4	510,7	276,5	705,8
83,6	27,8	114,2	393,4	297,6	243,3	114,7	526,7	281,0	714,5
122,4	32,6	132,2	428,3	304,5	264,4	125,6	570,0	310,0	802,9

Вариант 11		Вариант 12		Вариант 13		Вариант 14		Вариант 15	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
73,8	24,5	107,5	362,7	293,3	230,6	113,2	511,9	269,3	667,0
108,9	33,3	134,1	401,6	301,6	253,8	125,9	579,2	317,3	768,7
85,4	29,8	106,5	389,1	295,3	248,8	114,4	535,8	298,7	716,9
121,6	34,0	124,0	423,5	303,1	258,2	121,8	572,7	317,2	778,0
91,1	28,6	112,5	393,0	298,7	251,1	117,7	533,3	295,1	734,3
110,8	34,9	137,6	412,7	303,1	257,2	126,9	576,0	317,6	772,5
126,8	34,7	144,4	428,4	304,5	262,1	129,0	581,3	331,4	820,6
117,4	34,7	127,0	410,9	301,6	257,8	127,4	558,7	321,6	779,8
96,3	27,7	117,1	381,0	297,2	247,5	118,2	531,2	288,6	739,8
117,4	31,7	130,2	402,5	304,8	256,1	126,8	562,6	309,1	776,7
78,1	25,2	103,8	390,1	295,3	237,7	114,6	514,8	287,5	735,6
92,8	29,0	120,8	386,7	296,9	246,2	118,5	556,9	293,4	746,5
134,2	36,6	142,1	432,0	308,7	271,0	127,5	604,5	328,1	806,6
85,0	29,0	116,9	385,7	298,4	242,5	118,6	538,1	279,9	710,4
90,1	31,1	112,5	387,1	300,4	244,7	120,0	530,0	290,0	715,3
127,5	37,3	141,1	445,3	307,2	262,6	126,7	591,8	335,7	824,8
102,4	27,6	117,1	388,7	300,6	242,7	120,2	535,3	302,1	723,8
32,5	15,7	66,4	322,2	286,4	207,8	97,3	448,5	235,3	567,4
116,2	35,2	135,5	423,8	306,0	263,7	127,3	576,4	315,4	779,9
65,4	22,8	101,8	359,2	290,3	230,7	108,9	494,1	272,8	673,9
107,7	31,3	131,2	413,9	302,9	262,6	122,8	564,3	312,5	761,3
84,6	27,6	115,0	390,8	299,5	248,5	117,9	530,0	287,8	750,2
106,5	31,8	117,7	397,1	300,3	258,6	119,7	564,4	303,7	738,4
83,9	27,8	115,5	377,6	296,9	241,4	114,9	530,0	298,6	746,0
110,5	34,5	136,5	428,9	304,1	257,7	122,8	578,1	320,2	814,3
94,9	26,8	104,5	385,9	295,8	241,9	115,2	544,4	286,5	740,1
118,8	30,4	129,5	424,9	301,7	261,5	125,3	564,1	317,0	760,6
102,2	29,6	119,8	395,4	298,7	252,3	117,9	542,8	290,4	722,5
93,7	29,4	118,2	408,8	302,3	255,8	120,9	556,8	312,3	739,3
104,3	31,3	117,6	406,9	301,9	253,4	123,0	568,2	301,3	759,1
102,4	27,9	111,3	381,9	298,1	241,8	115,5	542,3	294,4	737,5
101,0	30,5	125,9	407,5	303,2	254,0	123,5	566,3	301,1	786,3

Вариант 16		Вариант 17		Вариант 18		Вариант 19		Вариант 20	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
116,4	32,5	119,8	415,8	300,1	254,5	122,7	569,0	318,8	762,8
93,0	31,2	114,1	392,2	299,5	251,1	120,0	541,7	294,3	762,7
84,7	26,5	103,0	380,4	296,0	242,5	117,1	528,7	280,8	714,5
132,3	34,0	132,2	440,0	306,6	263,0	129,0	584,4	322,6	793,1
115,3	31,5	122,6	397,1	304,0	259,1	122,1	550,0	305,3	787,6
108,6	30,7	125,9	403,5	299,4	255,4	122,9	546,2	313,7	756,2
86,2	29,2	110,1	394,4	298,5	248,8	115,6	523,0	282,7	717,5
90,5	27,2	111,3	369,6	296,2	238,7	115,3	517,3	289,4	707,9
71,9	28,1	103,5	377,2	294,6	243,5	116,6	510,9	283,7	693,8
136,9	38,9	154,3	453,3	312,1	267,8	135,7	618,3	328,8	831,3
82,0	26,8	96,2	375,5	294,8	236,0	113,8	523,5	271,6	705,2
120,4	34,5	135,5	430,1	304,5	264,3	126,2	596,0	328,0	797,6
72,1	23,4	91,2	349,7	292,3	227,4	110,7	508,3	274,1	681,7
97,4	30,3	126,9	394,9	302,4	252,3	117,4	541,4	309,6	752,3
101,0	31,4	133,1	417,0	303,6	256,3	126,6	575,3	317,3	787,2
137,2	34,3	137,3	435,0	304,7	261,9	128,5	595,2	326,7	828,6
81,6	26,7	105,0	375,0	294,1	235,6	117,1	523,6	279,5	711,7
93,7	29,7	108,3	393,1	298,9	251,4	115,6	551,1	288,7	725,6
76,9	26,9	105,3	383,3	293,6	233,6	116,0	520,8	283,0	704,5
104,1	30,2	118,9	386,5	300,8	248,7	120,2	535,1	299,8	745,0
111,4	32,5	132,7	420,9	304,3	263,0	124,7	573,6	320,9	786,7
91,8	29,7	114,4	402,7	299,6	249,0	121,2	557,2	297,1	752,9
97,2	28,6	112,9	388,2	297,2	249,1	118,7	544,4	284,9	734,7
95,0	26,3	114,8	394,2	294,1	236,3	114,6	514,7	279,9	707,0
82,4	24,5	102,0	374,8	292,8	229,9	114,6	526,1	277,1	686,2
73,5	27,9	106,4	377,3	295,8	243,3	116,8	528,7	288,7	709,6
115,8	30,9	122,4	421,2	300,3	255,3	126,0	572,6	317,8	780,4
104,3	29,1	125,6	402,7	300,7	249,8	123,6	546,6	295,2	750,3
48,1	22,2	85,6	330,4	286,6	219,1	101,6	482,7	248,5	614,6
97,9	26,8	118,3	381,9	299,5	239,9	119,4	547,3	292,3	739,5
142,6	38,5	154,0	458,8	312,3	271,4	134,3	604,1	350,5	856,6
150,6	37,9	158,3	461,3	311,8	274,6	137,9	637,4	355,7	891,3

Вариант 21		Вариант 22		Вариант 23		Вариант 24		Вариант 25	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
107,7	35,0	135,5	431,3	301,5	257,4	125,5	585,6	323,3	800,0
93,4	28,8	106,5	388,0	297,6	247,4	112,7	532,2	286,9	741,1
122,4	33,2	139,3	431,9	302,3	254,9	123,5	562,4	317,5	805,1
95,5	30,1	118,0	395,9	300,4	255,8	118,4	559,3	305,4	744,1
130,6	36,7	144,0	447,1	308,7	274,0	134,0	606,9	327,6	815,3
101,5	31,1	116,7	418,6	299,2	255,0	119,6	557,6	299,6	758,8
114,8	33,3	130,7	401,2	301,0	258,8	120,9	573,3	306,7	793,8
92,4	30,0	122,3	393,2	297,9	244,7	116,7	526,7	291,7	752,7
78,8	26,0	105,2	392,8	296,3	245,5	117,5	522,7	290,2	730,2
84,0	30,3	109,1	381,3	299,5	242,4	118,0	550,9	291,0	718,3
99,7	33,1	126,9	408,3	303,1	257,6	125,8	565,7	308,8	779,6
87,5	27,2	107,2	388,7	298,2	240,6	117,3	534,2	285,8	711,8
82,9	24,6	105,6	370,0	296,3	234,3	114,8	509,3	278,6	693,9
75,4	26,9	101,5	381,1	293,6	235,2	114,5	515,1	279,9	711,3
116,5	31,6	132,7	421,8	302,3	257,6	124,2	585,4	322,2	769,7
117,6	31,6	126,2	429,0	303,0	253,5	127,2	573,1	316,6	775,0
116,7	31,8	139,0	416,6	302,1	261,3	126,2	558,8	306,7	779,5
86,9	26,6	103,5	382,3	297,4	247,1	112,6	535,3	282,4	722,9
96,8	29,6	109,8	389,2	299,9	243,2	116,8	549,0	291,6	730,7
76,7	26,4	110,0	380,9	296,3	241,6	113,5	515,3	287,1	715,9
106,1	33,6	129,1	413,0	300,3	256,8	123,7	568,2	309,2	770,4
109,8	32,2	125,3	396,8	300,8	252,3	121,5	557,2	306,0	766,3
111,4	34,2	135,4	434,1	304,3	256,0	123,8	563,9	323,0	816,5
125,8	32,6	133,5	432,2	306,6	264,4	130,2	596,5	331,4	796,9
107,3	31,2	128,0	403,1	299,5	248,8	119,2	556,7	297,0	733,3
115,0	32,2	124,7	408,8	304,0	262,0	121,8	558,5	309,2	789,9
116,9	35,5	142,2	445,1	306,0	263,0	130,5	593,2	326,5	793,1
99,0	33,1	125,2	402,0	304,6	252,3	126,0	569,4	301,5	767,5
109,6	30,4	122,8	405,7	300,8	247,5	122,8	554,7	297,6	745,3
116,4	35,4	137,6	421,3	305,6	264,3	129,7	597,5	330,7	830,5
94,8	29,6	115,9	395,6	301,5	246,5	117,4	538,3	292,1	745,9
93,2	30,4	127,6	400,6	300,1	250,1	119,5	559,9	307,9	771,8

Вариант 26		Вариант 27		Вариант 28		Вариант 29		Вариант 30	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
98,0	29,3	116,7	402,1	300,2	241,6	115,4	530,9	284,3	741,6
102,7	27,6	123,5	406,9	298,1	248,2	121,9	546,2	297,1	746,2
71,9	26,3	95,8	356,4	294,0	237,8	109,3	509,7	275,0	695,4
111,0	33,7	135,1	422,4	307,1	263,4	124,3	583,8	324,5	790,8
98,8	32,5	130,2	421,2	301,3	259,8	119,2	572,3	305,4	778,8
75,4	24,0	95,1	377,1	293,9	240,9	114,5	517,9	278,9	706,2
152,5	38,3	153,0	462,7	311,8	274,8	134,7	611,4	348,7	859,9
120,7	35,9	131,6	433,7	307,2	261,0	125,8	588,5	312,5	808,0
92,6	27,4	108,3	381,2	299,7	242,2	116,7	529,2	298,9	746,7
111,2	31,9	128,8	392,6	299,4	248,1	117,6	561,1	296,7	741,2
74,8	22,9	101,6	372,0	293,5	239,1	113,1	514,3	279,0	671,4
125,7	33,8	131,6	417,7	303,9	265,5	127,3	583,3	326,0	817,1
84,9	27,8	111,9	378,9	294,3	236,2	116,0	534,4	286,1	676,4
90,0	27,3	111,2	400,5	300,5	245,2	119,8	559,3	294,1	727,7
89,3	25,0	105,8	374,3	297,1	232,5	113,7	526,3	276,7	694,2
83,6	28,9	118,4	381,1	295,8	238,9	116,3	522,3	282,8	715,6
98,8	29,1	117,2	402,8	296,6	246,9	119,5	542,4	283,8	708,3
113,0	31,3	132,8	411,0	305,8	258,7	127,2	579,6	314,1	789,6
94,2	27,7	119,2	401,7	301,2	249,7	122,2	543,8	297,4	753,8
116,8	31,3	130,8	402,9	301,0	259,8	125,3	555,3	317,0	786,7
55,0	22,4	81,5	346,7	290,5	218,7	100,6	467,8	260,2	644,6
90,6	28,6	117,8	394,8	301,1	246,2	115,6	554,4	291,6	760,3
84,8	24,9	105,6	374,3	297,5	244,5	112,5	510,1	281,8	687,1
73,0	25,9	111,4	388,4	294,5	242,4	115,2	513,3	279,5	719,7
111,7	31,1	128,0	394,1	302,5	247,2	119,3	553,1	299,7	779,9
110,8	32,6	128,6	412,0	302,5	258,8	124,6	566,8	309,7	757,4
92,2	25,7	107,4	390,8	293,6	240,9	111,4	521,1	277,7	725,5
96,1	30,3	121,4	410,5	298,5	252,9	119,8	553,4	303,0	760,2
134,8	35,0	141,0	450,6	306,5	263,5	128,2	600,2	329,5	841,9
140,4	36,8	151,0	455,1	311,3	274,8	133,8	615,2	346,1	883,4
123,2	36,1	135,2	428,1	303,0	265,6	125,1	583,6	312,5	785,8
124,8	36,4	141,4	436,9	304,6	265,0	129,5	579,8	324,6	822,8

Исходные данные к заданию 6

Для каждого варианта дополнительно к паре ХУ из предыдущего задания, добавить Х2, Х3 принять Х1=Х

Х2	Х3
110,5	260
108,7	307
115,6	317
110,1	335
115,9	215
92	352
67,2	362
101,5	270
109,8	332
81	385
72,3	370
106,7	422
85,4	320
129,8	352
82,1	405
68,7	465
110,9	345
107,9	382
77,3	302
98,5	387
110,8	432
101,4	295
129,5	232
147,1	395
95	352
109,9	327
114,1	252
87,3	342
75,3	397
107,4	360
113,3	377
77	275

Тема 4 Прогнозирование. Экстраполяция тенденций и динамики развития финансово-экономических показателей

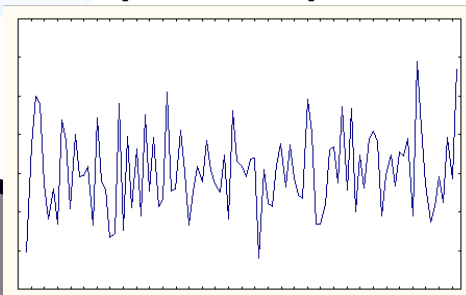
4.1 Основные понятия и краткая теория

Временной ряд последовательность упорядоченных во времени числовых показателей, характеризующих уровень состояния и изменения изучаемого явления

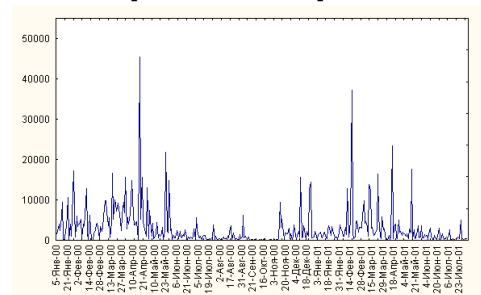
Виды временных рядов

- Стационарные
- Нестационарные
 - Содержащие тренд
 - Содержащие сезонную составляющую
 - Содержащие циклическую составляющую

**Стационарный
временной ряд**

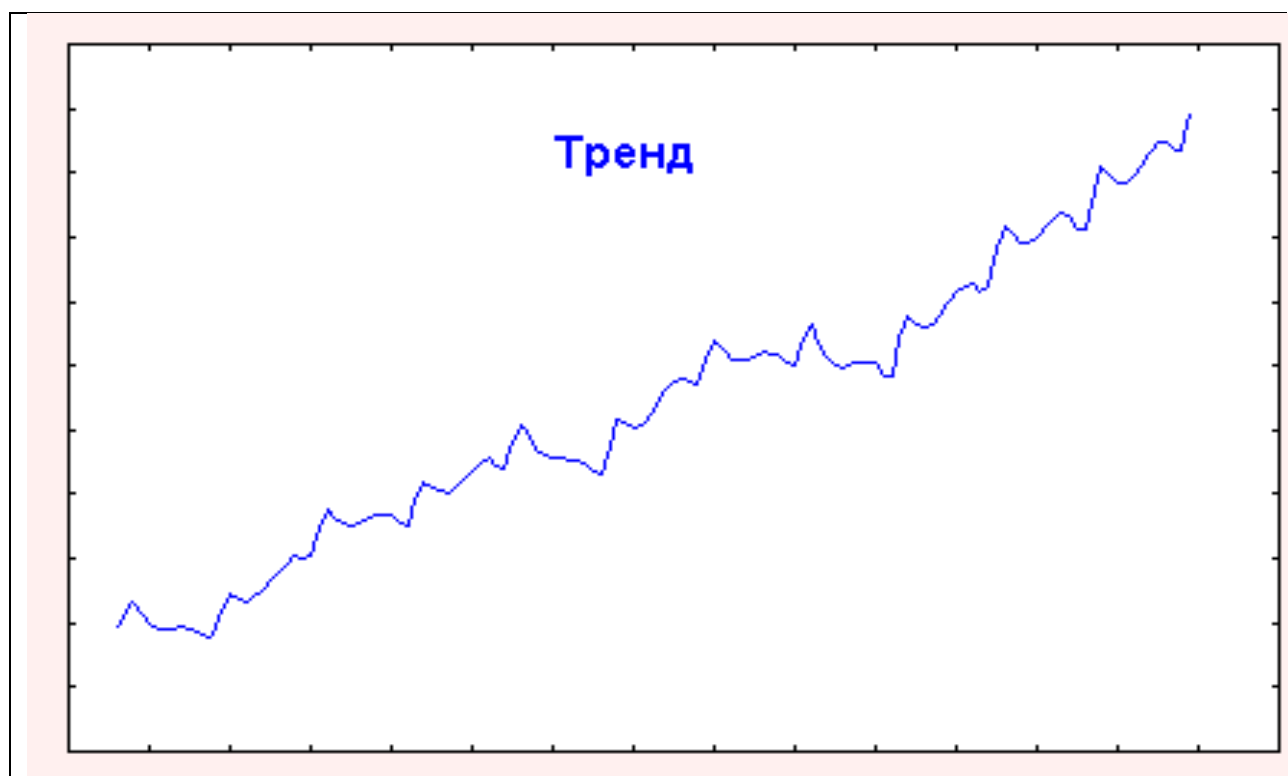


**Нестационарный
временной ряд**

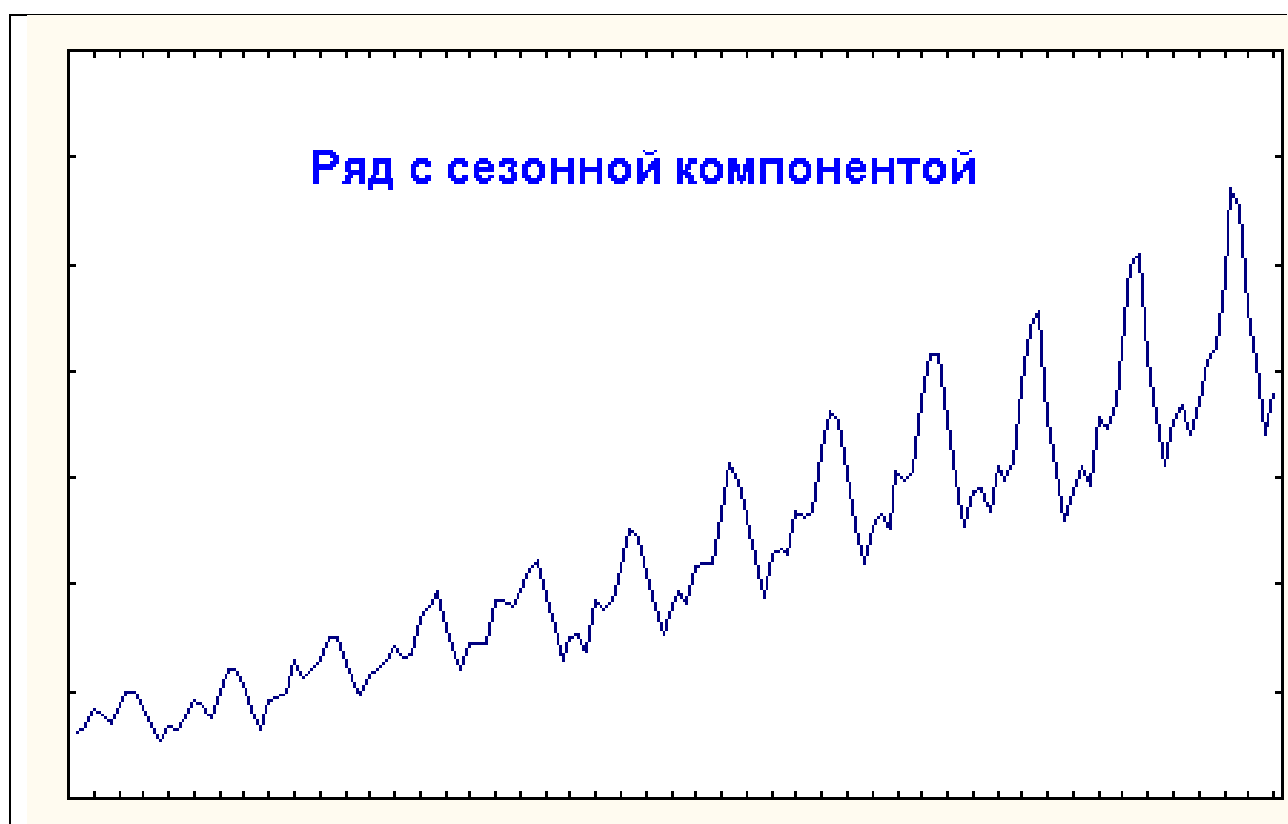


Иллюстрации временных рядов

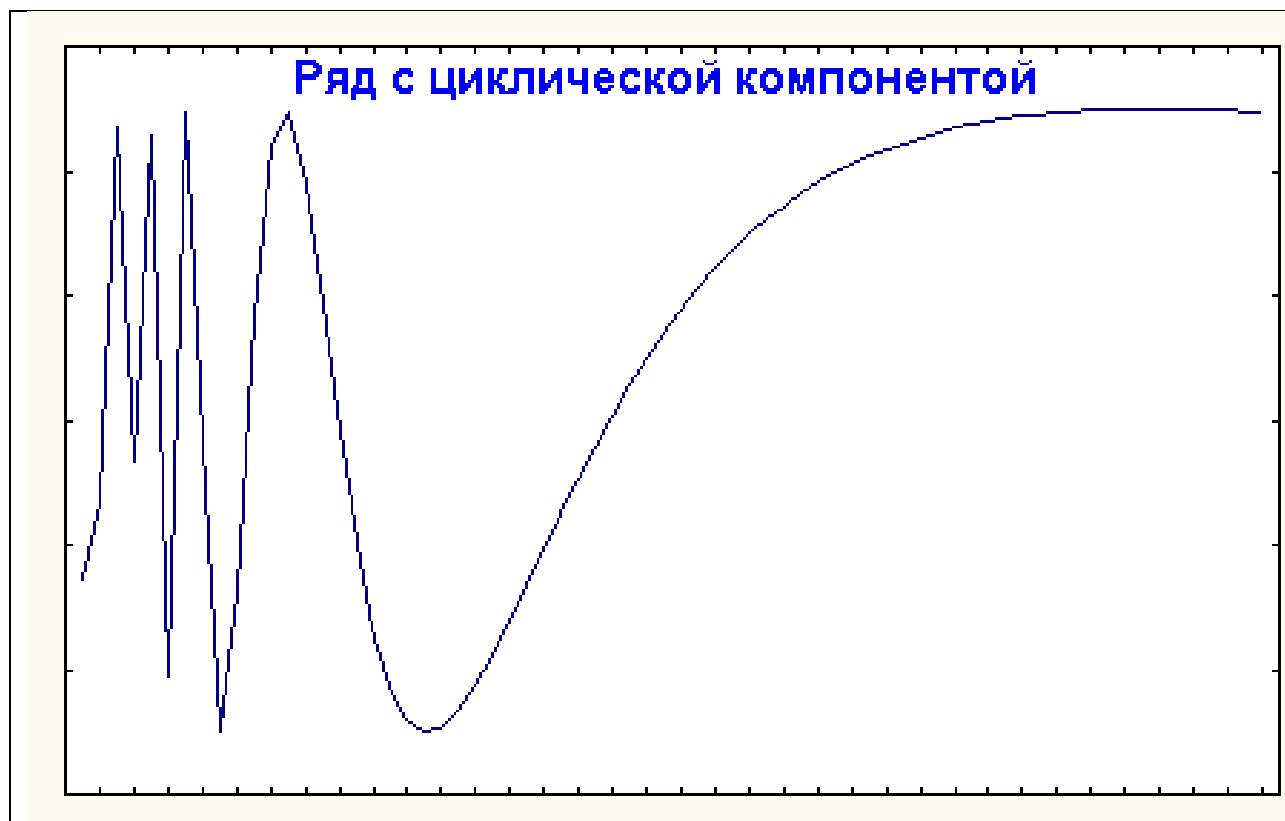
Ряд, содержащий тренд:



Ряд с сезонной компонентой:



Ряд с циклической компонентой:



Методы прогнозирования.

Методом прогнозирования называется способ исследования объекта прогнозирования, направленный на разработку прогнозов. Методы прогнозирования могут быть разделены на три большие группы: статистические (описательные), причинно-следственные и комбинированные.

		Методы прогнозирования			
Статистические (описательные)		Причинно- следственные		Комбинированные	

Наилучшие результаты получаются при использовании комбинации статистических и причинно-следственных методов прогнозирования. Далее в курсе основное внимание будет уделено статистическим методам прогнозирования, которые используются при уточнении принятых решений распространяющихся на относительно короткие промежутки времени (обычно

эти промежутки в десять раз больше интервалов между уточнениями предсказаний).

Для изучения исследуемого процесса следует задать закон изменения входных переменных во времени. Выходные переменные системы могут быть описаны с помощью некоторой модели, значения коэффициентов которой определяются подбором.

Модель прогнозирования представляет собой модель исследуемого объекта, записанную в математической форме. Можно выделить три основных класса моделей, которые применяются для анализа и/или прогноза.

		Модели прогнозирования			
Модели временных рядов			Регрессионные модели с одним уравнением		Системы одновременных уравнений

4.1.1 Прогнозирование на основе моделей временных рядов

К этому классу относятся модели:

тренда: $y(t) = T(t) + \varepsilon_t$,

сезонности: $y(t) = S(t) + \varepsilon_t$,

тренда и сезонности: $y(t) = T(t) + S(t) + \varepsilon_t$ (аддитивная) или $y(t) = T(t)S(t) + \varepsilon_t$ (мультипликативная),

где $T(t)$ - временной тренд заданного параметрического вида (например, линейный $T(t) = a + bt$), $S(t)$ - периодическая (сезонная) компонента, ε_t - случайная (стохастическая) компонента.

К моделям временных рядов относится множество более сложных моделей, таких как модели адаптивного прогноза, модели авторегрессии и скользящего среднего (ARIMA) и др. Их общей чертой является то, что они объясняют поведение временного ряда, исходя только из его предыдущих значений. Такие модели могут применяться, например, для изучения и прогнозирования объема продаж авиабилетов, спроса на мороженое, краткосрочного прогноза процентных ставок и т.п.

Регрессионные модели с одним уравнением

В таких моделях зависимая (объясняемая) переменная y представляется в виде функции $f(x, a_i) = f(x_1, \dots, x_k, a_1, \dots, a_p)$, где $x_1, \dots, x_k$ - независимые (объясняющие переменные), а $a_1, \dots, a_p$ - параметры. В зависимости от вида функции $f(x, a)$ модели делятся на линейные и нелинейные. Например, можно исследовать спрос на мороженое как функцию от времени, температуры воздуха, среднего уровня доходов или зависимость зарплаты от возраста, уровня образования, стажа работы и т.п. Область применения таких моделей, даже линейных, значительно шире, чем моделей временных рядов.

Формирование набора моделей прогнозирования

Статистические методы исследования исходят из предположения о возможности представления значений временного ряда в виде суммы нескольких компонент, отражающих закономерность и случайность развития, в частности в виде суммы трех компонент:

$$Y(t) = T(t) + S(t) + E(t),$$

где $T(t)$ - тренд (долговременная тенденция) развития;

$S(t)$ - сезонная компонента;

$E(t)$ - остаточная компонента.

Сезонная компонента характеризует устойчивые внутригодовые колебания уровней. Она проявляется в некоторых показателях, представленных квартальными или месячными данными. Для данных с иным шагом наблюдения $S(t)=0$.

Для решения задач анализа и моделирования тенденции изменения $T(t)$ исследуемого показателя используются модели кривых роста

Модели кривых роста (трендовые модели)

Кривые роста - это математические функции, предназначенные для аналитического выравнивания временного ряда.

Наиболее часто в практической работе используются кривые роста, которые позволяют описывать процессы трех основных типов: без предела

роста; с пределом роста без точки перегиба; с пределом роста и точкой перегиба.

Для описания процессов без предела роста служат функции:

$Y(t) = A_0 + A_1t$	- прямая
$Y(t) = A_0 + A_1t + A_2t^2$	- парабола II порядка
$Y(t) = \exp(A_0)t^{A_1}$	- степенная
$Y(t) = \exp(A_0 + A_1t)$	- экспонента
$Y(t) = \exp(A_0 + A_1t)t^{A_2}$	- кинетическая кривая
$Y(t) = A_0 + A_1Lnt (1 + A_2Lnt)$	- линейно-логарифмическая функция II порядка
$Y(t) = A_0 + A_1Ln(t)$	- линейно -логарифмическая функция I порядка

Процессы развития такого типа характерны в основном для абсолютных объемных показателей, но часто им соответствует и развитие некоторых качественных относительных показателей. Для описания процессов с пределом роста служат функции:

$Y(t) = \exp(A_0 + A_1 / t)$	- кривая Джонсона
$Y(t) = A_0 + t / (t + A_1)$	- вторая функция Торнквиста
$Y(t) = A_0 - A_1\exp(-t)$	- модифицированная экспонента

Процессы с пределом роста характерны для многих относительных показателей (душевое потребление продуктов питания, внесение удобрений на единицу площади, затраты на один рубль произведенной продукции и т.п.).

Для описания процессов третьего типа - с пределом роста и точкой перегиба используются кинетическая кривая (кривая Перла - Рида) и кривая Гомперца:

$$Y(t) = \exp (A_0 - A_1\exp(t)).$$

Такой тип развития характерен для спроса на некоторые новые товары.

Параметры моделей могут быть содержательно интерпретированы. Так, параметр A_0 во всех моделях без предела роста задает начальные условия развития, а в моделях с пределом роста - асимптоту функций, параметр A_1

определяет скорость или интенсивность развития, параметр A_2 - изменение скорости или интенсивности развития.

Математические методы позволяют представить прогнозирующую модель в виде полинома любого порядка. Однако, если нет необходимости в использовании полиномов более высокого порядка (как, например, при отслеживании траектории баллистической ракеты), применение полиномов второго и более высоких порядков для описания прогнозируемых рядов оказывается излишним.

4.1.2 Адаптивные модели прогнозирования

Для лучшего отображения особенностей изменения исследуемого показателя на конце периода наблюдения целесообразно использовать адаптивные модели, каждая из которых имеет определенный механизм приспособления к новым условиям. Общим для всех моделей этой группы является придание наибольшего веса последним наблюдениям при оценке параметров.

Все адаптивные модели базируются на двух схемах: скользящего среднего (СС-модели) и авторегрессии (АР-модели).

Согласно схеме скользящего среднего, оценкой текущего уровня является взвешенное среднее всех предшествующих уровней, причем веса при наблюдениях убывают по мере удаления от последнего уровня, т.е. информационная ценность наблюдений признается тем большей, чем ближе находятся они к концу интервала наблюдений. Такие модели более точно отражают изменения, происходящие в тенденции, но не позволяют в чистом виде отражать колебания.

В авторегрессионной схеме оценкой текущего уровня является взвешенная сумма не всех, а нескольких предшествующих уровней; при этом весовые коэффициенты при наблюдениях не ранжированы. Информационная ценность наблюдений определяется не их близостью к моделируемому уровню, а теснотой связи между ними.

В практике статистического прогнозирования наиболее часто используются две базовые СС-модели: Брауна и Хольта, первая из которых

является частным случаем второй. Эти модели представляют процесс развития как линейную тенденцию с постоянно изменяющимися параметрами. Прогнозная оценка $Y_p(t,k)$ уровня ряда $Y(t+k)$, вычисляются в момент времени t на k шагов вперед:

$$Y_p(t,k) = A_0(t) + A_1(t) * k, (1)$$

где $A_0(t)$ - оценка текущего (t -го) уровня;

$A_1(t)$ - оценка текущего прироста.

Далее определяется величина их расхождения (ошибки). При $k=1$ имеем:

$$e(t+1) = Y(t+1) - Y_p(t,1).$$

В соответствии с этой величиной корректируются параметры модели. В модели Брауна модификация осуществляется следующим образом:

$$A_0(t) = A_0(t-1) + A_1(t-1) + (1 - \beta^2) * e(t); (2)$$

$$A_1(t) = A_1(t-1) + (1 - \beta)^2 * e(t);$$

где β - коэффициент дисконтирования данных, изменяющийся в пределах от 0 до 1;

α - коэффициент сглаживания ($\alpha = 1 - \beta$);

$e(t)$ - ошибка прогнозирования уровня $Y(t)$, вычисленная в момент времени $(t-1)$ на один шаг вперед.

В *модели Хольта* коэффициенты модифицируются следующим образом:

$$A_0(t) = A_0(t-1) + A_1(t-1) + \alpha_1 * e(t);$$

$$A_1(t) = A_1(t-1) + \alpha_1 * \alpha_2 * e(t);$$

где α_1, α_2 - коэффициенты сглаживания (адаптации), изменяющиеся в пределах от 0 до 1.

Параметры вычисляются последовательно, от уровня к уровню, и их значения для последнего уровня определяют окончательный вид модели.

Начальные значения параметров оцениваются по МНК на основе нескольких (например, пяти) первых уровней ряда.

Коэффициент A_0 - значение, близкое к последнему уровню, и представляет как бы закономерную составляющую этого уровня; коэффициент A_1 - определяет прирост, сформировавшийся в основном к концу периода

наблюдений, но отражающий также (правда, в меньшей степени) скорость роста и на более ранних этапах.

Модель Брауна может отображать развитие не только в виде линейной тенденции, но в виде случайного процесса, не имеющего тенденции, а также в виде параболической тенденции. Соответственно различают модели Брауна:

- *нулевого порядка*, которая описывает процессы, не имеющие тенденции развития: она располагает лишь одним параметром A_0 (оценка текущего уровня). Прогноз развития на k шагов вперед осуществляется согласно формуле $y(t+k)=A_0$. Такая модель еще называется “наивной” (“будет, как было”);

- *первого порядка* (см. выше линейную модель (1)-(2));

- *второго порядка*, отражающей развитие в виде параболической тенденции с изменяющимися скоростью и ускорением. Она имеет три параметра (A_2 - оценка текущего прироста или ускорение). Прогноз осуществляется по формуле: $y(t+k) = A_0 + A_1k + A_2k^2$.

АР- модели вообще не предназначены для описания процессов с тенденцией, однако они достаточно точно описывают колебания, что весьма важно для отображения развития неустойчивых показателей. Ряды без тенденции, как правило, не представляют интереса для экономистов. Чтобы сделать возможным применение АР-моделей к процессам с тенденцией, на первом этапе формируют стационарный ряд, т.е. исключают тенденцию путем перехода от исходного временного ряда к ряду $Z(t)$ ($t=1,2,..., N-d$) первых или вторых разностей ($d=1$ или 2):

$$Z(t) = Y(t), \quad t=1,2,...,N, \quad \text{при } d=0;$$

$$Z(t) = Y(t+1)-Y(t), \quad t=1,2,...,N-1, \quad d=1;$$

$$Z(t) = Z(t+1) - Z(t), \quad t=1,2,...,N-2, \quad d=2$$

Например, ряд первых разностей формируется как ряд приростов, т.е. последовательным вычитанием двух соседних уровней.

С учетом этого АР(p) -модель порядка p имеет вид:

$$Z(t) = A_0 + A_1Z(t-1) + A_2Z(t-2) + ... + A_pZ(t-p)$$

Параметры этой модели вычисляются по МНК с учетом сложности модели либо методом адаптивной фильтрации (МДФ). В обоих случаях модель

необходимо предварительно идентифицировать, т.е. правильно определить порядок разностного ряда d и порядок модели p . Простейшим способом определения наиболее подходящего разностного ряда является вычисление для каждого ряда ($d=0,1,2$) его дисперсии, т.е. усредненной суммы квадратов расхождений уровней ряда со средним значением Z_{cp} . Для дальнейшей обработки выбирается ряд с минимальной величиной этого показателя.

Для идентификации порядка модели обычно используется автокорреляционная функция, значения которой определяются по формуле:

$$r(m) = \sum_{t=1}^{n-m} \{(Z(t) - Z_{cp}) \cdot (Z(t-m) - Z_{cp})\} / \sum_{t=1}^n (Z(t) - Z_{cp})^2,$$

где n - количество уровней стационарного ряда $n=N-d$; m - номер коэффициента автокорреляции ($m < n/3$).

В качестве порядка модели принимается номер коэффициента автокорреляции $r(m)$, имеющего максимальную величину. Следовательно, в модели используются p уровней, которые оказывают на текущий уровень наибольшее влияние.

Для идентификации порядка модели обычно используется автокорреляционная функция, значения которой определяются по формуле:

$$r(m) = \sum_{t=1}^{n-m} \{(Z(t) - Z_{cp}) \cdot (Z(t-m) - Z_{cp})\} / \sum_{t=1}^n (Z(t) - Z_{cp})^2,$$

где n - количество уровней стационарного ряда $n=N-d$; m - номер коэффициента автокорреляции ($m < n/3$).

В качестве порядка модели принимается номер коэффициента автокорреляции $r(m)$, имеющего максимальную величину. Следовательно, в модели используются p уровней, которые оказывают на текущий уровень наибольшее влияние.

Для зависимой переменной $T(t)$ построить адаптивную модель Брауна, параметры модели оценить с помощью метода наименьших квадратов.

Оценить качество построенной модели (провести исследования адекватности и точности модели).

Отобразить на графике результаты аппроксимации и прогнозирования по адаптивной модели Брауна.

4.2 Методические указания к выполнению работы. Примеры

Задание 1. Прогнозирование на основе трендовых моделей

Для зависимой переменной $Y(t)$ построить линейную модель, параметры модели оценить с помощью метода наименьших квадратов. Оценить качество построенной модели (провести исследования адекватности и точности модели).

Пример выполнения

Для отражения тенденции изменения исследуемого показателя воспользуемся простейшей моделью вида:

$$Y_p(t) = a_0 + a_1 t \quad (t = 1, 2, \dots, N).$$

Параметры кривой роста оцениваются по методу наименьших квадратов (МНК) с использованием РЕГРЕССИЯ MS Excel.

Оценить качество модели, исследовав ее адекватность и точность.

Качество модели определяется ее адекватностью исследуемому процессу, которая характеризуется выполнением определенных статистических свойств, и точностью, т.е. степенью близости к фактическим данным. Модель считается хорошей со статистической точки зрения, если она адекватна и достаточно точна.

Модель является адекватной, если ряд остатков обладает свойствами случайности, независимости последовательных уровней, нормальности распределения и равенства нулю средней ошибки.

Результаты исследования адекватности отражены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 Оценка адекватности модели

t	Факт Y(t)	Отклонение E(t)	Точки Пово- рота	$E(t)^2$	$E(t)-$ $E(t+1)$	$[E(t)-$ $E(t+1)]^2$	$E(t)*E(t+1)$	$!E(t)!/Y(t)*$ 100
1	25	-2,2	-	4,84	-1,8	3,24	0,88	8,8
2	34	-0,4	0	0,16	-0,8	0,64	-0,16	1,2
3	42	0,4	0	0,16	-1,8	3,24	0,88	1,0
4	51	2,2	1	4,84	3,2	10,24	-2,20	4,3
5	55	-1,0	1	1,00	-4,8	23,04	-3,80	1,8
6	67	3,8	1	14,44	1,2	1,44	9,88	5,7
7	73	2,6	0	6,76	4,2	17,64	-4,16	3,6
8	76	-1,6	0	2,56	2,2	4,84	6,08	2,1
9	81	-3,8	-	14,44	-	-	-	4,7
Σ	504	0	3	49,2	-	64,32	7,40	33,2

Проверку **случайности** уровней ряда остатков проведем на основе критерия поворотных точек. В соответствии с ним каждый уровень ряда сравнивается с двумя, рядом стоящими. Если он больше или меньше их, то эта точка считается поворотной. Далее подсчитывается сумма поворотных точек “р”. В случайном ряду чисел должно выполняться строгое неравенство:

$$p > [2 (N - 2) / 3 - 2 \sqrt{(16N - 29) / 90}]$$

Квадратные скобки здесь означают, что от результата вычислений берется целая часть числа (не путать с процедурой округления!). При N=9 в правой части неравенства имеем: (целая часть 2,4)=[2,4] = 2. Следовательно, свойство случайности выполняется.

При проверке **независимости** (отсутствия автокорреляции) определяется отсутствие в ряду остатков систематической составляющей. Это проверяется с помощью d-критерия Дарбина-Уотсона, в соответствии с которым определяется коэффициент d:

$$d = \sum_{t=2}^N [E(t) - E(t-1)]^2 : \sum_{t=1}^N E(t)^2$$

Вычисленная величина этого критерия сравнивается с двумя табличными уровнями (нижним d_1 и верхним d_2).

Если $0 < d < d_1$ - то уровни остатков сильно автокоррелированы, а модель неадекватна;

$d_2 < d < 2$ - то уровни ряда являются независимыми;

$d > 2$ - то это свидетельствует об отрицательной корреляции и перед входом в таблицу необходимо выполнить преобразование: $d' = 4 - d$;

$d_1 < d < d_2$ - то однозначного вывода сделать нельзя и необходимо применение других критериев, например, первого коэффициента автокорреляции $r(1)$, который вычисляется по формуле:

$$r(1) = \frac{\sum_{t=2}^{N-1} E(t)E(t-1)}{\sum_{t=1}^N E(t)^2}$$

Если $r(1) > r(\text{табл.})$ (при $N < 15$ $r(\text{табл.}) = 0,36$), то присутствие в остаточном ряду существенной автокорреляции подтверждается.

В нашем примере $d = 1,31$.

Для линейной модели при 9 наблюдениях можно взять в качестве критических табличных уровней величины $d_1 = 1,08$ и $d_2 = 1,36$.

Так как рассчитанная величина попала в зону между d_1 , d_2 , то однозначного вывода сделать нельзя и необходимо применение других критериев.

Воспользуемся первым коэффициентом автокорреляции : $r(1) = 7,40 : 25,56 = 0,29$.

Следовательно, по этому критерию также подтверждается выполнение свойства независимости уровней остаточной компоненты.

Соответствие ряда остатков нормальному закону распределения определим при помощи RS- критерия:

$$RS = (E_{\max} - E_{\min}) : S,$$

где $E_{\max}$ - максимальный уровень ряда остатков;

$E_{\min}$ - минимальный уровень ряда остатков;

S - среднее квадратическое отклонение.

Если значение этого критерия попадает между табулированными границами с заданным уровнем вероятности, то гипотеза о нормальном распределении ряда остатков принимается. Для $N=10$ и 5% - го уровня значимости этот интервал равен (2,7 - 3,7).

В нашем примере: $E_{\max} = 3,8$ и $E_{\min} = -3,8$.

$$S = \sqrt{\sum E(t)^2 / (N - 1)} = 1,82$$

$$RS = 4,17$$

Расчетное значение не попадает в интервал. Следовательно, свойство нормальности распределения не выполняется, что не позволяет строить доверительный интервал прогноза.

Для характеристики точности воспользуемся среднеквадратическим отклонением и средней относительной ошибкой:

$$E_{\text{отн}} = (1/N) * \sum_{t=1}^N \{|E(t)| : Y(t) \cdot 100\% \} = 33,29 = 3,7\%$$

Ее величина менее 5% свидетельствует об удовлетворительном уровне точности модели (ошибка в 10 и более процентов является очень большой).

Точечный прогноз на k шагов вперед получается путем подстановки в модель параметра $t = N+1, \dots, N+k$. При прогнозировании на два шага имеем:

$$Y_p(10) = 20,0 + 7,2 * 10 = 92,0 \quad (k=1, t = 10)$$

$$Y_p(11) = 20,0 + 7,2 * 11 = 99,2 \quad (k=2, t = 11)$$

Доверительный интервал прогноза будет иметь следующие границы:

$$\text{Верхняя граница прогноза} = Y_p(N+k) + U(k)$$

$$\text{Нижняя граница прогноза} = Y_p(N+k) - U(k)$$

Величина $U(k)$ для линейной модели имеет вид:

$$U(k) = S K_p \sqrt{1 + 1/N + (N + k - t_{cp})^2 / \sum_{t=1}^N (t - t_{cp})^2}$$

Коэффициент K_p является табличным значением t -статистики Стьюдента. Если исследователь задает уровень вероятности попадания прогнозируемой величины внутрь доверительного интервала, равный 70%, то $K_p = 1,05$.

$$U(1) = 1,82 * 1,05 \sqrt{1 + 1/9 + (9 + 1 - 5)^2 : 60} = 2,4$$

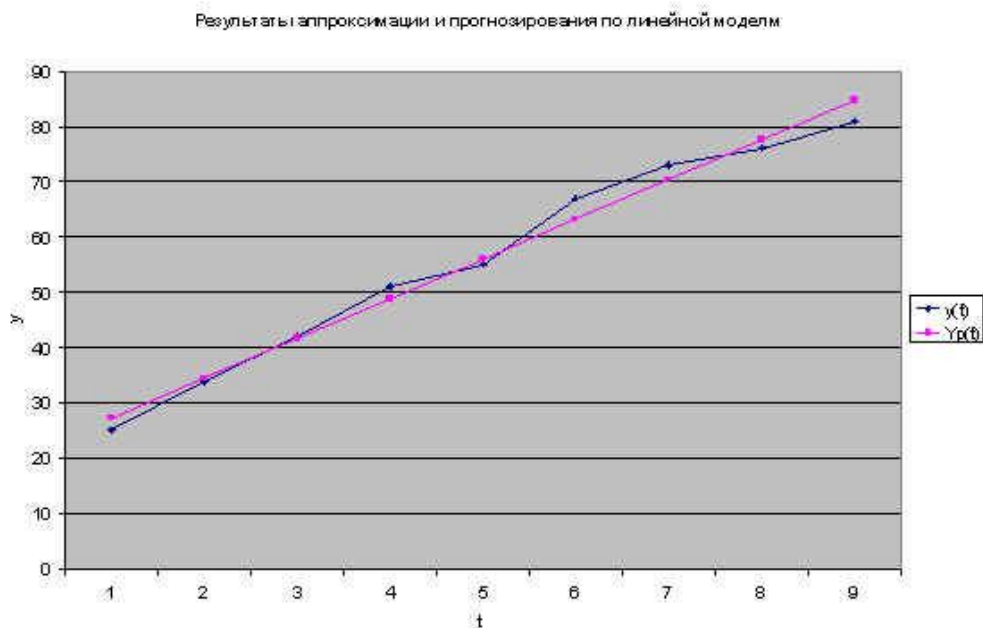
$$U(2) = 1,82 * 1,05 \sqrt{1 + 1/9 + (9 + 2 - 5)^2 : 60} = 2,5$$

Таблица 4.2 Прогнозные оценки по линейной модели

Время t	Шаг k	Прогноз $Y_p(t)$	Нижняя граница	Верхняя граница
10	1	92,0	89,6	94,4
11	2	99,2	96,7	101,7

Если построенная модель адекватна, то с выбранной пользователем вероятностью можно утверждать, что при сохранении сложившихся закономерностей развития прогнозируемая величина попадет в интервал, образованный нижней и верхней границами. В нашем случае такое утверждение не совсем правомерно из-за неполной адекватности модели.

На рис. представлены результаты аппроксимации и прогнозирования по линейной модели.



Задание 2. Прогнозирование на основе адаптивной модели Брауна

Пример выполнения работы

1. Для лучшего отображения особенностей изменения исследуемого показателя на конце периода наблюдения целесообразно использовать адаптивные модели, каждая из которых имеет определенный механизм приспособления к новым условиям. Общим для всех моделей этой группы является придание наибольшего веса последним наблюдениям при оценке параметров.

Для исследования динамики развития воспользуемся одной из таких моделей - моделью Брауна. Расчетное значение в момент времени t получается по формуле:

$$T_p(t) = a_0(t-1) + a_1(t-1)k \quad (t = 1, 2, \dots, N),$$

k - количество шагов прогнозирования (обычно $k=1$).

Это значение сравнивается с фактическим уровнем и полученная ошибка прогноза $E(t) = T(t) - T_p(t)$ используется для корректировки модели. Корректировка параметров осуществляется по формулам:

$$a_0(t) = a_0(t-1) + a_1(t-1) + E(t)(1 - \alpha^2)$$

$$a_1(t) = a_1(t-1) + E(t)(1-t)^2,$$

где α - коэффициент дисконтирования данных, отражающий большую степень доверия к более поздним данным. Его значение должно быть в интервале от 0 до 1.

Такой процесс модификации модели в зависимости от ее текущих прогнозных качеств обеспечивает адаптацию к новым закономерностям развития. Для прогнозирования используется модель, полученная на последнем шаге (при $t=N$).

Воспользуемся этой схемой адаптивного прогнозирования. Начальные оценки параметров получим по первым пяти точкам при помощи МНК.

Модель Брауна описывает процессы с линейной и параболической тенденцией (трендом), а также случайные процессы без тенденции. Построение линейной модели Брауна имеет следующие этапы:

1. По первым пяти точкам временного ряда с помощью метода наименьших квадратов оцениваются значения параметров линейной модели для нулевого момента времени:

$$y(t) = a_0 + a_1 t.$$

Таблица 4.3 Оценка начальных значений параметров модели

	t	Y(t)	t-t _{cp}	(t-t _{cp}) ²	Y _t - Y _{cp}	(t-t _{cp})(Y _t - Y _{cp})
	1	25	-2	4	-15,6	31,2
	2	34	-1	1	-7,4	7,4
	3	42	0	0	-0,6	0,0
	4	51	1	1	9,6	9,6
	5	55	2	4	13,6	27,2
итого	15	207	0	10	0	75,4

Используя данные таблицы, получим:

$$T_{cp} = 41,4 \quad t_{cp} = 3 \quad a_1(0) = 7,5 \quad a_0(0) = 19,9$$

Примем $k=1$ и $\beta = 0,6$. Расчет первых двух шагов приведен ниже, остальные отражены в таблице.

$$t=1 \quad T_p(1) = a_0(0) + a_1(0)k = 19,9 + 7,5 * 1 = 27,4$$

$$E(1) = T(1) - T_p(1) = 25 - 27,5 = -2,4$$

$$a_0(1) = T_p(1) + E(1)(1 - \beta^2) = 27,4 - 2,4 * 0,64 = 25,9$$

$$a_1(1) = a_1(0) + E(1)(1 - \beta)^2 = 7,5 - 2,4 * 0,16 = 7,1$$

$$t=2 \quad T_p(2) = a_0(1) + a_1(1)k = 25,9 + 7,1 * 1 = 33,0$$

$$E(2) = T(2) - T_p(2) = 34 - 33,0 = 1,0$$

$$a_0(2) = T_p(2) + E(2)(1 - \beta^2) = 33,0 + 1,0 * 0,64 = 33,6$$

$$a_1(2) = a_1(1) + E(2)(1 - \beta)^2 = 7,1 + 1,0 * 0,16 = 7,3$$

Таблица 4.4 Оценка параметров модели

t	Факт $T(t)$	$a_0(t)$	$a_1(t)$	Факт $T_p(t)$	Отклонение $E(t)$
0	-	19,9	7,5	-	-
1	25	25,9	7,1	27,4	-2,4
2	34	33,6	7,3	33,0	1,0
3	42	41,6	7,5	40,9	1,1
4	51	50,0	7,7	49,1	1,9
5	55	56,7	7,3	57,7	-2,7
6	67	65,9	7,8	64,0	3,0
7	73	73,3	7,7	73,7	-0,7
8	76	77,8	6,9	81,0	-5,0
9	81	82,3	6,3	84,7	-3,7

Таким образом, на последнем шаге получена модель:

$$T_p(N+k) = 82,3 + 6,3 k$$

2. Оценка ее качества на основе остаточной компоненты $E(t)$ дает следующие результаты:

$$p = 4; d = 1,49; R_s = 2,8.$$

Сопоставив эти значения с критическими уровнями, можно констатировать, что все свойства выполняются и, следовательно, построенная модель адекватна. Она имеет следующие точностные характеристики:

$$S = 2,9; E_{OTH} = 4,5\%.$$

Прогнозные оценки по модели получаются путем подстановки в нее значения $k=1$ и $k=2$, а интервальные - по тем же формулам что и для кривых роста.

$$T_p(10) = 82,3 + 6,3 * 1 = 88,4$$

$$T_p(11) = 82,3 + 6,3 \square 2 = 94,5$$

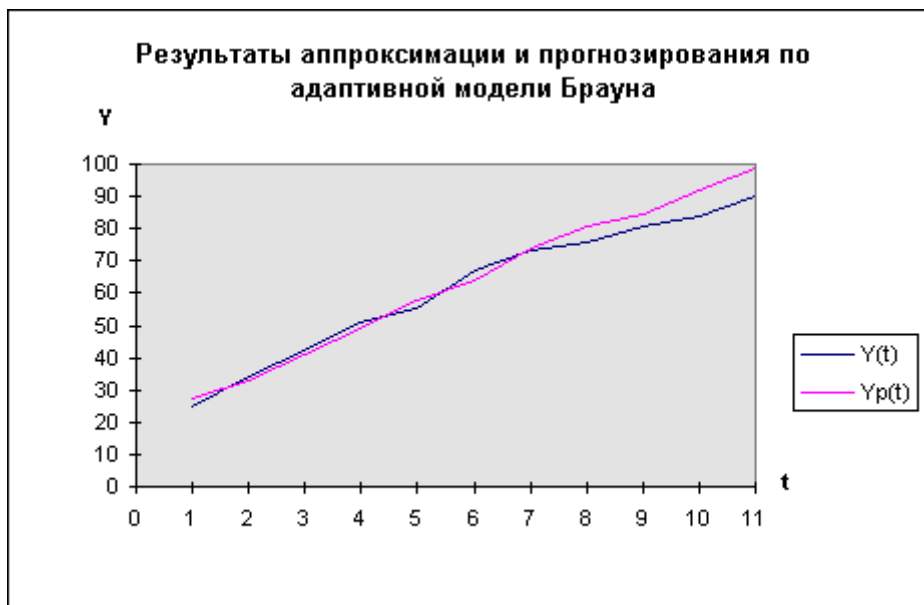
$$U(1) = 3,7 \quad U(2) = 4,0$$

Таблица 4.5 Прогнозные оценки по модели Брауна.

Время t	Шаг k	Прогноз $T_p(t)$	Нижняя граница	Верхняя граница
10	1	88,4	84,1	92,1
11	2	94,5	90,1	98,5

Учитывая адекватность построенной модели, можно утверждать, что при сохранении сложившихся закономерностей динамики развития прогнозируемая величина с вероятностью 70% попадет в интервал, образованный нижней и верхней границами.

На рис. представлены результаты аппроксимации и прогнозирования по адаптивной модели Брауна:



4.3 Варианты заданий

N варианта	Значения $Y(t)$ при t								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	10	14	21	24	33	41	44	47	49
2	43	47	50	48	54	57	61	59	65
3	3	7	10	11	15	17	21	25	23
4	30	28	33	37	40	42	44	49	47
5	5	7	10	12	15	18	20	23	26
6	12	15	16	19	17	20	24	25	28
7	20	27	30	41	45	51	53	55	61
8	8	13	15	19	256	27	33	35	40
9	45	43	40	36	38	34	31	28	25
10	33	35	40	41	45	47	45	51	53
11	10	15	21	23	25	34	32	37	41
12	16	20	22	20	25	23	25	28	30
13	12	17	20	21	25	27	24	28	31
14	20	22	24	26	25	29	35	38	43

15	25	30	36	41	38	43	47	45	50
16	80	75	78	72	69	70	64	61	59
17	24	22	26	29	33	31	28	33	36
18	30	34	40	38	42	48	50	52	53
19	88	85	84	86	81	80	83	78	76
20	50	52	54	59	57	60	63	68	70
21	25	27	30	31	35	41	42	45	47
22	75	77	73	70	66	63	67	63	61
23	28	34	32	36	39	42	45	41	46
24	15	20	24	30	33	37	36	40	42
25	70	74	76	75	78	78	83	85	87
26	82	79	78	72	69	70	64	61	59
27	25	27	26	29	32	32	30	33	35
28	32	34	38	40	42	46	50	52	53
29	90	87	85	86	82	80	81	78	76
30	55	57	54	59	57	60	63	66	64
31	12	15	18	22	25	31	32	37	41
32	26	30	32	30	35	33	35	38	40
33	62	67	80	81	85	87	84	88	91
34	18	21	24	26	25	29	34	38	41
35	28	32	36	40	38	43	45	48	50
36	82	77	78	72	69	70	67	64	62
37	28	24	26	29	33	31	28	33	35
38	32	34	41	38	42	48	50	52	55
39	90	88	84	86	82	80	81	78	76
40	56	58	60	63	67	66	70	72	74
41	35	37	40	41	45	51	52	55	57
42	65	67	63	60	56	53	57	53	51
43	29	33	32	36	38	41	44	42	46

44	35	40	44	50	53	57	56	60	62
45	72	74	76	75	79	78	82	85	89
46	85	81	78	72	69	70	64	61	56
47	23	27	26	29	32	34	36	41	45
48	30	34	36	40	41	46	49	52	53
49	95	89	85	86	82	80	81	76	73
50	52	54	55	59	60	62	63	66	70

Исходные данные задания 2 те же, что и в задании 1

Тема 5 Ресурсная модель оптимального планирования производства

5.1 Основные понятия и краткая теория

Линейное программирование является одной из основных частей того раздела современной математики, который получил название математического программирования. В общей постановке задачи этого раздела выглядят следующим образом.

Имеются какие-то переменные $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и функция этих переменных $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которая носит название целевой функции. Ставится задача: найти экстремум (максимум или минимум) целевой функции $f(x)$ при условии, что переменные x принадлежат некоторой области G :

$$\begin{cases} f(x) \Rightarrow \text{extr} \\ x \in G. \end{cases}$$

В зависимости от вида функции $f(x)$ и области G и различают разделы математического программирования: квадратичное программирование, выпуклое программирование, целочисленное программирование и т.д.

Линейное программирование характеризуется тем, что

- а) функция $f(x)$ является линейной функцией переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$;
- б) область G определяется системой линейных равенств или неравенств.

Задача о составление плана производства

Рассмотрим деятельность некоторой производственной единицы (цеха, отдела и т.д.). Пусть наша производственная единица может производить некоторые товары $G_1, G_2, \dots, G_n$. Для производства этих товаров приходится использовать некоторые сырьевые ресурсы. Пусть число этих ресурсов есть m .

Обозначим их через $R_1, R_2, \dots, R_m$. Технологией производства товара G_j назовем набор чисел $a_{ij}, i = \overline{1, m}$, показывающий, какое количество i -го ресурса необходимо для производства единицы товара G_j . Это можно записать в виде технологической матрицы, которая полностью описывает технологические потребности производства и элементами которой являются числа a_{ij} .

	G_1	G_2	...	G_j	...	G_n
R_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
R_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
R_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}
...	...	...	...	...	...	...
R_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

Пусть у нас имеется b_j запасов каждого ресурса и мы планируем произвести x_i единиц i -го товара. Так как мы не можем выскочить за пределы имеющихся у нас ресурсов, то наш план производства $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ должен удовлетворять ограничениям

[illegible]

при очевидных условиях неотрицательности переменных x_i :

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad \dots \quad x_n \geq 0;$$

Естественно, мы стремимся получить за нашу продукцию возможно больше. Поэтому стоящая перед нами задача составления плана производства приобретает вид:

[illegible]

5.2 Методические указания к выполнению работы. Пример решения одноиндексной задачи ЛП

Рассмотрим пример нахождения решения для следующей одноиндексной задачи ЛП:

$$\begin{cases} L(X) = 130,5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87,8x_4 \rightarrow \max; \\ -1,8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 756, \\ -6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \geq 450, \\ 4x_1 - 1,5x_2 + 10,4x_3 + 13x_4 \leq 89, \\ x_j \geq 0; j = \overline{1,4}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Ввод исходных данных

Создание экранной формы и ввод в нее условия задачи

Экранная форма для ввода условий задачи (1.1) вместе с введенными в нее исходными данными представлена на рис.1.1.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				ПЕРЕМЕННЫЕ				
2	Имя	X1	X2	X3	X4			
3	Значение							
4	Нижн. гр.	0	0	0	0	ЦФ		
5						Значение	Направл.	
6	Козф. ЦФ	130,5	20	56	87,8		max	
7								
8				ОГРАНИЧЕНИЯ				
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4		=	756
11	Огран.2	-6	2	4	-1		>=	450
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13		<=	89
13								

Рис. 1.1. Экранная форма задачи (1.1) (курсор в ячейке F6)

В экранной форме на рис. 1.1 каждой переменной и каждому коэффициенту задачи поставлена в соответствие конкретная ячейка в Excel.

Имя ячейки состоит из буквы, обозначающей столбец, и цифры, обозначающей строку, на пересечении которых находится объект задачи ЛП. Так, например, переменным задачи (1.1) соответствуют ячейки **B3** (x1), **C3** (x2), **D3** (x3), **E3** (x4), коэффициентам ЦФ соответствуют ячейки **B6** (с1 =130,5), **C6** (с2 =20), **D6** (с3 =56), **E6** (с4 =87,8), правым частям ограничений соответствуют ячейки **H10** (b1 = 756), **H11** (b2 =450), **H12** (b3 = 89) и т.д.

Ввод зависимостей из математической модели в экранную форму

Зависимость для ЦФ

В ячейку **F6**, в которой будет отображаться значение ЦФ, необходимо ввести формулу, по которой это значение будет рассчитано. Согласно (1.1) значение ЦФ определяется выражением

$$130,5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87,8x_4. \quad (1.2)$$

Используя обозначения соответствующих ячеек в Excel (см. рис. 1.1), формулу для расчета ЦФ (1.2) можно записать как сумму произведений каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (**B3, C3, D3, E3**), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов ЦФ (**B6, C6, D6, E6**), то есть

$$B6 \cdot B3 + C6 \cdot C3 + D6 \cdot D3 + E6 \cdot E3. (1.3)$$

Чтобы задать формулу (1.3) необходимо в ячейку F6 ввести следующее выражение и нажать клавишу "Enter"

$$=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B6:E6), (1.4)$$

где символ \$ перед номером строки 3 означает, что при копировании этой формулы в другие места листа Excel номер строки 3 не изменится; символ : означает, что в формуле будут использованы все ячейки, расположенные между ячейками, указанными слева и справа от двоеточия (например, запись **B6:E6** указывает на ячейки **B6, C6, D6** и **E6**). После этого в целевой ячейке появится 0 (нулевое значение) (рис. 1.2).

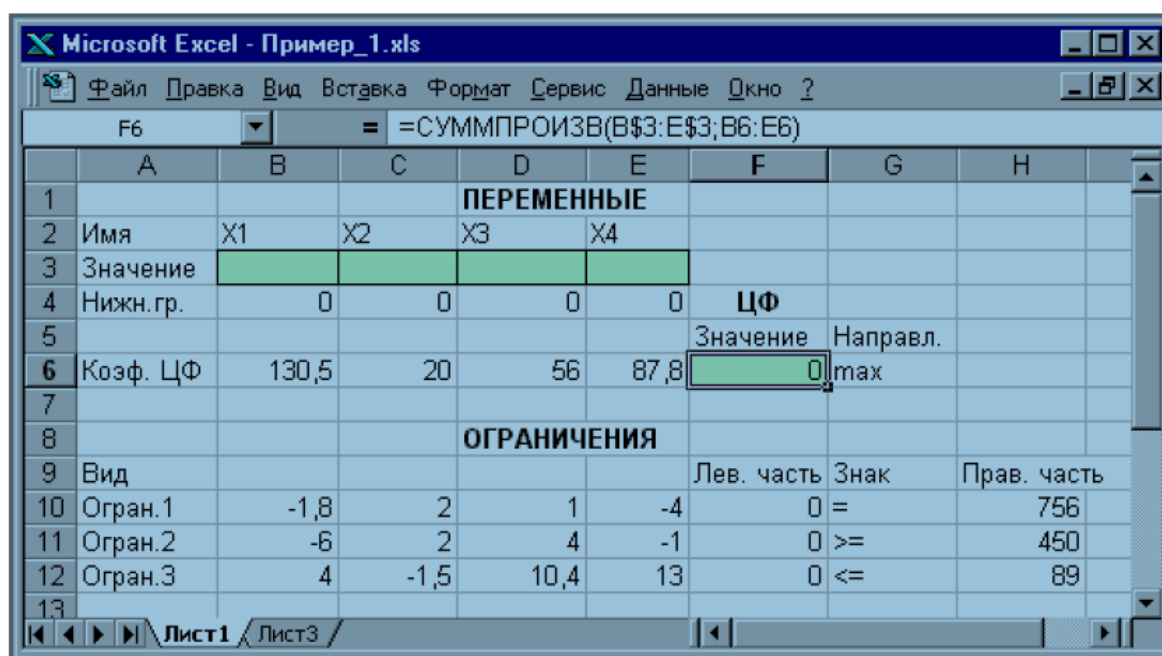


Рис.1.2. Экранная форма задачи (1.1) после ввода всех необходимых формул (курсор в ячейке F6)

Примечание 1.1. Существует другой способ задания функций в Excel с помощью режима "**Вставка функций**", который можно вызвать из меню "**Вставка**" или при нажатии кнопки " f_x " на стандартной панели инструментов. Так, например, формулу (1.4) можно задать следующим образом:

- курсор в поле F6;
- нажав кнопку " f_x ", вызовите окно "**Мастер функций – шаг 1 из 2**";
- выберите в окне "**Категория**" категорию "**Математические**";
- в окне "**Функция**" выберите функцию **СУММПРОИЗВ**;
- в появившемся окне "**СУММПРОИЗВ**" в строку "**Массив 1**" введите выражение **B\$3:E\$3**, а в строку "**Массив 2**" – выражение **B6:E6** (рис. 1.3);
- после ввода ячеек в строки "**Массив 1**" и "**Массив 2**" в окне "**СУММПРОИЗВ**" появятся числовые значения введенных массивов (см. рис. 1.3), а в экранной форме в ячейке F6 появится текущее значение, вычисленное по введенной формуле, то есть 0 (так как в момент ввода формулы значения переменных задачи нулевые).

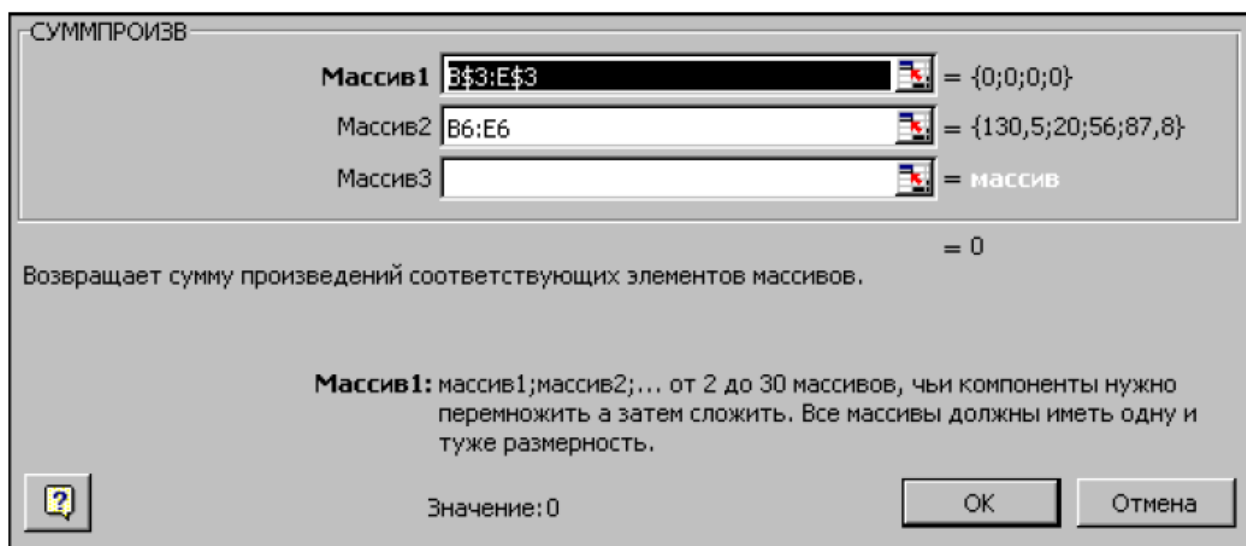


Рис. 1.3. Ввод формулы для расчета ЦФ в окно "**Мастер функций**"

Зависимости для левых частей ограничений

Левые части ограничений задачи (1.1) представляют собой *сумму произведений* каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (B3, C3, D3, E3), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов конкретного ограничения (B10, C10, D10, E10 – 1-е ограничение; B11, C11, D11, E11 – 2-е ограничение и B12, C12, D12, E12 – 3-е ограничение). Формулы, соответствующие левым частям ограничений, представлены в табл. 1.1.

Формулы, описывающие ограничения модели (1.1)

Левая часть ограничения	Формула Excel
$-1,8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4$ или $B10 \cdot B3 + C10 \cdot C3 + D10 \cdot D3 + E10 \cdot E3$	<code>=СУММПРОИЗВ(BS3:ES3;B10:E10)</code>
$-6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4$ или $B11 \cdot B3 + C11 \cdot C3 + D11 \cdot D3 + E11 \cdot E3$	<code>=СУММПРОИЗВ(BS3:ES3;B11:E11)</code>
$4x_1 - 1,5x_2 + 10,4x_3 + 13x_4$ или $B12 \cdot B3 + C12 \cdot C3 + D12 \cdot D3 + E12 \cdot E3$	<code>=СУММПРОИЗВ(BS3:ES3;B12:E12)</code>

Как видно из табл. 1.1, формулы, задающие левые части ограничений задачи (1.1), отличаются друг от друга и от формулы (1.4) в целевой ячейке **F6** только номером строки во втором массиве. Этот номер определяется той строкой, в которой ограничение записано в экранной форме. Поэтому для задания зависимостей для левых частей ограничений достаточно скопировать формулу из целевой ячейки в ячейки левых частей ограничений. Для этого необходимо:

- поместить курсор в поле целевой ячейки **F6** и скопировать в буфер содержимое ячейки **F6** (клавишами "**Ctrl-Insert**");
- помещать курсор поочередно в поля левой части каждого из ограничений, то есть в **F10**, **F11** и **F12**, и вставлять в эти поля содержимое буфера (клавишами "**Shift-Insert**") (при этом номер ячеек во втором массиве формулы будет меняться на номер той строки, в которую была произведена вставка из буфера);
- на экране в полях **F10**, **F11** и **F12** появится 0 (нулевое значение) (см. рис. 1.2).

Проверка правильности введения формул

Для проверки правильности введенных формул производите поочередно двойное нажатие левой клавиши мыши на ячейки с формулами. При этом на экране рамкой будут выделяться ячейки, используемые в формуле (рис. 1.4 и 1.5).

Задание ЦФ

Дальнейшие действия производятся в окне "**Поиск решения**", которое вызывается из меню "**Сервис**" (рис. 1.6):

- поставьте курсор в поле "**Установить целевую ячейку**";
- введите адрес целевой ячейки **\$F\$6** или сделайте одно нажатие левой клавиши мыши на целевую ячейку в экранной форме — это будет равносильно вводу адреса с клавиатуры;

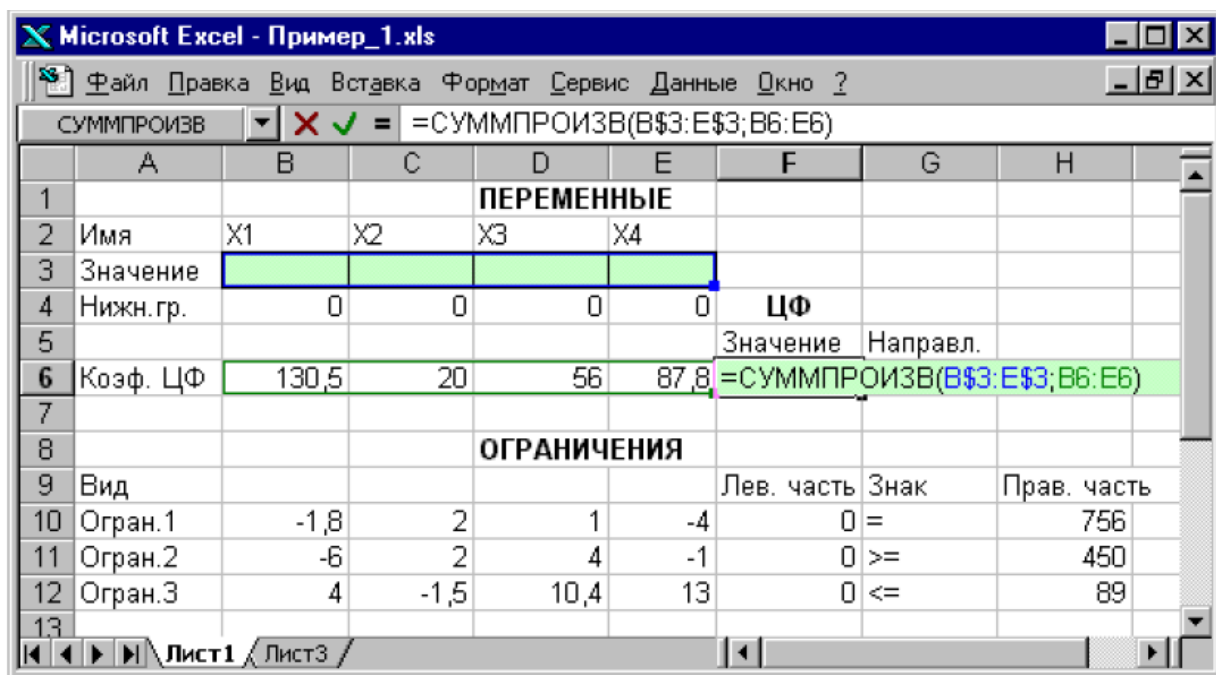


Рис. 1.4. Проверка правильности введения формулы в целевую ячейку F6

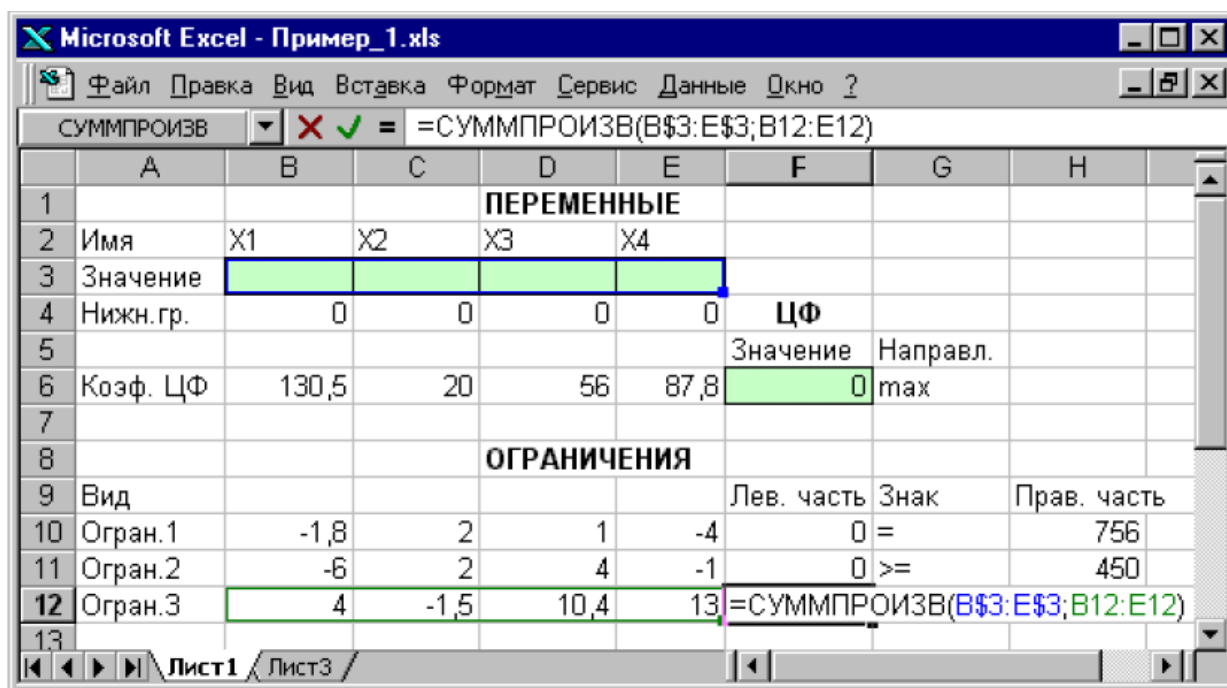


Рис. 1.5. Проверка правильности введения формулы в ячейку F12 для левой части ограничения 3

- введите направление оптимизации ЦФ, щелкнув один раз левой клавишей мыши по селекторной кнопке "**максимальному значению**".

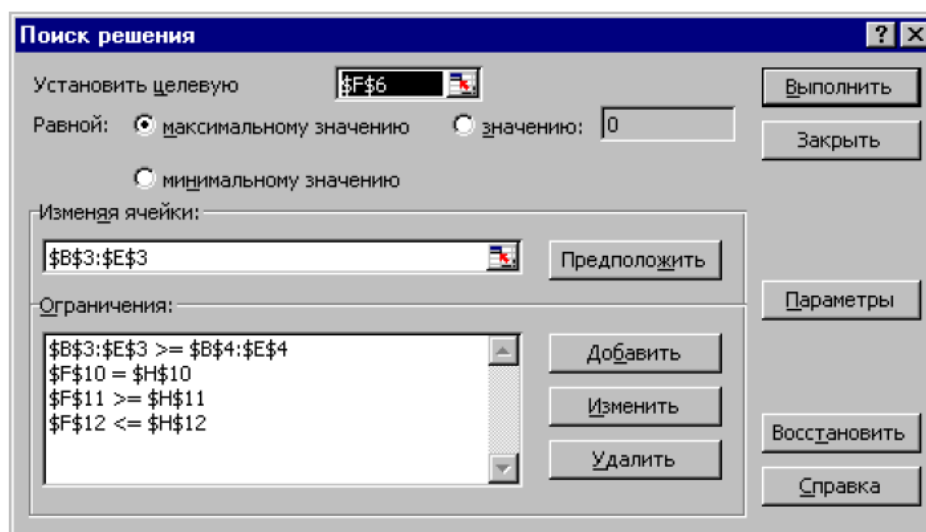


Рис. 1.6. Окно "**Поиск решения**" задачи (1.1)

Ввод ограничений и граничных условий

Задание ячеек переменных

В окно "**Поиск решения**" в поле "**Изменяя ячейки**" впишите адреса **\$B\$3:\$E\$3**. Необходимые адреса можно вносить в поле "**Изменяя ячейки**" и автоматически путем выделения мышью соответствующих ячеек переменных непосредственно в экранной форме.

Задание граничных условий для допустимых значений переменных

В нашем случае на значения переменных накладывается только граничное условие неотрицательности, то есть их нижняя граница должна быть равна нулю (см. рис. 1.1).

- Нажмите кнопку "**Добавить**", после чего появится окно "**Добавление ограничения**" (рис. 1.7).
- В поле "**Ссылка на ячейку**" введите адреса ячеек переменных **\$B\$3:\$E\$3**. Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью всех ячеек переменных непосредственно в экранной форме.
- В поле знака откройте список предлагаемых знаков и выберите $\geq$.
- В поле "**Ограничение**" введите адреса ячеек нижней границы значений переменных, то есть **\$B\$4:\$E\$4**. Их также можно ввести путем выделения мышью непосредственно в экранной форме.

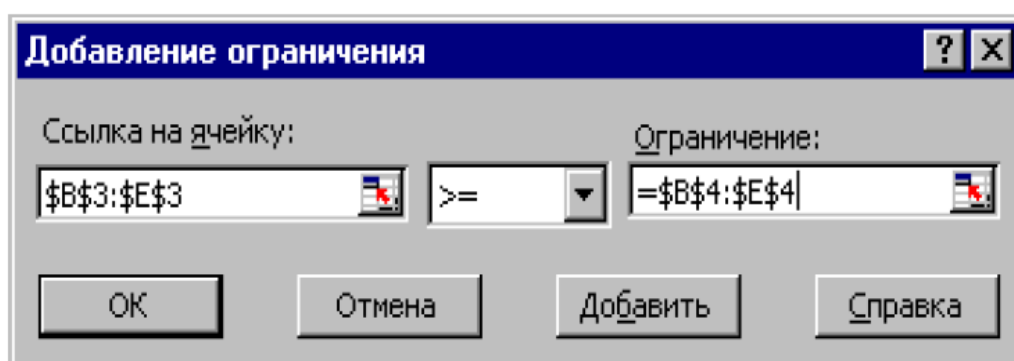


Рис. 1.7. Добавление условия неотрицательности переменных задачи (1.1)

Задание знаков ограничений $\leq$, $\geq$, $=$

- Нажмите кнопку "Добавить" в окне "Добавление ограничения".
- В поле "Ссылка на ячейку" введите адрес ячейки левой части конкретного ограничения, например **\$F\$10**. Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью нужной ячейки непосредственно в экранной форме.
- В соответствии с условием задачи (1.1) выбрать в поле знака необходимый знак, например $=$.
- В поле "Ограничение" введите адрес ячейки правой части рассматриваемого ограничения, например **\$H\$10**.
- Аналогично введите ограничения: **\$F\$11 $\geq$ \$H\$11**, **\$F\$12 $\leq$ \$H\$12**.
- Подтвердите ввод всех перечисленных выше условий нажатием кнопки **ОК**.

Окно "**Поиск решения**" после ввода всех необходимых данных задачи (1.1) представлено на рис. 1.6.

Если при вводе условия задачи возникает необходимость в изменении или удалении внесенных ограничений или граничных условий, то это делают, нажав кнопки "**Изменить**" или "**Удалить**" (см. рис. 1.6).

Установка параметров решения задачи

Задача запускается на решение в окне "**Поиск решения**". Но предварительно для установления конкретных параметров решения задач оптимизации определенного класса необходимо нажать кнопку "**Параметры**" и заполнить некоторые поля окна "**Параметры поиска решения**" (рис. 1.8).

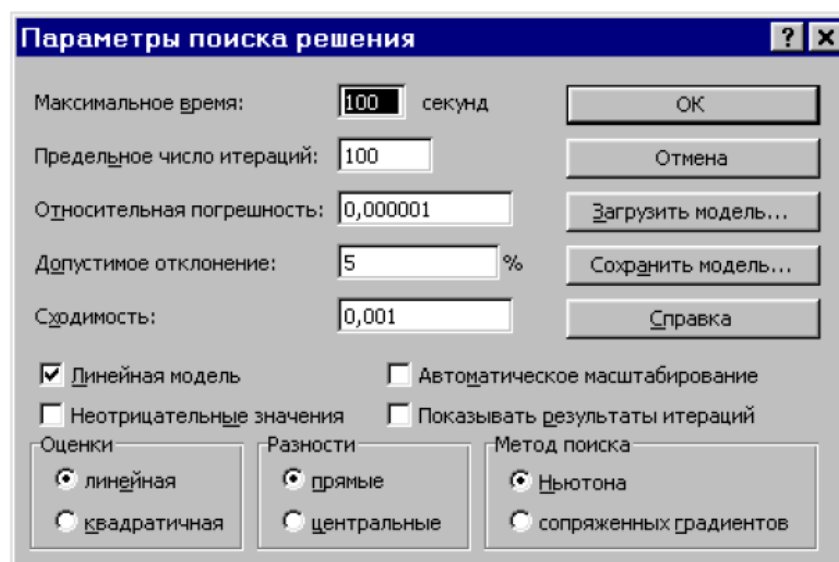


Рис. 1.8. Параметры поиска решения, подходящие для большинства задач ЛП

Параметр "**Максимальное время**" служит для назначения времени (в секундах), выделяемого на решение задачи. В поле можно ввести время, не превышающее 32 767 секунд (более 9 часов).

Параметр "**Относительная погрешность**" служит для задания точности, с которой определяется соответствие ячейки целевому значению или приближение к указанным границам. Поле должно содержать число из интервала от 0 до 1. Чем *меньше* количество десятичных знаков во введенном числе, тем *ниже* точность. Высокая точность увеличит время, которое требуется для того, чтобы сошелся процесс оптимизации.

Параметр "**Допустимое отклонение**" служит для задания допуска на отклонение от оптимального решения в целочисленных задачах. При указании большего допуска поиск решения заканчивается быстрее.

Параметр "**Сходимость**" применяется только при решении нелинейных задач.

Установка флажка "**Линейная модель**" обеспечивает ускорение поиска решения линейной задачи за счет применения симплекс-метода.

Подтвердите установленные параметры нажатием кнопки "**ОК**".

Запуск задачи на решение

Запуск задачи на решение производится из окна "**Поиск решения**" путем нажатия кнопки "**Выполнить**".

После запуска на решение задачи ЛП на экране появляется окно "Результаты поиска решения" с одним из сообщений, представленных на рис. 1.9, 1.10 и 1.11.

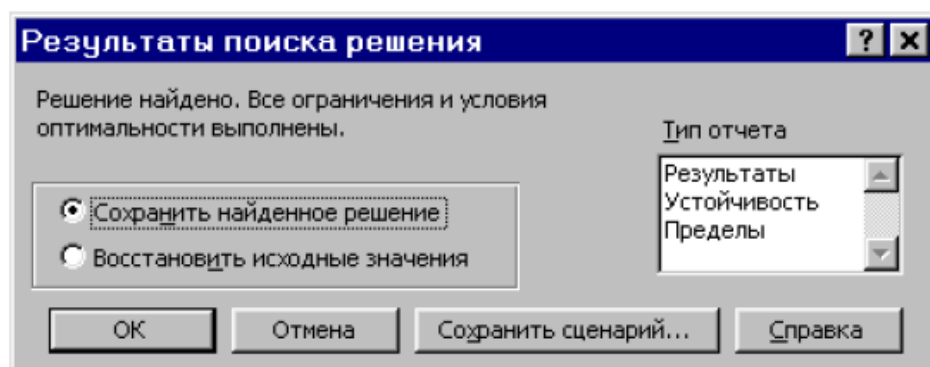


Рис. 1.9. Сообщение об успешном решении задачи

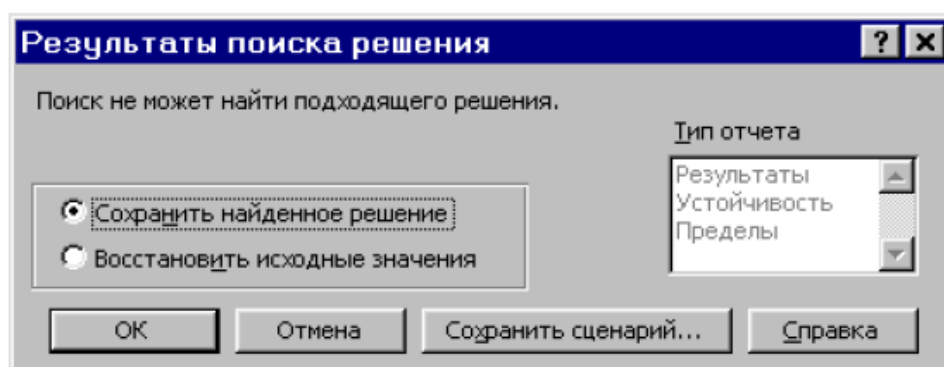


Рис. 1.10. Сообщение при несовместной системе ограничений задачи

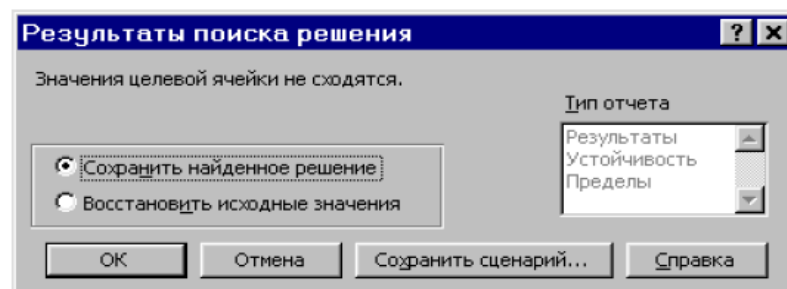


Рис. 1.11. Сообщение при неограниченности ЦФ в требуемом направлении

Иногда сообщения, представленные на рис. 1.10 и 1.11, свидетельствуют не о характере оптимального решения задачи, а о том, что при вводе условий задачи в Excel были допущены **ошибки**, не позволяющие Excel найти оптимальное решение, которое в действительности существует (см. ниже подразд. 1.3.5).

Если при заполнении полей окна **"Поиск решения"** были допущены ошибки, не позволяющие Excel применить симплекс-метод для решения задачи или довести ее решение до конца, то после запуска задачи на решение на экран

будет выдано соответствующее сообщение с указанием причины, по которой решение не найдено. Иногда слишком малое значение параметра **"Относительная погрешность"** не позволяет найти оптимальное решение. Для исправления этой ситуации увеличивайте погрешность поразрядно, например от 0,000001 до 0,00001 и т.д.

В окне **"Результаты поиска решения"** представлены названия трех типов отчетов: **"Результаты"**, **"Устойчивость"**, **"Пределы"**. Они необходимы при анализе полученного решения на чувствительность (см. ниже подразд. 3.3). Для получения же ответа (значений переменных, ЦФ и левых частей ограничений) прямо в экранной форме просто нажмите кнопку **"ОК"**. После этого в экранной форме появляется оптимальное решение задачи (рис. 1.12).

Microsoft Excel - Пример_1.xls									
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно ?									
F6		=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B6:E6)							
	A	B	C	D	E	F	G	H	
1				ПЕРЕМЕННЫЕ					
2	Имя	X1	X2	X3	X4				
3	Значение	100,661	546,444	0	38,925				
4	Нижн.гр.	0	0	0	0	ЦФ			
5						Значение	Направл.		
6	Козф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	27482,714	max		
7									
8				ОГРАНИЧЕНИЯ					
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть	
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4	756	=	756	
11	Огран.2	-6	2	4	-1	450	>=	450	
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13	89	<=	89	
13									

Рис. 1.12. Экранная форма задачи (1.1) после получения решения

Целочисленное программирование

Допустим, что к условию задачи (1.1) добавилось требование целочисленности значений всех переменных. В этом случае описанный выше процесс ввода условия задачи необходимо *дополнить* следующими шагами.

- В экранной форме укажите, на какие переменные накладывается требование целочисленности (этот шаг делается для наглядности восприятия условия задачи) (рис. 1.13).

- В окне "Поиск решения" (меню "Сервис"→"Поиск решения"), нажмите кнопку "Добавить" и в появившемся окне "Добавление ограничений" введите ограничения следующим образом (рис. 1.14):

- в поле "Ссылка на ячейку" введите адреса ячеек переменных задачи, то есть \$B\$3:\$E\$3;

- в поле ввода знака ограничения установите "целое";

- подтвердите ввод ограничения нажатием кнопки "ОК".

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				ПЕРЕМЕННЫЕ				
2	Имя	X1	X2	X3	X4			
3	Значение	100	546	0	39			
4	Нижн. гр.	0	0	0	0	ЦФ		
5	Целочисл.	целое	целое	целое	целое	Значение	Направл.	
6	Козф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	27394,2	max	
7								
8				ОГРАНИЧЕНИЯ				
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4	756	=	756
11	Огран.2	-6	2	4	-1	453	>=	450
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13	88	<=	89
13								

Рис. 1.13. Решение задачи (1.1) при условии целочисленности ее переменных

Добавление ограничения

Ссылка на ячейку:

Ограничение:

OK Отмена Добавить Справка

Рис. 1.14. Ввод условия целочисленности переменных задачи (1.1)

На рис. 1.13 представлено решение задачи (1.1), к ограничениям которой добавлено условие целочисленности значений ее переменных.

5.3 Анализ чувствительности целочисленные задачи. Решение в MS Excel

Задачи анализа оптимального решения на чувствительность. На практике многие экономические параметры (цены на продукцию и сырье, запасы сырья, спрос на рынке, заработная плата и т.д.) с течением времени меняют свои значения. Поэтому оптимальное решение задачи ЛП, полученное для конкретной экономической ситуации, после ее изменения может оказаться непригодным или неоптимальным. В связи с этим возникает

Задача анализа чувствительности задачи ЛП, а именно того, как возможные изменения параметров исходной модели повлияют на полученное ранее оптимальное решение.

Ограничения линейной модели классифицируются следующим образом (рис. 3.1). Связывающие ограничения проходят через оптимальную точку, например (1) и (2). Не связывающие ограничения не проходят через оптимальную точку, например (3), (4) и (5). Аналогично ресурс, представляемый связывающим ограничением, называют дефицитным, а ресурс, представляемый не связывающим ограничением, – недефицитным.

Ограничение называют избыточным в том случае, если его исключение не влияет на область допустимых решений и, следовательно, на оптимальное решение, например, (5). Выделяют следующие три задачи анализа на чувствительность.

1. Анализ сокращения или увеличения ресурсов:

1) на сколько можно увеличить (ограничения типа $\leq$) или уменьшить (ограничения типа $\geq$) запас дефицитного ресурса для улучшения оптимального значения ЦФ?

2) на сколько можно уменьшить (ограничения типа $\leq$) или увеличить (ограничения типа $\geq$) запас недефицитного ресурса при сохранении полученного оптимального значения ЦФ?

2. Увеличение (уменьшение) запаса какого из ресурсов наиболее

выгодно?

3. Анализ изменения целевых коэффициентов: каков диапазон изменения коэффициентов ЦФ, при котором не меняется оптимальное решение?

Графический анализ оптимального решения на чувствительность

Область допустимых решений задачи на рис. 3.1 – многоугольник OABCDE. Если связывающее ограничение (дефицитный ресурс) (2) передвигать до точки F, то это приведет к расширению области допустимых решений до многоугольника OABCFE и к получению нового оптимального решения в точке F. При этом ограничение (2) станет избыточным. Новое решение (F) лучше прежнего (C), поскольку для пересечения с точкой F линия ЦФ должна пройти по направлению вектора (выходящего из начала координат и показывающего направление максимизации ЦФ) дальше точки C (рис. 3.2).

Таким образом, чтобы графически определить максимальное изменение запаса дефицитного ресурса, улучшающее оптимальное решение, необходимо передвигать соответствующую прямую в направлении улучшения ЦФ до тех пор, пока это ограничение не станет избыточным.

Графический анализ максимально возможного изменения запаса недефицитного ресурса показан на рис. 3.3. Передвинем не связывающее ограничение (3) до пересечения с оптимальным решением в точке C.

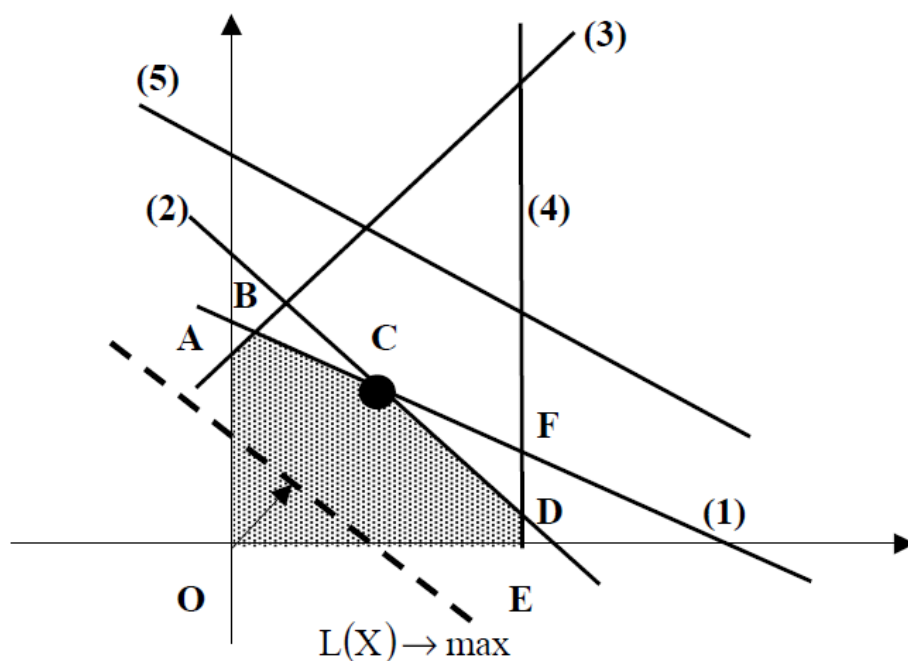


Рис. 3.1. Исходная задача ЛП для графического анализа чувствительности

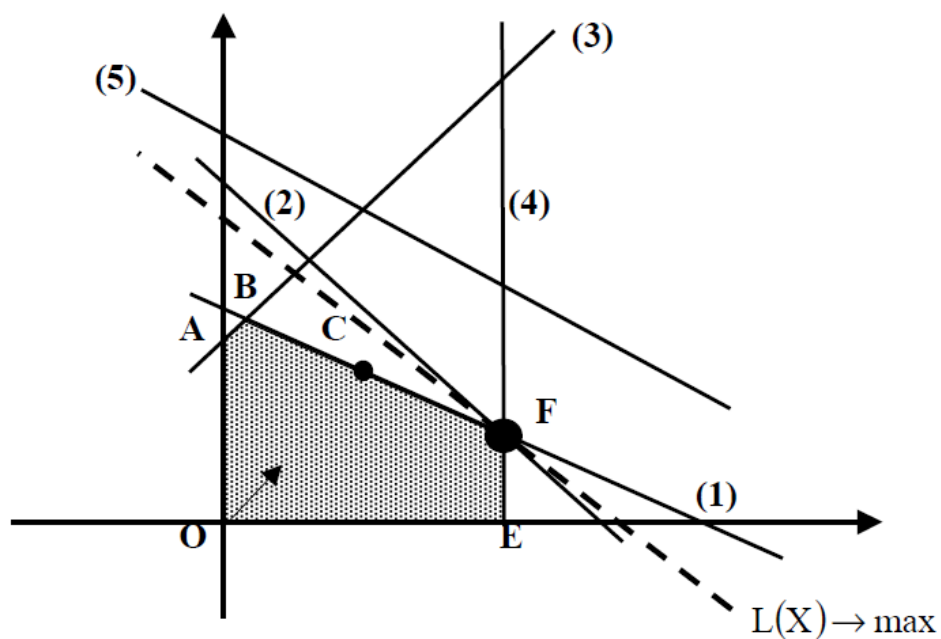


Рис. 3.2. Анализ максимального изменения запаса дефицитного ресурса (2) с целью улучшения оптимального решения $C \rightarrow F$

Это соответствует уменьшению запаса недефицитного ресурса (3), который в оптимальной точке C исходной задачи (см. рис. 3.1) расходовался не полностью. Областью допустимых решений станет многоугольник $OGCDE$.

Оптимальное решение останется прежним (точка С). Таким образом, чтобы графически определить максимальное изменение запаса недефицитного ресурса, не меняющее оптимального решения, необходимо передвигать соответствующую прямую до пересечения с оптимальной точкой.

Для того чтобы выяснить, запас какого из дефицитных ресурсов выгоднее увеличивать в первую очередь, необходимо определить, какую пользу (например, прибыль) принесет увеличение запасов каждого из них на единицу. Для этих целей вводится понятие ценности дополнительной единицы i -го ресурса (теневая цена):

МАХ приращение оптимального значения $L(X)$

$$y_i = \frac{\text{МАХ приращение оптимального значения } L(X)}{\text{МАХ допустимый прирост объема } i\text{-го ресурса}}$$

МАХ допустимый прирост объема i - го ресурса

То есть, сначала наращивается запас ресурса, имеющего максимальное значение y_i , затем – второе по величине и т.д.

Графический анализ изменения целевых коэффициентов (например, цен на производимую продукцию), не приводящих к изменению оптимального решения, проводится путем вращения линии ЦФ. При увеличении коэффициента ЦФ c_1 или уменьшении коэффициента c_2 целевая прямая на графике вращается вокруг оптимальной точки по часовой стрелке. Если c_1 уменьшается или же увеличивается c_2 , то целевая прямая вращается вокруг оптимальной точки против часовой стрелки (рис. 3.4).

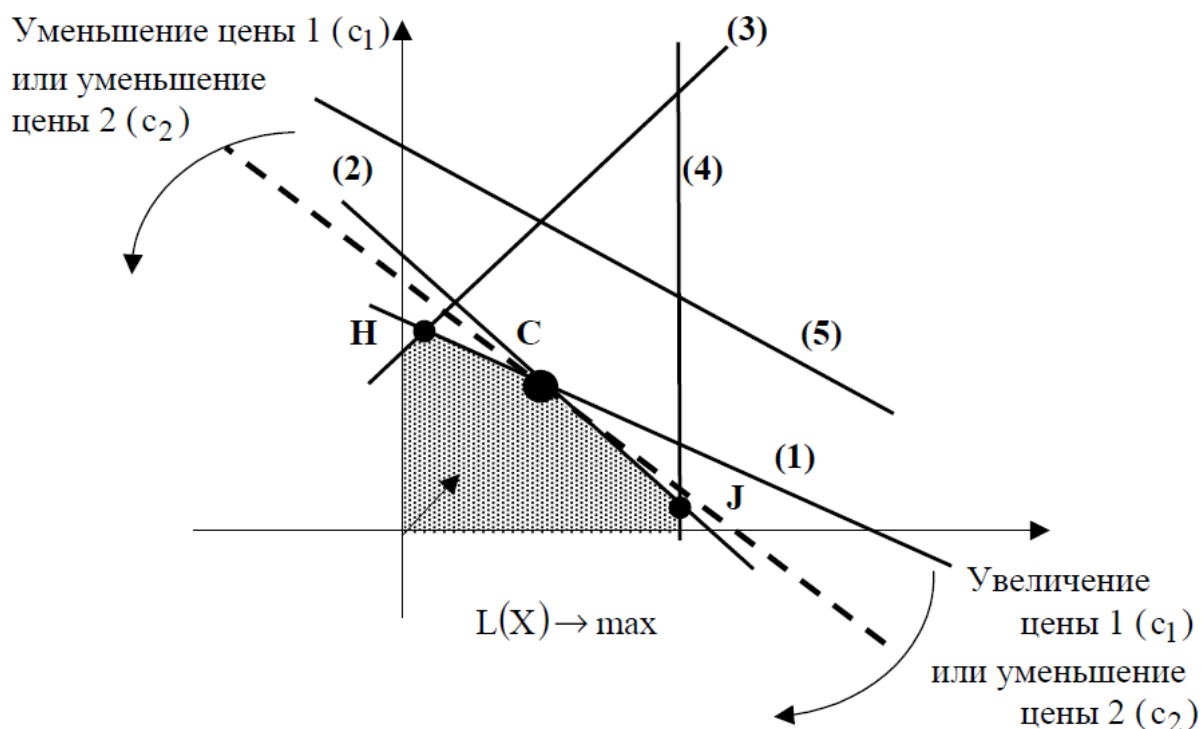


Рис. 3.4. Анализ изменения коэффициентов c_1 и c_2 ЦФ

Зафиксируем значение c_2 . Оптимальное решение в точке C не будет меняться при увеличении c_1 до тех пор, пока целевая прямая не совпадет с прямой (2). Аналогично оптимальное решение в точке C не будет меняться при уменьшении c_1 до тех пор, пока целевая прямая не совпадет с прямой (1).

При таких поворотах точка C будет оставаться оптимальной до тех пор, пока наклон целевой прямой не выйдет за пределы, определяемые наклоном прямых ограничений (1) и (2). Если целевая прямая выйдет за пределы наклона (1) или (2), то оптимальной станет соответственно точка H или J . Таким образом, нижний и верхний пределы изменения цены 1 определяются значениями коэффициента c_1 , при которых наклон целевой прямой совпадает соответственно с наклонами прямых ограничений (1) и (2).

Проведем анализ чувствительности задачи из лабораторной работы №2 (часть I).

	E4								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			ПЕРЕМЕННЫЕ						
2		X1	X2	X3	X4				
3	Значение	1	1	1	1				
4	Нижн граница	0	0	0	0				
5	Целоч	целое	целое	целое	целое	ЦФ	Направление		
6	Козф цел. Функции	130,5	20	56	87,8	294,3	max		
7									
8			ОГРАНИЧЕНИЯ						
9	Вид					Лев. часть	Знак	Пр. часть	
10	Огран 1	-1,8	2	1	-4	-2,8	"=	756	
11	Огран 2	-6	2	4	-1	-1	">="	450	
12	Огран 3	4	-1,5	10,4	13	25,9	"<="	89	
13									
14									
15									

Для этого необходимо после запуска в Excel задачи на решение в окне **"Результаты поиска решения"** выделить с помощью мыши два типа отчетов: **"Результаты"** и **"Устойчивость"** и **"Пределы"** (рис. 3.5).

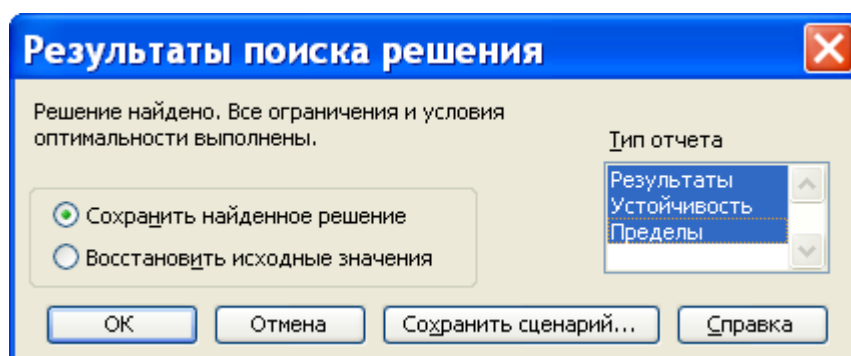


Рис. 3.5 Выделение типов отчетов требуемых для анализа чувствительности

Отчет по результатам состоит из трех таблиц (рис. 3.6):

- 1) таблица 1 содержит информацию о целевой функции (ЦФ);
- 2) таблица 2 содержит информацию о значениях переменных, полученных в результате решения задачи;
- 3) таблица 3 показывает результаты оптимального решения для ограничений и для граничных условий.

A1		Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам																																																						
	A	B	C	D	E	F	G	H																																																
1	Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам																																																							
2	Рабочий лист: [ПР 3_4.xls]Лист1																																																							
3	Отчет создан: 01.04.2013 10:22:20																																																							
4																																																								
5																																																								
6	Целевая ячейка (Максимум)																																																							
7	<table><tr><th>Ячейка</th><th>Имя</th><th>Исходное значение</th><th>Результат</th></tr><tr><td>\$F\$6</td><td>Коеф. цел. Функции ЦФ</td><td>294,3</td><td>27482,71351</td></tr></table>								Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат	\$F\$6	Коеф. цел. Функции ЦФ	294,3	27482,71351																																								
Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат																																																					
\$F\$6	Коеф. цел. Функции ЦФ	294,3	27482,71351																																																					
8																																																								
9																																																								
10																																																								
11	Изменяемые ячейки																																																							
12	<table><tr><th>Ячейка</th><th>Имя</th><th>Исходное значение</th><th>Результат</th></tr><tr><td>\$B\$3</td><td>Значение X1</td><td>1</td><td>100,6606606</td></tr><tr><td>\$C\$3</td><td>Значение X2</td><td>1</td><td>546,4444444</td></tr><tr><td>\$D\$3</td><td>Значение X3</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>\$E\$3</td><td>Значение X4</td><td>1</td><td>38,92492492</td></tr></table>								Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат	\$B\$3	Значение X1	1	100,6606606	\$C\$3	Значение X2	1	546,4444444	\$D\$3	Значение X3	1	0	\$E\$3	Значение X4	1	38,92492492																												
Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат																																																					
\$B\$3	Значение X1	1	100,6606606																																																					
\$C\$3	Значение X2	1	546,4444444																																																					
\$D\$3	Значение X3	1	0																																																					
\$E\$3	Значение X4	1	38,92492492																																																					
13																																																								
14																																																								
15																																																								
16																																																								
17																																																								
18																																																								
19	Ограничения																																																							
20	<table><tr><th>Ячейка</th><th>Имя</th><th>Значение</th><th>Формула</th><th>Статус</th><th>Разница</th></tr><tr><td>\$F\$10</td><td>Огран 1 Лев. часть</td><td>755,9999999</td><td>\$F\$10=\$H\$10</td><td>не связан.</td><td>0</td></tr><tr><td>\$F\$11</td><td>Огран 2 Лев. часть</td><td>450</td><td>\$F\$11>=\$H\$11</td><td>связанное</td><td>0</td></tr><tr><td>\$F\$12</td><td>Огран 3 Лев. часть</td><td>89</td><td>\$F\$12<=\$H\$12</td><td>связанное</td><td>0</td></tr><tr><td>\$B\$3</td><td>Значение X1</td><td>100,6606606</td><td>\$B\$3>=\$B\$4</td><td>не связан.</td><td>100,6606606</td></tr><tr><td>\$C\$3</td><td>Значение X2</td><td>546,4444444</td><td>\$C\$3>=\$C\$4</td><td>не связан.</td><td>546,4444444</td></tr><tr><td>\$D\$3</td><td>Значение X3</td><td>0</td><td>\$D\$3>=\$D\$4</td><td>связанное</td><td>0</td></tr><tr><td>\$E\$3</td><td>Значение X4</td><td>38,92492492</td><td>\$E\$3>=\$E\$4</td><td>не связан.</td><td>38,92492492</td></tr></table>								Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница	\$F\$10	Огран 1 Лев. часть	755,9999999	\$F\$10=\$H\$10	не связан.	0	\$F\$11	Огран 2 Лев. часть	450	\$F\$11>=\$H\$11	связанное	0	\$F\$12	Огран 3 Лев. часть	89	\$F\$12<=\$H\$12	связанное	0	\$B\$3	Значение X1	100,6606606	\$B\$3>=\$B\$4	не связан.	100,6606606	\$C\$3	Значение X2	546,4444444	\$C\$3>=\$C\$4	не связан.	546,4444444	\$D\$3	Значение X3	0	\$D\$3>=\$D\$4	связанное	0	\$E\$3	Значение X4	38,92492492	\$E\$3>=\$E\$4	не связан.	38,92492492
Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница																																																			
\$F\$10	Огран 1 Лев. часть	755,9999999	\$F\$10=\$H\$10	не связан.	0																																																			
\$F\$11	Огран 2 Лев. часть	450	\$F\$11>=\$H\$11	связанное	0																																																			
\$F\$12	Огран 3 Лев. часть	89	\$F\$12<=\$H\$12	связанное	0																																																			
\$B\$3	Значение X1	100,6606606	\$B\$3>=\$B\$4	не связан.	100,6606606																																																			
\$C\$3	Значение X2	546,4444444	\$C\$3>=\$C\$4	не связан.	546,4444444																																																			
\$D\$3	Значение X3	0	\$D\$3>=\$D\$4	связанное	0																																																			
\$E\$3	Значение X4	38,92492492	\$E\$3>=\$E\$4	не связан.	38,92492492																																																			
21																																																								
22																																																								
23																																																								
24																																																								
25																																																								
26																																																								
27																																																								
28																																																								
29																																																								
30																																																								

Рис. 3.6 Лист отчета по результатам

В отчете для каждого ограничения приводятся:

- значение левой части ограничения;
- формула, определяющая ограничение;
- состояние ограничения (связанное или несвязанное);
- разница между правой и левой частями ограничения.

Если разница между правой и левой частями ограничения равна нулю, то ограничение считается связанным, в противном случае - несвязанным. В частности если ограничение моделирует использование некоторого вида ресурса, то экономический смысл разницы - остаток этого ресурса

Если ресурс используется полностью (то есть ресурс дефицитный), то в графе "Статус" ("Состояние") соответствующее ограничение указывается как "связанное"; при неполном использовании ресурса (то есть ресурс

недефицитный) в этой графе указывается "не связан". В графе "Значение" приведены величины использованного ресурса.

Для граничных условий в графе "Разница" показана разность между значением переменной в найденном оптимальном решении и заданным для нее граничным условием.

Таблица 3 отчета по результатам дает информацию для анализа возможного изменения запасов недефицитных ресурсов при сохранении полученного оптимального значения ЦФ. Так, если на ресурс наложено ограничение типа $\geq$, то в графе "Разница" дается количество ресурса, на которое была превышена минимально необходимая норма.

Отчет по устойчивости состоит из двух таблиц (рис. 3.7).

Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости									
Рабочий лист: [ПР 3_4.xls]Лист1									
Отчет создан: 01.04.2013 10:22:21									
Изменяемые ячейки									
	Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. градиент					
	\$B\$3	Значение X1	100,6606606	0					
	\$C\$3	Значение X2	546,4444444	0					
	\$D\$3	Значение X3	0	-104,4145901					
	\$E\$3	Значение X4	38,92492492	0					
Ограничения									
	Ячейка	Имя	Результ. значение	Лагранжа Множитель					
	\$F\$10	Огран 1 Лев.часть	755,9999999	47,69819767					
	\$F\$11	Огран 2 Лев.часть	450	-22,94954893					
	\$F\$12	Огран 3 Лев.часть	89	19,66486498					

Рис. 3.7 Лист отчета по устойчивости

В отчете о чувствительности содержатся сведения, показывающие, как влияют на решение задачи изменения в величинах, входящих в формулы, используемые в задаче.

В EXCEL предусмотрено два вида отчета о чувствительности в зависимости от вида модели - линейная или нелинейная. Напомним, что вид модели определяется флажком “Линейная модель” в диалоговом окне “Параметры поиска решения”.

Таблица 1 содержит информацию, относящуюся к переменным.

1. Результат решения задачи.
2. Нормир. градиент (или нормированная стоимость), которая показывает, насколько изменится значение ЦФ в случае принудительного включения единицы этой продукции в оптимальное решение.

Таблица 2 (см. рис. 3.7) содержит информацию, относящуюся к ограничениям.

1. Величина использованных ресурсов в колонке "Результ. значение".
2. Множитель Лагранжа показывает, на сколько изменится (в нашем случае увеличится) значение в целевой ячейке при увеличении запаса некоторого ресурса на одну единицу.

Отчет по пределам (рис 3.8) содержит (результатирующее) оптимальное значение целевой ячейки, а также результирующие (оптимальные) значения изменяемых ячеек с их нижними и верхними пределами и соответствующими целевыми результатами. Результаты показывают, на сколько можно уменьшить (устранить излишек) или увеличить (повысить минимально необходимое требование) ресурс, сохранив при этом оптимальное решение.

Нижний предел - это наименьшее значение, которое может иметь изменяемая ячейка при условии, что ограничения еще выполняются, а значения остальных изменяемых ячеек фиксированы (равны оптимальным).

Верхний предел - это наибольшее значение, которое может иметь изменяемая ячейка при условии, что ограничения еще выполняются, а значения остальных изменяемых ячеек фиксированы (равны оптимальным).

Целевой результат - это значение целевой ячейки, когда значение изменяемой ячейки равно ее нижнему или верхнему пределу.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по пределам											
1	Microsoft Excel 11.0 Отчет по пределам										
2	Рабочий лист: [ПР 3_4.xls]Отчет по пределам 1										
3	Отчет создан: 01.04.2013 10:22:21										
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											
16											
17											
18											
19											
20											
21											
22											

Целевое		
Ячейка	Имя	Значение
\$F\$6	Козф цел. Функции ЦФ	27482,71351

Изменяемое		
Ячейка	Имя	Значение
\$B\$3	Значение X1	100,6606606
\$C\$3	Значение X2	546,4444444
\$D\$3	Значение X3	0
\$E\$3	Значение X4	38,92492492

Нижний предел	Целевой результат
100,6606603	27482,71347
546,4444444	27482,71351
0	27482,71351
38,92492476	27482,71349

Верхний предел	Целевой результат
100,6606603	27482,71347
546,4444444	27482,71351
0	27482,71351
38,92492476	27482,71349

Рис. 3.8 Лист отчета по пределам

5.4 Варианты заданий

Задание 1

Предприятие может выпускать пять видов продукции И1, И2, И3, И4, И5. Для этого используется три вида ресурсов – сырье, трудовые и оборудование. Затраты на изготовление единицы каждого вида товара, объем потребляемых ресурсов и прибыль, получаемая предприятием на единицу продукции приведены в таблице:

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	40	25	30	20	30	3000
Рабочая сила, чел	22	14	18	25	22	400
Оборудование, станко/час	10	8	16	17	15	130
Прибыль на единицу товара, руб	1200	900	1500	1400	1900	

Требуется:

- 1) определить оптимальный план выпуска, максимизирующий прибыль;
- 2) насколько изменится оптимальное решение, если продукция будет измеряться в шт. (целочисленное).
- 3) насколько изменится оптимальное решение, если задана нижняя граница плана выпуска по каждому изделию (договорные обязательства)

Исходные данные

Вариант 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	34	37	37	31	44	4286
Рабочая сила, чел	18	17	22	19	23	354
Оборудование, станко/час	11	10	10	9	9	125
Прибыль на единицу товара, руб	1341	1102	967	1076	1415	

Вариант 2

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	21	40	27	45	22	4275
Рабочая сила, чел	21	18	25	15	19	484
Оборудование, станко/час	11	7	11	15	9	136
Прибыль на единицу товара, руб	1208	1023	1313	1183	944	

Вариант 3

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	32	44	50	26	39	3026
Рабочая сила, чел	21	18	17	23	15	392
Оборудование, станко/час	12	9	10	13	6	109
Прибыль на единицу товара, руб	1429	962	1120	1391	1359	

Вариант 4

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	43	42	33	37	25	2750
Рабочая сила, чел	16	23	19	24	20	379
Оборудование, станко/час	12	13	7	8	8	136
Прибыль на единицу товара, руб	1018	1348	1272	923	1015	

Вариант 5

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	28	31	41	25	26	2808
Рабочая сила, чел	17	19	16	15	24	393
Оборудование, станко/час	6	14	13	9	11	122
Прибыль на единицу товара, руб	1365	1313	1203	1485	1478	

Вариант 6

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	37	39	43	38	21	4307
Рабочая сила, чел	16	19	17	22	20	496
Оборудование, станко/час	7	13	14	11	7	101
Прибыль на единицу товара, руб	906	915	966	1105	1145	

Вариант 7

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	32	42	49	43	25	3127
Рабочая сила, чел	18	17	22	19	23	464
Оборудование, станко/час	7	11	15	15	13	100
Прибыль на единицу товара, руб	1330	1307	1365	1343	1384	

Вариант 8

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	39	48	27	23	23	3568
Рабочая сила, чел	17	22	18	25	17	444
Оборудование, станко/час	10	6	13	8	11	138
Прибыль на единицу товара, руб	1305	1248	1472	1380	1089	

Вариант 9

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	34	22	44	27	33	3775
Рабочая сила, чел	18	19	19	19	15	366
Оборудование, станко/час	9	14	13	10	6	141
Прибыль на единицу товара, руб	1050	937	978	1267	977	

Вариант 10

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	40	36	50	29	31	4464
Рабочая сила, чел	21	17	21	18	18	393
Оборудование, станко/час	13	10	13	6	14	126
Прибыль на единицу товара, руб	1249	969	1435	973	1022	

Вариант 11

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	40	45	20	45	35	3558
Рабочая сила, чел	25	17	16	24	20	455
Оборудование, станко/час	15	15	9	9	10	131
Прибыль на единицу товара, руб	915	1049	1195	1318	1180	

Вариант 12

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	21	25	34	36	44	2939
Рабочая сила, чел	17	25	17	25	20	428
Оборудование, станко/час	7	13	12	12	14	136
Прибыль на единицу товара, руб	1327	1094	1375	1499	1170	

Вариант 13

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	22	26	24	40	43	4030
Рабочая сила, чел	21	15	16	18	25	498
Оборудование, станко/час	11	14	7	7	6	136
Прибыль на единицу товара, руб	1495	1067	1430	1445	1212	

Вариант 14

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	37	40	29	25	21	3106
Рабочая сила, чел	24	25	21	15	16	380
Оборудование, станко/час	15	13	13	11	13	104
Прибыль на единицу товара, руб	986	1483	1057	1485	1383	

Вариант 15

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	29	25	48	46	39	3783
Рабочая сила, чел	17	18	25	16	25	498
Оборудование, станко/час	13	15	9	7	14	107
Прибыль на единицу товара, руб	1044	1166	1046	1099	1003	

Вариант 16

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	23	34	46	45	30	2913
Рабочая сила, чел	15	22	25	22	18	471
Оборудование, станко/час	7	12	8	9	11	113
Прибыль на единицу товара, руб	1051	919	968	1450	1212	

Вариант 17

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	29	29	48	38	28	3876
Рабочая сила, чел	15	20	17	17	23	407
Оборудование, станко/час	14	10	6	11	7	106
Прибыль на единицу товара, руб	1033	1322	1071	941	993	

Вариант 18

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	24	43	21	44	21	4217
Рабочая сила, чел	21	22	21	22	22	437
Оборудование, станко/час	12	8	7	14	12	135
Прибыль на единицу товара, руб	1299	1079	1400	1009	1096	

Вариант 19

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	40	28	35	45	32	4061
Рабочая сила, чел	20	23	19	19	16	469
Оборудование, станко/час	8	8	9	10	7	115
Прибыль на единицу товара, руб	933	1428	1326	1421	1363	

Вариант 20

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	45	35	49	46	36	3612
Рабочая сила, чел	17	15	20	19	18	491
Оборудование, станко/час	8	8	12	10	8	135
Прибыль на единицу товара, руб	1324	909	1049	1157	1415	

Вариант 21

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	44	23	36	49	27	3300
Рабочая сила, чел	17	19	23	22	22	384
Оборудование, станко/час	10	13	7	12	6	122
Прибыль на единицу товара, руб	1095	1494	1486	1176	1320	

Вариант 22

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	27	26	32	39	20	3761
Рабочая сила, чел	22	24	16	25	16	368
Оборудование, станко/час	11	13	14	8	14	100
Прибыль на единицу товара, руб	1474	1323	912	1274	902	

Вариант 23

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	25	41	49	44	39	3041
Рабочая сила, чел	23	21	17	22	21	499
Оборудование, станко/час	6	9	7	6	13	102
Прибыль на единицу товара, руб	1126	1443	1223	1247	1076	

Вариант 24

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	35	21	21	45	28	3002
Рабочая сила, чел	15	21	20	25	24	434
Оборудование, станко/час	15	15	11	6	15	116
Прибыль на единицу товара, руб	1315	1215	955	1239	1017	

Вариант 25

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	22	20	41	43	44	4154
Рабочая сила, чел	19	21	17	19	21	436
Оборудование, станко/час	12	15	13	9	13	126
Прибыль на единицу товара, руб	972	1135	1174	923	1354	

Вариант 26

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	29	41	39	22	27	4174
Рабочая сила, чел	16	17	25	17	25	393
Оборудование, станко/час	9	10	15	15	13	127
Прибыль на единицу товара, руб	1271	1330	970	1288	1479	

Вариант 27

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	42	45	29	36	30	2650
Рабочая сила, чел	20	24	20	18	24	410
Оборудование, станко/час	14	7	10	14	10	105
Прибыль на единицу товара, руб	995	1268	1317	1086	1358	

Вариант 28

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	22	38	38	39	38	3977
Рабочая сила, чел	25	25	20	19	17	497
Оборудование, станко/час	10	11	14	15	13	122
Прибыль на единицу товара, руб	1260	1430	1119	948	941	

Вариант 29

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	37	23	25	30	47	2694
Рабочая сила, чел	18	16	25	24	23	396
Оборудование, станко/час	8	8	10	11	14	107
Прибыль на единицу товара, руб	1368	1397	1280	1387	1252	1372

Вариант 30

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	41	28	36	42	43	2963
Рабочая сила, чел	22	22	23	18	23	395
Оборудование, станко/час	7	10	10	12	11	107
Прибыль на единицу товара, руб	1340	1495	1151	1032	1242	

Задание 2 Анализ оптимального решения на чувствительность в Excel

1. Для задачи, решенной в задании 1, получите в Excel все типы отчетов по результатам поиска решения, необходимые для анализа чувствительности.
2. Проанализируйте задачу на чувствительность к изменениям параметров исходной модели.
3. Результаты анализа задачи на чувствительность внесите в общий отчет.

Тема 6 Транспортная задача

6.1 Основные понятия и краткая теория

Пусть имеется некоторый однородный продукт, сосредоточенный на m пунктах отправления (складах), так что на i -м складе находится a_i единиц этого продукта. Этот продукт необходимо доставить в n пунктов назначения (потребления), причем на j -й пункт необходимо доставить b_j единиц продукта. Запасы и потребности сбалансированы, то есть

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = A,$$

то есть наличие продукта равно потребности в нем.

Пусть стоимость перевозки единицы продукта из i -го склада в j -й пункт назначения равна c_{ij} . Пусть x_{ij} есть то количество продукта, которое перевозится из i -го склада в j -й пункт потребления.

Тогда общие транспортные расходы составят величину

$$\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}.$$

Из каждого склада весь продукт должен быть вывезен. Это значит, что должно быть выполнено условие

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i.$$

С другой стороны, потребности j -го пункта назначения должны быть полностью удовлетворены. Это означает, что

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j.$$

Желание минимизировать транспортные расходы приводит нас к следующей задаче:

$$\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \Rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, & i = \overline{1, m}, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & j = \overline{1, n}, \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

являющейся типичной задачей линейного программирования.

Определение 3.1. Транспортная задача называется открытой транспортной задачей, если условие баланса нарушаются; в случае выполнения условия баланса она называется сбалансированной транспортной задачей.

Приведение открытой транспортной задачи к сбалансированной

Превышение запасов над потребностями.

В этом случае вводится “фиктивный” $n + 1$ потребитель с потребностями равными абсолютной величине разности между общим количеством запасов и общим количеством требуемых единиц. Стоимость по доставке будет для $n + 1$ потребителя равна 0, т.к. поставки фактически нет.

Превышение потребностей над запасами.

Вводим “фиктивного” $m + 1$ производителя (склад) с потребностями равными абсолютной величине разности между общим количеством запасов и общим количеством требуемых единиц. Стоимость по доставке будет для $m + 1$ производителя равна 0, т.к. поставки фактически нет.

6.2 Методические указания к выполнению работы. Пример

Оптимальная организация транспортных перевозок штучного товара со склада в магазин.

Таблица 1.2

Исходные данные транспортной задачи

Тарифы, руб./шт.	1-й магазин	2-й магазин	3-й магазин	Запасы, шт.
1-й склад	2	9	7	25
2-й склад	1	0	5	50
3-й склад	5	4	100	35
4-й склад	2	3	6	75
Потребности, шт.	45	90	50	

Целевая функция и ограничения данной задачи имеют вид

$$\begin{aligned}
 L(X) = & 2x_{11} + 9x_{12} + 7x_{13} + x_{21} + 5x_{23} + 5x_{31} + \\
 & + 4x_{32} + 100x_{33} + 2x_{41} + 3x_{42} + 6x_{43} \rightarrow \min; \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 25, \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50, \\
 & x_{31} + x_{32} + x_{33} = 35, \\
 & x_{41} + x_{42} + x_{43} = 75, \\
 & x_{11} + x_{21} + x_{31} = 45, \\
 & x_{12} + x_{22} + x_{32} = 90, \\
 & x_{13} + x_{23} + x_{33} = 50, \\
 & \forall x_{ij} \geq 0, \forall x_{ij} - \text{целые } (i = \overline{1,4}; j = \overline{1,3}).
 \end{aligned} \right. \quad (1.5)
 \end{aligned}$$

Экранные формы, задание переменных, целевой функции, ограничений и граничных условий двухиндексной задачи (1.5) и ее решение представлены на рис. 1.15, 1.16, 1.17 и в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Формулы экранной формы задачи (1.5)

Объект математической модели	Выражение в Excel
Переменные задачи	C3:E6
Формула в целевой ячейке F15	=СУММПРОИЗВ(C3:E6;C12:E15)
Ограничения по строкам в ячейках F3, F4, F5, F6	=СУММ(C3:E3) =СУММ(C4:E4) =СУММ(C5:E5) =СУММ(C6:E6)
Ограничения по столбцам в ячейках C7, D7, E7	=СУММ(C3:C6) =СУММ(D3:D6) =СУММ(E3:E6)
Суммарные запасы и потребности в ячейках H8, G9	=СУММ(H3:H6) =СУММ(C9:E9)

Microsoft Excel - Пример_2.xls									
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно ?									
F15		=СУММПРОИЗВ(C3:E6;C12:E15)							
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		ПЕРЕМЕННЫЕ				ОГРАНИЧЕНИЯ			
2		целые	x1	x2	x3	Лев. часть	Знак	Прав. часть	
3		x1j				0	=	25	
4		x2j				0	=	50	
5		x3j				0	=	35	
6		x4j				0	=	75	
7	ОГРАНИЧЕНИЯ	Лев. часть	0	0	0				
8		Знак	=	=	=				185
9		Прав. часть	45	90	50			185	БАЛАНС
10									
11		ТАРИФЫ	x1	x2	x3				
12		x1j		2	9	7			
13		x2j		1	0	5			
14		x3j		5	4	100	ЦФ		
15		x4j		2	3	6	Значение	Направление	
16							0	min	

Рис. 1.15. Экранная форма двухиндексной задачи (1.5)
(курсор в целевой ячейке F15)

Поиск решения		?	X
Установить целевую	\$F\$15	Выполнить	
Равной:	☐ максимальному значению ☐ значению: 0	Заккрыть	
	☒ минимальному значению		
Изменяя ячейки:	\$C\$3:\$E\$6 Предположить		
Ограничения:	\$C\$3:\$E\$6 = целое Добавить	Параметры	
	\$C\$3:\$E\$6 >= 0 Изменить		
	\$C\$7:\$E\$7 = \$C\$9:\$E\$9 Удалить	Восстановить	
	\$F\$3:\$F\$6 = \$H\$3:\$H\$6	Справка	

Рис. 1.16. Ограничения и граничные условия задачи (1.5)

Microsoft Excel - Пример_2.xls								
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно ?								
F15		=СУММПРОИЗВ(C3:E6;C12:E15)						
	A	B	C	D	E	F	G	H
1		ПЕРЕМЕННЫЕ				ОГРАНИЧЕНИЯ		
2		целые	xi1	xi2	xi3	Лев. часть	Знак	Прав. часть
3		x1j	25	0	0	25	=	25
4		x2j	0	50	0	50	=	50
5		x3j	0	35	0	35	=	35
6		x4j	20	5	50	75	=	75
7	ОГРАНИЧЕНИЯ	Лев. часть	45	90	50			
8		Знак	=	=	=			185
9		Прав. часть	45	90	50		185	БАЛАНС
10								
11		ТАРИФЫ	xi1	xi2	xi3			
12		x1j	2	9	7			
13		x2j	1	0	5	ЦФ		
14		x3j	5	4	100	Значение	Направление	
15		x4j	2	3	6	545	min	
16								

Рис. 1.17. Экранная форма после получения решения задачи (1.5)
(курсор в целевой ячейке **F15**)

6.3 Варианты заданий

Пусть необходимо организовать оптимальные по транспортным расходам оборудования с трех складов в 12 промыслов. Ежемесячные запасы оборудования на складах равны 120, 270 и 300 единиц, а ежемесячные потребности нефтяных промыслов составляют 60, 90, 70, 100, 70, 100, 80, 110, 110, 130, 75 и 90 шт. соответственно.

Транспортные расходы (руб./ед) по доставке оборудования представлены в табл.. Между складом № X и промыслом № Y заключен договор о гарантированной поставке M единиц оборудования ежемесячно.

В связи с ремонтными работами временно невозможна перевозка из склада № X1 и промысла № Y1.

Найти оптимальный план перевозок, минимизирующий затраты.

Задания

Вариант 1

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		121	107	84	125	119	97	129	109	90	109	75	69
Склад 1	351	418	330	247	237	442	442	360	420	473	232	418	222
Склад 2	288	219	332	392	494	403	250	420	487	218	481	423	435
Склад 3	468	484	396	416	238	396	279	489	482	339	398	238	241

X=	1	Y=	12	M=	50	X1=	3	Y1=	6
----	---	----	----	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 2

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		61	88	81	103	107	76	93	112	89	102	113	113
Склад 1	449	280	231	208	462	254	355	457	346	400	430	314	245
Склад 2	359	395	475	236	436	363	428	377	351	337	256	247	348
Склад 3	342	489	479	309	363	246	217	308	439	281	422	221	462

X=	1	Y=	2	M=	70	X1=	1	Y1=	9
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 3

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		121	130	125	71	96	110	89	63	74	117	65	92
Склад 1	332	453	220	491	317	472	408	447	219	320	441	415	500
Склад 2	248	467	393	389	309	254	249	352	215	341	347	225	232
Склад 3	440	270	269	313	462	232	329	377	238	392	302	304	458

X=	3	Y=	12	M=	62	X1=	2	Y1=	3
----	---	----	----	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 4

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		77	127	95	85	105	105	123	129	65	106	82	90
Склад 1	258	283	449	492	401	287	256	361	301	271	296	298	470
Склад 2	499	272	331	335	322	203	418	360	399	312	279	488	275
Склад 3	366	306	203	282	369	381	311	281	403	307	347	416	227

X=	3	Y=	3	M=	54	X1=	1	Y1=	1
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 5

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
--	--------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----

<i>потребность</i>		108	81	127	95	123	102	94	92	74	122	61	78
Склад 1	437	254	295	497	202	234	377	425	220	249	439	441	406
Склад 2	417	340	200	277	452	219	207	417	437	265	229	398	466
Склад 3	273	296	484	493	313	321	352	326	209	357	447	297	491

x=	2	y=	4	M=	68	x1=	1	y1=	1
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 6

Потребители- промысла

	<i>запасы</i>	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
<i>потребность</i>		98	109	69	95	98	83	120	75	126	86	71	62
Склад 1	282	379	489	317	433	426	305	407	256	461	295	254	363
Склад 2	269	360	229	440	313	399	453	418	213	478	467	455	466
Склад 3	313	382	263	256	246	256	255	412	256	284	348	267	451

x=	2	y=	3	M=	61	x1=	1	y1=	9
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 7

Потребители- промысла

	<i>запасы</i>	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
<i>потребность</i>		83	111	94	93	110	117	90	91	124	101	129	98
Склад 1	439	423	257	448	245	462	334	238	307	366	373	382	462
Склад 2	494	437	495	290	330	268	306	486	336	427	244	307	346
Склад 3	378	256	401	460	272	363	334	371	298	314	277	352	345

x=	3	y=	11	M=	51	x1=	2	y1=	6
----	---	----	----	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 8

Потребители- промысла

	<i>запасы</i>	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
<i>потребность</i>		88	101	78	81	95	98	67	102	74	102	97	75
Склад 1	428	318	228	352	412	204	427	403	204	333	494	357	291
Склад 2	310	201	337	358	468	244	396	256	284	326	378	470	296
Склад 3	361	342	428	356	436	447	249	370	350	271	311	491	204

x=	2	y=	4	M=	62	x1=	3	y1=	9
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 9

Потребители- промысла

	<i>запасы</i>	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
<i>потребность</i>		67	86	116	88	63	76	74	117	128	101	69	105
Склад 1	394	478	430	259	421	489	328	311	317	338	406	386	286
Склад 2	211	406	488	387	319	430	433	496	422	479	438	234	269
Склад 3	386	359	461	443	425	218	397	423	360	246	403	442	319

X=	1	Y=	2	M=	60	X1=	2	Y1=	10
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	----

Вариант 10

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		81	105	108	69	67	127	113	93	62	70	85	77
Склад 1	455	313	220	405	464	474	380	231	371	342	338	288	259
Склад 2	306	429	339	401	222	394	447	203	415	253	324	457	244
Склад 3	362	434	270	447	325	335	373	262	500	327	492	297	357

X=	2	Y=	5	M=	69	X1=	3	Y1=	6
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 11

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		127	109	99	124	91	76	121	67	129	130	120	68
Склад 1	228	238	266	273	476	300	435	285	240	252	393	323	336
Склад 2	345	270	439	472	257	328	385	266	207	204	417	300	477
Склад 3	224	343	394	422	346	239	268	481	317	299	399	493	263

X=	3	Y=	12	M=	66	X1=	2	Y1=	12
----	---	----	----	----	----	-----	---	-----	----

Вариант 12

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		67	100	129	76	103	79	73	127	90	76	105	105
Склад 1	368	242	396	283	377	405	349	459	324	409	432	495	367
Склад 2	374	275	391	236	488	415	344	300	498	345	413	318	389
Склад 3	340	269	291	457	326	248	349	464	398	271	251	219	362

X=	1	Y=	5	M=	58	X1=	1	Y1=	9
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 13

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		79	96	125	82	93	81	99	67	82	100	106	72
Склад 1	389	257	497	331	418	335	204	415	360	291	238	235	473
Склад 2	410	423	272	361	273	457	352	333	395	216	311	464	309
Склад 3	228	203	496	291	448	496	231	417	236	309	369	298	209

X=	2	Y=	6	M=	66	X1=	3	Y1=	7
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 14

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		78	102	123	99	119	121	81	122	121	106	75	104

Склад 1	407	451	347	391	350	462	333	467	261	410	256	204	397
Склад 2	272	396	438	202	438	451	480	306	465	400	368	256	207
Склад 3	298	473	452	290	496	456	245	381	432	276	334	330	358

X=	1	Y=	7	M=	53	X1=	1	Y1=	5
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 15

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		82	99	126	66	92	68	112	72	93	97	62	72
Склад 1	343	247	370	340	233	269	285	211	376	323	456	398	215
Склад 2	480	322	398	223	392	439	317	344	322	413	270	436	438
Склад 3	214	234	458	463	395	236	398	341	429	247	439	419	459

X=	2	Y=	7	M=	60	X1=	2	Y1=	10
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	----

Вариант 16

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		93	123	76	116	75	73	86	65	119	82	76	84
Склад 1	223	275	418	378	426	366	259	338	321	218	429	460	447
Склад 2	216	203	405	264	390	430	346	278	355	327	453	444	313
Склад 3	281	262	439	372	352	443	385	455	215	351	297	403	353

X=	1	Y=	3	M=	54	X1=	1	Y1=	5
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 17

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		119	68	109	104	107	76	125	71	108	94	78	69
Склад 1	433	323	319	476	360	486	414	338	488	342	400	365	297
Склад 2	312	267	334	430	319	487	275	281	477	288	284	249	381
Склад 3	215	235	443	378	244	476	328	426	232	241	246	314	389

X=	1	Y=	7	M=	65	X1=	2	Y1=	11
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	----

Вариант 18

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		63	96	100	92	62	65	69	103	61	66	130	102
Склад 1	206	449	347	350	296	490	493	396	481	306	344	337	345
Склад 2	223	476	339	404	315	212	337	396	297	263	312	386	391
Склад 3	353	392	388	473	459	453	286	269	452	402	325	266	408

X=	1	Y=	2	M=	65	X1=	1	Y1=	3
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 19

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		82	80	90	97	64	80	94	126	60	122	119	91
Склад 1	305	204	493	428	269	365	497	349	311	368	310	248	354
Склад 2	460	268	440	303	200	442	259	410	212	446	448	313	230
Склад 3	260	497	469	457	256	277	254	439	466	485	252	336	403

X= 2 Y= 1 M= 50 X1= 2 Y1= 3

Вариант 20

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		118	105	128	66	89	99	118	126	68	105	91	101
Склад 1	415	405	243	411	265	497	381	384	445	402	401	481	457
Склад 2	463	370	233	205	327	259	405	269	481	479	381	206	487
Склад 3	388	208	479	326	436	396	451	292	275	314	242	257	426

X= 2 Y= 1 M= 50 X1= 1 Y1= 2

Вариант 21

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		82	90	107	74	111	113	126	72	79	91	78	99
Склад 1	410	373	305	287	411	473	250	309	445	446	419	474	478
Склад 2	298	329	272	397	381	208	288	256	458	386	497	316	425
Склад 3	405	375	406	327	492	356	422	210	355	345	332	455	220

X= 3 Y= 6 M= 66 X1= 2 Y1= 6

Вариант 22

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		96	126	69	81	103	91	112	78	95	112	75	61
Склад 1	382	304	418	386	279	230	297	471	203	450	447	469	365
Склад 2	426	239	305	322	416	341	433	389	488	322	482	233	289
Склад 3	330	375	226	479	369	427	435	312	350	214	405	424	419

X= 1 Y= 9 M= 60 X1= 2 Y1= 3

Вариант 23

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		117	108	111	73	68	95	90	103	129	129	68	80
Склад 1	275	466	484	270	293	404	404	414	341	281	257	455	409
Склад 2	254	276	267	415	480	319	201	440	296	312	402	482	325

Склад 3	377	344	497	384	488	459	494	227	217	484	368	234	496
---------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

X=	1	Y=	8	M=	58	X1=	1	Y1=	8
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 24

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		73	80	96	119	85	85	102	106	129	100	122	125
Склад 1	428	386	453	492	352	334	363	462	316	201	462	313	349
Склад 2	486	394	276	205	430	301	341	307	430	437	442	239	323
Склад 3	391	273	242	438	406	299	320	468	413	212	462	454	358

X=	3	Y=	11	M=	59	X1=	3	Y1=	4
----	---	----	----	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 25

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		98	69	82	89	81	100	62	95	111	66	128	128
Склад 1	364	231	242	328	421	398	302	213	418	466	229	292	209
Склад 2	228	227	464	432	221	455	225	315	330	389	245	358	318
Склад 3	231	324	454	238	475	303	299	314	493	401	452	371	453

X=	3	Y=	10	M=	56	X1=	3	Y1=	9
----	---	----	----	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 26

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		68	116	126	71	116	81	104	96	127	80	126	121
Склад 1	487	218	438	343	380	353	372	393	409	339	360	207	248
Склад 2	225	453	255	218	326	256	390	372	323	416	423	331	219
Склад 3	436	201	445	483	419	380	466	323	481	367	344	463	442

X=	3	Y=	11	M=	59	X1=	3	Y1=	11
----	---	----	----	----	----	-----	---	-----	----

Вариант 27

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		118	73	109	65	75	110	78	71	126	130	100	90
Склад 1	282	451	424	366	317	208	351	268	284	253	303	269	482
Склад 2	383	237	344	340	462	267	233	465	428	415	342	498	493
Склад 3	227	480	498	478	228	359	429	453	459	289	339	266	478

X=	2	Y=	6	M=	51	X1=	2	Y1=	2
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 28

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		105	64	126	115	65	129	76	125	110	108	106	99
Склад 1	207	450	359	218	231	275	363	457	492	410	376	351	268
Склад 2	382	267	276	257	448	348	439	282	223	400	354	389	455
Склад 3	259	492	361	281	465	262	364	462	286	454	364	235	473

x=	3	y=	1	M=	50	x1=	1	y1=	1
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 29

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		92	64	104	96	114	92	126	85	74	84	107	123
Склад 1	356	468	240	211	431	490	267	443	358	213	407	326	213
Склад 2	432	441	279	280	390	472	372	404	437	395	275	251	355
Склад 3	413	385	298	398	430	464	402	494	259	364	312	488	441

x=	2	y=	7	M=	69	x1=	1	y1=	4
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 30

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		101	98	61	103	125	123	99	89	64	93	103	111
Склад 1	200	482	273	223	228	213	487	202	477	212	472	420	209
Склад 2	337	272	477	446	277	208	204	389	201	494	298	377	490
Склад 3	286	417	323	281	212	219	202	243	434	393	359	433	266

x=	1	y=	10	M=	68	x1=	1	y1=	4
----	---	----	----	----	----	-----	---	-----	---

Тема 7 Многокритериальные методы принятия решений

7.1 Основные понятия и краткая теория

Постановка задачи

Общей векторной задачей математического программирования (общей ВЗМП) называется задача, которая состоит в определении оптимального (по Парето) множества, в каждой точке которого X - значения векторной целевой функции удовлетворяют условиям:

$$extrF(X) = \left\{ \begin{array}{l} \max f_k(X), \forall k \in P = \overline{1, l_1} \\ \min f_k(X), \forall k \in Q = \overline{l_1+1, l_1+l_2} \end{array} \right\}$$

при ограничениях

$$G(X) \{ \leq, =, \geq \} B$$

$$X \geq 0$$

где: $X = \{x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n\}$ - вектор искомого варианта решения (управления);

$G(X) = \{g_i(X), i = 1, 2, \dots, m\}$ - вектор функций-ограничений;

$B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ - вектор, определяющий уровень ограничений.

Будем считать, что $f_k(X)$ - вогнутые, а $g_i(X)$ - выпуклые функции относительно X так, что область допустимых решений S не является пустым множеством:

$$S = \{X \in R^n, X \geq 0, G(X) \{ \leq, =, \geq \} B\} \neq \emptyset \quad (2.4)$$

Очевидно, что вариант решения

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ представляет собой координаты n - мерного

вещественного вектора на множестве S .

Оптимальность по Парето — такое состояние системы, при котором значение каждого частного показателя, характеризующего систему, не может быть улучшено без ухудшения других.

Таким образом, по словам самого Парето «Всякое изменение, которое никому не приносит убытков, а некоторым людям приносит пользу (по их

собственной оценке), является улучшением». Значит, признаётся право на все изменения, которые не приносят никому дополнительного вреда.

Определение В векторной задаче математического программирования точка $X^0 \in S$ оптимальна по Парето, если она допустима и не существует другой точки X' , для которой $f_k(X') \geq f_k(X^0)$, $\forall k$ и хотя бы для одного критерия выполнялось строгое неравенство.

Множество состояний системы, оптимальных по Парето, называют «множеством Парето», «множеством альтернатив, оптимальных в смысле Парето», либо «множеством Парето-оптимальных альтернатив».

Множество точек, оптимальных по Парето, лежит между точками оптимума, полученных при решении ВЗМП отдельно по каждому критерию.

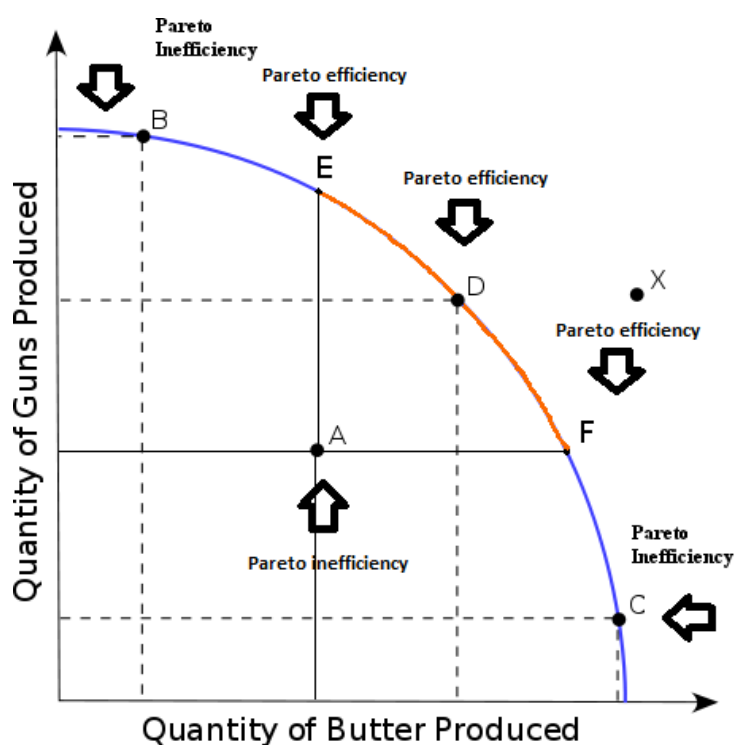


Рис. Пример кривой Парето. Два товара оружие и масло, оранжевый участок кривой эффективен по Парето (источник <http://ru.wikipedia.org>)

Метод главной компоненты

Заключается в том, что критерий качества связывается с одним из показателем, выбранных в роли основного (главного). На остальные показатели накладываются ограничения. В этом случае по главному показателю реализуется критерий оптимальности, по остальным - пригодности. Например, если имеется вектор полезного эффекта в виде

$$F_k = \langle F_1, F_2, \dots, F_k \rangle,$$

где F_i ($i=1, 2, \dots, k$) - компоненты вектора, например, для оборудования: производительность, экологичность, надежность, себестоимость и т.д., то метод главной компоненты заключается в произвольном выборе одного из компонентов в качестве главного, по которому производится оптимизация и выбирается решение. При этом остальные компоненты переводятся в разряд ограничений.

Этот метод прост, нагляден и часто применяется в машиностроительной практике, однако принципиальным его недостатком является произвол в выборе главного критерия. Можно привести много примеров из истории науки и техники, когда произвольный и неверный выбор этого критерия приводит к трагическим последствиям или, по меньшей мере, к малоэффективным результатам.

Метод последовательных уступок

Применяется для задач, критерии которых неравнозначны.

Прежде чем решать поставленную задачу по методу уступок, необходимо:

I. Расположить критерии по их значимости (наиболее важный считается первым);

II. Отыскать оптимальное значение F_1^* целевой функции F_1 ;

III. Сделать уступку по первому показателю эффективности, т.е. ухудшить величину F_1^* до значения $F_1^{**} = k_1 F_1^*$;

IV. Ввести в задачу дополнительное ограничение $F_1 \geq F_1^{**}$;

V. отыскать оптимальное значение F_2^* целевой функции F_2 ;

VI. Сделать уступку по второму показателю эффективности, т.е. ухудшить величину F_2^* до значения $F_2^{**}=k_2 F_2^*$;

VII. Ввести в задачу дополнительное ограничение $F_2 \geq F_2^{**}$;

VIII. новую задачу с двумя дополнительными ограничениями решить по третьему показателю эффективности и т.д.;

IX. Процесс решения задачи заканчивается, когда решение будет получено по всем показателям. Окончательный план и будет наиболее рациональным - получено оптимальное значение наименее важного критерия при условии гарантированных значений предшествующих показателей эффективности.

Метод комплексного критерия

Заключается в переходе от комплексного критерия к скалярному путем образования суммарного показателя. Чаще всего этот показатель реализуется в виде дроби, где в числителе стоят величины, которые необходимо максимизировать, а в знаменателе – те, которые надо сделать минимальными.

Например, (привлекательность)=(производительность)/(стоимость).

Целевые функции образуют единый показатель, в котором разным слагаемым приписаны разные веса, пронормированные на 1.

$$W = \sum \lambda_i \cdot F_i, \quad \sum \lambda_i = 1$$

где λ_i – коэффициент значимости i -го показателя качества.

Обычно λ_i определяются с помощью метода экспертных оценок или на основании хорошо апробированных статистических данных.

Этой моделью пользуются в задачах, в которых критерии имеют одну и ту же единицу измерения (как правило, стоимостную). Если критерии F_i не выражаются в одних и тех же единицах измерения, то их приводят к безразмерному виду.

Метод сведения к лямбда задаче

Шаг 1. Решить k задач (по общему числу критериев) скалярной оптимизации (известными методами математического программирования):

$$\begin{cases} \max f_k(X), \forall k \in P \cup Q \\ G(X) \{ \leq, =, \geq \} B \\ X \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \min f_k(X), \forall k \in P \cup Q \\ G(X) \{ \leq, =, \geq \} B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

и найти $f_k^{\max}$ и $f_k^{\min}$, $\forall k \in P \cup Q$.

Шаг 2. Выполнить единую нормализацию критериев $\forall k \in P \cup Q$:

$$\lambda_k(X) = \frac{f_k(X) - f_k^{\min}}{f_k^{\max} - f_k^{\min}} \quad \text{или} \quad \bar{\lambda}_k(X) = \frac{f_k^{\max} - f_k(X)}{f_k^{\max} - f_k^{\min}} \quad (2.7)$$

Шаг 3. Построить λ - или $\bar{\lambda}$ - задачу:

$$\begin{cases} \max \lambda \\ \lambda - \lambda_k(\bar{X}) \leq 0, \forall k \in P \\ \lambda - \bar{\lambda}_k(\bar{X}) \leq 0, \forall k \in Q \\ G(X) \{ \leq, =, \geq \} B \\ X \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \min \bar{\lambda} \\ \bar{\lambda} - \bar{\lambda}_k(\bar{X}) \geq 0, \forall k \in P \\ \bar{\lambda} - \lambda_k(\bar{X}) \geq 0, \forall k \in Q \\ G(X) \{ \leq, =, \geq \} B \\ X \geq 0 \end{cases}.$$

Шаг 4. Решить λ - или $\bar{\lambda}$ - задачу как скалярную задачу оптимизации

и найти единственную точку X_{eq}^0 , оптимальную по Парето, в которой гарантируем результат:

$$\begin{cases} \lambda(X_{eq}^0) \leq \lambda_k(X_{eq}^0) \\ \lambda(X_{eq}^0) \leq \bar{\lambda}_k(X_{eq}^0) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \bar{\lambda}(X_{eq}^0) \geq \bar{\lambda}_k(X_{eq}^0) \\ \bar{\lambda}(X_{eq}^0) \geq \lambda_k(X_{eq}^0) \end{cases}.$$

7. 2 Методические указания к выполнению работы. Пример

Формализованная постановка задачи

$$F_1 = x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$F_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$F_1 = -x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 8$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 7$$

$$x_i \geq 0$$

1) Каждую промежуточную задачу (ЗЛП) решаем через Поиск решения на отдельном листе Excel

Рисунок 1															
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
3															
4			1. Метод: Лябда задача (Лист 1)												
5															
6	текущие	x1	x2	x3	x4										
7		0	2,02649	3,01325	1,98675										
8															
9	коэффициенты целевых функций						Значение целевой функции для текущих X								
10	f1	1	-4	3	1	"=	2,92053								
11	f2	1	1	1	1	"=	7,02649								
12	f3	-1	5	4	-3	"=	16,2252								
13	ограничения														
14		1	3	-2	4	8	"=	8							
15		1	2	-1	3	7	"=	7							
16															
17	Шаг 1														
18		Решение по каждому критерию в отдельности (max значение в допустимой области)													
19	x*	0	0	2	3										
20	f1' =	9													
21	x*	0	6	5	0										
22	f2' =	11													
23	x*	0	6	5	0										
24	f3' =	50													
25	Шаг 2						Нормализация критериев								
26							L1=f1/f1* L2=f2/f2* L3=f3/f3*								
27	Шаг 3														
28			целевая ячейка:	max L	0,3245	0,3245	0,63877	0,3245							
29	Дополнительные ограничения			L-L1<=0	2,1E-09										
30				L-L2<=0	-0,3143										
31				L-L3<=0	-3E-10										
32		Решение лябда задачи													
33	x*	0	2,02649	3,01325	1,98675	f1' =	2,92				32,4% от максимума				
34						f2' =	7,03				63,9% от максимума				
35						f3' =	16,23				32,4% от максимума				
36															

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
38			2. Метод главной компоненты (Лист 2)											
39														
40	f1-> max		f1 - главный критерий, для остальных установим ограничения не ниже заданных (с учетом max значения)											
41	Дополнительные ограничения													
42	f2 >=	7				уменьшим ~ на 15% от f2 max								
43	f3 >=	20				уменьшим ~ на 15% от f3 max								
44														
45		Решение главной компоненты												
46	x*	0,00	2,47	3,24	1,76	f1' =	1,59							
47						f2' =	7,47							
48						f3' =	20,00							
49														
50			метод последовательных уступок (Лист 3)											
51														
52	шаг 1													
53	f1->max													
54	решение шага 1	0	0	2	3	f1' =	9							
55														
56	шаг 2													
57	f2->max													
58	Дополнительные ограничения													
59	f1>=	7												
60	решение шага 2	0	0,666667	2,333333	2,666667	f1' =	7,00							
61						f2' =	5,67							
62						f3' =	4,67							
63	шаг 3													
64	f3->max													
65	Дополнительные ограничения													
66	f1>=7	7												
67	f2>=5	5												
68	решение шага 3	0	0,666667	2,333333	2,666667	f1' =	7,00							
69						f2' =	5,67							
70						f3' =	4,67							
71														

72									
73									
74									
75									
76	alfa=	0,2	0,5	0,3	$F=\sum \alpha \cdot f \rightarrow \max$	$f \geq 0$			
77									
78	решение								
79	x^*	0	3	3,5	1,5	$f1^*=$	0,00		
80						$f2^*=$	8,00		
81						$f3^*=$	24,50		
82									

2) Сравниваем итоговые результаты, полученные по 4 методам и принимаем решения о выборе приемлемого варианта

82											
83											
84					$x1$	$x2$	$x3$	$x4$	$f1$	$f2$	$f3$
85	максимумы задачи по отдельным критериям								9	11	50
86	метод: Лябда задача				0,00	2,03	3,01	1,99	2,92	7,03	16,23
87	метод главной компоненты				0,00	2,47	3,24	1,76	1,59	7,47	20,00
88	метод последовательных уступок				0,00	0,67	2,33	2,67	7,00	5,67	4,67
89	метод комплексного критерия				0,00	2,03	3,01	1,99	0,00	8,00	24,50
90											
91											
92											
93											
94											

Лицо, принимающее решение (ЛПР) выбирает приемлемый вариант !!!

7.3 Варианты заданий

Предприятие может выпускать пять видов продукции И1, И2, И3, И4, И5. Для этого используется три вида ресурсов, расход которых на производство единицы продукции и их запасы приведены в таблице 1:

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	4	5	3	2	3	3000
B_2	2	4	4	4	2	4500
B_3	3	1	0	1	1	1500

Все изделия обрабатываются на станках четырех типов. Норма времени на обработку одного изделия и фонд времени работы станков приведены в таблице 2:

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	2	3	5	4	5	5000
фрезерные	1	2	6	3	2	4000
сверлильные	3	4	4	1	4	4000
шлифовальные	1	1	2	2	1	2000

Оптовая цена и себестоимость единицы продукции соответствующего типа приведены в таблице 3:

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	10	9	12	14	9
Себестоимость(ден.ед.)	7	8	9	12	6

Объем каждого вида продукции должен быть не менее 100 и не более 500 единиц. Мерой эффективности производственной программы являются следующие показатели:

1. Прибыль предприятия – f_1 ;
2. Валовой объем выпуска продукции в стоимостном выражении – f_2 ;

3. Себестоимость продукции – f_3 ;
4. Уровень загрузки оборудования – f_4 .

Требуется

1. Решить задачу методом главной компоненты, выбрав в качестве главной компоненты прибыль, а на остальные наложить разумные по смыслу задачи ограничения.
2. Решить задачу методом свертывания критериев, выбрав вектор весовых коэффициентов равным (0,4; 0,2; 0,3; 0,1).
3. Решить задачу методом последовательных уступок, если уступку по каждому критерию полагать равной 10% от его оптимального значения.
4. Решить задачу методом сведения к лямбда задаче.
5. Сравнить итоговые результаты, полученные по 4 методам и принять решения о выборе приемлемого (оптимального) варианта.

Исходные данные:

Вариант 1

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	2	9	6	2	5	3000
B_2	7	2	3	7	6	4500
B_3	3	6	5	6	9	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	1	5	1	1	2	5000
фрезерные	4	2	1	2	2	4000
сверлильные	4	4	4	3	5	4000
шлифовальные	1	5	4	2	3	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	13	8	7	12	9
Себестоимость(ден.ед.)	8	9	13	11	6

Вариант 2

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	3	8	5	5	5	3000
B_2	9	8	4	7	2	4500
B_3	5	5	8	3	5	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	1	3	1	2	1	5000
фрезерные	1	4	5	3	2	4000
сверлильные	5	3	3	5	5	4000
шлифовальные	5	5	5	5	1	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	11	6	12	8	9
Себестоимость(ден.ед.)	13	6	8	9	6

Вариант 3

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	9	2	3	3	6	3000
B_2	8	1	5	1	3	4500
B_3	6	3	3	1	9	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	4	4	3	3	2	5000
фрезерные	1	5	1	4	5	4000
сверлильные	4	1	5	1	3	4000
шлифовальные	2	3	2	2	2	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	10	13	10	11	9
Себестоимость(ден.ед.)	9	7	9	8	6

Вариант 4

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	5	2	5	4	7	3000
B_2	5	6	1	6	9	4500
B_3	4	7	4	8	7	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	4	2	3	1	5	5000
фрезерные	5	3	4	5	2	4000
сверлильные	2	4	2	2	3	4000
шлифовальные	2	3	3	1	5	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	11	8	12	14	9
Себестоимость(ден.ед.)	7	14	8	12	6

Вариант 5

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	6	4	1	4	7	3000
B_2	7	5	7	3	9	4500
B_3	5	2	5	3	7	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	5	5	5	2	5	5000
фрезерные	1	3	2	4	2	4000
сверлильные	4	5	2	3	4	4000
шлифовальные	4	5	5	4	5	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	14	7	9	11	9
Себестоимость(ден.ед.)	9	12	11	8	6

Вариант 6

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	1	5	8	7	7	3000
B_2	5	2	3	5	4	4500
B_3	7	9	8	2	3	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	3	5	5	2	2	5000
фрезерные	5	3	3	5	1	4000
сверлильные	4	4	5	1	5	4000
шлифовальные	1	2	3	1	4	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	10	13	14	10	9
Себестоимость(ден.ед.)	7	14	13	9	6

Вариант 7

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	9	3	9	6	6	3000
B_2	9	8	7	7	3	4500
B_3	6	8	1	5	3	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	1	1	5	3	2	5000
фрезерные	2	2	4	5	5	4000
сверлильные	2	5	1	5	5	4000
шлифовальные	1	1	3	2	1	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	8	6	11	10	9
Себестоимость(ден.ед.)	11	14	14	6	6

Вариант 8

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	4	4	2	2	7	3000
B_2	4	1	9	7	6	4500
B_3	6	4	4	8	7	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	4	1	1	4	2	5000
фрезерные	3	2	2	3	1	4000
сверлильные	4	3	4	4	4	4000
шлифовальные	1	4	4	2	1	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	8	9	11	14	9
Себестоимость(ден.ед.)	14	11	12	6	6

Вариант 9

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	9	4	4	7	4	3000
B_2	3	5	8	5	4	4500
B_3	3	6	3	6	6	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	1	4	4	1	1	5000
фрезерные	3	3	2	4	4	4000
сверлильные	5	2	4	1	2	4000
шлифовальные	3	5	4	4	1	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	12	7	6	9	7
Себестоимость(ден.ед.)	7	7	9	8	8

Вариант 10

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	8	5	2	9	2	3000
B_2	4	7	5	7	1	4500
B_3	9	6	9	1	2	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	5	5	5	5	1	5000
фрезерные	3	1	2	5	5	4000
сверлильные	2	3	3	2	3	4000
шлифовальные	5	4	1	2	4	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	12	9	12	8	11
Себестоимость(ден.ед.)	9	14	13	8	6

Вариант 11

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	9	9	6	5	8	3000
B_2	3	6	3	6	8	4500
B_3	5	6	4	9	6	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	1	3	4	1	3	5000
фрезерные	5	5	1	1	2	4000
сверлильные	4	4	1	5	3	4000
шлифовальные	4	5	3	3	3	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	11	6	11	9	9
Себестоимость(ден.ед.)	8	12	9	9	8

Вариант 12

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	2	5	7	4	5	3000
B_2	9	2	6	8	6	4500
B_3	7	1	3	6	4	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	5	4	4	5	4	5000
фрезерные	2	2	3	3	1	4000
сверлильные	5	5	1	5	2	4000
шлифовальные	4	2	2	4	4	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	8	7	12	11	8
Себестоимость(ден.ед.)	8	10	9	6	6

Вариант 13

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	9	5	1	7	5	3000
B_2	5	9	1	6	5	4500
B_3	9	7	9	5	4	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	3	5	4	1	1	5000
фрезерные	1	2	5	5	5	4000
сверлильные	2	2	4	3	2	4000
шлифовальные	3	5	5	2	1	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	12	6	13	8	10
Себестоимость(ден.ед.)	11	14	11	11	6

Вариант 14

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	3	4	3	1	8	3000
B_2	6	1	4	5	6	4500
B_3	7	5	6	3	6	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	4	4	4	3	1	5000
фрезерные	4	3	1	5	5	4000
сверлильные	2	4	2	3	5	4000
шлифовальные	4	5	3	5	3	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	14	9	9	10	10
Себестоимость(ден.ед.)	12	12	14	12	8

Вариант 15

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	4	4	1	3	1	3000
B_2	3	7	1	7	8	4500
B_3	2	2	8	1	4	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	1	3	3	5	4	5000
фрезерные	5	2	5	4	3	4000
сверлильные	1	2	1	2	4	4000
шлифовальные	1	3	4	3	4	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	6	12	13	8	9
Себестоимость(ден.ед.)	12	7	8	12	5

Вариант 16

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	8	1	4	1	1	3000
B_2	8	3	3	9	3	4500
B_3	3	6	2	4	6	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	2	3	1	5	4	5000
фрезерные	1	1	5	5	3	4000
сверлильные	5	2	3	1	3	4000
шлифовальные	5	2	1	4	1	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	13	14	8	11	11
Себестоимость(ден.ед.)	11	9	8	9	7

Вариант 17

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	5	2	8	5	2	3000
B_2	2	5	1	6	1	4500
B_3	7	9	3	8	5	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	5	5	3	4	5	5000
фрезерные	5	5	4	1	5	4000
сверлильные	3	1	3	3	5	4000
шлифовальные	1	4	5	4	2	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	11	8	14	7	11
Себестоимость(ден.ед.)	8	12	6	12	8

Вариант 18

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	5	8	6	4	4	3000
B_2	4	6	3	3	3	4500
B_3	2	8	2	8	6	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	2	1	5	1	2	5000
фрезерные	3	5	4	4	4	4000
сверлильные	1	5	1	5	2	4000
шлифовальные	3	2	1	3	2	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	8	12	8	8	7
Себестоимость(ден.ед.)	14	14	12	14	5

Вариант 19

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	4	6	4	8	6	3000
B_2	3	7	1	5	9	4500
B_3	4	8	5	9	4	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	4	4	5	3	5	5000
фрезерные	5	5	5	1	4	4000
сверлильные	4	2	3	2	3	4000
шлифовальные	1	5	3	1	5	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	10	6	7	9	8
Себестоимость(ден.ед.)	13	8	13	8	8

Вариант 20

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	9	3	1	6	8	3000
B_2	7	3	1	3	8	4500
B_3	1	1	4	6	3	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	3	5	1	3	3	5000
фрезерные	4	3	4	2	5	4000
сверлильные	2	1	4	3	2	4000
шлифовальные	5	5	1	3	1	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	12	14	12	7	9
Себестоимость(ден.ед.)	7	10	8	14	6

Вариант 21

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	5	8	8	3	8	3000
B_2	1	4	1	4	6	4500
B_3	5	9	4	1	7	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	1	3	5	2	4	5000
фрезерные	1	4	1	5	3	4000
сверлильные	5	1	1	1	5	4000
шлифовальные	3	3	5	4	4	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	12	6	8	9	7
Себестоимость(ден.ед.)	14	8	6	9	5

Вариант 22

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	8	6	5	5	3	3000
B_2	9	6	8	7	4	4500
B_3	6	6	8	5	9	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	4	4	1	2	1	5000
фрезерные	2	5	5	2	1	4000
сверлильные	5	2	3	2	5	4000
шлифовальные	3	1	1	3	2	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	11	10	13	9	10
Себестоимость(ден.ед.)	14	10	7	8	7

Вариант 23

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	8	8	6	6	1	3000
B_2	3	3	4	5	6	4500
B_3	9	3	6	9	9	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	1	5	2	2	5	5000
фрезерные	2	2	1	1	5	4000
сверлильные	5	4	4	4	3	4000
шлифовальные	4	3	4	3	2	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	10	12	12	7	10
Себестоимость(ден.ед.)	8	13	8	7	5

Вариант 24

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	3	5	1	8	1	3000
B_2	7	5	3	2	8	4500
B_3	8	1	6	4	2	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	1	5	3	2	1	5000
фрезерные	5	1	2	4	3	4000
сверлильные	4	1	1	2	4	4000
шлифовальные	2	1	2	5	5	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	7	12	11	10	11
Себестоимость(ден.ед.)	8	10	8	12	5

Вариант 25

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	7	7	3	9	6	3000
B_2	8	4	7	1	5	4500
B_3	6	8	4	3	1	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	4	5	5	5	5	5000
фрезерные	1	3	1	4	4	4000
сверлильные	2	5	4	2	3	4000
шлифовальные	4	5	2	5	4	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	13	7	8	8	10
Себестоимость(ден.ед.)	12	8	13	11	8

Вариант 26

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	2	2	2	8	5	3000
B_2	4	2	9	7	2	4500
B_3	6	7	9	3	6	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	5	5	1	2	1	5000
фрезерные	2	5	1	3	1	4000
сверлильные	5	1	5	5	1	4000
шлифовальные	5	2	3	1	2	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	7	12	8	11	8
Себестоимость(ден.ед.)	10	8	8	12	6

Вариант 27

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	9	7	9	2	3	3000
B_2	5	7	1	1	6	4500
B_3	9	3	6	5	3	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	5	1	5	5	2	5000
фрезерные	2	3	3	3	4	4000
сверлильные	2	1	3	4	2	4000
шлифовальные	4	5	4	2	3	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	9	7	6	7	10
Себестоимость(ден.ед.)	11	9	6	6	8

Вариант 28

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	1	5	3	8	9	3000
B_2	8	9	7	8	1	4500
B_3	9	7	8	1	1	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	3	1	1	3	2	5000
фрезерные	5	2	4	1	5	4000
сверлильные	5	4	1	3	3	4000
шлифовальные	4	5	3	1	2	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	7	10	8	7	11
Себестоимость(ден.ед.)	11	7	9	13	7

Вариант 29

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	1	9	6	6	4	3000
B_2	5	7	6	2	1	4500
B_3	9	8	8	6	2	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	1	2	4	1	4	5000
фрезерные	4	2	2	3	2	4000
сверлильные	4	1	5	5	1	4000
шлифовальные	3	1	3	3	4	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	7	12	7	11	10
Себестоимость(ден.ед.)	8	11	9	14	5

Вариант 30

Таблица 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	5	3	5	3	1	3000
B_2	6	7	6	7	1	4500
B_3	2	6	6	8	3	1500

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	4	4	3	3	3	5000
фрезерные	2	2	3	4	4	4000
сверлильные	2	1	1	3	3	4000
шлифовальные	1	2	5	5	5	2000

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	8	12	13	11	9
Себестоимость(ден.ед.)	10	12	10	13	6

7 Отчетность, оформление работы

По результатам выполнения расчетного задания студент подготавливает отчет, который должен содержать Текстовую часть и Приложение.

Текстовая часть включает:

- *выводы* о статистических свойствах изучаемой совокупности, сделанные на основе анализа таблиц и графиков, полученных в результате компьютерных расчетов;
- *экономическую интерпретацию* полученных статистических характеристик, раскрывающую их экономический смысл применительно к изучаемой совокупности предприятий.
- *выводы* о наличии статистической и корреляционной связи результативного и факторного признаков;
- *оценку* тесноты взаимосвязи признаков, сделанную на основе анализа показателей аналитической таблицы;
- *математическую модель* взаимосвязи исследуемых признаков в виде однофакторного *линейного* уравнения регрессии (построенного с помощью инструмента Регрессия надстройки Пакет анализа), а также *результаты анализа адекватности* этой модели;
- *математические модели* зависимости между исследуемыми признаками в виде однофакторных *нелинейных* уравнений регрессии (построенных с помощью инструмента Мастер диаграмм) и *обоснование выбора наиболее адекватной* из них.

Приложение к отчету должно включать:

- *таблицу исходных данных* и *результативные таблицы* с рассчитанными обобщающими показателями;
- *рисунки* статистических графиков.
- *графики* нелинейных уравнений регрессии.

Отчет сдается для проверки преподавателю, проводившему практические занятия. Защита проверенного отчета состоит в обосновании студентом выводов, сделанных им на основе результатов выполненных компьютерных статистических расчетов.

Государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Уфимский государственный нефтяной технический университет
Кафедра «Математика»

Расчетная работа № 1

по дисциплине «Математическое моделирование в задачах
нефтегазовой отрасли»

Тема «Производственные функции»

Вариант №3

Выполнил: студент группы МЭК-17-05

Иванова Д.В.

Проверил: д. ф.-м. н., профессор

Мухаметзянов И. З.

Уфа 2018