



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЯНОЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математики

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ
НЕФТЕГАЗОВОЙ ОТРАСЛИ**

Учебное пособие

Уфа – 2018

В учебном пособии приведены основные понятия и определения, и подходы к постановке и созданию математических моделей различных процессов, учете различных краевых и начальных условий. Теоретическое изложение материала преимущественно дано применительно к основным общетехническим дисциплинам по направлению «Нефтегазовое дело». Основное внимание уделено к моделированию механических систем.

Предлагаемое учебное пособие состоит из пяти глав введения и заключения, охватывающих основные направления математического моделирования

Данное учебное пособие предназначено для магистров, аспирантов, студентов очного, вечернего и заочного обучения по направлению «Нефтегазовое дело», а также других обучающихся для получения компетенций в области математического моделирования различных процессов.

Составители: Зарипов Р.М., докт.физ.-мат. наук, профессор каф.математики
Сулейманов И.Н., канд. техн. наук, доцент каф.математики
Хайбуллин Р.Я., канд. техн. наук, доцент каф.математики

Рецензенты: Кантемиров И.Ф., докт.техн. наук, профессор, зав. каф. СТ
Ахтямов А.М., докт.физ.-мат. наук, профессор каф.мат. мод.
БашГУ

©Уфимский государственный нефтяной технический университет, 2018

Оглавление

	Стр.
Введение.....	5
1 Основные аспекты создания математических моделей.....	7
1.1 Определения и понятия математической модели.....	7
1.2 Требования к математическим моделям.....	10
1.3 Классификация математических моделей.....	13
1.4 Иерархия математических моделей.....	16
1.5 Основные этапы построения математических моделей.....	20
1.6 Корректность постановки задач математического моделирования.....	24
2 Принципы построения математических моделей.....	26
2.1 Методы теории подобия.....	26
2.2 Анализ размерности.....	31
2.3 Законы сохранения и принципы составления дифференциальных уравнений.....	64
2.4 Метод аналогий.....	106
3 Одномерные математические модели.....	119
3.1 Механические математические модели.....	119
3.2 Модели электротехники.....	122
3.3 Модели сопротивления материалов.....	126
3.4 Модели гидравлики и гидромеханики.....	130
4 Вывод основных дифференциальных уравнения колебаний механических систем и тепловых процессов.....	134
4.1 Вывод дифференциального уравнения продольных колебаний стержня с распределенными по длине параметрами.....	134
4.2 Вывод дифференциальных уравнений поперечных колебаний балки.....	137
4.3 Вывод дифференциального уравнения поперечных колебаний струны.....	140
4.4 Вывод дифференциального уравнения крутильных колебаний валов.....	143
4.5 Вывод дифференциального уравнения нестационарного движения сжимаемой идеальной жидкости в длинном трубопроводе.....	145
4.6 Вывод дифференциального уравнения колебаний мембраны.....	149
4.7 Вывод дифференциального уравнения движения колонны бурильных труб.....	154
4.8 Вывод уравнения теплопроводности (одномерный случай).....	155
5 Многомерные математические модели.....	162
5.1 Механические модели деформации среды.....	162
5.2 Модели теории упругости в задачах сооружения нефтегазопроводов нефтебаз и нефтехранилищ.....	166

5.3	Математические модели движения несжимаемых жидкостей.....	195
5.4	Математические модели движения смеси жидкостей и газа.....	199
5.5	Математические модели тепловых процессов.....	204
	Заключение.....	204
	Список литературы.....	204

ВВЕДЕНИЕ

Нефтяное и газовое хозяйство является одной из важнейших отраслей народного хозяйства. Эта отрасль состоит из множества звеньев. Для того чтобы добыть нефть или газ и получить товарный продукт необходимо пройти множество стадий: разведка полезных ископаемых, разведочное бурение, обустройство месторождений, создание инфраструктуры, строительство и эксплуатация магистральных трубопроводов, хранение нефти газа и продуктов, проектирование и эксплуатация переработки нефти и газа, доставка продуктов к рынкам сбыта и др. Каждая стадия требует подготовки и решения множества технических задач. Решением этих задач занимаются проектные институты. Проектирование технических объектов осуществляется на основании разработанных методик и моделей процессов и целей поставленных для реализации поставленных задач.

К сожалению, цель, как правило, бывает сложна и отдалена по времени ее достижения. В этом случае приходится цели упрощать, а вместо реально существующего объекта рассматривать и анализировать модель, т.е. воображаемую систему отражающую некоторые свойства реальной технической или экономической системы. Проектирование по большей части имеет дело с анализом максимально простых, придуманных ситуаций процесса производства.

Основная причина работы с простыми моделями заключается в том, что реальная жизнь очень сложна, чтобы проанализировать ее во всех деталях и альтернативных вариантах. Работая с простыми моделями, которые относительно легко поддаются анализу, проектировщики стремятся раскрыть общие принципы, применимые к более сложным, реальным ситуациям.

Наиболее простым способом описания модели является описание через количественные соотношения, т.е. использование математического аппарата. Уточним понятие модели.

Например, в редакции академика В.С. Немчинова понятие математической модели дается следующим образом: "Модель - это своего рода абстракция, промежуточное звено между теоретическим абстрактным мышлением и объективной действительностью. Качество модели зависит от ее способности отражать и воспроизводить предметы и явления объективного мира, их структуру и закономерный порядок".

Отметим основные черты моделирования и математического подхода к проблемам проектирования технических систем.

1. Явление реального мира (объект) рассматривается путем взаимосвязи между внешними воздействиями и характеристиками состояния явления. Первые именуются "входами", вторые - "выходами" объекта. Часть входов предполагается управляемыми, часть неуправляемыми возмущениями.

Формальное описание связи между входами и выходами называется математической моделью объекта.

2. Предполагается, что управляющие воздействия могут выбираться из множества допустимых вариантов. Основной задачей математического подхода является указание способа выбора управлений, обеспечивающего выполнение заданных извне требований к состоянию объекта, т.е. к его выходам.

3. Возмущения не являются заранее известными. Может быть известен лишь диапазон их возможного изменения или, в крайнем случае, на основе наблюдений установлены вероятностные законы, которым они подчиняются. При выборе управлений необходимо считаться с неопределенностью возмущений, ориентируясь на наихудшее их сочетание (принцип гарантированного результата) либо усредняя по множеству возмущений с учетом вероятности их появления (принцип ожидаемого результата).

4. Управление есть процесс, развивающийся во времени. Управлять " означает принимать решения и контролировать их выполнение", так, что выбор управления есть последовательности решений и способов контроля.

Основные принципы формирования управления таковы:

а) Принцип программного управления. Если свойства объекта и внешние воздействия полностью известны, а цель управления достижима, то заранее рассчитываются закон изменения управления во времени, программа которой жестко реализуется. Т.е. решение принимается однократно, сразу на весь период выполнения поставленной цели.

б) Принцип управления по возмущению. Если возмущения неизвестны, но могут стать известными, т.е. быть измеренными к моменту принятия оперативного решения, то управление формируется как функция возмущений: если внешняя обстановка известным образом изменилась, то соответственно меняется решение.

в) Принцип обратной связи по состоянию. Если возможно измерение только состояния объекта управления, т.е. известно следствие, а не причина, то, получая информацию о состоянии, можно исправлять закон управления. Здесь управление оказывается зависящим от текущего состояния, а точнее - от полученной информации.

Как правило, на практике реализуются комбинации этих принципов. Для описания математических моделей используется все богатство математики и информационных методов.

1. ОСНОВНЫЕ АСПЕКТЫ СОЗДАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

1.1 Определения и понятия математической модели

Модель является представлением объекта в некоторой форме, отличной от формы ее реального существования [1]. Она служит средством, помогающим нам в объяснении, понимании или совершенствовании системы. Модель – это такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе изучения замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты.

Хорошо построенная модель, как правило, доступная для исследования, нежели реальный объект. Изучение хорошо построенной модели дают некоторые новые знания об объекте – оригинале. Также модель можно рассматривать в качестве:

- средства осмысления действительности;
- средства общения;
- средства обучения и тренажа;
- инструмента прогнозирования;
- средства постановки эксперимента.

Процесс построения модели называют моделированием. Существует несколько приемов моделирования, которые можно условно объединить в две большие группы по степени абстрагирования от оригинала. Это материальное (предметное) и идеальное (абстрактное) моделирование.

К материальным относятся такие способы моделирования, при которых исследование ведется на основе модели, воспроизводящей основные геометрические, физические, динамические и функциональные характеристики изучаемого объекта. Основными разновидностями материального моделирования являются геометрическое, физическое и аналоговое.

Геометрическая модель отображает пространственные и геометрические свойства объекта-оригинала (например, макеты архитектурных сооружений, картины, выставочные модели самолетов, автомобилей).

В природе, технике или производстве можно наблюдать в чем-то сходное явление. Если сходство установлено, например, в опыте и повторяется всякий раз при выполнении контрольных условий, то течение процесса в первой системе, можно изучать путем наблюдения сходных процессов во второй системе. Система 2 в этом случае служит моделью системы 1 и наоборот. Системой будем называть совокупность элементов, находящихся во взаимодействии.

Если системы 1 и 2 имеют одинаковую физическую природу, то моделирование называется физическим. Физическим принято называть моделирование, при котором реальному объекту противопоставляется его увеличенная или уменьшенная копия, допускающие исследования (как правило

в лабораторных условиях) с помощью последующего перенесения свойств изучаемых процессов и явлений с модели на объект на основе теории подобия.

Если система 1 и 2 имеют не одинаковую физическую природу, но сходное математическое описание, то говорят, что явления аналогичны, а их модели называют аналоговыми.

В материальном моделировании модели является материальным отражением исходного объекта и связаны с ним своими геометрическими, физическими и другими характеристиками, причем процесс исследования тесно связан с материальным воздействием на модель, то есть состоит в натурном эксперименте с ней. Таким образом, предметное моделирования является экспериментальным методом.

Идеальное моделирование основано не на материальной аналогии объекта и модели, а на аналогии идеальное, то есть мысленной.

Идеальное моделирование носит теоретический характер. Различают два типа идеального моделирования: интуитивное и знаковое.

Под интуитивным понимаем моделирование, основанное на интуитивном представлении об объекте исследования, неподдающимся формализации либо не нуждающимся в ней.

Знаковым называется моделирование, использующее в качестве модели знаковые преобразования какого-либо вида: схемы, графики, чертежи, формулы, наборы символом и т.д., а так же включающее совокупность знаков, по которым можно оперировать с выбранными знаковыми образованиями и их элементами. При этом различают следующие виды модели: мнемоническая, математическая, вычислительная и компьютерная.

Мнемоническая модель отображает свойства оригинала по средствам схемы, графа, чертежа, диаграммы, химической формулы и т.д.. (см. рис.1)

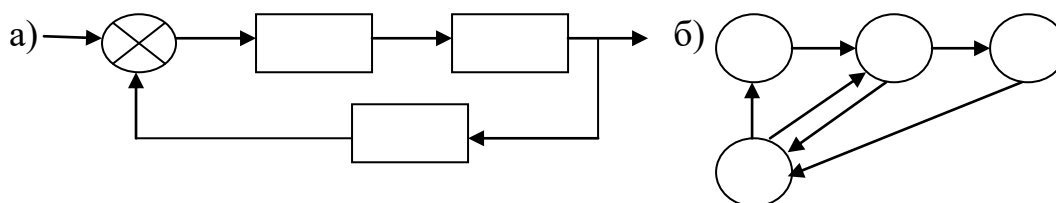


Рис 1.1 Мнемонические модели:
а) структурная схема; б) граф

Математическая модель отображает свойства объекта на языке математических и логических соотношений.

Вычислительная модель – программа, реализующая алгоритм (вычислительную схему) решения математической модели.

Компьютерная модель представляет собой электронный эквивалент исследуемого объекта. Это комплекс специальных программ и аппаратных средств (абстрактная и физическая составляющая).

Когда приходится иметь дело со сложными системами, в которых имеется множество целевых функций и не все ясно с количественным

выражением этих функций, то речь может идти не столько о решении оптимизационных задач, сколько об исследовании сложных систем, о прогнозировании их будущих состояний в зависимости от выбираемых стратегий управления. Метод исследований таких сложных систем получил название «имитационное моделирование».

Суть метода имитационного моделирования состоит в том, что процесс функционирования сложной системы представляется в виде определенного алгоритма, который и реализуется на ЭВМ. При имитационном моделировании учитываются взаимодействия элементов системы между собой и с внешней средой, последовательность и динамика процессов, протекающих в системе, характер входных воздействий, случайные факторы, влияющие на работу системы. В зависимости от поставленных перед исследователем вопросов вводится так называемое системное время моделирующее ход времени в реальной системе. Работа с имитационной системой представляет собой эксперимент, осуществляемый на ЭВМ. Во многом она подобна физическому эксперименту. В ходе эксперимента варьируются входные переменные, параметры модели совершенствуются её структура, принятые гипотезы о поведении отдельных частей системы.

Важнейшим видом знакового моделирования является математическое моделирование, при котором исследование объекта осуществляется посредством модели, сформулированного на языке математики с использованием тех или иных математических методов. Классическим примером математического моделирования является описание и исследование основных законов механики И. Ньютона средствами математики.

Создание и использование математических моделей преследует ряд целей

1. Интерпретация прошлого поведения объекта и обобщения знаний о нем на основе выявления основных причинно-следственных связей. Определение факторов оказывающих существенное влияние на свойства и характеристики изучаемого объекта.
2. Прогнозирование будущего поведения объекта.
3. Обновление и совершенствование ранее построенной модели на основе новой информации об оригинале.
4. Оптимизация параметров системы или её структуры.
5. Создание алгоритма оптимального управления системы с точки зрения заданного критерия.
6. Проектирование технического объекта, расчет режимов его функционирования, экспериментальные исследования (выбор структуры, параметров, алгоритмов управления, оценка их эффективности).

1.2. Требования к математическим моделям

Одни и те же ММ находят подчас совершенно различные приложения. Известно, например, что закон Ньютона притяжения двух материальных точек и закон взаимодействия двух точечных электрических зарядов при соответствующем выборе единиц измерения физических величин можно выразить одинаковыми формулами. При помощи одной и той же ММ, содержащей уравнение Пуассона

$$\nabla^2 u(M) = f(M), \quad (1.1)$$

где ∇^2 — дифференциальный оператор Лапласа, а $u(M), f(M)$ — искомая и заданная функции положения точки $M \in V$ некоторой области V , можно изучать установившиеся процессы течения жидкости и распространения теплоты, распределение электрического потенциала, деформацию мембраны, механические напряжения при кручении бруса, фильтрацию нефти в нефтеносном слое или влаги в почве, распространение какой-либо примеси в воздухе или эпидемии в регионе. В каждой из перечисленных задач функции $u(M), f(M)$ приобретают свой смысл, но их связь описывает общее для этих задач уравнение (1.1).

Приведенные примеры характеризуют свойство *универсальности ММ*. Благодаря этому свойству возникает „родство" между различными отраслями знаний, что ускоряет их совместное развитие. Такую общность и универсальность ММ можно объяснить тем, что в математике используют абстрактные основополагающие понятия, немногочисленные, но весьма емкие по содержанию. Это позволяет конкретные факты из самых различных областей знаний рассматривать как проявление этих понятий и отношений между ними. Совокупность таких понятий и отношений, выраженных при помощи системы математических символов и обозначений и отражающих некоторые свойства изучаемого объекта, и называют *математической моделью* этого объекта. В данном случае математика выступает, по существу, в роли универсального языка науки. Его универсальность французский математик Анри Пуанкаре (1854-1912) определил всего одной фразой: „Математика — это искусство называть разные вещи одним и тем же именем".

Из сказанного ранее следует, что при изучении реально существующего или мыслимого *технического объекта* (ТО) математические методы применяют к его *математической модели* (ММ). Это применение будет эффективным, если свойства ММ удовлетворяют определенным требованиям. Рассмотрим основные из этих свойств.

Полнота ММ позволяет отразить в достаточной мере именно те характеристики и особенности ТО, которые интересуют нас с точки зрения поставленной цели проведения *вычислительного эксперимента*. Например, модель может достаточно полно описывать протекающие в объекте процессы, но не отражать его габаритные, массовые или стоимостные показатели. Так, ММ резистора в виде хорошо известной формулы $U = IR$ закона Ома обладает свойством полноты лишь с точки зрения установления связи между падением электрического напряжения U на резисторе, его *сопротивлением* R и протекающим через него током силой I , но не дает никакой информации о размерах, массе, теплостойкости, стоимости и других характеристиках резистора, по отношению к которым она не является полной. Отметим попутно, что в рассматриваемой ММ сопротивление R резистора выступает в роли его *внутреннего параметра*, тогда как если задано U , то I будет *выходным параметром*, а U — *внешним параметром*, и наоборот.

Точность ММ дает возможность обеспечить приемлемое совпадение реальных и найденных при помощи ММ значений выходных параметров ТО, составляющих вектор

$$y = (y_1, y_2 \text{ K } y_n)^T \in R^n$$

Пусть y_i^M, y_i^P — найденное при помощи ММ и реальное значения i -го выходного параметра. Тогда относительная погрешность ММ по отношению к этому параметру будет равна

$$\varepsilon_i = \frac{y_i^M - y_i^P}{y_i^P}, \quad i = \overline{1, n}$$

В качестве скалярной оценки вектора

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2 \text{ K } \varepsilon_n)^T \in R^n$$

можно принять какую-либо его норму, например

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \max_{i=1, \text{ K } n} |\varepsilon_i|$$

Поскольку выходные параметры ТО при помощи ММ связаны с его внешними и внутренними параметрами, то е, как количественная характеристика точности модели этого ТО, будет зависеть от координат векторов x и g .

Адекватность ММ— это способность ММ описывать выходные параметры ТО с относительной погрешностью не более некоторого заданного значения δ . Пусть при некоторых ожидаемых номинальных значениях внешних параметров ТО, составляющих вектор $x_{ном}$, из условия минимума ε путей решения задачи конечномерной оптимизации найдены значения внутренних параметров, составляющие вектор $g_{ном}$ и обеспечивающие минимальное значение ε_{min} относительной погрешности ММ. Тогда при фиксированном векторе $g_{ном}$ можно построить множество

$$X = \{x \in R^k : \varepsilon \leq \delta\} \subset R^k$$

называемое *областью адекватности* данной ММ. Ясно, что $x = \emptyset$ при $\delta < \varepsilon_{min}$, а чем больше заданное значение $\delta > \varepsilon_{min}$, тем шире область адекватности ММ, т.е. эта ММ применима в более широком диапазоне возможного изменения внешних параметров ТО.

В более общем смысле под адекватностью ММ понимают правильное качественное и достаточно точное количественное описание именно тех характеристик ТО, которые важны в данном конкретном случае. Модель, адекватная при выборе одних характеристик, может быть неадекватной при выборе других характеристик того же ТО. В ряде прикладных областей, еще недостаточно подготовленных к применению количественных математических методов, ММ имеют главным образом качественный характер. Эта ситуация типична, например, для биологической и социальной сфер, в которых количественные закономерности не всегда поддаются строгой математической формализации. В таких случаях под адекватностью ММ естественно понимать лишь правильное качественное описание поведения изучаемых объектов или их систем.

Экономичность ММ оценивают затратами на вычислительные ресурсы (машинное время и память), необходимые для реализации ММ на ЭВМ. Эти затраты зависят от числа арифметических операций при использовании модели, от размерности пространства фазовых переменных, от особенностей применяемой ЭВМ и других факторов. Очевидно, что требования экономичности, высокой точности и достаточно широкой области адекватности ММ противоречивы и на практике могут быть удовлетворены лишь на основе разумного компромисса. Свойство экономичности ММ часто связывают с ее простотой. Более того, количественный анализ некоторых упрощенных вариантов ММ может быть осуществлен и без привлечения современной вычислительной техники. Однако его результаты могут иметь лишь ограниченную ценность на стадии отладки алгоритма или ЭВМ-программы (см. 1.2 и рис. 1.1), если упрощение ММ не согласовано с *расчетной схемой* ТО.

Робастность ММ (от английского слова robust — крепкий, устойчивый) характеризует ее устойчивость по отношению к погрешностям исходных данных, способность нивелировать эти погрешности и не допускать их чрезмерного влияния на результат вычислительного эксперимента. Причинами низкой робастности ММ могут быть необходимость при ее количественном анализе вычитания близких друг к другу приближенных значений величин или деления на малую по модулю величину, а также использование в ММ функций, быстро изменяющихся в промежутке, где значение аргумента известно с невысокой точностью. Иногда стремление увеличить полноту ММ приводит к снижению ее робастности вследствие введения дополнительных параметров, известных с невысокой точностью или входящих в слишком приближенные соотношения.

Продуктивность ММ связана с возможностью располагать достаточно достоверными исходными данными. Если они являются результатом измерений, то точность их измерения должна быть выше, чем для тех параметров, которые получаются при использовании ММ. В противном случае ММ будет непродуктивной и ее применение для анализа конкретного ТО теряет смысл. Ее можно будет использовать лишь для оценки характеристик некоторого класса ТО с гипотетическими исходными данными.

Наглядность ММ является ее желательным, но необязательным свойством. Тем не менее использование ММ и ее модификация упрощаются, если ее составляющие (например, отдельные члены уравнений) имеют ясный содержательный смысл. Это обычно позволяет ориентировочно предвидеть результаты вычислительного эксперимента и облегчает контроль их правильности.

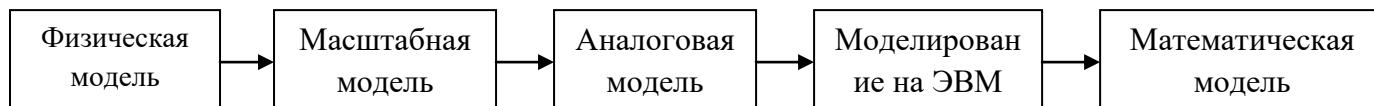
В дальнейшем на конкретных примерах будут проиллюстрированы отмеченные выше свойства ММ (см. 3 и 6).

1.3.Классификация математических моделей

Модели можно классифицировать разными способами, каждая из которых служит определенной целью. Например, могут быть использованы следующий классификации модели на :

- статические и динамические;
- дискретные и непрерывные;
- физические, аналоговые, символические;
- детерминированные и стохастические.

Удобнее представлять классификацию модели в виде непрерывного спектра, простирающегося от точных моделей до абстрактных математических. Так, например,



Математические модели можно квалифицировать по форме их представления (рис.1.2.)



Рис.1.2. Классификация моделей по форме представления

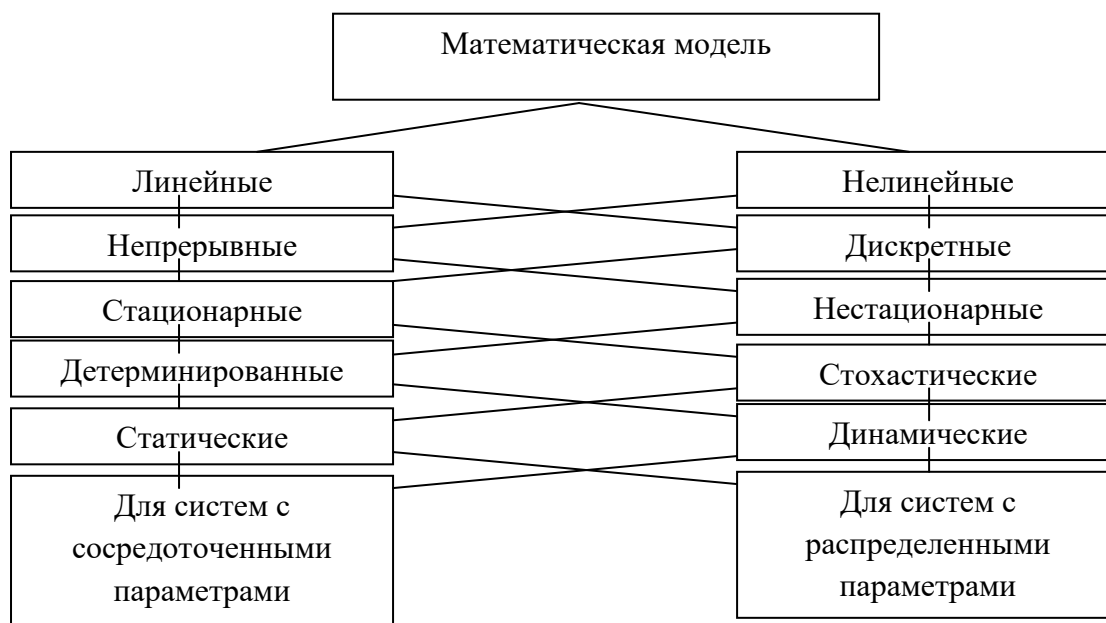


Рис. 1.3. Классификация по характеру модели.

На рис.1.3 произведена квалификация за основу которой принят характер модели.

В зависимости от способа получения модели делятся на теоретические и эмпирические (формальные).

Теоретические модели получают на основе изучения свойств исследуемого объекта и процессов, происходящих в нем. Теоретическая модель описывает физические закономерности, наблюдаемые на объекте-оригинале.

В основу таких моделей могут быть положены:

- 1.Фундаментальные законы природы- законы сохранения массы, энергии, импульса, момента импульса, электрического заряда и т.д.
- 2.Феноменологические законы (описанные, выведенные на основе наблюдений, опытов, не разъясняющие физической сущности явлений, имеющих ограниченную область действия). К ним относятся законы Ома, Ампера, законы Ньютона (при скоростях движения тел много меньше скорости света), закон Гука, выражающий связь между силы упругости и упругой деформации тела (при малых деформациях), закон теплопроводности Фурье, связывающий градиент температуры в среде с плотностью теплового потока (для изотропных сред) и т.д.

Структура и параметры теоретических моделей имеет определенное физическое толкование.

Эмпирические модели применяются в следующих случаях.

- 1.Когда отсутствует информация о физических свойствах изучаемого объекта и о механизме протекающих в нем процессах.
- 2.Когда исследуемый технический объект настолько сложен что не представляется возможным математически адекватно описать сущность его внутренних процессов.

Эмпирические модели получают экспериментальным путем. Моделируемый объект рассматривается как черный ящик. Для измерения доступны только его входные сигналы (управляющее воздействия) и выходные сигналы (отклики или реакции). Абстрагируясь от внутреннего устройства и физической сущности объекта, изучают его реакции на различные внешние воздействия.

Различают активный эксперимент над объектом, когда на его вход подается специально сформированные воздействия – тестовые сигналы, и пассивный эксперимент – регистрация входных и выходных сигналов объекта в режиме нормальной эксплуатации. Обработка результатов измерений входных и выходных сигналов объектов позволяет выявить связь между ними и определить математическую модель, адекватно описывающую эту связь. Однако построенная эмпирическая модель может считаться адекватной только в ограниченной области – в пределах заданного диапазона значений управляющих воздействий.

Формирование математической модели объекта на основе наблюдений его входных и выходных сигналов называется идентификацией. Решить задачу идентификации – значит определить структуру и параметры модели, обеспечивающие наилучшую с точки зрения заданного критерия близость выходных функций модели и объекта при совпадающих входных воздействиях.

1.4. Иерархия математических моделей

При математическом моделировании достаточно сложного *технического объекта* (ТО) описать его поведение одной *математической моделью* (ММ), как правило, не удастся, а если такая ММ и была бы построена, то она оказалась бы слишком сложной для количественного анализа. Поэтому к таким ТО обычно применяют *принцип декомпозиции*. Он состоит в условном разбиении ТО на отдельные более простые блоки и элементы, допускающие их независимое исследование с последующим учетом взаимного влияния блоков и элементов друг на друга. В свою очередь, принцип декомпозиции можно применить и к каждому выделенному блоку вплоть до уровня достаточно простых элементов. В таком случае возникает *иерархия ММ* связанных между собой блоков и элементов.

Иерархические уровни выделяют и для отдельных типов ММ. Например, среди *структурных математических моделей* ТО к более высокому уровню иерархии относят *топологические математические модели*, а к более низкому уровню, характеризующемуся большей детализацией ТО, — *геометрические математические модели*.

Среди *функциональных математических моделей* иерархические уровни отражают степень детализации описания процессов, протекающих в ТО, его блоках или элементах. С этой точки зрения обычно выделяют три основных уровня: микро-, макро- и метаяровень.

Математические модели микроуровня описывают процессы в системах с распределенными параметрами (в *континуальных системах*), а *математические модели макроуровня* — в системах с сосредоточенными параметрами (в *дискретных системах*). В первых из них *фазовые переменные* могут зависеть как от времени, так и от пространственных координат, а во вторых — только от времени.

Если в ММ макроуровня число фазовых переменных имеет порядок 10^4 - 10^5 , то количественный анализ такой ММ становится громоздким и требует значительных затрат вычислительных ресурсов. Кроме того, при столь большом числе фазовых переменных трудно выделить существенные характеристики ТО и особенности его поведения. В таком случае путем объединения и укрупнения элементов сложного ТО стремятся уменьшить

число фазовых переменных за счет исключения из рассмотрения *внутренних параметров* элементов, ограничиваясь лишь описанием взаимных связей между укрупненными элементами. Такой подход характерен для *математических моделей метауровня*.

ММ метауровня обычно относят к высшему уровню иерархии, ММ макроуровня — к среднему, а ММ микроуровня — к низшему. Наиболее распространенной формой представления *динамической (эволюционной) математической модели* микроуровня является формулировка краевой задачи для дифференциальных уравнений математической физики. Такая формулировка включает дифференциальные уравнения с частными производными и краевые условия. В свою очередь, краевые условия содержат начальные условия — распределения искомых фазовых переменных в некоторый момент времени, принимаемый за начальный, в пространственной области, конфигурация которой соответствует рассматриваемому ТО или его элементу, — и граничные условия на границах этой области. При представлении ММ целесообразно использовать безразмерные переменные (независимые и искомые) и коэффициенты уравнений, сократив число параметров, характеризующих рассматриваемый ТО.

ММ микроуровня называют *одномерной, двумерной или трехмерной*, если искомые фазовые переменные зависят от одной, двух или трех пространственных координат соответственно. Два последних типа ММ объединяют в *многомерные математические модели микроуровня*. Одномерная ММ микроуровня, фазовые переменные в которой не зависят от времени, имеет представление в виде системы ОДУ с заданными граничными условиями (в простейшем случае одного фазового переменного такая ММ включает лишь одно ОДУ и граничные условия).

Поскольку краевой задаче, содержащей дифференциальные уравнения с частными производными и краевые условия, можно поставить в соответствие интегральную формулировку, то и ММ микроуровня также может быть представлена в интегральной форме. При определенных условиях интегральную форму краевой задачи удастся привести к вариационной формулировке в виде функционала, который допустимо рассматривать на некотором множестве функций, содержащем искомую функцию. В этом случае говорят о *вариационной форме модели* микроуровня. Искомая функция обращает в нуль вариацию функционала, т.е. является его *стационарной точкой*.

Построение функционала и соответствующей ему вариационной формы модели микроуровня обычно основано на некотором содержательном с физической точки зрения вариационном принципе механики или электродинамики сплошной среды (например, на принципе

минимума потенциальной энергии континуальной системы в положении равновесия или на принципе минимума времени прохождения светового луча между двумя точками оптически неоднородной среды). В этом случае стационарная точка функционала соответствует его экстремальному (в частности, минимальному) значению на допустимом множестве функций. Такая форма модели микроуровня, называемая *экстремальной вариационной*, позволяет, сравнивая значения функционала на любых двух функциях из допустимого множества, оценивать в интегральном смысле близость этих функций к искомой. Это свойство экстремальной вариационной формы модели важно при качественном анализе ММ и при сравнении различных приближенных решений соответствующей краевой задачи.

При выполнении некоторых ограничений можно построить *двойственную вариационную форму модели* микроуровня, включающую пару функционалов, достигающих в одной и той же стационарной точке равных между собой альтернативных экстремальных значений (минимума и максимума). Такая форма ММ дает возможность по разности значений этих Функционалов, вычисленных на некоторой функции из допустимого множества, количественно оценить погрешность, возникающую при выборе этой функции в качестве искомой.

Основной формой динамической (эволюционной) ММ макроуровня являются ОДУ или их системы вместе с заданными начальными условиями. Независимым переменным в таких ММ будет время, а искомыми — фазовые переменные, характеризующие состояние ТО (например, перемещения, скорости и ускорения элементов механических устройств, а также приложенные к этим элементам силы и моменты; давление и расход жидкости или газа в трубопроводе; напряжения и силы тока в электрических цепях и т.п.). В некоторых случаях ММ макроуровня удастся представить в интегральной форме, используя *принцип Гамильтона — Остроградского* или экстремальный вариационный *принцип Гамильтона*.

Если эволюцию ТО определяет его состояние не только в текущий момент времени t , но и в некоторый предшествующий момент $t - \tau$, то ММ макроуровня включает ОДУ вида

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t - \tau))$$

или

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t - \tau), u'(t - \tau))$$

относительно искомой функции $u(t)$. Такие ОДУ называют уравнениями запаздывающего и нейтрального типа соответственно и относят к *дифференциально-функциональным уравнениям* (ДФУ) (или

дифференциальным уравнениям с отклоняющимся аргументом). Наиболее широко ДФУ и их системы представлены в ММ систем автоматического управления и регулирования. Кроме того, ДФУ находят применение в моделях биологических и экономических процессов.

Запаздывающая реакция ТО на изменение своего состояния может определяться более чем одним интервалом времени t . Тогда ДФУ будет включать не одно, а несколько дискретных запаздываний. В более общем случае запаздывание может быть непрерывным во времени, что приводит, например, для *линейной математической модели к интегро - дифференциальному уравнению* (ИДУ) вида

$$u'(t) = \int_{t_0}^t K(t, \tau) u(\tau) d\tau + f(t), \quad t \geq t_0$$

Заданную функцию $K(t, \tau)$ называют ядром этого ИДУ, а о рассматриваемом ТО говорят, что он обладает памятью, поскольку его эволюция зависит от всей предыстории изменения состояний ТО.

В *статическую математическую модель* макроуровня не входит время. Поэтому она включает лишь конечное (в общем случае нелинейное) уравнение или систему таких уравнений (в частности, систему линейных алгебраических уравнений — СЛАУ). Такой же вид имеют *квазистатическая, стационарная и квазистационарная математические модели* макроуровня.

Если для рассматриваемого ТО удастся выделить поддающееся количественной характеристике некоторое важное свойство или сочетание таких свойств (надежность, долговечность, массу, стоимость, какой-либо из определяющих качество ТО *выходных параметров*) и установить их связь с фазовыми переменными при помощи действительной функции, то можно говорить об оптимизации ТО по критерию, выражаемому этой функцией. Ее называют целевой функцией, поскольку ее значения характеризуют меру (или степень) достижения определенной цели совершенствования ТО в соответствии с выбранным критерием.

Вследствие ограниченности располагаемых ресурсов в реальной ситуации имеют смысл лишь те экстремальные значения целевой функции, которые достигаются в области возможного изменения фазовых переменных ТО, обычно ограниченной системой неравенств. Эти неравенства вместе с целевой функцией и статической ММ ТО в виде конечного нелинейного Уравнения или систем таких уравнений входят в математическую формулировку задачи оптимизации ТО по выбранному критерию, называемой (в общем случае) задачей нелинейного

программирования . В частном случае *линейной математической модели* ТО в виде СЛАУ, линейных целевой функции и неравенств говорят о задаче линейного программирования. К таким задачам обычно приходят при рассмотрении проблем технико-экономического содержания. Задачу оптимизации ТО, описываемого динамической (эволюционной) ММ макроуровня, относят к классу задач оптимального управления.

Для ММ метауровня характерны те же типы уравнений, что и для ММ макроуровня, но эти уравнения включают фазовые переменные, описывающие состояние укрупненных элементов сложных ТО. Если определен закон непрерывного перехода ТО из одного состояния в другое, то для анализа ММ метауровня часто используют аппарат передаточных функций, а при рассмотрении состояний ТО в дискретные моменты времени ОДУ и их системы переходят в разностные уравнения относительно значений фазовых переменных в эти моменты времени. В случае дискретного множества состояний ТО применяют также аппарат математической логики и *конечных автоматов*.

1.5.Основные этапы построения математических моделей

Для обсуждения и обоснования основных подходов к разработке проблем *математического моделирования* технических устройств и процессов в них представляется целесообразным предварительно рассмотреть условную схему (рис. 1.1), определяющую последовательность проведения отдельных этапов общей процедуры *вычислительного эксперимента*. Исходной позицией этой схемы служит *технический объект* (ТО), под которым будем понимать конкретное техническое устройство, его агрегат или узел, систему устройств, процесс, явление или отдельную ситуацию в какой-либо системе или устройстве.

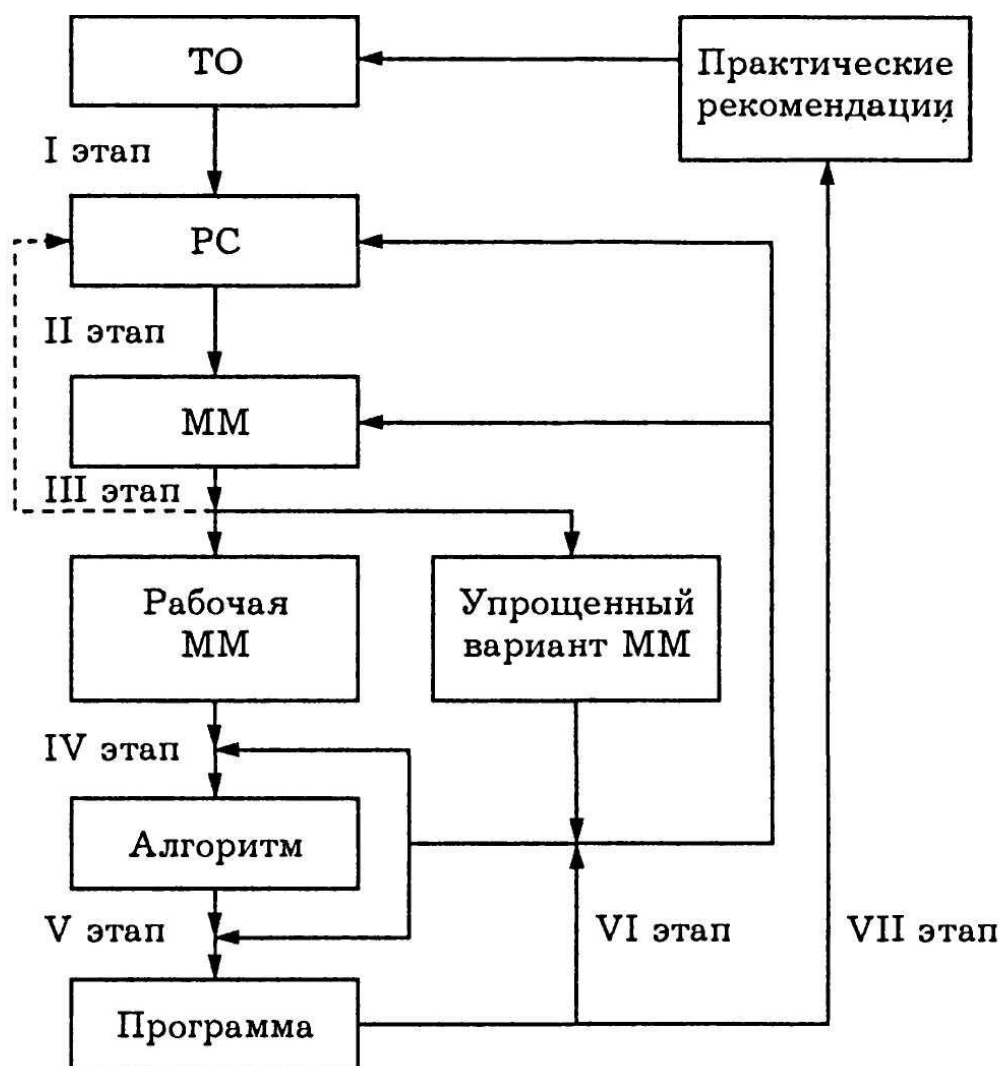


Рис. 1.4

На первом этапе осуществляют неформальный переход от рассматриваемого (разрабатываемого или существующего) ТО к его *расчетной схеме* (РС). При этом в зависимости от направленности вычислительного эксперимента и его конечной цели акцентируют те свойства, условия работы и особенности ТО, которые вместе с характеризующими их параметрами должны найти отражение в РС, и, наоборот, аргументируют допущения и упрощения, позволяющие не учитывать в РС те качества ТО, влияние которых предполагают в рассматриваемом случае несущественным. Иногда вместо РС используют термин *содержательная модель* ТО, а в некоторых случаях — *концептуальная модель*. В сложившихся инженерных дисциплинах (например, в сопротивлении материалов, электротехнике и электронике) помимо описательной (вербальной) информации для характеристики РС разработаны специальные приемы и символы наглядного графического изображения. По ряду новых направлений развития техники подобная символика находится в стадии формирования.

При разработке новых ТО успешное проведение первого этапа в значительной мере зависит от профессионального уровня инженера, его творческого потенциала и интуиции. Полнота и правильность учета в РС свойств ТО, существенных с точки зрения поставленной цели исследования, являются основной предпосылкой получения в дальнейшем достоверных результатов математического моделирования. И наоборот, сильная идеализация ТО ради получения простой РС может обесценить все последующие этапы исследования.

Содержание второго этапа состоит, по существу, в формальном, математическом описании РС. Это описание в виде математических соотношений, устанавливающих связь между параметрами, характеризующими РС ТО, и называют *математической моделью* (ММ).

Надо сказать, что для некоторых типовых РС существуют банки ММ, что упрощает проведение второго этапа. Более того, одна и та же ММ может соответствовать РС из различных предметных областей. Однако при разработке новых ТО часто не удается ограничиться применением типовых РС и отвечающих им уже построенных ММ. Создание новых ММ или модификация существующих должны опираться на достаточно глубокую математическую подготовку и владение математикой как универсальным языком науки.

На третьем этапе проводят качественный и оценочный количественный анализ построенной ММ. При этом могут быть выявлены противоречия, ликвидация которых потребует уточнения или пересмотра РС (штриховая линия на рис. 1.4). Количественные оценки могут дать основания упростить модель, исключив из рассмотрения некоторые параметры, соотношения или их отдельные составляющие, несмотря на то что влияние описываемых ими факторов учтено в РС. В большинстве случаев, принимая дополнительные по отношению к РС допущения, полезно построить такой упрощенный вариант ММ, который позволял бы получить или привлечь известное точное решение. Это решение затем можно использовать для сравнения при тестировании результатов на последующих этапах. В некоторых случаях удастся построить несколько ММ для одного и того же ТО, отличающихся различным уровнем упрощения. В этом случае говорят об *иерархии ММ* (греческое слово *ιєραρχία* происходит от *ιєρος* — священный и *αρχη* — власть и в данном случае означает упорядочение ММ по признаку их сложности и *полноты*).

Построение иерархии ММ связано с различной детализацией свойств изучаемого ТО. Сравнение результатов исследования различных ММ может существенно расширить и обогатить знания об этом ТО. Кроме того, такое сравнение позволяет оценить достоверность результатов последующего вычислительного эксперимента: если более простая ММ правильно отражает некоторые свойства ТО, то результаты исследования этих свойств должны

быть близки к результатам, полученным при использовании более полной и сложной ММ.

Итог анализа на рассматриваемом этапе — это обоснованный выбор рабочей ММ ТО, которая подлежит в дальнейшем детальному количественному анализу. Успех в проведении третьего этапа зависит, как правило, от глубины понимания связи отдельных составляющих ММ со свойствами ТО, нашедшими отражение в его РС, что предполагает органическое сочетание владения математикой и инженерными знаниями в конкретной предметной области.

Четвертый этап состоит в обоснованном выборе метода количественного анализа ММ, в разработке эффективного алгоритма вычислительного эксперимента, а пятый этап — в создании работоспособной программы, реализующей этот алгоритм средствами вычислительной техники. Для успешного проведения четвертого этапа необходимо владеть арсеналом современных методов вычислительной математики, а при математическом моделировании довольно сложных ТО выполнение пятого этапа требует профессиональной подготовки в области программирования на ЭВМ.

Получаемые на шестом этапе (в итоге работы программы) результаты вычислений должны прежде всего пройти тестирование путем сопоставления с данными количественного анализа упрощенного варианта ММ рассматриваемого ТО. Тестирование может выявить недочеты как в программе, так и в алгоритме и потребовать доработки программы или же модификации и алгоритма и программы. Анализ результатов вычислений и их инженерная интерпретация могут вызвать необходимость в корректировке РС и соответствующей ММ. После устранения всех выявленных недочетов триаду „модель — алгоритм — программа" можно использовать в качестве рабочего инструмента для проведения вычислительного эксперимента и выработки на основе получаемой количественной информации практических рекомендаций, направленных на совершенствование ТО, что составляет содержание седьмого, завершающего „технологический цикл" этапа математического моделирования.

Представленная последовательность этапов носит общий и универсальный характер, хотя в некоторых конкретных случаях она может и несколько видоизменяться. Если при разработке ТО можно использовать типовые РС и ММ, то отпадает необходимость в выполнении ряда этапов, а при наличии и соответствующего программного комплекса процесс вычислительного эксперимента становится в значительной степени автоматизированным. Однако математическое моделирование ТО, не имеющих близких прототипов, как правило, связано с проведением всех этапов описанного „технологического цикла".

1.6. Корректность постановки задач математического моделирования

В достаточно общем случае изучаемый *технический объект* (ТО) количественно можно охарактеризовать векторами $x \in R^k, g \in R^m, y \in R^n$ *внешних, внутренних и выходных параметров* соответственно. Одни и те же физические, механические или информационные характеристики ТО в моделях различного уровня и содержания могут выполнять роль как внешних или внутренних, так и выходных параметров.

Например, для электронного усилителя выходными параметрами являются коэффициент усиления, полоса частот пропускаемых сигналов, входное сопротивление, рассеиваемая мощность, внешними — сопротивление и емкость нагрузки, напряжения источников питания, температура окружающей среды, а внутренними — сопротивления резисторов, емкости конденсаторов, характеристики транзисторов. Но если в качестве ТО рассматривать отдельно взятый транзистор, то такие его характеристики, как отпирающее напряжение и коллекторный ток, следует уже отнести к его выходным параметрам, а в качестве внешних надо будет рассматривать токи и напряжения, задаваемые коммутирующими с ним элементами усилителя.

При создании ТО значения выходных параметров или диапазоны их возможного изменения оговаривают в техническом задании на разработку ТО, тогда как внешние параметры характеризуют условия его функционирования.

В сравнительно простом случае *математическая модель* (ММ) ТО может представлять собой соотношение

$$y = f(x, g), \quad x \in R^k, \quad g \in R^m, \quad f \in R^n \quad (1.5)$$

где f — векторная функция векторного аргумента. Модель в виде (1.5) позволяет легко вычислять выходные параметры по задаваемым значениям внешних и внутренних параметров, т.е. решать так называемую *прямую задачу*. В инженерной практике решение прямой задачи часто называют *поверочным расчетом*. При создании ТО возникает необходимость решать более сложную так называемую *обратную задачу*: по обусловленным техническим заданием на проектирование ТО значениям внешних и выходных параметров находить его внутренние параметры. В инженерной практике решению обратной задачи соответствует так называемый *проектировочный расчет*, часто имеющий целью оптимизацию внутренних параметров по некоторому *критерию оптимальности*. Однако при построении ММ ТО функция f в (1.5) обычно заранее не известна и ее предстоит установить. Это наиболее сложная так называемая *задача идентификации* ММ (от латинского слова

identifico — отождествляю, которому в данном случае придают смысл „распознаю“).

Задача идентификации может быть решена путем математической обработки информации о ряде таких состояний ТО, для каждого из которых известны (например, измерены экспериментально) значения выходных, внутренних и внешних параметров. Один из таких способов связан с применением регрессионного анализа. Если информация о внутренних параметрах отсутствует или же внутреннее устройство ТО слишком сложно, то ММ такого ТО строят по принципу *черного ящика* — устанавливают соотношение между внешними и выходными параметрами путем исследования реакции ТО на внешние воздействия.

Теоретический путь построения ММ состоит в установлении связи между u , x и g в виде *операторного уравнения*

$$L(u(z)) = 0, (1.6)$$

где L — некоторый оператор (в общем случае нелинейный), 0 — нулевой элемент пространства, в котором действует этот оператор, z — вектор независимых переменных, в общем случае включающий время и пространственные координаты, а u — вектор *фазовых переменных*, включающий те параметры ТО, которые характеризуют его состояние. Но даже если возможно получить решение (1.6) и найти зависимость $u(z)$ от z , то далеко не всегда удастся представить ММ ТО в явном относительно вектора u виде (1.5). Поэтому именно (1.6) определяет в общем случае структуру ММ ТО, а (1.5) является более простым частным случаем такой модели.

Среди математических задач выделяется класс задач, решения которых неустойчивы к малым изменениям исходных данных. Они характеризуются тем, что сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к произвольно большим изменениям решений. Задачи подобного типа, по существу, являются плохо поставленными. Они принадлежат к классу некорректно поставленных задач.

Быстро растущее использование вычислительной техники требует развития вычислительных алгоритмов для решения широких классов задач. Но что надо понимать под «решением» задачи? Каким требованиям должны удовлетворять алгоритмы нахождения «решений»?

Классические концепции и постановки задач не отражают многих особенностей встречающихся на практике задач.

2. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

2.1. Методы теории подобия

Термин «подобие» первоначально заимствован из геометрии, из подобия геометрических фигур. В простейшем случае *геометрическое подобие* заключается в следующем: треугольники или многоугольники подобны, если у них соответственные углы равны и стороны пропорциональны [18].

Несколько сложнее геометрическое подобие в пространстве.

Если ввести систему геометрических координат, то условие геометрического подобия состоит в том, что все координаты первой геометрической фигуры пропорциональны соответственно координатам второй геометрической фигуры, а соответственные углы равны.

Степень пропорциональности определяет *масштаб подобия*.

Таким образом, масштаб подобия геометрических фигур по всем осям одинаков. По углам он равен единице.

Дальнейшим развитием геометрического подобия является так называемое *аффинное подобие*, при котором масштабы подобия по координатным осям различны.

Понятие «*подобие физических процессов*» является развитием понятия аффинного подобия.

Любой физический процесс φ_0 можно представить в виде функциональной зависимости F между параметрами системы и процесса $P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_n$, т.е. $\varphi_0 = F(P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_n)$. Последняя графически может быть отображена в n -мерном пространстве $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$, причем P_1 откладывается по оси x_1 , P_2 по оси x_2 и т.д. Здесь одним из параметров может быть время, тогда $x_j = t$. Аналогично, в том же координатном пространстве, может быть отображён и другой процесс $\Phi_0 = F(R_1, R_2, \dots, R_j, \dots, R_n)$, характеризующийся сходственными с φ_0 параметрами. Если при этом все сходственные параметры пропорциональны, т.е. $P_1/R_1 = m_1, \dots, P_j/R_j = m_j, \dots, P_n/R_n = m_n$, то процессы Φ_0 и φ_0 подобны. Однако не все масштабные коэффициенты $m_1, \dots, m_j, \dots, m_n$ физического процесса могут принимать независимые значения, т.к. они определены через другие. Например, если взять проходку на долото, время бурения и механическую скорость, то последние два показателя - независимые, а первая определяется через эти два. Это предопределяет возможность введения некоторых обобщенных характеристик подобных процессов, составленных из зависимых и независимых параметров, которые называют *критериями подобия*.

Применительно к физическому процессу понятие "сходственные величины" значительно сложнее, чем в геометрии. Поэтому в общем случае *под подобием понимается такое соответствие между объектами – оригиналом и моделью, при котором известны правила перехода от параметров одного к параметрам другого, а математическое описание (если оно известно или может быть получено) допускает преобразование их к тождественному виду*.

Различение в видах подобия осуществляется по двум признакам; по виду физической природы явлений (физическое подобие, математическое подобие и т. д.) и по степени соответствия параметров *оригинала и модели*.

Абсолютное подобие характеризуется тем, что в сходственные моменты времени в сходственных точках пространства параметры одной системы P_j находятся в определённом соответствии с параметрами R_j другой системы $P_j / R_j = m_j$, причем может быть $m_j = \text{const}$ или $m_j = \text{var}$, $m_j = f(P_j)$.

Абсолютное подобие, требующее по сути тождества явлений, на практике - понятие абстрактное. Оно реализуемо в геометрических построениях и отдельных видах математического подобия. Поэтому более важно понятие практического подобия, которое может быть *полное, неполное и приближённое*.

Полное подобие - это подобие протекания во времени и в пространстве только тех процессов, которые существенны для конкретной задачи и достаточно полно характеризуют изучаемое явление.

Неполное подобие - это подобие процессов либо только во времени, либо только в пространстве.

Приближённое подобие характеризуется принятием упрощающих допущений, которые приводят к некоторому искажению процессов в двух объектах, но которые считаются допустимыми на основании предварительных оценок.

С точки зрения адекватности физической природы подобных явлений различают два основных вида подобия: *физическое и математическое*.

Физическое подобие достигается при одинаковой физической природе явлений. При физическом подобии механическим процессам ставятся в соответствие механические процессы, электрическим - электрические и т.д.

Частным видом физического подобия является:

- *кинематическое подобие* - подобие скоростей, ускорений твердых тел, жидкостей, газов;
- *материальное подобие* - подобие масс отдельных элементов системы;
- *динамическое подобие* - подобие сил, моментов и т.д.

При наличии этих трёх видов подобия говорят о

- *механическом подобии*.
- *Тепловое подобие* предполагает подобие температур и тепловых потоков. Аналогично вводится понятие
 - *гидравлического, электрического, электродинамического, оптического* и т.д. подобия.

Подобие может быть и в более сложных случаях:

- *химическое, физико-химическое* и т.д.

Подобие может устанавливаться не только детерминированным законом, но и для явлений, подчиняющихся стохастическим закономерностям:

- *статистическое подобие*.

По мере развития представлений о сложных системах понятие *подобие* приобретает всё более широкое содержание. Стали вводиться особые виды подобия, к которым относят:

- *функциональное подобие* (с точки зрения выполнения сходных функций);
- *эквивалентное подобие* (описываются явления не одинаковыми, а в том или другом смысле эквивалентными уравнениями);
- *кибернетическое подобие* (подобная реакция на изменение внешней среды и подобная структура управления обратных связей);
- *интегральное подобие* и другие.
- *квазиподобие* (подобие, основанное на использовании переменных масштабных коэффициентов).

В общем случае теория подобия - это теория, дающая возможность установить наличие подобия или позволяющая разработать способы достижения его. Соотношения между моделью и оригиналом, выявляемые теорией подобия, могут быть различными: в виде простых масштабных соотношений (при геометрическом подобии), в виде сложных функциональных зависимостей группы параметров сопоставляемых объектов (критерии подобия). Под объектами в дальнейшем ради краткости будем понимать также и различные процессы.

В ряде случаев такие зависимости могут и не иметь представлений в виде явного математического уравнения (например, лишь в виде функциональных зависимостей, при проверке на животных лекарственных препаратов, предназначенных для людей, и т.д.).

Основные положения теории подобия определяют свойства подобных объектов и указывают требования, при удовлетворении которых один из них можно рассматривать как оригинал (или модель) по отношению к остальным. Основной характеристикой подобных объектов являются *критерии подобия*, с помощью которых устанавливаются закономерности *взаимно - однозначного соответствия* модели и оригинала.

Можно дать следующее определение критериев подобия.

Критерии подобия – это идентичные по форме алгебраической записи и численно равные для подобных объектов безразмерные степенные симплексы и комплексы определенных групп параметров, характеризующих эти объекты.

Если, например, заранее известно, что *объекты подобны*, то соответствующие *критерии подобия* для оригинала и модели в обязательном порядке будут *численно равны* между собой. Напротив, обеспечив численную одинаковость соответствующих критериев подобия для объектов, мы обеспечим, тем самым, их подобие. В этом случае совсем неважно, что из них считать оригиналом, а что моделью. Это определяется лишь физическим смыслом решаемой задачи.

Очень важным является то, что критерии подобия могут быть получены, когда математическое описание объекта известно и оно *неизвестно*.

Как отмечалось выше, теория подобия основана на ряде теорем. Есть различные формулировки первой теоремы подобия. Впервые она была сформулирована еще И. Ньютоном в 1686 г., а в более общей постановке Ф. Бертраном в 1848 г., в силу чего называется также *теоремой Ньютона - Бертрана*. В современной формулировке, учитывающей возможность

существования различных видов подобия, первая теорема подобия имеет следующий вид: *явления, подобные в том или ином смысле, имеют определенные сочетания параметров, называемые критериями подобия, численно одинаковые для подобных явлений.*

Для получения критериев подобия по известным уравнениям исследуемых процессов выполняется ряд преобразований исходных уравнений с использованием правила Фурье, в соответствии с которым все члены уравнения имеют одинаковую размерность. Здесь возможны два случая:

1) все члены уравнения - однородные функции параметров и их производных. При этом все члены уравнения имеют общий множитель, который может быть вынесен за скобки в виде общего множителя;

2) часть членов уравнения - неоднородные функции параметров, не допускающие выноса за знак функции общего множителя.

В первом случае для получения критериев подобия все члены уравнения делятся на какой-либо из них, и посредством элементарных преобразований получают критерии подобия.

Во втором случае критерии подобия могут быть получены *методом интегральных аналогов*. При этом используется то свойство подобных процессов, что должны быть равны аргументы неоднородных функций.

Покажем применение указанных методов на конкретных примерах.

Пример 1. Получить критерии подобия для n объектов с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$, движение которых описывается однородным уравнением

$$f = m \frac{d^2 l}{dt^2}. \quad (2.1)$$

Здесь n может быть сколь угодно большое число (в пределе оно может быть равно бесконечности). Ясно, что оно не может быть меньше двух.

Поскольку движение каждого из n объектов описывается уравнением (2.1), то критерии подобия могут быть получены путем составления и решения системы из n уравнений. Однако в этом нет необходимости: для рассмотрения задачи достаточно взять любые два объекта и полученный результат без нарушения общности распространить на все n объектов.

Пусть таковыми будут первые два объекта, которые снабдим индексами 1 и 2.

Составим систему из двух уравнений вида (2.1) и, перенеся все члены уравнений в левую часть, будем иметь

$$\begin{cases} f_1 - m_1 \frac{d^2 l_1}{dt_1^2} = 0 \\ f_2 - m_2 \frac{d^2 l_2}{dt_2^2} = 0 \end{cases}; \quad (2.2)$$

Разделив первое уравнение системы на f_1 , а второе на f_2 , получим

$$\begin{cases} 1 - \frac{m_1}{f_1} \frac{d^2 l_1}{d t_1^2} = 0 \\ 1 - \frac{m_2}{f_2} \frac{d^2 l_2}{d t_2^2} = 0 \end{cases}; \quad (2.3)$$

Поскольку явления подобны, то их параметры связаны соотношениями $m_2 = k_m m_1$; $f_2 = k_f f_1$; $l_2 = k_l l_1$; $t_2 = k_t t_1$, где k с соответствующими индексами суть масштабы подобия параметров объектов. Подставив их во второе из уравнений системы (2.3), получим

$$\begin{cases} 1 - \frac{m_1}{f_1} \frac{d^2 l_1}{d t_1^2} = 0 \\ 1 - \frac{k_m k_l}{k_f k_t^2} \frac{m_1}{f_1} \frac{d^2 l_1}{d t_1^2} = 0 \end{cases}. \quad (1.4)$$

Для того, чтобы система (2.4) имела решение, по необходимости должно выполняться равенство

$$\frac{k_m k_l}{k_f k_t^2} = 1. \quad (2.5)$$

Заменяя масштабы подобия отношением сходственных параметров, получаем

$$\frac{m_1 l_1 / (m_2 l_2)}{(f_1 / f_2) (t_1^2 / t_2^2)} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{m_1 l_1}{f_1 t_1^2} = \frac{m_2 l_2}{f_2 t_2^2}. \quad (2.6)$$

Обобщая полученный результат на n подобных объектов, получим

$$\frac{m_1 l_1}{f_1 t_1^2} = \frac{m_2 l_2}{f_2 t_2^2} = \dots = \frac{m_n l_n}{f_n t_n^2}. \quad (2.7)$$

Поскольку все соотношения (1.7) одинаковы между собой, то вообще можно освободиться от индексов и записать:

$$\pi = \frac{m l}{f t^2} = idem, \quad (2.8)$$

где слово «*idem*» означает «одно и то же». Это соотношение является основным *критерием механического подобия* для данного вида движения и обозначается через π в честь этого числа.

Критерий подобия π всегда будет представлять некоторое число.

Теперь рассмотрим задачу, когда уравнение *нелинейно* относительно входящих в него параметров. Нелинейность уравнения наиболее часто бывает связана с наличием в уравнении по меньшей мере одного члена, содержащего сомножитель в виде нелинейной (например тригонометрической) функции.

Пример 2. Получить критерии подобия для процесса колебания груза с массой m на пружине с жёсткостью C в вязкой среде, в которой силы сопротивления пропорциональны скорости движения.

Уравнение движения груза имеет вид

$$m \frac{d^2 l}{dt^2} + k \frac{dl}{dt} + Cl = F \sin \omega t. \quad (2.9)$$

Нелинейность уравнения (2.9) здесь связана наличием сомножителя $\sin \omega t$: при увеличении аргумента ωt функция $\sin \omega t$ изменяется по закону гармонических колебаний.

В этом случае критерии подобия получают методом интегральных аналогов.

1 Исходное уравнение записывается в виде

$$\varphi_0 = \sum \varphi_i = 0.$$

2 Опускаются символы связи между членами уравнения, а последние записываются в виде

$$f_1 = m \frac{d^2 l}{dt^2}; \quad f_2 = k \frac{dl}{dt}; \quad f_3 = Cl; \quad f_4' = F \sin \omega t.$$

3 Исключаются из выражения для φ_0 все неоднородные функции и принимаются в качестве дополнительных критериев подобия аргументы этих функций: принимается $f_4 = F$; $\pi_{\text{дон}} = \omega t$.

4 Опускаются символы дифференцирования, интегрирования или других математических операций: grad , div , rot , div rot , rot div , rot rot и т.д.

5 Заменяются члены уравнения φ_i , преобразованные на этапах 3 и 4, их интегральными аналогами

$$\varphi_i: \varphi_1 = m \frac{l}{t^2}; \quad \varphi_2 = k \frac{l}{t}; \quad \varphi_3 = Cl; \quad \varphi_4 = F.$$

Поскольку математические операторы не влияют на размерность физических величин, то все интегральные аналоги φ_i будут иметь те же размерности, что и дифференциальные члены f_i .

6 Все интегральные аналоги разделяются на какой - либо один из них, и записываются выражения для основных критериев подобия в одной из форм:

$$\pi = \frac{\varphi_i}{\varphi_j}, \quad i, j = 1, 2 \dots n-1.$$

Выбор интегрального аналога, на который разделяются все остальные интегральные аналоги, совершенно произволен, при этом руководствуются лишь соображениями удобства. Таковым обычно является интегральный аналог, имеющий наиболее простую форму записи.

7 Данный ряд основных критериев подобия дополняется критериями, полученными на этапе 3.

8 Преобразуются (при необходимости) полученные критерии в иную (более удобную) форму записи посредством их перемножения, деления, возведения в степень и т.д.;

9 По полученным критериям записываются масштабы подобия. Тогда, разделяя интегральные аналоги на $\varphi_4 = F$, получим

$$\pi_1 = \frac{ml}{Ft^2}, \pi_2 = \frac{kl}{Ft^2}, \pi_3 = \frac{Cl}{F}, \pi_4 = \pi_{\text{дон}} = \omega t. \quad (2.10)$$

Поскольку n членов уравнения дают $n-1$ основных критериев подобия, то общее число критериев k_j , найденных способом интегральных аналогов, будет равно

$$k_j = (n-1) + a,$$

где a - число дополнительных критериев подобия, причем $n-1$ критериев можно записать $n-1$ способами.

Эти два рассмотренных способа составляют лишь ничтожно малую часть случаев получения критериев подобия, поскольку отношение числа объектов, уравнение состояния которых известно, к общему их числу в пределе равно нулю. Поэтому несравненно больший интерес представляют способы получения критериев подобия для задач, уравнения которых в явном виде не известны, и их можно представить лишь в виде функциональных зависимостей.

2.2. Анализ размерностей

Важным случаем является получение критериев подобия, когда уравнение процесса в явном виде не известно. Критерии подобия в этом случае можно получить на основе *анализа размерностей*.

Измерить какую-либо величину - значит *сравнить* её с другой величиной той же природы, значение которой известно и принято за эталон.

Единицы измерения различных физических величин, объединенные на основе непротиворечивости друг другу, образуют систему единиц измерения.

В настоящее время применяется Международная система единиц измерения СИ (System International), принятая в начале 70-х годов прошлого столетия.

В системе СИ выбраны следующие, независимые друг от друга величины измерения: массы – $кг$ (килограмм); длины – $м$ (метр), времени – $с$ (секунда); температуры – $К$ (градусы Кельвина); силы тока – $А$ (ампер); количества вещества – $н$ (моль) и силы света – $У$ (свеча, или кандела); Они называются первичными единицами измерения. Через них выражаются все остальные единицы измерения, которые называются вторичными, или производными.

Для решения задач в области механики достаточно иметь три первичные единицы измерений: мер длины, массы и времени. В качестве эталона длины до недавнего времени служил платиновый метр, хранившийся в Парижской палате

мер и весов. Эталоном массы является платиновая гиря в один килограмм, хранящийся там же. За эталон времени считали 1/86400 часть земных суток. После принятия системы СИ прототипы некоторых эталонов мер были уточнены: в настоящее время *метр* есть длина пути, проходимого светом в вакууме за интервал времени, равный 1/299 792 458 с;

секунда равна 9192631770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия – 133;

ампер равен силе неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводам бесконечной длины и ничтожно малой площади поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на каждом участке проводника длиной в 1 м силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7} \text{ Н}$ (Ньютон);

градус Кельвина равен 1/273,16 части термодинамической температуры тройной точки воды;

моль равен количеству вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде ^{12}C массой 0,012 кг;

кандела равна силе света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц (герц), сила излучения которого в этом направлении составляет 1/683 Вт/ср (ватт на стерадиан).

Кроме приведенных величин допускаются к использованию кратные и дольные единицы измерения, а также большое множество внесистемных единиц, нашедших широкое применение в различных отраслях народного хозяйства. Следует, однако, иметь в виду, что при выполнении вычислений в расчетных формулах рекомендуется использовать производные величины с размерностями, выраженными через первичные величины, что исключает вероятность ошибок, связанных с применением кратных или дольных единиц измерения.

Формула, указывающая зависимость единицы измерения производной величины от основных единиц измерения, называется размерностью этой величины. Например, определительным уравнением для скорости является уравнение $V = dl / dt$.

Принято использовать следующие символы для выражения размерностей величин: M – масса, L – длина, T – время, θ – градусы температуры, I – сила тока, n – количество вещества Y – сила света.

Аналогичные символы используются также для выражения производных величин. Например: F – сила, A – работа, N – мощность и т.д. Системой СИ они не регламентируются.

Символы обычно помещаются в квадратные скобки. Например, для скорости это будет выглядеть так: $[V] = [L] [T]^{-1}$.

Поскольку определительное уравнение для силы согласно второму закону Ньютона есть $F = m a$, то $[F] = [M] [L] [T]^{-2}$.

Для работы $A = F S$; S – длина пути, $[A] = [M] [L]^2 [T]^{-2}$.

Необходимо иметь в виду, что размерность любой физической величины представляет собой произведение возведенных в какие – либо степени размерностей первичных величин.

Хотя число первичных величин в общем случае равно семи, обычно не все они одновременно используются при решении конкретных задач, причем тип используемых величин зависит от области знаний или техники, к которой относится данная задача. Так, для механической системы достаточно трех первичных величин: длины, массы, времени. Поэтому размерность любой физической величины Q в механической системе может быть выражена через размерности этих трех первичных величин следующим образом:

$$[Q] = [M]^{\alpha} [L]^{\beta} [T]^{\gamma},$$

где пока неизвестные показатели степени α, β, γ подлежат определению.

Интересен вопрос: можно ли вместо первичных величин выбрать какие – либо иные (производные, т.е. вторичные) величины u_1, u_2, u_3 ? Если да, то когда это возможно? Такой вопрос возникает в связи с тем, что процедура получения критериев подобия заключается в освобождении от размерностей входящих в функциональное уравнение параметров путем использования размерных величин. Ясно, что если в функциональном уравнении имеются параметры, размерности которых совпадают с размерностями первичных величин, то получение критериев подобия с их использованием не составит труда. Однако такая ситуация наблюдается редко. Гораздо чаще встречаются ситуации, когда число параметров в функциональном уравнении с простейшими размерностями менее трех. Тогда – то и возникает необходимость выбора производных величин, по крайней мере, одного или двух вместо первичных.

Для ответа на этот вопрос выразим эти новые величины через старые:

$$\begin{aligned} [u_1] &= [M]^{\alpha_1} [L]^{\beta_1} [T]^{\gamma_1} \\ [u_2] &= [M]^{\alpha_2} [L]^{\beta_2} [T]^{\gamma_2} \\ [u_3] &= [M]^{\alpha_3} [L]^{\beta_3} [T]^{\gamma_3} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Прологарифмировав (2.11), будем иметь:

$$\begin{aligned} \lg [u_1] &= \alpha_1 \cdot \lg [M] + \beta_1 \cdot \lg [L] + \gamma_1 \cdot \lg [T] \\ \lg [u_2] &= \alpha_2 \cdot \lg [M] + \beta_2 \cdot \lg [L] + \gamma_2 \cdot \lg [T] \\ \lg [u_3] &= \alpha_3 \cdot \lg [M] + \beta_3 \cdot \lg [L] + \gamma_3 \cdot \lg [T], \end{aligned} \quad (2.12)$$

т.е. получим систему уравнений, из которой можно найти коэффициенты при условии, что определитель, составленный из них, отличен от нуля, причем это решение будет единственным.

Составим определитель

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 \Lambda & \beta_1 \Lambda & \gamma_1 \\ \alpha_2 \Lambda & \beta_2 \Lambda & \gamma_2 \\ \alpha_3 \Lambda & \beta_3 \Lambda & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.13)$$

Условие (2.13) означает также независимость величин u_1, u_2, u_3 . Тогда приходим к следующему заключению. Для получения критериев подобия вместо первичных величин можно выбрать любые три величины при условии:

1) размерности величин u_1, u_2, u_3 являются независимыми функциями первичных размерностей $[M], [L]$ и $[T]$, т.е.

2) $[u_1] \neq [u_2]^{\alpha_1} [u_3]^{\beta_1}; [u_2] \neq [u_1]^{\alpha_2} [u_3]^{\beta_2}; [u_3] \neq [u_1]^{\alpha_3} [u_2]^{\beta_3}$ при любых α и β ;

возможно однозначное обратное преобразование, т.е. $[M], [L]$ и $[T]$ можно единственным образом выразить через $[u_1], [u_2]$ и $[u_3]$.

Например, если взять величины L, T и F , то

$$[L] = [M]^0 [L]^1 [T]^0; [T] = [M]^0 [L]^0 [T]^1; [F] = [M]^1 [L]^1 [T]^{-2}.$$

Тогда определитель равен

$$D = \begin{vmatrix} 0\Lambda & 1\Lambda & 0 \\ 0\Lambda & 0\Lambda & 1 \\ 1\Lambda & 1\Lambda & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0;$$

3) эти три величины должны дать в совокупности размерности всех трех первичных величин.

Выбранные таким образом три параметра называются основными параметрами.

Совершенно ясно, что эти фундаментальные положения будут справедливы для любого числа первичных величин.

Проверить самостоятельно: можно ли в качестве основных выбрать параметры: 1) F, ρ, t ; 2) F, V, N ,

где F – сила; ρ – плотность; t – время; V – скорость; N – мощность.

Размерности некоторых производных величин будут следующие:

1) Площадь $S = l^2 \Rightarrow [L]^2$.

2) Объем $Q = l^3 \Rightarrow [L]^3$.

3) Момент силы $M = F \cdot l \Rightarrow [M] \cdot [L]^2 \cdot [T]^{-2}$.

4) Момент инерции $I = m \cdot l^2 \Rightarrow [M] \cdot [L]^2$.

5) Мощность $N = A / t \Rightarrow [M] \cdot [L]^2 \cdot [T]^{-3}$.

6) Давление $P = F / S \Rightarrow [M] \cdot [L]^{-1} [T]^{-2}$.

7) Плотность $\rho = m / V \Rightarrow [M] \cdot [L]^{-3}$.

8) Динамическая вязкость $\eta \Rightarrow [M] \cdot [L]^{-1} \cdot [T]^{-1}$.

9) Кинематическая вязкость $\nu = \frac{\eta}{\rho} \Rightarrow [L]^2 [T]^{-1}$.

Вторая теорема основана на результатах исследований Букингема, Федермана и Афанасьевой – Эренфест. Возможность представления интеграла как функции от критериев подобия, найденных из дифференциального

уравнения, была строго доказана для частного случая Букингемом, а в более общем виде как математическая теорема – Федерманом. Возможность получения критериев подобия при отсутствии дифференциального уравнения процесса на основе анализа размерностей физических величин, участвующих в этом процессе, была строго доказана в виде теоремы Афанасьевой – Эренфест.

Эта теорема является настолько важной, что ей дали специальное название π – теорема. Она позволяет получить критерии подобия и в тех случаях, когда уравнение процесса можно представить лишь в виде функциональной зависимости между параметрами системы и процесса:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_{n-1}), \text{ или } F(y, x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_{n-1}) = 0, \quad (2.14)$$

где f и F означают лишь символы зависимости.

π – теорема имеет несколько формулировок, одна из которых (основная) следующая. *Всякое полное уравнение физического процесса, записанное в определенной системе единиц, может быть представлено в виде функциональной зависимости между критериями подобия, полученными из участвующих в процессе параметров.*

Покажем применение π – теоремы на известном примере с колебаниями груза массой m на пружине с жёсткостью C в вязкой среде, сила сопротивления которой пропорциональна скорости V , т.е.

$$F_c = -k V;$$

на груз действует возмущающая сила F . Отклонение груза от состояния равновесия обозначим через x .

Запишем для него следующую функциональную зависимость:

$$x = f(m, C, t, F_0, \omega, k), \text{ или } F(m, C, x, t, F_0, \omega, k) = 0. \quad (2.15)$$

Число критериев подобия всегда равно разности между числом участвующих в процессе параметров n и основных параметров r . Поскольку данная задача - из области механики, то $r = 3$, и эти n (семь) величин должны дать $n - r$ ($7 - 3 = 4$) критерия подобия.

Рассмотрим ряд способов получения критериев подобия на основе π – теоремы

1) классический способ

Обозначая критерии подобия через π , можем записать

$$\pi = [m]^{z_1} \cdot [C]^{z_2} \cdot [x]^{z_3} [t]^{z_4} \cdot [F_0]^{z_5} \cdot [\omega]^{z_6} \cdot [k]^{z_7}. \quad (2.16)$$

Показатели степеней $z_1, z_2, \dots, z_7$ должны быть определены так, чтобы размерность π была равна нулю (π в нулевой степени равно единице).

Далее вместо $m, C, \dots, k$ подставляются их размерности через первичные единицы измерений:

$$[P_i] = [L]^{\alpha_i} [M]^{\beta_i} [T]^{\gamma_i}, \quad (2.17)$$

где P_i – любой из 7 параметров.

Подставляя (2.17) в (2.16), получаем

$$\pi = \{ [L]^{\alpha_1} [M]^{\beta_1} [T]^{\gamma_1} \}^{z_1} \cdot \{ [L]^{\alpha_2} [M]^{\beta_2} [T]^{\gamma_2} \}^{z_2} \cdot \{ [L]^{\alpha_7} [M]^{\beta_7} [T]^{\gamma_7} \}^{z_7}. \quad (2.18)$$

Значения показателей степени $z_1, z_2, \dots, z_7$ определяются из решения следующей системы:

$$\begin{cases} \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + z_3 + \alpha_4 z_4 + \alpha_5 z_5 + \alpha_6 z_6 + \alpha_7 z_7 = 0 \\ \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 z_3 + \beta_4 z_4 + \beta_5 z_5 + \beta_6 z_6 + \beta_7 z_7 = 0 \\ \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \gamma_3 z_3 + \gamma_4 z_4 + \gamma_5 z_5 + \gamma_6 z_6 + \gamma_7 z_7 = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Система (2.19) имеет $n - r$ ($7 - 3 = 4$) независимых решения. Каждое решение должно дать один критерий подобия. Следовательно, необходимо

Таблица 2.1

Размерности физических величин

Параметр	Показатель степени		
	[L]	[M]	[T]
m	$\alpha_1 = 0$	$\beta_1 = 1$	$\gamma_1 = 0$
C	$\alpha_2 = 0$	$\beta_2 = 1$	$\gamma_2 = -2$
x	$\alpha_3 = 1$	$\beta_3 = 0$	$\gamma_3 = 0$
t	$\alpha_4 = 0$	$\beta_4 = 0$	$\gamma_4 = 1$
F_0	$\alpha_5 = 1$	$\beta_5 = 1$	$\gamma_5 = -2$
ω	$\alpha_6 = 0$	$\beta_6 = 0$	$\gamma_6 = -1$
k	$\alpha_7 = 0$	$\beta_7 = 1$	$\gamma_7 = -1$

решить систему уравнений (2.19).

Степени размерности параметров представлены выше в виде таблицы 2.1.

Тогда система (2.19) упростится и примет вид

$$\begin{cases} z_3 + z_5 = 0 \\ z_1 + z_2 + z_5 + z_7 = 0 \\ -2z_2 + z_4 - 2z_5 - z_6 - z_7 = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Система (2.20) имеет 4 линейно независимых решения. При этом четыре величины z_i могут принять произвольные значения, остальные три определяются из уравнений системы.

Произвол в выборе некоторых чисел z_i не имеет никакого значения. Важно лишь одно – чтобы π стало безразмерной величиной. Поэтому для них выбирают наиболее простые значения, но так, чтобы уравнения системы не противоречили друг другу. Например, нельзя дать произвольное значение для z_1, z_2, z_3 и z_7 т.к. в этом случае первое и второе уравнения будут противоречить друг другу.

1 Принимаем $z_1 = 1, z_2 = z_6 = z_7 = 0$. Тогда: $z_3 + z_5 = 0; 1 + z_5 = 0;$

$z_4 - 2z_5 = 0$. Отсюда получаем: $z_5 = -1, z_3 = 1, z_4 = -2$.

Итак, первое решение: $z_1 = 1, z_2 = 0, z_3 = 1, z_4 = -2, z_5 = -1, z_6 = 0, z_7 = 0$.

2 Пусть $z_1 = 0, z_2 = 1, z_6 = z_7 = 0$.

Тогда получаем $z_3 + z_5 = 0, 1 + z_5 = 0, 2 + z_4 - 2z_5 = 0$.

Отсюда получаем $z_5 = -1, z_3 = 1, z_4 = 0, z_6 = z_7 = 0$.

Поэтому второе решение будет: $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = 1, z_4 = 0, z_5 = -1, z_6 = 0, z_7 = 0$.

3 Принимаем $z_1 = z_2 = 0, z_6 = 1, z_7 = 0$.

Тогда $z_3 + z_5 = 0, z_5 = 0, z_4 - 2z_5 - 1 = 0$.

Отсюда $z_5 = 0, z_3 = 0, z_4 = 1$.

Следовательно, третье решение: $z_1 = 0, z_2 = 0, z_3 = 0, z_4 = 1, z_5 = 0, z_6 = 1, z_7 = 0$.

4 $z_1 = z_2 = z_6 = 0, z_7 = 1$.

Тогда $z_3 + z_5 = 0, z_5 + 1 = 0, z_4 - 2z_5 - 1 = 0$.

Отсюда $z_5 = -1, z_3 = 1, z_4 = -1$.

Таким образом, получены все четыре решения, которым соответствуют четыре критерия подобия.

Из первого решения получаем критерий

$$\pi = m^{z_1} \cdot C^{z_2} \cdot x^{z_3} \cdot t^{z_4} \cdot F_0^{z_5} \cdot \omega^{z_6} \cdot k^{z_7} = m x t^{-2} F_0^{-1} = \frac{m x}{F_0 t^2}. \quad (2.21)$$

Из второго решения:

$$\pi_2 = C x F_0^{-1} = \frac{C x}{F_c}. \quad (2.22)$$

Из третьего решения:

$$\pi_3 = t \omega. \quad (2.23)$$

Из четвертого решения:

$$\pi_4 = k x F_0^{-1} = \frac{x k}{F_0 t}. \quad (2.24)$$

Критерии подобия можно получить и другим видоизмененным способом. Выбрав какие-либо 3 параметра по числу основных единиц измерения – метр, килограмм, секунда, – для которых определитель не равен нулю, можно прийти к безразмерным соотношениям.

Выберем в качестве основных единиц, например, параметры m, ω, F_0 . Проверим их независимость. Их размерности следующие:

$$[m] = [M]^1 [L]^0 [T]^0, [\omega] = [M]^0 [L]^0 [T]^{-1}, [F_0] = [M] [L] [T]^{-2}.$$

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = +1.$$

Запишем уравнение (2.16) в следующей форме:

$$\frac{x}{m^{a_3} F_0^{b_3} \omega^{c_3}} = f \left(\frac{k}{m^{a_7} F_0^{b_7} \omega^{c_7}}, \frac{C}{m^{a_2} F_0^{b_2} \omega^{c_2}}, \frac{t}{m^{a_4} F_0^{b_4} \omega^{c_4}} \right). \quad (2.25)$$

В этом уравнении индексы при показателях степени соответствуют порядковому номеру параметров в уравнении (2.16).

Значения показателей степеней при a , b и c определяют из условия, что входящие в (2.25) комплексы – безразмерные величины.

$$1) \frac{[x]}{[m]^{a_3} [F_0]^{b_3} [\omega]^{c_3}} = \frac{[L]}{[M]^{a_3} ([M][L][T]^{-2})^{b_3} ([T]^{-1})^{c_3}} = [L]^{1-b_3} [M]^{-a_3-b_3} [T]^{2b_3+c_3} = 1.$$

Отсюда получаем $1 - b_3 = 0$; $b_3 = 1$; $-a_3 - b_3 = 0$; $a_3 = -1$; $2b_3 + c_3 = 0$; $c_3 = -2$.

Поэтому

$$\pi_1 = \frac{x}{m^1 F_0^1 \omega^{-2}} = \frac{m x \omega^2}{F_0}; \quad (2.26)$$

$$2) \frac{[k]}{[m]^{a_7} [F_0]^{b_7} [\omega]^{c_7}} = \frac{[M][T]^{-1}}{[M]^{a_7} ([M][L][T]^{-2})^{b_7} [T]^{-c_7}} = [L]^{-b_7} [M]^{1-a_7-b_7} [T]^{-1+2b_7+c_7} = 1.$$

Имеем

$$b_7 = 0; \quad 1 - a_7 - b_7 = 0; \quad -1 + 2b_7 + c_7 = 0;$$

Отсюда получаем: $a_7 = -1$; $c_7 = 1$.

Следовательно

$$\pi_2 = \frac{k}{m\omega}; \quad (2.27)$$

$$3) \frac{[C]}{[m]^{a_2} [F_0]^{b_2} [\omega]^{c_2}} = \frac{[M][T]^{-2}}{[M]^{a_2} ([M][L][T]^{-2})^{b_2} [T]^{-c_2}} = [L]^{-b_2} [M]^{1-a_2-b_2} [T]^{-2+2b_2+c_2} = 1.$$

$$\text{Имеем} \quad b_2 = 0; \quad 1 - a_2 - b_2 = 0; \quad -2 + 2b_2 + c_2 = 0;$$

$$\text{В результате получаем} \quad a_2 = 1; \quad c_2 = 2.$$

Поэтому

$$\pi_3 = \frac{C}{m \omega^2}; \quad (1.28)$$

$$4) \frac{[t]}{[m]^{a_4} [F_0]^{b_4} [\omega]^{c_4}} = \frac{[T]}{[M]^{a_4} ([M][L][T]^{-2})^{b_4} [T]^{-c_4}} = [L]^{-b_4} [M]^{-a_4-b_4} [T]^{1+2b_4+c_4} = 1.$$

$$\text{Имеем} \quad -b_4 = 0; \quad -a_4 - b_4 = 0; \quad 1 + 2b_4 + c_4 = 0;$$

$$\text{Отсюда} \quad b_4 = 0; \quad a_4 = 0; \quad c_4 = -1;$$

Следовательно,

$$\pi_4 = \frac{t}{\omega^{-1}} = \omega t. \quad (2.29)$$

Ранее было получено

$$\pi_1 = \frac{m x}{F_0 t^2}; \quad \pi_2 = \frac{C x}{F_0}; \quad \pi_3 = t \omega; \quad \pi_4 = \frac{x k}{t F_0}.$$

Здесь получено

$$\pi'_1 = \frac{m x \omega^2}{F_0}; \quad \pi'_2 = \frac{k}{m \omega}; \quad \pi'_3 = \frac{C}{m \omega^2}; \quad \pi'_4 = \omega t.$$

Нетрудно увидеть, что

$$\frac{\pi'_1}{(\pi'_4)^2} = \pi_1; \quad \pi'_1 \cdot \pi'_3 = \pi_2; \quad \pi'_4 = \pi_3; \quad \frac{\pi'_2 \cdot \pi'_1}{\pi'_4} = \pi_4.$$

Поскольку любая комбинация критериев представляет также критерий подобия, то результат, конечно же, получился тот же, только изменилась форма их записи.

Можно применять еще более простой способ, не требующими составления уравнений и их решения. Вся эта процедура как бы проделывается в уме, и критерии получаются сразу же.

Последовательность работ при этом следующая:

- 1) составляется функциональная зависимость между параметрами;
- 2) выбираются параметры в качестве основных. Их число должно быть равно числу первичных единиц измерения. В механике их три. Поэтому при решении задач из области механики параметры, выбранные в качестве основных, должны в совокупности дать меры массы, длины и времени;
- 3) указываются размерности выбранных параметров, проверяется их независимость;
- 4) указываются размерности всех оставшихся параметров;
- 5) в числитель дроби последовательно выписывается каждый из $n - r$ оставшихся параметров, а в знаменатель - выбранные в качестве основных в соответствующих степенях так, чтобы полностью освободиться от размерности этой дроби. При выполнении этих работ следует придерживаться определенных правил. Они следующие.

1. При составлении функционального уравнения следует учитывать по возможности все параметры, которые, по мнению исследователя, могут влиять на исследуемый процесс. При этом используется, как правило, метод последовательного разворачивания и детализации параметров. Если при этом окажется, что несколько более сложных параметров в конечном счете могут быть выражены через более простые параметры, то после разворачивания и детализации эти более простые параметры войдут в уравнение более одного раза, т.е. повторяться. Тогда освобождаются от повторений, удерживая каждый параметр лишь один раз. Например, если у одного и того же объекта были приняты размеры поперечного сечения a и b , площадь поперечного сечения S и момент инерции I , то в конечном счете можно оставить лишь a и b , а S и I опустить, т.к. последние могут быть выражены через первые. Но возможно и наоборот: сохраняя S и I , опустить a и b . Например, при изучении продольной устойчивости балки (стержня, бурильных труб и т.д.) более важен параметр I ,

нежели a , b или S . С точки зрения напряженного состояния или прочности конструкции, напротив, может иметь более важное значение S . Иногда бывает необходимо брать не только I , но и более сложный параметр EI – жесткость балки на изгиб. Какие параметры оставить, а от которых необходимо или желательно освободиться, зависит от характера конкретной задачи.

К сожалению, π – теорема не дает ответа на этот вопрос, оставляя поле деятельности для опыта и интуиции исследователя, а также для проб и ошибок.

2. В качестве основных следует выбирать параметры, размерности которых совпадают с размерностями первичных единиц измерения, т.е. имеющие символы $[M]$, $[L]$ и $[T]$. Таковыми могут быть масса объекта m , его линейные d , поверхностные S или пространственные V размеры (где d – диаметр, S – площадь, V – объем), а также временная характеристика (например, угловая скорость, частота или период колебаний). Далее идут производные параметры с размерностями в виде комбинаций двух первичных размерностей. Ими могут быть скорость, ускорение, плотность и т.д. Наиболее сложную размерность будут иметь производные параметры, размерности которых представляют собой комбинации всех трех первичных размерностей. Среди них часто встречаются такие параметры, как сила, момент силы, давление, напряжение, вязкость и т.д.

Наиболее легко и просто освободиться от размерностей, когда в качестве основных удастся выбрать параметры с самыми простыми размерностями, совпадающими с размерностями первичных величин. Если этого делать не удастся, то приходится выбирать параметры с более сложными размерностями. Непременным условием при этом является то, чтобы, во-первых, они в совокупности содержали размерности всех трех первичных величин и, во-вторых чтобы они были независимы между собой.

Если в качестве основных выбраны параметры с самыми простыми размерностями ($[M]$, $[L]$ и $[T]$), то для получения критериев подобия в числитель дроби последовательно записываются все $n - r$ параметры, а в знаменатель – основные параметры с соответствующими показателями степеней.

В случае, если в качестве основных выбраны параметры с размерностями различной сложности (например, один – в виде одной размерности в какой-либо степени, другой – в виде комбинации двух размерностей, а третий – в виде комбинации всех трех размерностей), то в знаменатель дроби они подставляются в следующей последовательности :

1) если i – й параметр из $n - r$ оставшихся имеет размерность лишь одной меры измерения, то в знаменатель дроби подставляется тот основной параметр, возведенный в соответствующую степень (целую или дробную), размерность которой совпадает с размерностью i - го параметра;

2) если i - й параметр из $n - r$ параметров по размерности не совпадает с размерностью ни одной из основных единиц, то в знаменатель дроби на каждом этапе подставляют тот параметр, возведенный в соответствующую степень, в размерности которого присутствует элемент

размерности i – го параметра, а этот элемент в размерности других основных единиц отсутствует;

3) наиболее простой параметр следует использовать в последнюю очередь.

Следует отметить, что указанные правила, кажущиеся сложными в формулировках, на самом деле просты при их практическом использовании.

Однако при выборе основных параметров иногда приходится отказаться от некоторых из сформулированных выше правил. Чаще это бывает связано с характером решаемой задачи, стремлением получить уже хорошо известные критерии подобия и т.д.

Покажем вышеизложенное на конкретных примерах.

Задача 1. Колебания груза на пружине

Получить критерии подобия на основе π – теоремы упрощенным способом для колебания груза с массой m на пружине с жесткостью C в вязкой среде, сила сопротивления которой пропорциональна скорости V , если на груз действует возмущающая сила $F_0 \sin \omega t$; t - время.

Пусть отклонение груза от состояния равновесия равно x .

Запишем функциональную зависимость:

$$F(m, x, t, C, \omega, k, F_0) = 0. \quad (2.30)$$

Имеющиеся 7 величин должны дать $7 - 3 = 4$ критерия подобия.

Выбираем основные единицы. Максимально возможное число троек

(вариантов) равно:
$$C_7^3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35.$$

Ясно, что перебрать все эти варианты можно, но довольно громоздко. Памятуя, что выбор основных единиц – вопрос не принципиального характера, а диктуется в большей мере лишь соображением удобства, рассмотрим лишь некоторые из вариантов, придерживаясь в то же время сформулированных выше правил.

1-ый вариант. Вначале в качестве основных примем параметры m , x и t , т.е. параметры с самыми простыми размерностями, соответственно $[M]$, $[L]$ и $[T]$, символически совпадающими с первичными единицами измерения.

Ясно, что эти параметры взаимно независимы.

Размерности остальных величин следующие:

$$[C] = [M][T]^{-2}; \quad \omega = [T]^{-1}; \quad [k] = [M][T]^{-1}; \quad [F_0] = [M][L][T]^{-2}.$$

Приводим все оставшиеся четыре параметра к безразмерному виду. Для этого первый из них записываем в числитель, указывая, справа от него его размерность: $C \Rightarrow [M][T]^{-2}$.

Совершенно очевидно: чтобы привести к безразмерному виду, в знаменателе дроби нужно вначале записать параметр - основную единицу m в первой степени, а параметр t - в степени 2. В результате получим первый критерий подобия в виде

$$\pi_{11} = \frac{Ct^2}{m}. \quad (2.31)$$

Аналогично приводим остальные параметры к безразмерному виду, что легко проследить по записи:

$$\pi_{12} = \omega t; \quad \pi_{13} = \frac{k t}{m}; \quad \pi_{14} = \frac{F_0 t^2}{m x}. \quad (2.32)$$

В полученных критериях первый индекс означает номер варианта.

Сравнивая их с ранее полученными по классическому методу критериями, легко установить, что:

$$\pi_{11} = \frac{\pi_2}{\pi_1}; \quad \pi_{12} = \pi_3; \quad \pi_{13} = \frac{\pi_4}{\pi_1}; \quad \pi_{14} = \frac{1}{\pi_4}.$$

Отсюда видим, что критерии подобия по этому способу получаются достаточно быстро.

2-ой вариант. Примем теперь в качестве основных единиц параметры x , k и F_0 , т.е. параметры не с самыми простыми размерностями, что противоречит правилу 2. Ясно, что этот вариант мы рассматриваем лишь с целью показать, какие трудности могут возникать, если не придерживаться правил.

Проверяем независимость выбранных основных единиц. Так как

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1,$$

то они независимы.

Остальные четыре параметра следующие: m , t , c и ω .

Записав в числитель дроби m и справа - его размерность $[M]$, видим, что от этой размерности можно избавиться, записав в знаменатель дроби и k , и F_0 . Причем часто бывает затруднительно усмотреть, что быстрее ведет к цели, а что нет или ведет ли оно к цели вообще. Пусть это будет F_0 . Тогда получим

$$\frac{m}{F_0} \rightarrow \frac{[M]}{[M][L][T]^{-2}} = [L]^{-1}[T]^2.$$

Теперь видно, что возникла трудность с освобождением от размерности $[T]$. Если теперь записать в знаменатель параметр k в степени -2 , то получим

$$\frac{m}{F_0 k^{-2}} \rightarrow [L]^{-1}[T]^2 [M]^2 [T]^{-2} = [L]^{-1}[M]^2.$$

Только теперь стало ясно, что этот путь не ведет к цели. Поэтому приходится все начать сначала. Если в знаменатель записать k , то

$$\frac{m}{k} \Rightarrow \frac{[M]}{[M][T^{-1}]} = [T].$$

Для того, чтобы освободиться от T , необходимо теперь в знаменатель записать F_0 в степени минус $1/2$, т.е.

$$\frac{m F_0^{1/2}}{k} \Rightarrow [T] \cdot [M]^{1/2} \cdot [L]^{1/2} \cdot [T]^{-1} = [M]^{1/2} \cdot [L]^{1/2}.$$

Теперь задача усложняется тем, что надо освободиться от размерности $[M]$ и $[L]$, причем в степени $1/2$. Если теперь записать в знаменатель дроби $k^{1/2}$, то от $[M]$ освободимся, но опять появится $[T]$ в степени $1/2$.

В то же время решение есть. Необходимо записать так:

$$\frac{m F_0}{k^2} \Rightarrow \frac{[M][M][L][T]^{-2}}{[M]^2[T]^{-2}} = [L].$$

Далее, чтобы освободиться от $[L]$, нужно в знаменатель записать x .

Тогда получаем

$$\pi_{21} = \frac{m F_0}{k^2 x}. \quad (2.33)$$

Отметим, что это не всегда бывает очевидно.

Аналогично можно получить и остальные критерии подобия. Опуская промежуточные рассуждения и выкладки, запишем их в окончательном виде:

$$\pi_{22} = \frac{t F_0}{k x}; \quad \pi_{23} = \frac{C x}{F_0}; \quad \pi_{24} = \frac{\omega k x}{F_0}. \quad (1.34)$$

Сопоставляя эти критерии с критериями, полученными по варианту 1, устанавливаем, что

$$\pi_{21} = \frac{\pi_{14}}{\pi_{13}^2}; \quad \pi_{22} = \frac{\pi_{14}}{\pi_{13}}; \quad \pi_{23} = \frac{\pi_{11}}{\pi_{14}}; \quad \pi_{24} = \frac{\pi_{12} \pi_{13}}{\pi_{14}}.$$

В заключение отметим, что если выбранные в качестве основных единиц параметры независимы, то критерии подобия можно получить всегда. Дело лишь в том, что их получение значительно более трудоемко.

Рассмотрим ряд задач из области гидродинамики.

Вначале рассмотрим самую простую задачу.

Пусть жидкость с плотностью ρ , вязкостью η движется равномерно со средней по сечению трубы скоростью V в горизонтально расположенной трубе с внутренним диаметром d .

Имеем

$$V = f(d, \rho, \eta), \quad \text{или} \quad F(d, \rho, \eta, V) = 0. \quad (1.35)$$

Их размерности следующие:

$[d] = [L]$; $[\rho] = [M][L]^{-3}$, $[V] = [L][T]^{-1}$ и $[\eta] = [M][L]^{-1}[T]^{-1}$, т.е. наиболее простую размерность имеет параметр d ; размерности, включающие размерности двух первичных единиц измерения, параметры - ρ и V , а наиболее сложную размерность в виде комбинации размерностей всех трех первичных единиц имеет единственный оставшийся параметр η .

В соответствии с оговоренными выше правилами выбираем в качестве основных единиц параметры d , ρ и V и приводим (2.35) к критериальному виду. Записываем в числитель дроби параметр η , указывая справа его размерность, а в знаменатель основные параметры подставляем в следующей последовательности: вначале ρ в степени плюс единица, что позволяет освободиться от размерности $[M]$, затем V в плюс первой степени, освобождаемся от размерности $[T]$ и понижаем степень $[L]$. Далее, подставляя d в плюс первой степени, освобождаемся окончательно от всех размерностей. В результате получаем критерий подобия в форме

$$\pi' = \frac{\eta}{\rho V d}. \quad (1.36)$$

Это обратная величина критерия Рейнольдса, широко применяемого при решении задач гидродинамики. Поэтому приводим (2.36) к привычной форме записи

$$\pi = \frac{1}{\pi'} = \frac{V d \rho}{\eta} = Re = idem. \quad (2.37)$$

Преимущества критериального представления процесса трудно переоценить. Первое очевидное преимущество заключается в сокращении числа параметров. Так, в только что рассмотренном примере вместо четырех параметров с различными размерностями вводится в рассмотрение лишь один комплексный параметр – критерий подобия.

Второе преимущество заключается в том, что при проведении экспериментов легко добиться гидродинамического подобия процессов, изменяя лишь один параметр, например V , тогда как изменение ρ или η связано с выбором другой жидкости, трудностями обеспечения подобия по ним, а изменение d означает выбор других труб.

Более сложным случаем является течение вязко-пластической жидкости.

Задача 2. Течение вязко - пластичной жидкости в трубопроводе с произвольным расположением в пространстве (бурильной колонне)

Пусть вязко – пластичная жидкость с плотностью ρ , вязкостью η и динамическим напряжением сдвига τ_0 движется со скоростью $V = f(t)$ в трубопроводе с внутренним диаметром d , длиной l , произвольно расположенном пространстве, если в сечениях 1 и 2 давления равны соответственно P_1 и P_2 (рисунок 2.1). Сечения 1 и 2 могут представлять собой соответственно начало и конец трубопровода или любого произвольно выделенного участка.

Пространственное положение трубопровода может быть задано некоторым безразмерным параметром γ , например зенитным и азимутальным углами для любой глубины. Параметр γ может оставаться неизменным

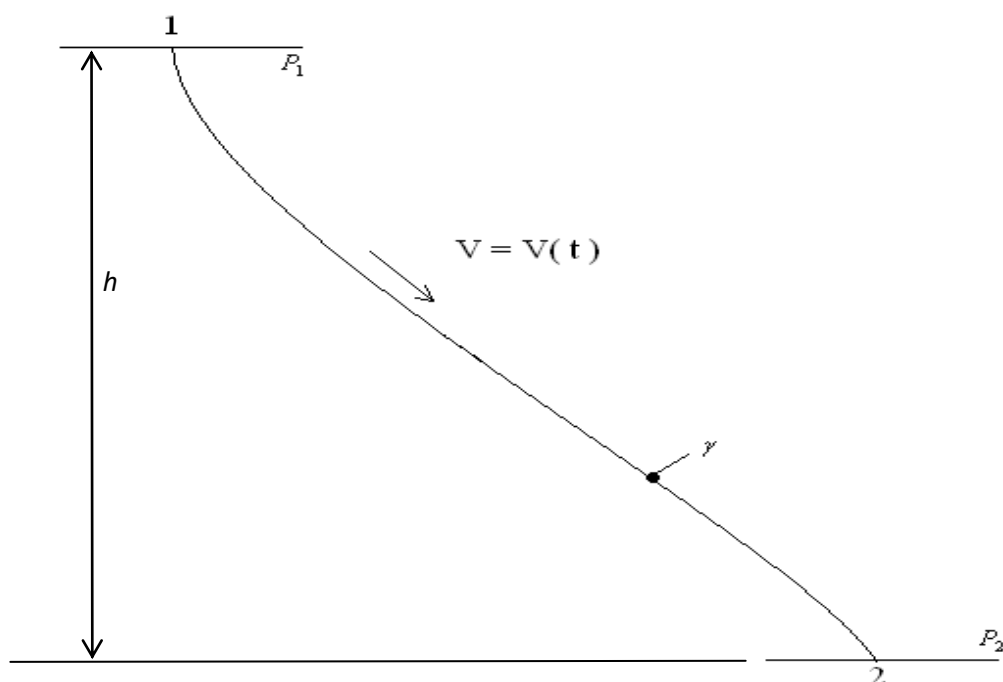


Рисунок 2.1 - Трубопровод с произвольным расположением в пространстве

по длине трубопровода либо изменяться по любой пространственной кривой.

Введение в рассмотрение (помимо зенитного) и азимутального угла может быть вызвано необходимостью учета Кориолисова ускорения в движущейся жидкости.

Запишем для рассматриваемого процесса следующее функциональное уравнение:

$$F'(d, l, \gamma, t, \rho, \eta, \tau_0, V, P_1, P_2) = 0. \quad (2.38)$$

В этом уравнении штрих при символе функциональной зависимости означает то, что вид ее, возможно, еще не окончательный, и ее предстоит уточнить. Это обычно бывает связано, с одной стороны, со стремлением сократить число параметров, а с другой – с тем, что не все параметры сразу же удастся выбрать удачно ввиду малоизученности или сложности рассматриваемого процесса.

Уточнение может быть произведено постановкой предварительных, так называемых отсеивающих, экспериментов, но чаще – путем тщательного анализа сути и содержания принятых в рассмотрение параметров. В последнем случае обычно пользуются так называемым методом последовательного развертывания и детализации параметров. Этот метод заключается в том, что некоторые сложные параметры, зависящие, в свою очередь, от других параметров (если таковые имеются), записываются в виде функций других, более простых параметров и вводятся в исходное уравнение (2.38). После этого исходное уравнение обычно становится переопределенным в том смысле, что некоторые параметры встречаются более одного раза. Далее повторяющиеся параметры исключаются, так что каждый параметр учитывается лишь один раз.

Необходимость в детализации параметров обычно бывает связана с тем, что составляющие сложного параметра различным образом влияют на исследуемый процесс, или же тогда, когда вновь вводимые параметры бывают в каких – то отношениях удобнее первоначально принятых, например, при измерениях или расчетах.

Покажем это на рассматриваемом примере.

Для задач из области гидравлики сокращение числа параметров обычно достигается заменой давлений P_1 и P_2 их разностью, т.е. перепадом давления $\Delta P = P_1 - P_2$. Однако это возможно не всегда. Замена давлений P_1 и P_2 на их разность означает исключение из рассмотрения давления P_2 и, стало быть, уменьшение давления в гидравлической системе на эту величину. Это допустимо лишь в том случае, если нас интересует только гидродинамика процесса между сечениями 1 и 2, а величина абсолютного давления никакой роли не играет. Между тем она может интересовать нас, например, с точки зрения прочности трубопровода. Но если же по условию задачи это возможно, то дальнейшее сокращение числа параметров может быть достигнуто заменой перепада давления на градиент давления $\Delta P \rightarrow \frac{\Delta P}{l}$. При этом число параметров, как нетрудно заметить, сокращается сразу на две единицы.

В общем случае давление в начале трубопровода, т.е. суммарное давление, можно записать так:

$$P_1 = \Delta P_{гст} + \Delta P_{гд} + P_2, \quad (2.39)$$

где $\Delta P_{гст}$ – гидростатическое давление, определяемое разностью геометрических высот расположения сечений 2 и 1;

$\Delta P_{гд}$ – потери давления на участке трубопровода между сечениями 1 и 2.

Представим (1.39) в виде

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \Delta P_{гст} + \Delta P_{гд}$$

и поделим обе части этого уравнения на l . Тогда получим

$$\frac{\Delta P}{l} = \frac{\Delta P_{гст}}{l} + \frac{\Delta P_{гд}}{l}, \quad (2.40)$$

где члены правой части (2.40) суть градиенты соответствующих давлений.

Заметим, что в гидравлике $\Delta P_{гст}$ принято относить не к длине трубопровода, а к разности геометрических высот расположения его концевых участков, что называется гидравлическим уклоном.

Так как разность геометрических высот сечений 2 и 1 в рассматриваемой задаче равна $(-h)$ (сечение 2 расположено ниже сечения 1), то

$$\Delta P_{гст} = -\rho g h, \text{ и}$$

(2.40) принимает вид

$$\frac{\Delta P}{l} = -\frac{\rho g h}{l} + \frac{\Delta P_{\text{сд}}}{l}, \quad (2.41)$$

$$\text{где } h = f(l, \gamma); \quad (2.42)$$

g – гравитационная постоянная.

Сопоставляя полученные выражения (2.41) и (2.42) с исходным уравнением (2.38), а также с учетом того, что параметры ρ, l, γ в (2.38) уже

присутствуют, приходим к выводу, что 3 параметра P_1, P_2 и l в (2.38) можно заменить на 2 параметра: g и $\Delta P_{\text{сд}}/l$ в окончательном уравнении, если абсолютное давление интереса не представляет. В противном случае P_1 необходимо оставить.

Здесь могут быть следующие две ситуации:

1) сечение 2 является концевым, и жидкость свободно вытекает в атмосферу. Тогда

$$P_2 = 0 \quad \text{и} \quad P_1 = \Delta P = \Delta P_{\text{сст}} + \Delta P_{\text{сд}} \quad (2.43)$$

Наибольшее давление в системе P_1 здесь обусловлено только разностью высот расположения сечений 2 и 1 и потерями давления на участке трубопровода между ними;

3) сечение 2 не является концевым, и давление в нем не равно нулю, т.е.

4) $P_2 = \Delta P_2 \neq 0$, причем ΔP_2 может представлять собой как сумму распределенных по длине потерь давления на участке любой протяженности за сечением 2, так и сосредоточенный перепад давления сразу же за сечением 2, или же то и другое одновременно.

Пусть абсолютное значение давления P_1 представляет для нас интерес, что соответствует более общему случаю. Тогда функциональное уравнение окончательно запишется в виде

$$F\left(d, \gamma, \rho, \eta, \tau_0, V, P_1, \frac{\Delta P_{\text{сд}}}{l}, g, t\right) = 0. \quad (2.44)$$

Размерности параметров следующие:

$$[d] = [L]; \quad [\gamma] = 1; \quad [\rho] = [M][L]^{-3}; \quad [\eta] = [M][L]^{-1}[T]^{-1}; \quad [\tau_0] = [M][L]^{-1}[T]^{-2};$$

$$[V] = [L][T]^{-1}; \quad [P_1] = [M][L]^{-1}[T]^{-2}; \quad \left[\frac{\Delta P_{\text{сд}}}{l}\right] = [M][L]^{-2}[T]^{-2}; \quad [g] = [L][T]^{-2}; \quad [t] = [T];$$

В (2.44) 10 параметров связаны одним уравнением связи и должны дать 7 критериев подобия, форма записи которых будет зависеть от выбора основных единиц. Теоретически число таких возможностей равно числу сочетаний из 7 элементов по 3, т.е. $C_7^3 = 35$. Но в действительности их будет меньше, ибо легко заметить, что некоторые тройки параметров взаимозависимы, например d, t, g ; d, g, V и др. Поэтому $N < 35$. Из них один безразмерный параметр γ при любом выборе основных единиц сразу же дает критерий подобия.

Выберем в качестве основных единиц d, ρ, V (в (2.44) они выделены дугообразной черточкой наверху) и запишем функциональное уравнение в критериальной форме:

$$F\left(\gamma, \frac{tV}{d}, \frac{\eta}{\rho V d}, \frac{\tau_0}{\rho V^2}, \frac{g d}{V^2}, \frac{P d}{\rho V^2}, \frac{\Delta P d}{l \rho V^2}\right) = 0, \quad (2.45)$$

где индексы при P и ΔP в целях простоты опущены.

Обозначим:

$$\pi_1 = \gamma; \pi_2' = \frac{tV}{d}; \pi_3' = \frac{\eta}{\rho V d}; \pi_4' = \frac{\tau_0}{\rho V^2}; \pi_5' = \frac{g d}{V^2}; \pi_6' = \frac{P}{\rho V^2}; \pi_7' = \frac{\Delta P d}{l \rho V^2};$$

Здесь и далее критерии подобия снабжены штрихами в связи с тем, что такая форма записи, возможно, не окончательная, и они нуждаются в другой, более привычной форме записи.

Если в качестве основных единиц взять тройку параметров d, V, η , то получим

$$F\left(\gamma, \frac{tV}{d}, \frac{\rho V d}{\eta}, \frac{\tau_0 d}{\eta V}, \frac{g d}{V^2}, \frac{P d}{\eta V}, \frac{\Delta P d^2}{l \eta V}\right) = 0. \quad (1.46)$$

$$\text{Здесь } \pi_2'' = \frac{tV}{d}; \pi_3'' = \frac{\rho V d}{\eta}; \pi_4'' = \frac{\tau_0 d}{\eta V}; \pi_5'' = \frac{g d}{V^2}; \pi_6'' = \frac{P d}{\eta V}, \pi_7'' = \frac{\Delta P d^2}{l \eta V}.$$

Некоторые критерии подобия имеют специальные названия. Так, критерий

$$\pi_2 = \frac{1}{\pi_1'} = \frac{1}{\pi_2''} = \frac{d}{t V} = Ho = Sh$$

называется критерием гомохронности, или критерием Струхаля.

Критерий $\pi_3 = \frac{1}{\pi_3'} = \pi_3'' = \frac{V d \rho}{\eta} = Re$ есть хорошо известный и находящий очень широкое применение при гидродинамических расчетах критерий Рейнольдса.

Если π_4' поделить на π_3' , то получим критерий $\pi_4 = \frac{\tau_0 d}{\eta V} = Sen$ - критерий, часто называемый критерием Сен-Венана–Ильюшина, который в таком же виде записан в (2.46), это критерий π_4'' . Он широко используется при гидродинамических расчетах с вязко – пластичными жидкостями.

Если критерии $\pi_5' = \pi_5''$ поделить на 2 и перевернем дробь, то получим

$$\frac{2}{\pi_5'} = \frac{2}{\pi_5''} = \frac{V^2}{r g} = Fr, \text{ который называется критерием Фруда.}$$

Критерий $\pi_6 = \pi'_6 = \frac{P}{\rho V^2} = Eu$ носит название критерия Эйлера.

Критерий $\pi'_7 = \frac{\Delta P d}{l \rho V^2} = Eu'$ также представляет собой критерий Эйлера,

но в несколько видоизмененной форме записи.

Таким образом, получаем

$$F(\gamma, Sh, Re, Sen, Fr, Eu, Eu') = 0. \quad (2.47)$$

Рассмотрим теперь масштабы и индикаторы подобия.

Запишем полученные критерии подобия (для простоты - без критерия γ):

$$Sh = \frac{t V}{d}; \quad Re = \frac{\rho V d}{\eta}; \quad Sen = \frac{\tau_0 d}{\eta V}; \quad Fr = \frac{V^2}{g d}; \quad Eu = \frac{\Delta P}{\rho V^2}; \quad Eu' = \frac{\Delta P d}{l \rho V^2}.$$

Величины, относящиеся к натуре и модели, снабдим индексами n и m .

Тогда

$$Re_n = \frac{\rho_n V_n d_n}{\eta_n}; \quad Sen_n = \frac{\tau_{0n} d_n}{\eta_n V_n}; \quad Fr_n = \frac{V_n^2}{g_n d_n}; \quad Eu_n = \frac{\Delta P_n d_n}{l_n \rho_n V_n^2}.$$

$$Re_m = \frac{\rho_m V_m d_m}{\eta_m}; \quad Sen_m = \frac{\tau_{0m} d_m}{\eta_m V_m}; \quad Fr_m = \frac{V_m^2}{g_m d_m}; \quad Eu_m = \frac{\Delta P_m d_m}{l_m \rho_m V_m^2}.$$

Составим отношения критериев подобия модели и природы. Например, для критерия Рейнольдса получим

$$\frac{Re_m}{Re_n} = \frac{\rho_m}{\rho_n} \frac{V_m}{V_n} \frac{d_m}{d_n} \frac{\eta_n}{\eta_m} = \frac{\rho_c V_c d_c}{\eta_c} = 1, \quad (2.48)$$

где отношения одноименных параметров обозначены теми же буквами с индексом c . Комплексный параметр $\frac{\rho_c V_c d_c}{\eta_c}$, составленный из масштабов подобия, представляет собой индикатор подобия. Он имеет следующее определение:

Комплексы и симплексы, составленные из масштабов подобия и совпадающие по форме алгебраической записи с критериями подобия, называются индикаторами подобия.

Индикаторы подобия для остальных критериев подобия будут следующие:

$$\frac{t V}{d} = 1; \quad \frac{\tau_{0c} d_c}{\eta_c V_c} = 1; \quad \frac{V_c^2}{g_c d_c} = 1; \quad \frac{P_c}{\rho_c V_c^2} = 1; \quad \frac{\Delta P_c d_c}{l_c \rho_c V_c^2} = 1. \quad (2.49)$$

От индикаторов подобия легко перейти к системе уравнений, составленных из масштабов подобия:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_c V_c = d_c \\ V_c d_c \rho_c = \eta_c \\ \tau_{0c} d_c = \eta_c V_c \\ V_c^2 = g_c d_c \\ P_c = \rho_c V_c^2 \\ \Delta P_c d_c = \rho_c l_c V_c^2 \end{array} \right. \quad (2.50)$$

Положим выбран масштаб подобия $d_c = \lambda$. Тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} t_c V_c = \lambda \\ \lambda V_c \rho_c = \eta_c \\ \lambda \tau_{0c} = \eta_c V_c \\ V_c^2 = \lambda g_c \\ P_c = \rho_c V_c^2 \\ \lambda \Delta P_c = \rho_c l_c V_c^2 \end{array} \right. \quad (2.51)$$

Из последнего уравнения системы следует, что при наличии геометрического подобия линейные (диаметральные и осевые) размеры моделируются в одном и том же масштабе. Поэтому $l_c = d_c = \lambda$, и пятое уравнение в (2.51) переходит в следующее: $\Delta P_c = \rho_c V_c^2$.

Из четвертого уравнения системы имеем

$$V_c = \sqrt{\lambda g_c}. \quad (2.52)$$

Подставив его в первое уравнение, получим масштаб времени

$$t_c = \sqrt{\frac{\lambda}{g_c}}$$

Подставив (2.52) во второе уравнение, будем иметь

$$\frac{\eta_c}{\rho_c} = \sqrt{\lambda^3 g_c}. \quad (2.53)$$

Из третьего уравнения с учетом (2.52) получим

$$\frac{\tau_{0c}}{\eta_c} = \sqrt{\frac{g_c}{\lambda}}. \quad (2.54)$$

И, наконец, из (2.53) и (2.54) получаем

$$\eta_c = \sqrt{\lambda^3 g_c} \rho_c \quad \text{и} \quad (2.55)$$

$$\tau_{0c} = \sqrt{\lambda} g_c \rho_c. \quad (2.56)$$

Таким образом, масштабы по структурной вязкости и пластической прочности структуры вязко - пластичной жидкости сложным образом зависят от принятого масштаба геометрического подобия и гравитационной постоянной.

При изменении плотности жидкости, как отмечалось выше, изменяется и ее вязкость, изменяется также и динамическое напряжение сдвига, и совсем не просто приготовить модельную жидкость. Поэтому желательно было бы иметь дело с одной и той же жидкостью, при которой $\rho_c = \eta_c = \tau_{0c} = 1$. Но тогда из (1.55) получим $g_c = \frac{1}{\lambda^3}$, а из (2.56) $g_c = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, т.е. придем к явному противоречию. Более того, в земных условиях применительно к данной задаче невозможно выбрать масштаб g_c , отличный от единицы. Поэтому эта задача будет иметь единственное решение: $g_c = 1$, при этом $\eta_c = \sqrt{\lambda^3} \rho_c$ и $\tau_{0c} = \sqrt{\lambda} \rho_c$, что может быть достигнуто лишь путем тщательного подбора соотношения η и τ_0 при данной плотности жидкости ρ , на которую никаких ограничений не накладывается.

В зависимости от плотности жидкости давление и перепад давления будут моделироваться в одном и том же масштабе $P_c = \lambda \rho_c$ и $\Delta P_c = \lambda \rho_c$. Отсюда хорошо видно, что обеспечение подобия характеристик жидкостей вообще и вязко – пластичных жидкостей в особенности встречает серьезные трудности. Аналогичные трудности возникают при решении многих других задач механики и в других областях знаний.

Приведем наиболее часто встречающиеся критерии подобия.

Для вязко – пластичных жидкостей нередко вместо критериев Re и Sen пользуются обобщенным критерием Рейнольдса Re^* или критерием Хедстрема He , определяемыми в виде комбинаций критериев Re и Sen :

$$Re^* = \frac{Re}{1 + \frac{1}{6} Sen} = \frac{V d \rho}{\eta + \frac{\tau_0 d}{6 V}}; \quad (2.57)$$

$$He = Re \cdot Sen = \frac{d^2 \rho \tau_0}{\eta^2}. \quad (2.58)$$

При решении задач в различных областях науки и техники широкое применение находит также ряд критериев, имеющих специальные названия по имени ученых, впервые их предложивших. Вот некоторые из них.

1 Критерий Архимеда $Ar = \frac{d^3 \rho (\rho_{ms} - \rho) g}{\eta^2}. \quad (2.59)$

$$2 \text{ Критерий Ньютона } Ne = \frac{F_c}{\rho V^2 d^2}. \quad (2.60)$$

$$3 \text{ Критерий Ньютона } Ne = \frac{F t^2}{m l}. \quad (2.61)$$

$$4 \text{ Критерий Ньютона } Ne = \frac{M_{ep}}{J \omega^2}. \quad (1.62)$$

$$5 \text{ Критерий Коши } Ca = \frac{V}{\sqrt{\frac{\varepsilon E}{\rho}}}. \quad (2.63)$$

$$6 \text{ Критерий Прандтля } Pr = \frac{\nu}{g}. \quad (2.64)$$

$$7 \text{ Критерий Фурье } Fo = \frac{g t}{l^2}. \quad (2.65)$$

$$8 \text{ Критерий Пекле } Pe = \frac{V l}{g}. \quad (2.66)$$

$$9 \text{ Критерий Нуссельта } Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}. \quad (2.67)$$

$$10 \text{ Критерий Вебера } We = \frac{\rho V^2 d}{\sigma}. \quad (2.68)$$

Здесь ρ_{me} - плотность частиц, взвешенных в жидкости;

F_c - сила сопротивления движению тела на поверхности жидкости;

m - масса тела;

M_{ep} - вращающий момент, $[M][L]^2[T]^{-2}$;

J - массовый момент инерции вращающегося тела, $[M][L]^2$;

ε - относительная деформация тела в пределах упругости;

E - модуль Юнга, $[M][L]^{-1}[T]^{-2}$;

ν - коэффициент кинематической вязкости жидкости, $[L]^2[T]^{-1}$;

g - коэффициент температуропроводности, $[L]^2[T]^{-1}$;

α - коэффициент теплоотдачи, $[M][T]^{-3}[\theta]^{-1}$;

λ - коэффициент теплопроводности, $[L][M][T]^{-3}[\theta]^{-1}$;

σ - коэффициент поверхностного натяжения, $[M][T]^{-2}$.

Критерии подобия во многих случаях представляют собой отношение двух сил различной природы. Так, критерий Рейнольдса есть

$$Re = \frac{\text{силы инерции}}{\text{силы вязкости}} = \frac{\rho V^2 d^2}{\eta V d} = \frac{V d \rho}{\eta}.$$

Критерий Сен-Венана-Ильюшина

$$Sen = \frac{\text{силы пластической прочности структуры}}{\text{силы вязкости}} = \frac{\tau_0 d^2}{\eta V d} = \frac{\tau_0 d}{\eta V}.$$

Критерий Фруда $Fr = \frac{\text{силы инерции}}{\text{силы тяжести}} = \frac{2 V^2 \rho d^2}{g \rho d^3} = \frac{V^2}{gr}.$

Критерий Эйлера $Eu = \frac{\text{силы давления}}{\text{силы инерции}} = \frac{\Delta P d^2}{l d \rho V^2} \equiv \frac{\Delta P}{\rho V^2}.$

Что касается критерия Струхала Sh , то он представляет собой отношение: $Sh = \frac{\text{локальные силы}}{\text{конвективные силы}}.$

Критерии Фурье, Пекле, Нуссельта и Прандтля широко применяются при теплотехнических и термодинамических исследованиях и расчетах.

Можно получение критерии подобия с помощью применением системы относительных единиц. Идея этого способа заключается в том, чтобы для каждого изучаемого явления построить свою систему измерений, например, при изучении движения тел время отсчитывать не в секундах, а в долях от характерного времени.

При изучении колебаний можно ввести, например, вместо реального времени t величину $\tau = t \sqrt{F/m}$, записав уравнение движения в безразмерном виде:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{k}{\sqrt{mF}} \frac{dx}{d\tau} + \frac{C x}{F} = \sin \varpi \tau, \quad (2.69)$$

где положено $\varpi = \omega \sqrt{m/F}$.

Уравнение (2.69) получено из (2.9) делением всех его членов на F .

Возможность применения системы относительных единиц для получения критериев подобия вытекает из утверждения, которое является следствием основных теорем подобия: *если параметры, характеризующие одно явление P_1 , выражены в долях от некоторых определенным образом выбранных базисных величин $P_{1\delta}$, а для второго явления сходственные параметры P_2 выражены в долях от базисных $P_{2\delta}$ величин, выбранных таким же образом, то при равенстве относительных значений сходственных параметров $P^* = P_1/P_{1\delta} = P_2/P_{2\delta}$ первое и второе явления могут быть подобны.*

Выражение *могут быть подобны* означает следующее: равенство всех параметров, выраженных в относительных единицах, еще недостаточно для того, чтобы имелось подобие явлений. Поэтому можно считать критериями подобия выраженные в относительных единицах параметры лишь условно,

учитывая при этом, что для подоби явлений необходимо соблюдение *дополнительных условий*, накладываемых на выбор базисных величин второго процесса. Они следующие:

1) если в принятой системе единиц имеется k основных единиц, то нельзя выбирать независимо более k базисных величин;

2) если в явлении участвуют более k взаимосвязанных величин, то не всякие k базисных величин могут быть выбраны независимо. Признаком независимости величин является неравенство нулю определителя, составленного из показателей размерностей этих величин;

3) если определитель k -го порядка равен нулю, то количество независимых базисных величин должно быть меньше k , что также устанавливается с помощью определителя $(k - 1)$ порядка.

Последовательность определения условных критериев подоби, представленных в относительных единицах, имеет следующий вид:

1) выбор k независимых базисных величин, соответствующих принятой системе измерения;

2) проверка правильности выбора базисных величин путем выявления числа независимых между собой параметров и выбора одной из возможных комбинаций;

3) определение $m - k$ зависимых базисных величин исследуемого процесса;

4) запись всех m параметров исследуемого процесса в относительных единицах.

Число критериев подоби, полученных данным способом, равно числу безразмерных параметров $m - k$.

Приведем некоторые формальные методы получения критериев подоби и уравнений процессов. Поскольку критерии подоби (кроме геометрических, кинематических и некоторых других) представляют собой отношение двух сил, то их можно легко получить, составляя такие отношения.

Запишем, последовательно разворачивая, выражения для сил:

1) инерции при поступательном движении:

$$F_{инерц} = m a = l^3 \rho \frac{l}{t^2} = \rho l^2 V^2 \equiv \rho d^2 V^2;$$

2) вязкости: $F_{вязк} = \eta V l \equiv \eta V d;$

3) пластической прочности структуры жидкости: $F_{пл} = \tau_0 d^2;$

4) тяжести: $F_{тяжс} = m g = l^3 \rho g \equiv d^3 \rho g;$

4) инерции при криволинейном (вращательном) движении:

$$F_{инерц}^{уб} = m \omega^2 r = r^3 \rho \frac{V^2}{r^2} r = \rho V^2 r^2;$$

5) давления: $F_{давл} = P d^2.$

Составим теперь отношения некоторых сил:

- инерции к силам вязкости: $\frac{F_{инерц}}{F_{вязк}} = \frac{\rho d^2 V^2}{\eta V d} = \frac{\rho V d}{\eta} = Re,$

т.е. получаем критерий Рейнольдса.

- пластической прочности структуры жидкости к силам вязкости:

$$\frac{F_{пл}}{F_{вязк}} = \frac{\tau_0 d^2}{\eta V d} = \frac{\tau_0 d}{\eta V} = Sen,$$

получаем критерий Сен-Венана- Ильющина;

- давления к силам инерции при поступательном движении:

$$\frac{F_{давл}}{F_{инер}} = \frac{P l^2}{\rho V^2 l^2} = \frac{P}{\rho V^2} = Eu,$$

получаем критерий Эйлера;

- инерции к силам тяжести: $\frac{F_{инер}^{уб}}{F_{тяжс}} = \frac{V^2 l^2 \rho}{r^3 \rho g} = \frac{V^2}{r g} = Fr,$

получаем критерий Фруда;

- сопротивления движению тела на поверхности жидкости:

$$\frac{F_c}{F_{инер}} = \frac{F_c}{\rho V^2 l^2} = Ne,$$

получаем критерий Ньютона и т. д.

Методом анализа размерностей можно получить и многие известные формулы. Рассмотрим применение на ряде задач.

Задача 1. Определение периода колебаний математического маятника

Запишем уравнения для сил инерции $F = a m$ и тяжести $F = m g$.

Переходя к масштабам подобия, имеем $F_c = m_c g_c = m_c \frac{l_c}{t_c^2}$.

Отсюда $g_c = \frac{l_c}{t_c^2}$, и, решая это уравнение относительно t_c , получаем $t_c = \sqrt{\frac{l_c}{g_c}}$.

Возвращаясь от масштабам подобия к параметрам, будем иметь $t = c \sqrt{\frac{l}{g}}$,

где c - некоторая постоянная.

Решение дифференциального уравнения колебаний математического маятника $\frac{d^2 \varphi}{d t^2} = -\frac{g}{l} \sin \varphi$, где φ – угол отклонения маятника от положения

равновесия (от вертикали), дает значение постоянной $c = 2\pi$.

Тогда для периода колебаний данного тела получим хорошо известную из курса элементарной физики формулу

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2.70)$$

- закон математического маятника.

Задача 2. Определение периода колебаний груза, подвешенного на пружине

Запишем закон Гука для пружины: $F_p = C l$, где C - жесткость,

l – деформация, и закон Ньютона $F_u = m a$.

Перейдя к масштабам подобия, получим $F_{p.c} = C_c l_c$; $F_{u.c} = m_c a_c$.

Приравнивая масштабы сил, получаем: $C_c l_c = m_c a_c = m_c \frac{l_c}{t_c}$.

Отсюда $t_c = \sqrt{\frac{m_c}{C_c}}$.

Совершая обратный переход к параметрам, получаем $t = c \sqrt{\frac{m}{C}}$,

где c - некоторая постоянная.

Решение дифференциального уравнения колебаний груза с массой m на пружине с жесткостью C :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -C x + m g,$$

где x - отклонение груза от положения равновесия, дает значение постоянной $c = 2\pi$. Следовательно,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}}, \quad (2.71)$$

т.е. получили хорошо известную формулу для периода свободных колебаний груза с массой m , подвешенного на пружине с жесткостью C .

Задача 3. Моделирование центральной силы тяготения. Сила притяжения между массой центрального тела M и вращающегося

вокруг него на радиусе r тела с массой m равна $F = f \frac{M m}{r^2}$,

где f – постоянная всемирного тяготения.

Переходя к уравнению масштабов, получаем $F_c = f_c \frac{M_c m_c}{r_c^2}$.

Так как f и $M - const$, то $f_c M_c = 1$ и $F_c = \frac{m_c}{l_c^2}$.

С другой стороны:

$$F = ma; \quad F_C = m_C a_C; \quad \frac{1}{l_C^2} = a_C; \quad \frac{1}{l_C^2} = \frac{l_C}{t_C^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{l_C^3}{t_C^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{l_1^3}{l_2^3} \bigg/ \frac{t_1^2}{t_2^2} = 1.$$

Отсюда получаем известный третий закон Кеплера

$$\left(\frac{t_1}{t_2} \right)^2 = \left(\frac{l_1}{l_2} \right)^3. \quad (2.72)$$

Отношение квадратов времен обращения планет вокруг Солнца равно отношению кубов полуосей их эллиптических орбит.

Рассмотрим теперь третью теорему подобия. Эта теорема имеет несколько формулировок.

Первая формулировка

Необходимым и достаточным условием обеспечения подобия является пропорциональность сходственных параметров, входящих в условия однозначности, и равенство критериев подобия изучаемого явления.

Третья теорема подобия именуется также обратной теоремой подобия или теоремой Кирпичева – Гухмана.

Условия однозначности - это условия, определяющие индивидуальные особенности процесса или явления и выделяющие из общего класса конкретный процесс или явление.

К ним относятся следующие, не зависящие от механизма самого явления, факторы и условия:

- 1) геометрические свойства системы, в которой протекает процесс;
- 2) физические параметры среды и тел, образующих систему;
- 3) начальное состояние системы (начальные условия);
- 4) условия на границах системы (граничные условия);
- 5) взаимодействие объекта и внешней среды.

Нельзя математически сформулировать условия однозначности в общем виде. В каждом конкретном случае они могут быть различны в зависимости от рода решаемой задачи (и вида уравнения - если уравнение известно).

Третья теорема подобия в первой формулировке не распространяется на автомодельные процессы, поэтому она является ограниченной.

Практически более удачной является вторая формулировка третьей теоремы, сделана в 1983 году, поскольку она больше отвечает реальным задачам создания различных моделей. Эта формулировка состоит из трех положений.

Положение 1

Создание модели возможно, если критерии подобия, состоящие из величин, характеризующих только ее системные параметры, равны соответствующим критериям объекта - оригинала.

Положение 2

В созданной согласно положению 1 модели осуществление подобия процессов, подобных оригиналу, возможно, если критерии подобия, составленные только из параметров процессов, входящих в условия однозначности, и в том числе начальные условия, в модели и в натуре одинаковы.

Положение 3

Моделирование по 1 и 2 положениям возможно в сколь угодно сложных, нелинейных, анизотропных или имеющих вероятностно заданные параметры системах при условии одновременного выполнения нижеследующих дополнительных положений.

В заключении этого параграфа приведем справочные сведения по теории подобия

Первая теорема подобия имеет следующий вид: явления, подобные в том или ином смысле, имеют определенные сочетания параметров, называемые критериями подобия, численно одинаковые для подобных явлений.

Размерности некоторых производных величин будут следующие:

$$1) \text{ Площадь } S = l^2 \Rightarrow [L]^2.$$

$$2) \text{ Объем } Q = l^3 \Rightarrow [L]^3.$$

$$3) \text{ Момент силы } M = F \cdot l \Rightarrow [M] \cdot [L]^2 \cdot [T]^{-2}.$$

$$4) \text{ Момент инерции } I = m \cdot l^2 \Rightarrow [M] \cdot [L]^2.$$

$$5) \text{ Мощность } N = A / t \Rightarrow [M] \cdot [L]^2 \cdot [T]^{-3}.$$

$$6) \text{ Давление } P = F / S \Rightarrow [M] \cdot [L]^{-1} [T]^{-2}.$$

$$7) \text{ Плотность } \rho = m / V \Rightarrow [M] \cdot [L]^{-3}.$$

$$8) \text{ Динамическая вязкость } \eta \Rightarrow [M] \cdot [L]^{-1} \cdot [T]^{-1}.$$

$$9) \text{ Кинематическая вязкость } \nu = \frac{\eta}{\rho} \Rightarrow [L]^2 [T]^{-1}.$$

Вторая теорема подобия (π – теорема). Эта теорема позволяет получить критерии подобия и в тех случаях, когда уравнение процесса можно представить лишь в виде функциональной зависимости между параметрами системы и процесса:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_{n-1}), \text{ или}$$

$$F(y, x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_{n-1}) = 0,$$

где f и F означают лишь символы зависимости.

π – теорема имеет несколько формулировок, одна из которых (основная) следующая. *Всякое полное уравнение физического процесса, записанное в определенной системе единиц, может быть представлено в виде функциональной зависимости между критериями подобия, полученными из участвующих в процессе параметров.*

Таблица 2.2

Размерности физических величин

Параметр	Показатель степени		
	[L]	[M]	[T]
m	$\alpha_1 = 0$	$\beta_1 = 1$	$\gamma_1 = 0$
C	$\alpha_2 = 0$	$\beta_2 = 1$	$\gamma_2 = -2$
x	$\alpha_3 = 1$	$\beta_3 = 0$	$\gamma_3 = 0$
t	$\alpha_4 = 0$	$\beta_4 = 0$	$\gamma_4 = 1$
F_0	$\alpha_5 = 1$	$\beta_5 = 1$	$\gamma_5 = -2$
ω	$\alpha_6 = 0$	$\beta_6 = 0$	$\gamma_6 = -1$
k	$\alpha_7 = 0$	$\beta_7 = 1$	$\gamma_7 = -1$

При решении задач в различных областях науки и техники широкое применение находит также ряд критериев, имеющих специальные названия по имени ученых, впервые их предложивших. Вот некоторые из них.

1 Критерий Архимеда $Ar = \frac{d^3 \rho(\rho_{m\kappa} - \rho)g}{\eta^2}$.

2 Критерий Ньютона $Ne = \frac{F_c}{\rho V^2 d^2}$.

3 Критерий Ньютона $Ne = \frac{F t^2}{m l}$.

4 Критерий Ньютона $Ne = \frac{M_{\kappa p}}{J \omega^2}$.

5 Критерий Коши $Ca = \frac{V}{\sqrt{\frac{\varepsilon E}{\rho}}}$.

6 Критерий Прандтля $Pr = \frac{\nu}{g}$.

7 Критерий Фурье $Fo = \frac{g t}{l^2}$.

8 Критерий Пекле $Pe = \frac{V l}{g}$.

9 Критерий Нуссельта $Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}$.

10 Критерий Вебера $We = \frac{\rho V^2 d}{\sigma}$.

Здесь $\rho_{тв}$ - плотность частиц, взвешенных в жидкости;

F_c - сила сопротивления движению тела на поверхности жидкости;

m – масса тела;

$M_{вр}$ - вращающий момент, $[M][L]^2[T]^{-2}$;

J – массовый момент инерции вращающегося тела, $[M][L]^2$;

ε - относительная деформация тела в пределах упругости;

E - модуль Юнга, $[M][L]^{-1}[T]^{-2}$;

ν - коэффициент кинематической вязкости жидкости, $[L]^2[T]^{-1}$;

g - коэффициент температуропроводности, $[L]^2[T]^{-1}$;

α - коэффициент теплоотдачи, $[M][T]^{-3}[\theta]^{-1}$;

λ - коэффициент теплопроводности, $[L][M][T]^{-3}[\theta]^{-1}$;

σ - коэффициент поверхностного натяжения, $[M][T]^{-2}$.

Критерии подобия во многих случаях представляют собой отношение двух сил различной природы. Так, критерий Рейнольдса есть

$$Re = \frac{\text{силы инерции}}{\text{силы вязкости}} = \frac{\rho V^2 d^2}{\eta V d} = \frac{V d \rho}{\eta}.$$

Критерий Сен-Венана-Ильюшина

$$Sen = \frac{\text{силы пластической прочности структуры}}{\text{силы вязкости}} = \frac{\tau_0 d^2}{\eta V d} = \frac{\tau_0 d}{\eta V}.$$

Критерий Фруда $Fr = \frac{\text{силы инерции}}{\text{силы тяжести}} = \frac{2 V^2 \rho d^2}{g \rho d^3} = \frac{V^2}{gr}.$

Критерий Эйлера $Eu = \frac{\text{силы давления}}{\text{силы инерции}} = \frac{\Delta P d^2}{l d \rho V^2} \equiv \frac{\Delta P}{\rho V^2}.$

Что касается критерия Струхала Sh , то он представляет собой

отношение: $Sh = \frac{\text{локальные силы}}{\text{конвективные силы}}.$

Критерии Фурье, Пекле, Нуссельта и Прандтля широко применяются при теплотехнических и термодинамических исследованиях и расчетах.

следствием основных теорем подобия: *если параметры, характеризующие одно явление P_1 , выражены в долях от некоторых определенным образом выбранных базисных величин $P_{1б}$, а для второго явления сходственные параметры P_2 выражены в долях от базисных $P_{2б}$ величин, выбранных таким же образом, то при равенстве относительных значений сходственных параметров $P^* = P_1/P_{1б} = P_2/P_{2б}$ первое и второе явления могут быть подобны.*

Третья теорема подобия имеет несколько формулировок.

Первая формулировка

Необходимым и достаточным условием обеспечения подобия является пропорциональность сходственных параметров, входящих в условия однозначности, и равенство критериев подобия изучаемого явления.

Третья теорема подобия именуется также обратной теоремой подобия или теоремой Кирпичева – Гухмана.

Условия однозначности - это условия, определяющие индивидуальные особенности процесса или явления и выделяющие из общего класса конкретный процесс или явление.

К ним относятся следующие, не зависящие от механизма самого явления, факторы и условия:

- 1) геометрические свойства системы, в которой протекает процесс;
- 2) физические параметры среды и тел, образующих систему;
- 3) начальное состояние системы (начальные условия);
- 4) условия на границах системы (граничные условия);
- 5) взаимодействие объекта и внешней среды.

Нельзя математически сформулировать условия однозначности в общем виде. В каждом конкретном случае они могут быть различны в зависимости от рода решаемой задачи (и вида уравнения - если уравнение известно).

Третья теорема подобия в первой формулировке не распространяется на автомодельные процессы, поэтому она является ограниченной.

Практически более удачной является вторая формулировка третьей теоремы, сделана в 1983 году, поскольку она больше отвечает реальным задачам создания различных моделей. Эта формулировка состоит из трех положений.

Положение 1

Создание модели возможно, если критерии подобия, состоящие из величин, характеризующих только ее системные параметры, равны соответствующим критериям объекта - оригинала.

Положение 2

В созданной согласно положению 1 модели осуществление подобия процессов, подобных оригиналу, возможно, если критерии подобия, составленные только из параметров процессов, входящих в условия однозначности, и в том числе начальные условия, в модели и в натуре

одинаковы.

Положение 3

Моделирование по 1 и 2 положениям возможно в сколь угодно сложных, нелинейных, анизотропных или имеющих вероятностно заданные параметры системах при условии одновременного выполнения нижеследующих дополнительных положений.

2.3. Законы сохранения и принципы составления дифференциальных уравнений

Дифференциальные уравнения движения в большинстве случаев могут быть выведены, исходя из двух основных законов — сохранения массы и сохранения энергии. Введем основные понятия и определения для формулировки и постановке задач [3,4].

Рассмотрим иллюстративный пример. Обозначим через u скорость движения частицы. Причем, если движение установившееся, то $u(x) = u$, где x — расстояние от движущейся точки до некоторого начала $x = 0$. При такой записи задается зависимость (функциональная) скорости движущейся точки от ее положения, т. е. от значения местонахождения частицы (ее расстояние от начала отсчета $x = 0$). При помощи $u = u(x)$ можем определить ее скорость. Так, например, при свободном падении частицы массой m с высоты h в среде, сопротивлением которой пренебрегаем, скорость частицы в зависимости от ее положения определяется формулой

$$u = u(x) = \sqrt{2g(h-x)}$$

где x — расстояние частицы от поверхности земли (от начала отсчета $x = 0$).

Задаваясь различными значениями x , в формуле можно найти скорость падающей частицы на различных расстояниях от поверхности земли. При определении скорости частицы в различных ее положениях (ее расстояниях от поверхности земли) $x = x_1$; $x = x_2$ и т. д. достаточно в формуле (1.2) x заменить x_1 , x_2 и т. д. Если, например, $x_2 = x_1 + \Delta x$, то по формуле (1.2) $u_1 = \sqrt{2g(h-x_1)}$ — скорость частицы в положении $x = x_1$, а $u_2 = \sqrt{2g(h-x_2)} = \sqrt{2g(h-x_1-\Delta x)}$ скорость частицы в положении $x_2 = x_1 + \Delta x$.

Таким образом, $u = u(x)$ или $u = f(x)$ определяет скорость частицы, находящейся на расстоянии x от начала отсчета. Точно также $u = u(x + \Delta x)$ определяет скорость той же частицы на расстоянии $x + \Delta x$ от начала отсчета. Изменение скорости частицы при переходе из положения x в положение $x + \Delta x$ определится равенством

$$\Delta u = \Delta u(x) = u(x + \Delta x) - u(x).$$

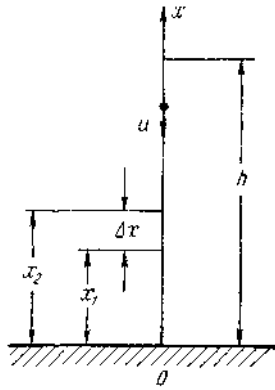


Рис. 2.2

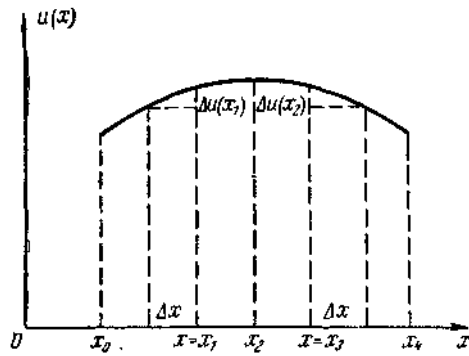


Рис. 2.3

В дальнейшем Δx будем называть приращением функции, а Δx — приращением аргумента. При этом малым значениям Δx соответствует малые значения Δu . Другими словами, если $\Delta x \rightarrow 0$, то и $\Delta u \rightarrow 0$.

Следует отметить, что $\Delta u = \Delta u(x)$ также является функцией x , т. е. при одном и том же приращении Δx приращения функции для различных точек $\Delta u(x_1)$ и $\Delta u(x_2)$ не будут равны. Чтобы показать последнее, рассмотрим эту формулу для точек $x_1 = 5\text{ м}$ и $x_2 = 8\text{ л}$. Пусть $h = 10\text{ м}$ и $\Delta x = 0,2\text{ м}$. Тогда

$$\Delta u(x_1) = \sqrt{2g(h - 5 - 0,2)} - \sqrt{2g(10 - 5)},$$

а

$$\Delta u(x_2) = \sqrt{2g(h - 8 - 0,2)} - \sqrt{2g(10 - 8)}, \text{ т.е.}$$

$$\Delta u(x_1) \neq \Delta u(x_2).$$

Так как в дальнейшем примем $\Delta x > 0$, то остановимся на определении знака приращения функции Δu .

Если $\Delta u(x) > 0$, то скорость точки возрастает. Если $\Delta u(x) < 0$, то функция убывает.

Таким образом, во всем интервале, где $\frac{\Delta u}{\Delta x} > 0$, функция $u(x)$

возрастает, а где $-\frac{\Delta u}{\Delta x} < 0$ — она убывает. На рис. 2.3 в интервале (x_1, x_2) функция $u(x)$ возрастает, и, следовательно, во всех точках этого интервала $-\frac{\Delta u}{\Delta x} > 0$, а в интервале (x_2, x_3) она убывает и, следовательно,

$\frac{\Delta u}{\Delta x} < 0$. Отношение $-\frac{\Delta u}{\Delta x}$ характеризует быстроту изменения функции в

зависимости от x на отрезке Δx . Чтобы найти характер изменения $u(x)$ в данной точке x , следует вычислить

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{du(x)}{dx} = u'(x) \quad (2.73)$$

Формула (2.73 1.3) характеризует быстроту изменения $u(x)$ в зависимости от x . Она дает производную от функции $u(x)$ по аргументу x . Если функция $u = u(x)$ есть зависимость скорости от положения движущейся точки, то $\frac{du}{dx}$ — дает значение градиента скорости u в направлении оси x , т. е. характеризует быстроту (и характер) изменения скорости. Если $\frac{du}{dx} > 0$, то скорость $u(x)$ на пути x возрастает, если же $\frac{du}{dx} < 0$, то она убывает.

Чем больше абсолютная величина $\frac{du}{dx}$, тем больше изменения скорости в данной точке x . Таким образом, если на каком-либо интервале $\frac{du}{dx}$ положительная величина, то это означает возрастание функции $u(x)$, а если отрицательная величина, то — убывание. Если же в какой-либо точке $x = x_2$ имеет место $\frac{du}{dx} = 0$, то в этой точке функция $u(x)$ достигает или своего экстремума или стационарной точки (точка перехода от возрастания к убыванию), или же своего минимума (точка перехода от убывания к возрастанию).

При неустановившемся движении, когда скорость движущейся частицы не только изменяется при переходе из одной точки в другую, но и в каждой точке изменяется во времени, обозначим через $u = u(x, t)$ скорость точки, находящейся на расстоянии x от начала отсчета в момент времени t . Точно также через $u = u(x, t + \Delta t)$ обозначим скорость частицы той же точки, но в момент времени $t_1 = t + \Delta t$. Таким образом, $u(x + \Delta x, t)$ будет означать скорость точки, находящейся на расстоянии $x + \Delta x$ от начала отсчета в момент времени t , и, наконец, $u(x + \Delta x, t + \Delta t)$ — скорость частицы в точке $x + \Delta x$ в момент времени $t + \Delta t$.

Следует особо отметить, что в общем случае величины $u(x, t)$, $u(x + \Delta x, t)$, $u(x, t + \Delta t)$, $u(x + \Delta x, t + \Delta t)$ между собой не равны, но они все будут стремиться к величине $u(x, t)$ при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$. В нашем примере $u = u(x, t), u = u(x, t + \Delta t)$ соответствуют значениям скорости частицы, находящейся на расстоянии x от начала отсчета в моменты времени t и

$t + \Delta t$. Поэтому $\Delta u_t(x, t) = u(x, t + \Delta t) - u(x, t)$ есть приращение скорости частицы в данной точке x за промежуток времени Δt . Точно также $\Delta u_x = u(x + \Delta x, t) - u(x, t)$ есть разность скоростей частиц, характеризующихся в точках $x, x + \Delta x$ в момент времени t . Другими словами, Δu_t характеризует изменение скорости во времени в данной фиксированной точке x , а Δu_x — изменение скорости в данный момент времени t в различных точках x и $x + \Delta x$. При этом $\Delta u_x(x, t)$ и $\Delta u_t(x, t)$ будут зависеть от x и t .

Если $\Delta u_t(x, t) = u(x, t + \Delta t) - u(x, t) > 0$, то в данной точке x скорость частицы со временем растет, если же $\Delta u_x(x, t) < 0$, то она убывает.

Точно также, если $\Delta u_x(x, t) > 0$, то скорость в точке $x + \Delta x$ в данный момент времени t больше, чем в точке x , если же $\Delta u_x(x, t) < 0$, то скорость в точке x больше, чем в точке $x + \Delta x$. Заметим, что и в этом случае при $\Delta x \rightarrow 0$ величина $\Delta u_x \rightarrow 0$ и при $\Delta t \rightarrow 0$ величина $\Delta u_t \rightarrow 0$.

Характер изменения $u(x, t)$ в различных точках x в данный момент времени t выражается формулой

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u_x(x, t)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (2.74)$$

Это равенство представляет собой частную производную от функции $u(x, t)$ по x в данный момент времени t , которая характеризует изменение функции (ее возрастание или убывание, а также быстроту изменения) вдоль оси x в данный момент времени t .

Точно также

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u_t(x, t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (2.75)$$

есть частная производная от функции $u(x, t)$ по времени t в фиксированной точке x , которая характеризует поведение функции $u(x, t)$ (возрастание и убывание и быстроту изменения во времени в рассматриваемой точке x).

Таким образом, если $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} > 0$, то во всех рассматриваемых точках функция $u(x, t)$ во времени растет, если же $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} < 0$, то — убывает. Точно также, если $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} > 0$, то в данный момент времени t вдоль оси x функция $u(x, t)$ растет, если же $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} < 0$, то — убывает.

Еще раз отметим, что при помощи формулы (2.74) определяется изменение скорости (функция $u(x, t)$ вдоль оси x в данный фиксированный

момент времени t , а при помощи формулы (2.75) — изменение скорости (функция $u(x, t)$ во времени в данной фиксированной точке x . Другими словами, при получении формулы (2.4) время t считаем фиксированным, а при получении формулы (2.5) значение x считается фиксированным. Поэтому

$$\frac{\partial u(x, t + \Delta t)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, t + \Delta t) - u(x, t + \Delta t)}{\Delta x} \quad (2.76)$$

означает изменение скорости (функции $u(x, t)$ вдоль оси x в данный момент времени $t + \Delta t$. Причем при $\Delta t \rightarrow 0$ формулы (2.74) и (2.75) совпадают. Точно также

$$\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, t + \Delta t) - u(x + \Delta x, t)}{\Delta t} \quad (2.77)$$

означает изменение скорости (функции $u(x, t)$ во времени в данной фиксированной точке $x + \Delta x$. Причем при $\Delta x \rightarrow 0$ формулы (2.77) и (2.75) совпадают.

Из математического анализа известно, что, если

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad (2.78)$$

$$\frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \varepsilon$$

где $\varepsilon \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, т. е. при малых значениях Δx величина ε сколь угодно мала.

Перепишем (2.78) в виде

$$u(x + \Delta x, t) - u(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Delta x + \varepsilon \Delta x. \quad (2.79)$$

Так как $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ величина конечная и не зависящая от Δx ,

то при малых значениях Δx второй член в правой части формулы (2.79), т. е. $\varepsilon \Delta x$, есть малая величина более высокого порядка,

чем первый член $-\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Delta x$. Поэтому, пренебрегая величиной $\varepsilon \Delta x$ по

сравнению с $-\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Delta x$ и обозначая $\Delta x = dx$ для значений $\Delta x \rightarrow 0$, из формулы (2.9) получаем

$$u(x + \Delta x, t) - u(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx \quad (2.80)$$

Аналогично из (2.79) получим

$$u(x, t + \Delta t) - u(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dt \quad (2.81)$$

При исследовании многомерных моделей нам понадобятся некоторые сведения из векторного исчисления, необходимые при дальнейшем изложении материала.

Векторная величина a определяется в общем случае тремя проекциями на оси декартовой системы координат, т. е.

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ — единичные векторы соответственно осей x, y и z . Величину a находим по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Градиент скалярной величины $\varphi(x, y, z)$ (grad) является вектором, направленным по нормали к поверхности $\varphi(x, y, z) = c$. Например, в случае плоскорадиальной фильтрации несжимаемой жидкости (одиночная цилиндрическая скважина в центре круглого цилиндрического пласта) градиент давления направлен по радиусу, так как поверхности равного давления — цилиндрические окружности. Градиент скалярной величины выражается формулой

$$\bar{a} = \text{grad} \varphi = \bar{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

где a_x, a_y, a_z — проекции вектора a соответственно на оси x, y, z и, следовательно,

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}$$

Широко применяется в нефтепромысловой механике и понятие скалярной величины — дивергенции векторной величины c

$$b = \text{div} \bar{c} = \frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z},$$

где c_x, c_y и c_z — проекции на оси x, y и z .

Исходя из определения дивергенции и градиента имеем

$$\text{div grad} \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi$$

Знак ∇^2 (набла в квадрате), или Δ (дельта), носит название оператора Лапласа.

Теперь рассмотрим применение закона сохранения массы для вывода уравнения неразрывности (сплошности) для различных случаев движения однородной и неоднородной жидкостей, являющегося математическим

выражением закона сохранения (постоянства) массы. В общем случае движения скорость u , плотность ρ и давление p являются функциями координат x, y, z , - движущейся частицы и времени t , т. е.

$$u = u(x, y, z, t);$$

$$\rho = \rho(x, y, z, t);$$

$$p = p(x, y, z, t).$$

При этом $u(x, y, z, t)$ — скорость жидкости в каждой данной точке пространства в момент времени t , т. е. она относится к определенным точкам пространства, а не к определенным частицам жидкости, передвигающимся в пространстве. То же самое относится к $\rho(x, y, z, t)$ и $p(x, y, z, t)$.

Рассмотрим одномерное движение жидкости в трубе (рис. 2.4) вдоль оси x . Считая жидкость несжимаемой, принимаем, что в ней невозможно образование пустот, т. е. соблюдается условие неразрывности (сплошности) движения. Исходя из этого, количество жидкости,

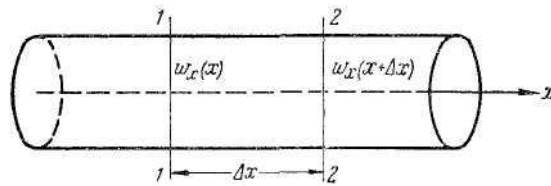


Рис. 2.4.

проходящей в единицу времени через сечения 1—1 (G_{1x}) и 2—2 (G_{2x}), должно быть одинаково, т. е.

$$G_{1x} = G_{2x}. \quad (2.82)$$

Обозначим через $w_x = \rho u$ массовую скорость в направлении оси x , где ρ — плотность рассматриваемой жидкости. Так как масса жидкости в рассматриваемом объеме не изменяется, то массовая скорость во всех сечениях будет одна и та же, т. е.

$$w_x(x + \Delta x) = w_x(x). \quad (2.83)$$

Следовательно,

$$\frac{dw_x}{dx} = 0.$$

Формула (2.84) выражает закон сохранения массы при одномерном течении жидкости. Исходя из формулы (2.83) или же (2.84), имеем $w_x =$

const, т. е. с учетом постоянства плотности получается $u_1 = u_2$, где u_1 — средняя скорость в сечении 1—1, а u_2 — в сечении 2—2.

При выводе уравнения (2.84) предполагается, что площадь поперечного сечения трубы постоянная. В противном случае, обозначая площадь поперечного сечения 1—1 через F_1 , а площадь 2—2 — через F_2 и учитывая, что

$$G_{1x} = w_1 F_1, G_{2x} = w_2 F_2, \quad (2.85)$$

из формулы (2.12) получаем

$$u_1 F_1 = u_2 F_2 \quad (2.86)$$

Из формулы (2.16) видно, что при установившемся течении несжимаемой жидкости средние скорости в поперечных сечениях обратно пропорциональны площадям этих сечений.

Так как при установившемся течении газа массовый расход по длине трубы имеет одно и то же значение, то, исходя из (2.82) и (2.85), для установившегося течения газа получаем

$$w_1 F_1 = w_2 F_2$$

или же

$$\rho_1 u_1 F_1 = \rho_2 u_2 F_2. \quad (2.87)$$

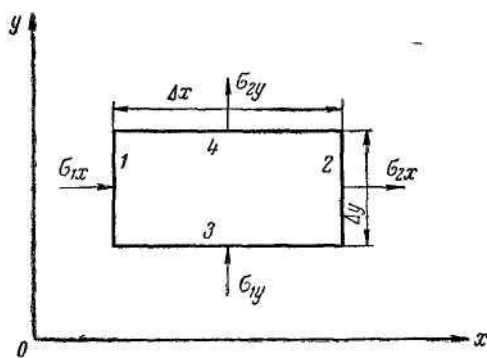


Рис. 2.5.

Рассмотрим случай плоского течения несжимаемой жидкости. Для этого возьмем параллелепипед со сторонами $\Delta x, \Delta y$, 1 объемом $\Delta v = 1 \cdot \Delta x \Delta y$ (рис. 2.5). Количество жидкости, протекающей через стороны 1, 2, 3 и 4 соответственно

$$\begin{aligned} G_{1x} &= w_x(x, y) \Delta y \\ G_{2x} &= w_x(x + \Delta x, y) \Delta y \\ G_{1y} &= w_y(x, y) \Delta x \\ G_{2y} &= w_y(x, y + \Delta y) \Delta x \end{aligned} \quad \text{будет}$$

где w_x и w_y — массовые скорости в направлениях осей ox и oy .

Заметим, что на рис. 4 не ограничиваем направление течения. Жидкость может протекать через грани 1 и 4 и вытекать через грани 2, 3 или же протекать через

границы 1 и 2 и вытекать через границы 3, 4. Также возможны и другие направления течения. Однако количество притекающей жидкости должно быть равно количеству вытекающей жидкости. Это объясняется тем, что рассматриваемая жидкость несжимаемая, т. е. в рассматриваемом объеме масса (плотность) жидкости не изменяется. Если, например, $G_{1x} = 7$; $G_{2x} = 3$ и $G_l = 5$, то в силу несжимаемости жидкости со стороны 4 должно вытекать $G_{2y} = 9$. Другими словами,

$$(G_{2x} - G_{1x}) + (G_{2y} - G_{1y}) = 0. \quad (2.88)$$

Закон сохранения массы (см. (2.88)) показывает, что количество притекающей в данный объем жидкости равно количеству вытекающей из него жидкости. Выражения в скобках в формуле (2.88) всегда имеют разные знаки, причем здесь приводятся алгебраические значения G_{1x}, G_{2x}, G_{1y} и G_{2y} . В нашем примере $G_{2y} - G_{1y} = 4$, а $G_{2x} - G_{1x} = -4$. Последнее замечание имеет место при любом варианте течения. Изменение количества жидкости в рассматриваемом прямоугольнике будет:

$$\Delta G_x = G_{2x} - G_{1x} = (w_x(x + \Delta x, y) - w_x(x, y))\Delta y; \quad (2.89)$$

в направлении оси ox и

$$\Delta G_y = G_{2y} - G_{1y} = (w_y(x, y + \Delta y) - w_y(x, y))\Delta x \quad (2.90)$$

в направлении оси oy .

Во всех случаях течения несжимаемой жидкости ΔG_x и ΔG_y будут иметь разные знаки и

$$\Delta G_x + \Delta G_y = 0. \quad (2.91)$$

Формула (2.91) получена с учетом того, что количество притекающей в рассматриваемый объем жидкости равно количеству вытекающей. Подставляя значения ΔG_x и ΔG_y из (2.89) и (2.90) в (2.91), получаем

$$(w_x(x + \Delta x, y) - w_x(x, y))\Delta y + (w_y(x, y + \Delta y) - w_y(x, y))\Delta x = 0.$$

Разделив последнее выражение на $\Delta x, \Delta y$ и перейдя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$, получим

$$\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} = 0 \quad (2.92)$$

Формула (2.92) выражает закон сохранения массы и называется уравнением неразрывности (сплошности) при плоском течении несжимаемой жидкости. В формуле (2.92) $\frac{\partial w_x}{\partial x}, \frac{\partial w_y}{\partial y}$ всегда имеют разные знаки. Это

объясняется тем, что если, например, $\frac{\partial w_x}{\partial x}$ отрицательная величина, то w_x убывает, и по направлению ox больше притекает жидкости (через сечение 1), чем вытекает (через сечение 2), что может привести к накоплению жидкости. Поэтому из-за несжимаемости жидкости в направлении oy утечка жидкости должна быть больше ее притока. w_y будет расти вдоль oy , т. е. значение $\frac{\partial w_y}{\partial y}$ должно быть положительным. Точно также при положительной $\frac{\partial w_x}{\partial x}$ утечка жидкости в направлении ox должна компенсироваться ее притоком в направлении oy , следовательно w_y будет убывать, т. е. значение $\frac{\partial w_y}{\partial y}$ должно быть отрицательным. Наконец, рассмотрим течение несжимаемой жидкости в пространстве. Для этого возьмем параллелепипед (рис. 2.6), грани которого параллельны координатным плоскостям и имеют площади:

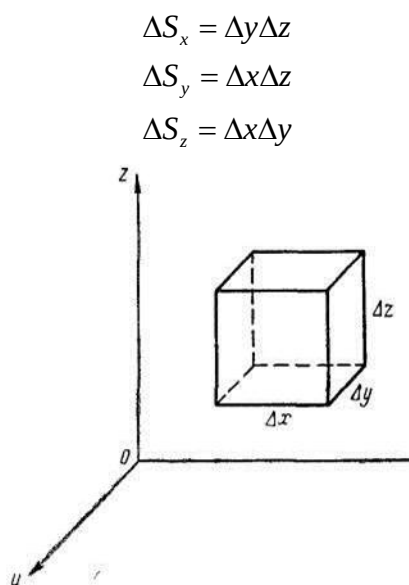


Рис.2.6

Количество жидкости, протекающей через грани взятого параллелепипеда, определяется по формулам:

$$\begin{aligned}
G_{1x} &= w_x(x, y, z) \Delta S_x = w_x(x, y, z) \Delta y \Delta z \\
G_{2x} &= w_x(x + \Delta x, y, z) \Delta S_x = w_x(x + \Delta x, y, z) \Delta y \Delta z \\
G_{1y} &= w_y(x, y, z) \Delta S_y = w_y(x, y, z) \Delta x \Delta z \\
G_{2y} &= w_y(x, y + \Delta y, z) \Delta S_y = w_y(x, y + \Delta y, z) \Delta x \Delta z \\
G_{1z} &= w_z(x, y, z) \Delta S_z = w_z(x, y, z) \Delta x \Delta y \\
G_{2z} &= w_z(x, y, z + \Delta z) \Delta S_z = w_z(x, y + \Delta z, z) \Delta x \Delta y
\end{aligned}$$

где w_z — массовая скорость в направлении оси z .

Изменение количества жидкости в рассматриваемом параллелепипеде будет в направлении осей x, y, z :

$$\begin{aligned}
\Delta G_x &= G_{2x} - G_{1x} = (w_x(x + \Delta x, y, z) - w_x(x, y, z)) \Delta y \Delta z = w_x(x, y, z) \Delta y \Delta z \\
\Delta G_y &= G_{2y} - G_{1y} = (w_y(x, y + \Delta y, z) - w_y(x, y, z)) \Delta x \Delta z = w_y(x, y, z) \Delta x \Delta z \\
\Delta G_z &= G_{2z} - G_{1z} = (w_z(x, y, z + \Delta z) - w_z(x, y, z)) \Delta x \Delta y = w_z(x, y, z) \Delta x \Delta y
\end{aligned}$$

Так как жидкость несжимаемая, то

$$\Delta G_x + \Delta G_y + \Delta G_z = 0 \quad (2.93)$$

В зависимости от направления движения две из этих величин будут иметь одинаковый знак, а третья величина — противоположный знак. В противном случае жидкость со всех сторон будет притекать в рассматриваемый объем, что физически невозможно из-за несжимаемости жидкости.

Подставив значения $\Delta G_x, \Delta G_y, \Delta G_z$ в (2.93), разделив их соответственно на $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ и перейдя соответственно к пределу при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$, получим

$$\frac{\partial w_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial w_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial w_z(x, y, z)}{\partial z} = 0 \quad (2.94)$$

Формула (2.94) выражает закон сохранения массы и называется уравнением неразрывности (сплошности) при пространственном течении несжимаемой жидкости. При получении уравнения (2.94) предполагается, что жидкость несжимаемая, т. е. масса (плотность) жидкости в рассматриваемом объеме не изменяется. Если в (2.94)

значения $\frac{\partial w_x}{\partial x}, \frac{\partial w_y}{\partial y}$ имеют одинаковый знак, например положительный,

то это означает, что в направлении ox и oy больше вытекает жидкости, чем притекает, так как в этом случае w_x и w_y возрастают. В связи с несжимаемостью жидкости эта утечка должна компенсироваться притоком в направлении oz . По направлению oz приток жидкости в рассматриваемый объем должен быть больше ее утечки из рассматриваемого объема, т. е.

w_z будет убывать и, следовательно, значение $\frac{\partial w_z}{\partial z}$ должно быть отрицательным.

Если жидкость сжимаемая, т. е. плотность (и, следовательно, масса) жидкости может изменяться во времени, то изменение количества жидкости в рассматриваемом объеме приведет к изменению плотности (массы) жидкости в том же объеме. Так, например, для сжимаемой жидкости (см. рис. 3) $w_x(x+\Delta x, t) \neq w_x(x, t)$ и за некоторый промежуток времени Δt разность, между количествами притока жидкости в данный объем и утечки из него приведет к изменению плотности жидкости в рассматриваемом объеме. При этом если $w(x, t) > w(x+\Delta x, t)$, т. е. в данный объем больше притекает жидкости, чем из него вытекает, то это приведет к увеличению плотности в данном объеме, если же $w(x, t) < w(x+\Delta x, t)$, то количество вытекающей из данного объема жидкости больше количества притекающей в него жидкости, что и приведет к уменьшению плотности жидкости в данном объеме. Таким образом, если в течение некоторого промежутка времени Δt величина $w(x+\Delta x, t) - w(x, t) < 0$, то плотность в данном объеме возрастает, т. е.

$$\rho(x, t + \Delta t) - \rho(x, t) > 0,$$

если же

$$\Delta G_x w(x, t + \Delta t) - w(x, t) > 0,$$

то плотность в данном объеме убывает, т. е.

$$\rho(x, t + \Delta t) - \rho(x, t) < 0.$$

Следовательно, возрастание массовой скорости $w(x, t)$ в данном объеме за некоторый промежуток времени Δt приводит к убыванию плотности жидкости в данном объеме, а убывание массовой скорости приводит к возрастанию плотности в данном объеме. Другими словами, $w(x, t + \Delta t) - w(x, t)$ и $\rho(x, t + \Delta t) - \rho(x, t)$ всегда будут

иметь противоположные знаки, т. е. знаки $\frac{\partial w(x, t)}{\partial x}$, $\frac{\partial w(x, t)}{\partial t}$ будут

разные. Таким образом, если для несжимаемой жидкости $\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = 0$,

то для сжимаемой жидкости $\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \neq 0$. При этом если $\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} < 0$,

то $w(x, t)$ вдоль оси x убывает, т. е. больше притекает жидкости в данный объем, чем из него вытекает, что приводит к возрастанию

плотности $\rho(x, t)$ во времени, или же $\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} > 0$ Точно

также, если $\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} > 0$, то $w(x, t)$ возрастает вдоль оси x , т. е.

больше вытекает жидкости из данного объема, чем в него притекает, что приводит к убыванию плотности $\rho(x,t)$ во времени,

$$\text{или же } \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} < 0.$$

Проиллюстрируем сказанное выше на примерах.

Обозначим через ΔV объем и положим, что $\Delta V = 50 \text{ м}^3$. Пусть количество притекающей за время Δt в этот объем жидкости будет G_1 , а количество вытекающей жидкости G_2 . Изменение массы в данном объеме за время Δt обозначим через ΔM . Тогда:

а) если $G_1 = 20 \text{ кг}$, а $G_2 = 19 \text{ кг}$, т. е. в указанный объем больше притекает жидкости, чем вытекает, то масса жидкости увеличивается на

$$\Delta M = \frac{G_1 - G_2}{\Delta V} = \frac{20 - 19}{50} = \frac{1}{50} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

т.е. на 2%

б) если $G_1 = 20 \text{ кг}$, а $G_2 = 21 \text{ кг}$, т. е. из этого объема больше вытекает жидкости, чем в него

$$\Delta M = \frac{G_2 - G_1}{\Delta V} = \frac{21 - 20}{50} = \frac{1}{50} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

т.е. на 2%

Теперь перейдем к получению математического выражения закона постоянства массы, т. е. к выводу уравнения неразрывности сжимаемой жидкости. Для одномерного движения жидкости (см. рис. 3) изменение количества жидкости ΔG_x за некоторый промежуток времени Δt составит

$$\Delta G_x = (w_x(x + \Delta x, t) - w_x(x, t)) F \Delta t, \quad (2.95)$$

где F — площадь поперечного сечения трубы.

Изменение же массы в рассматриваемом объеме $\Delta V = F \Delta x$ за тот же промежуток времени

$$\Delta M = -(\rho(x, t + \Delta t) - \rho(x, t)) F \Delta x. \quad (2.96)$$

Как было указано выше, $\Delta G_x, \Delta M$ всегда будут иметь разные знаки. Приравняв правые части (2.95) и (2.96), получаем выражение закона постоянства массы

$$(w_x(x + \Delta x, t) - w_x(x, t)) F \Delta t = -(\rho(x, t + \Delta t) - \rho(x, t)) F \Delta x.$$

В результате деления последнего выражения на $F \Delta x \Delta t$ при переходе к пределу при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$ находим

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = -\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} \quad (2.97)$$

Уравнение (2.97) называется уравнением неразрывности сжимаемой жидкости при линейном течении. Правая часть, т. е. $\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t}$, характеризует изменение плотности жидкости $\rho(x,t)$ во времени, а левая часть $\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}$ — изменение скорости вдоль оси x (оси трубы).

Поэтому $\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t}$ всегда будут иметь разные знаки. Уравнение (2.97) справедливо для любой точки x и в любой момент времени t . Это объясняется тем, что сечения x и $x + \Delta x$, а также моменты времени t и $t + \Delta t$ были взяты произвольно, а для получения (2.97) мы переходили к пределу при $\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$, т. е. формула (2.97) была получена для произвольной точки x и произвольного момента времени t . Последнее замечание относится также к случаю плоского и пространственного течения жидкости.

При плоском течении жидкости мы исходили из рис.2.5. Изменение количества жидкости за промежуток времени Δt определяли по формуле

$$(\Delta G_x + \Delta G_y) \Delta t = ((w_x(x + \Delta x, y, t) - w_x(x, y, t)) \Delta y + (w_y(x, y + \Delta y, t) - w_y(x, y, t)) \Delta x) \Delta t, \quad (2.98 \text{ 1.28})$$

а изменение массы в рассматриваемом объеме — по формуле

$$\Delta M = -(\rho(x, y, t + \Delta t) - \rho(x, y, t)) \Delta x \Delta y. \quad (2.99)$$

При выводе формул (2.98) и (2.99) рассматриваем параллелепипед с шириной, равной единице, длиной Δx ; и высотой Δy . Приравняв, правые части (2.98) и (2.99), предварительно разделив их на $\Delta x \Delta y \Delta t$, и перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{w_x(x + \Delta x, y, t) - w_x(x, y, t)}{\Delta x} + \\ & + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{w_y(x, y + \Delta y, t) - w_y(x, y, t)}{\Delta y} = \\ & = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho(x, y, t + \Delta t) - \rho(x, y, t)}{\Delta t} \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial w_x(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial w_y(x, y, t)}{\partial y} = - \frac{\partial \rho(x, y, t)}{\partial t} \quad (2.100)$$

Это уравнение называется уравнением неразрывности плоского течения

сжимаемой жидкости, и справедливо оно для любой точки (x, y) в любой момент времени t .

Наконец, для получения уравнения неразрывности при течении жидкости в пространстве мы исходили из рис.2.6. Изменение количества жидкости в рассматриваемом объеме $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ за промежуток времени Δt определяли при помощи равенства

$$\begin{aligned} (\Delta G_x + \Delta G_y + \Delta G_z) \Delta t = & ((w_x(x + \Delta x, y, z, t) - w_x(x, y, z, t)) \Delta y \Delta z + \\ & + (w_y(x, y + \Delta y, z, t) - w_y(x, y, z, t)) \Delta x \Delta z + \\ & + (w_z(x, y, z + \Delta z, t) - w_z(x, y, z, t)) \Delta x \Delta y) \Delta t \end{aligned} \quad (2.101)$$

Изменение же плотности в рассматриваемом объеме $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ в рассматриваемый промежуток времени Δt будет

$$\Delta M = -(\rho(x, y, z, t + \Delta t) - \rho(x, y, z, t)) \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (2.102)$$

Приравняв правые части (1.31) и (1.32), предварительно разделив их на $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$, и перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$, получим

$$\frac{\partial w_x(x, y, z, t)}{\partial t} + \frac{\partial w_y(x, y, z, t)}{\partial t} + \frac{\partial w_z(x, y, z, t)}{\partial t} = -m \frac{\partial \rho(x, y, z, t)}{\partial t} \quad (2.103)$$

Это уравнение представляет собой уравнение неразрывности при пространственном течении сжимаемой жидкости. Правая часть уравнения $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ характеризует изменение плотности во времени,

а левая — изменение количества жидкости в рассматриваемом объеме.

Уравнение (2.103) справедливо для любой точки пространства

(x, y, z) в любой момент времени t . Величины $\frac{\partial w_x}{\partial t}, \frac{\partial w_y}{\partial t}, \frac{\partial w_z}{\partial t}$ могут иметь как одинаковые, так и противоположные знаки. Однако во всех случаях знаки $\frac{\partial w_x}{\partial t} + \frac{\partial w_y}{\partial t} + \frac{\partial w_z}{\partial t}$ и $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ будут противоположными. Так, например, если в точках указанного объема значение $\frac{\partial w_x}{\partial t} + \frac{\partial w_y}{\partial t} + \frac{\partial w_z}{\partial t}$ положительное (при этом $\frac{\partial w_x}{\partial t}, \frac{\partial w_y}{\partial t}, \frac{\partial w_z}{\partial t}$ все могут быть положительными или иметь разные знаки), то это значит, что из указанного объема жидкости вытекает больше, чем притекает; последнее приводит к уменьшению плотности в этом

объеме во времени, т. е. $\frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$. Точно также, если значение

$\frac{\partial w_x}{\partial t} + \frac{\partial w_y}{\partial t} + \frac{\partial w_z}{\partial t}$ отрицательное при этом $\frac{\partial w_x}{\partial t}, \frac{\partial w_y}{\partial t}, \frac{\partial w_z}{\partial t}$ все могут быть

отрицательными или же иметь разные знаки), то в данный объем больше притекает жидкости, чем вытекает; последнее приводит к увеличению плотности во времени в этом объеме, и, следовательно, $\frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$.

При получении уравнения неразрывности (2.103) подсчитывалось изменение массы в объеме параллелепипеда $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$. Этот параллелепипед заполненный. Если рассмотреть фильтрацию жидкости через однородную пористую среду пористостью m , то объем, занятый жидкостью, станет равным $m \Delta V = m \Delta x \Delta y \Delta z$. Поэтому уравнение неразрывности в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial w_x}{\partial t} + \frac{\partial w_y}{\partial t} + \frac{\partial w_z}{\partial t} = -m \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.104)$$

Точно также для плоского и одномерного течения из уравнений (2.100) и (2.97) получим следующие уравнения

$$\frac{\partial w_x}{\partial t} + \frac{\partial w_y}{\partial t} = -m \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial t} = -m \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.105)$$

В случае смеси жидкостей и газов, т. е. переменности состава вдоль объема, уравнение неразрывности выводится для двухкомпонентной системы. Состав смеси определяется массовой концентрацией c — отношением массы данного компонента к общей массе жидкости в заданном элементарном объеме.

Изменение c происходит путем механического перемешивания — состав движущегося объема не меняется, но в каждой заданной неподвижной точке, находящейся в этом месте жидкости, c со временем будет изменяться.

При диффузии под w_x, w_y понимаются мольные скорости потока, а ρ будет соответствовать концентрации. Условием диффузии является наличие градиента концентраций диффундирующего компонента (аналогично тому, как температурный градиент является условием теплопроводности). Будем считать, что накапливающая масса вызывает увеличение концентрации

компонента $\frac{\partial c}{\partial t} dt$. С помощью этого прироста концентрации также можно выразить накапливающуюся и элементарном параллелепипеде массу $\frac{\partial c}{\partial t} dx dy dz dt$.

Теперь рассмотрим совместное движение двух несжимаемых и взаимно нерастворимых жидкостей в трубе вдоль ее оси x (рис.2.7). Будем считать, что движение происходит при постоянной температуре, т. е. процесс изотермический. Примером таких жидкостей могут быть нефть и вода. Выделим в трубе два сечения 1—1 и 2—2 соответственно на расстоянии x и $x + \Delta x$ от начала оси x . Объем, заключенный между этими сечениями, обозначим через ΔV . В этом объеме находятся жидкости 1 и 2. Процесс рассматриваем в единицу времени или за промежуток времени Δt . Задаемся соотношением между объемами этих жидкостей. Отношение объема одной жидкости ΔV_1 или другой ΔV_2 к объему, занимаемому обеими жидкостями ΔV , называется насыщенностью и обозначается соответственно через S_1 или S_2 (в долях или процентах).

Обозначим плотность первой жидкости ρ_1 объем этой жидкости, проходящей через сечение 1—1 за единицу времени, Q_1 , и проходящей через сечение 2—2, — Q_{12} . Для второй жидкости введем соответственно обозначения ρ_2, Q_2, Q_{22} . Тогда масса первой жидкости, прошедшей через сечение 1—1, будет $G_1 = \rho_1 Q_1$ а масса второй жидкости $G_2 = \rho_2 Q_2$. В случае движения одной несжимаемой жидкости, т. е. когда $S_1 = 1$ (или $S_2 = 0$), $Q_1 = Q_{22}$ (или $Q_2 = Q_{22}$). Ввиду того, что в объеме ΔV содержится объем ΔV_1 первой жидкости, объем ΔV_2

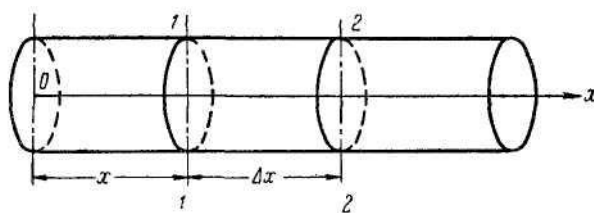


Рис.2.7.

второй жидкости и соотношения их в объеме ΔV могут изменяться, то в общем случае

$$Q_1 \neq Q_{12} \text{ и } Q_2 \neq Q_{22}. \quad (2.106)$$

Проиллюстрируем это на конкретном примере.

Пусть в объеме $\Delta V = 10 \text{ м}^3$ нефтенасыщенность составляет 50%, т. е. в нем содержится 5 м^3 воды. Количество жидкости, протекающей через сечение 1—1 (см. рис. 6) и вытекающей из сечения 2—2, может отличаться друг от друга. Так, если через сечение 1—1 поступает 2 м^3 нефти, то через сечение 2—2 может быть отобрано 2 м^3 нефти, а может быть больше или меньше, но не

больше 7 м^3 (суммы объема нефти в общем объеме и объема нефти, поступившей через сечение 2—2, должны быть равны объему нефти, поступающей в сечение 1—1). S_1 не изменяется во времени, т. е. процесс движения установившийся.

Если через сечение 2—2 отбирается нефти больше, чем втекает через сечение 1—1, то S_1 уменьшается. Так, если из сечения 2—2 отбирается 3 м^3 нефти, а через сечение 1—1 поступает 2 м^3 , то

$$S_1 = \frac{\Delta V_1 + Q_1 \Delta t - Q_{12} \Delta t}{\Delta V} = \frac{5 + 2 - 3}{10} = 0,4,$$

т. е. нефтенасыщенность снизится на 11) %.

Если через сечение 1—1 поступает 1 м^3 воды, то из сечения 2—2 может быть отобрана вода в количестве, равном, большем или меньшем чем 1 м^3 , но в соответствии с поступившим в сечение 1—1 и отобранном из сечения 2—2 объемом нефти, т. е. должен быть соблюден следующий баланс: $Q_1 - Q_{12} + Q_2 + Q_{22} = 0$

Следовательно, для рассмотренного примера

$$Q_{22} = Q_1 + Q_2 - Q_{12} = 2 + 1 - 3 = 0.$$

Таким образом, ввиду несжимаемости жидкостей сумма их объемов, поступивших в сечение 1—1, равна сумме объемов жидкостей, вытекающих из сечения 2—2,

$$Q_1 + Q_2 = Q_{12} + Q_{22} \quad (2.107)$$

Формула (2.107) отражает закон постоянства массы в конечной форме.

Масса каждой жидкости, а также сумма их масс в объеме ΔV во времени не постоянна. Так, в приведенном выше примере объем нефти в объеме ΔV станет равным 4 м^3 , а объем воды — 6 м^3 . При $\rho_1 = 800 \text{ т/м}^3$ и $\rho_2 = 1000 \text{ т/м}^3$ первоначальная масса жидкостей, находящихся в объеме ΔV , составляла $G(t) = (0,8 \cdot 5 + 1 \cdot 5) = 9 \text{ т}$.

После прохождения отмеченных объемов жидкостей через некоторое время Δt масса их в том же объеме составит $G(t + \Delta t) = 0,8 \cdot 4 + 1 \cdot 6 = 9,2 \text{ т}$. Следовательно, вес жидкости в объеме ΔV увеличивается на $0,2 \text{ т}$. Разность между массой жидкости, втекающей через сечение 1—1 и вытекающей через сечение 2—2, идет на изменение насыщенности в объеме ΔV .

$$G_{12} - G_1 = \Delta \sigma_1 \Delta V \rho_1, \quad (2.108)$$

где $\Delta \sigma_1$ — изменение нефтенасыщенности (в приведенном выше примере $\Delta \sigma_1 = 10\%$).

Рассмотрим процесс совместного движения двух жидкостей, характеризующийся величинами Q_1 , Q_2 , S_1 и S_2 , которые меняются; как вдоль оси x , так и во времени.

Запишем уравнения (2.107) и (2.108) для любого сечения и в любой

момент времени. Процесс исследуется в интервале Δx за промежуток времени Δt . Чтобы получить выражения (2.107) и (2.108) для любого сечения и в любой момент времени, необходимо, чтобы $\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$.

В приведенном примере Q_1 и Q_{12} принимались (и в дальнейшем принимаются) постоянными во времени, но они могут быть и переменными.

Таким образом, для первой жидкости в сечении 1—1 имеем ($Q_1(x, t)$), а в сечении 2—2 $Q_1(x + \Delta x, t)$, соответственно для второй жидкости имеем ($Q_2(x, t)$) и $Q_2(x + \Delta x, t)$. Следовательно,

$$Q_{12} = Q_1(x + \Delta x, t)$$

$$Q_{22} = Q_2(x + \Delta x, t)$$

В момент времени t в сечении 1—1 насыщенность будет $S_1(x, t)$, через промежуток времени Δt насыщенность станет $S_1(x, t + \Delta t)$, а в сечении 2—2 соответственно $S_1(x + \Delta x, t)$ и $S_1(x + \Delta x, t + \Delta t)$. Запишем закон постоянства массы (1.37) для данного элементарного объема

$$\begin{aligned} Q_1(x, t) + Q_2(x, t) &= Q_1(x + \Delta x, t) + Q_2(x + \Delta x, t) \\ Q_1(x + \Delta x, t) - Q_1(x, t) &= -Q_2(x + \Delta x, t) + Q_2(x, t) \end{aligned}$$

Разделим на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$.

Выражение (2.110 1.40) представляет собой закон постоянства массы в дифференциальной форме.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(Q_1(x + \Delta x, t) - Q_1(x, t))}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(Q_2(x + \Delta x, t) - Q_2(x, t))}{\Delta x},$$

или

$$\frac{\partial Q_1(x, t)}{\partial x} = - \frac{\partial Q_2(x, t)}{\partial x}, \quad (2.109)$$

или

$$\frac{\partial (Q_1 + Q_2)}{\partial x} = 0, \quad (2.110 1.40)$$

$$(G_1(x + \Delta x, t) - G_1(x, t)) \Delta t = (S_1(x + \Delta x, t) - S_1(x, t)) \Delta V \rho_1, \quad (2.111)$$

где

$$S_1(x + \Delta x, t) - S_1(x, t) = \Delta S_1$$

Запишем выражение (2.108) для элемента объема ΔV

Здесь ΔS_1 — изменение насыщенности во времени из-за накопления первой жидкости.

Отметим, что $S_1(x + \Delta x, t), S_1(x, t)$ будут иметь одинаковые значения при $\Delta x \rightarrow 0$. Следовательно, изменение насыщенности ΔS_1 в объеме ΔV (при $\Delta x \rightarrow 0$

можно выразить как $S_1(x, t + \Delta t) - S_1(x, t)$, так и $S_1(x + \Delta x, t + \Delta t) - S_1(x + \Delta x, t)$.

В выражении (2.111) левая часть умножена на Δt , так как масса жидкости G отнесена к единице времени, а процесс рассматривается в течение времени Δt .

Если масса первой жидкости в объеме ΔV увеличивается, то накопление имеет положительный знак

$$S_1(x, t + \Delta t) - S_1(x, t) > 0.$$

Это может быть в случае, если $G_1(x + \Delta x, t) < G_1(x, t)$, т. е. масса первой жидкости, поступающей через сечение 1—1, больше отбора ее через сечение 2—2. Поэтому в (1.41) знак в правой части должен быть противоположным знаку в левой части, т. е.

$$G_1(x + \Delta x, t) - G_1(x, t) = -(S_1(x, t + \Delta t) - S_1(x, t)) \Delta V \rho_1 \quad (2.112)$$

или, зная, что $\Delta V = \Delta x F$,

$$G_1(x + \Delta x, t) - G_1(x, t) = -(S_1(x, t + \Delta t) - S_1(x, t)) \Delta x \rho_1 F \quad (2.113)$$

Разделив обе части (2.113) на $\Delta x, \Delta t$ и перейдя к пределу при

$$\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(G_1(x + \Delta x, t) - G_1(x, t))}{\Delta x} = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(S_1(x, t + \Delta t) - S_1(x, t))}{\Delta t} F \rho_1$$

откуда для первой жидкости, получим

$$\frac{\partial G_1(x, t)}{\partial x} = -F \rho_1 \frac{\partial S_1(x, t)}{\partial t} \quad (2.114)$$

или

$$\frac{\partial Q_1(x, t)}{\partial x} = -F \frac{\partial S_1(x, t)}{\partial t} \quad (2.115)$$

Для второй жидкости аналогично

$$\frac{\partial G_2(x, t)}{\partial x} = -F \rho_2 \frac{\partial S_2(x, t)}{\partial t} \quad (2.116)$$

$$\frac{\partial Q_2(x, t)}{\partial x} = -F \frac{\partial S_2(x, t)}{\partial t} \quad (2.117)$$

Заметим, что (2.114), (2.115) и (2.110) являются независимыми уравнениями, а (2.116) и (2.117) могут быть получены из них. Или формула (2.110) может быть получена из уравнений (2.114), (2.115), (2.116), (2.117). Покажем это на примере.

Сложив (2.115) и (2.117), получим

$$\frac{\partial(Q_1+Q_2)}{\partial x} = -F \frac{\partial(S_1+S_2)}{\partial t} \quad (2.118)$$

Так как $S_1+S_2=1$, то

$$\frac{\partial(S_1+S_2)}{\partial t} = 0$$

Откуда

$$\frac{\partial(Q_1+Q_2)}{\partial t} = 0$$

Как было отмечено выше, в рассматриваемом примере необходимо определить Q_1 , Q_2 и S_1 . Зная же S_1 , можно определить $S_2 = 1 - S_1$, т. е. для трех величин имеется два уравнения (2.115) и (2.117).

Рассмотрим движение смеси жидкости и растворенного в ней газа и выделенном объеме трубы (см. рис.2.7 б). Будем считать, что движение происходит при постоянной температуре, т. е. процесс изотермический. Принимается, что жидкость несжимаема, а газ, как обычно, сжимаем.

В данном случае через сечение 1—1 поступают жидкость с растворенным в ней газом и газ в свободном состоянии. В объеме ΔV имеется насыщенность газом и жидкостью. Причем насыщенность газом в отличие от предыдущего случая может изменяться как в результате изменения количества газа в этом объеме, так и вследствие его сжимаемости.

Обозначения приняты те же, что и в предыдущем случае, но вместо первой жидкости взят свободный газ, а вместо второй — насыщенная газом жидкость.

Введем следующие дополнительные обозначения для масс газа и жидкости: G_3 — масса газа в растворенном состоянии, поступающего через сечение 1—1 за единицу времени; G_{32} — масса газа в растворенном состоянии, выходящего через сечение 2—2 за единицу времени; G_4 — масса растворенного газа в единице объема жидкости за единицу времени.

Принимаем, что масса растворенного в жидкости газа, по сравнению с массой самой жидкости очень мала. Поэтому ею можно пренебречь, т. е. G_2 и G_{22} рассмотрим как массу жидкости. Но это предположение не всегда справедливо. Для иллюстрации этого

приведем следующий пример. Пусть имеется нефть, плотность которой (при 20° С) $\rho = 780 \text{ кг/м}^3$, и газ, относительная плотность которого (по воздуху) $\Delta = 0,7$; газовый фактор $\Gamma = 100 \text{ м}^3/\text{м}^3$.

Относительная молекулярная масса газа будет

$$M_1 = M_3 \Delta = 29 \cdot 0,7 = 20,3,$$

где M_3 — молекулярный вес воздуха.

Число киломолей газа, растворенных в 1 м^3 нефти,

$$N = \frac{\Gamma}{22,4} = \frac{100}{22,4} = 4,46,$$

где 22,4 м^3 — объем 1 кмоль газа при нормальных условиях.

Кажущаяся плотность газа (при относительной плотности 0,7) в нефти (плотность 780 кг/м^3) $\rho_k = 320 \text{ кг/м}^3$. Следовательно, увеличение объема 1 м^3 нефти, вызванное растворением газа, составит

$$\Delta V_1 = \frac{M_2 N}{\rho_k} = \frac{20,3 \cdot 4,46}{320} = 0,283 \text{ м}^3.$$

Общий объем насыщенной газом нефти, отнесенной к атмосферным условиям, будет

$$V_1 = V + \Delta V_1 = 1 + 0,283 \text{ м}^3$$

а, масса нефти с растворенным в ней газом

$$G = G_0 + M_2 N = 780 + 20,3 \cdot 4,46 = 870,5 \text{ кг},$$

где G_0 — вес ненасыщенной нефти; V — объем ненасыщенной нефти. Плотность нефти с растворенным в ней газом рассчитывается по формуле

$$\rho_{12} = \frac{G}{V_1} = \frac{870,5}{1,283} = 680 \text{ кг/м}^3.$$

Следовательно, при растворении газа в жидкости масса ее увеличивается.

Рассмотрим изменение массы жидкости в элементарном объеме, т. е. запишем закон постоянства масс жидкости (по аналогии с предыдущим случаем)

$$(G_2 - G_{22}) \Delta t = \Delta S_2 \Delta V \rho_2.$$

Запишем закон постоянства массы для газовой фазы. Изменение массы газа за время Δt — разность массы газа, поступающего через сечение 1—1 (см. рис.2.7 б), и массы газа, выходящего из сечения 2—2, т. е. $(G_1 + G_3 - (G_{12} + G_{32})) \Delta t$, соответствует изменению массы газа в рассматриваемом объеме и равно сумме изменения масс растворенного и свободного газа в объеме ΔV , т. е. равно $\Delta G_4 \Delta V S_2 + \Delta G_1$.

Таким образом, можно записать

$$(G_1 + G_3 - (G_{12} - G_{32}))\Delta t = \Delta G_4 \Delta V S_2 + \Delta G_1 l. \quad (2.119)$$

В соответствии с ранее принятым (в предыдущем случае)
 $G_{32} = G_3(x + \Delta x, t)$.

Изменение G_1 происходит в результате изменения ρ_1, S_1 . Следовательно,
 $\Delta G_1 = (u(x, t + \Delta t) - u(x, t))\Delta V$; $u = \rho_1 S_1$.

Для того чтобы уравнения записать для любого момента времени и для любого сечения, сделаем следующее.

Запишем уравнение (2.119 1.49), согласно принятым обозначениям, в виде

$$(G_2(x + \Delta x, t) - G_2(x, t))\Delta t = (S_2(x, t + \Delta t) - S_2(x, t))F\Delta x\rho_2. \quad (2.120)$$

Если масса жидкости в объеме ΔV увеличивается, то накопление имеет положительный знак, т. е. $S_2(x, t + \Delta t) - S_2(x, t) > 0$. Это может быть при $G_2(x + \Delta x, t) < G_2(x, t)$, т. е. когда масса жидкости, поступающей в сечение

1—1, больше массы жидкости, отбираемой из сечения 2—2. Поэтому в (2.120 1.50) знак в правой части должен быть противоположным знаку в левой части

$$(G_2(x + \Delta x, t) - G_2(x, t))\Delta t = -(S_2(x, t + \Delta t) - S_2(x, t))F\Delta x\rho_2 \quad (2.121)$$

Разделив обе части (2.121) на Δx и Δt и перейдя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(G_2(x + \Delta x, t) - G_2(x, t))}{\Delta x} = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(S_2(x, t + \Delta t) - S_2(x, t))}{\Delta t} F\rho_2$$

$$\frac{\partial G_2(x, t)}{\partial x} = -F\rho_2 \frac{\partial S_2(x, t)}{\partial t} \quad (2.122)$$

Из уравнения (2.119) имеем

$$(G_1 + G_3 - (G_{12} + G_{32}))\Delta t = \Delta G_1 + \Delta G_4 \Delta x F S_2 \quad (2.123)$$

$$\begin{aligned} & (G_1(x, t) + G_3(x, t) - (G_1(x + \Delta x, t) + G_3(x + \Delta x, t)))\Delta t = \\ & = -((u(x, t + \Delta t) - u(x, t))F\Delta x - G_4 F\Delta x S_2) \end{aligned} \quad (2.124)$$

Разделив обе части уравнения (2.124) на $\Delta x, \Delta t$ и перейдя к пределу

при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G_1(x, t) - G_1(x + \Delta x, t) + G_3(x, t) - G_3(x + \Delta x, t)}{\Delta x} =$$

$$= - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(u(x, t + \Delta t) - u(x, t))}{\Delta t} S + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta G_4}{\Delta t} S^2$$

или

$$\frac{\partial (G_1(x, t) + G_3(x, t))}{\partial x} = -S \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + S \frac{\partial G_4(x, t)}{\partial t} \right) \quad (2.125)$$

Объем жидкости,
поступающей в сечение 1—1,

будет $-\frac{G_2}{\rho_2}$. Следовательно, в объеме $\frac{G_2}{\rho_2}$ содержится масса

растворенного газа $G_4 \frac{G_2}{\rho_2}$, т. е.

$$G_3 = G_4 \frac{G_2}{\rho_2}. \quad (2.126)$$

Таким образом, в трех уравнениях (2.122), (2.125) и (2.126) имеются неизвестные: G_x , G_2 , G_3 , G_4 , S_2 и ρ_1 .

Приведенному выше примеру аналогичен случай движения газоконденсатной смесив трубах или в пористой среде. В газоконденсатной системе в отличие от газонефтяной при снижении давления выпадает жидкость-конденсат. Следовательно, в выделенный объем поступает газ с конденсатом. Принимая, что выпавший конденсат неподвижен, и пренебрегая изменением массы газа от выпадения конденсата, можно применить закон постоянства массы для определения изменения насыщенности конденсатом рассматриваемого объема.

Через сечение 1—1 в единицу времени прошли масса газа G_1 и масса конденсата G_2 . Через сечение 2—2 отобраны масса газа G_{12} и масса конденсата G_{22} . Тогда масса конденсата, накопившегося в объеме в единицу времени,

$$\Delta G_2 = G_{22} - G_2.$$

Это приращение массы конденсата приведет при условии несжимаемости конденсата ($\rho = \text{const}$) к изменению объема в единицу времени на величину $\frac{\Delta G_{12}}{\rho_2}$.

За отрезок времени Δt изменение объема будет $\frac{\Delta G_{12}}{\rho_2} \Delta t$. Это изменение объема приведет к изменению насыщенности

конденсатом на величину ΔS_2 .

Аналогично предыдущему случаю запишем

$$\left(\frac{G_2(x+\Delta x, t) - G_2(x, t)}{\rho_2} \right) \Delta t = - (S_2(x, t+\Delta t) - S_2(x, t)) F \Delta x \quad (2.127)$$

Знак минус перед правой частью поставлен, исходя из следующих соображений: если $G_2(x+\Delta x, t) > G_2(x, t)$, то насыщенность конденсата в объеме ΔV уменьшается, т. е. $S_2(x, t+\Delta t) < S_2(x, t)$, и наоборот.

Разделив обе части уравнения (2.127) на Δx и Δt и перейдя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\frac{\partial G_2(x, t)}{\partial x} = -F \rho_2 \frac{\partial S_2(x, t)}{\partial t} \quad (2.128)$$

Так как было принято, что масса газа не изменяется при выпадении конденсата, то для газовой фазы можно написать закон постоянства массы в форме, записанной выше,

$$\frac{\partial G_1(x, t)}{\partial x} = -F \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \quad (2.129)$$

В уравнениях (2.128) и (2.129), описывающих процесс движения газоконденсатной системы, имеются четыре неизвестных.

Перейдем к примерам применения закона сохранения энергии для механических и тепловых процессов.

Как известно, для механических процессов сумма кинетической и потенциальной энергии постоянна.

А для тепловых процессах закон сохранения энергии отражается в виде первого закона термодинамики, который формулируется следующим образом: бесконечно малое изменение внутренней энергии состоит из двух частей — из количества тепла, полученного телом, и произведенной телом работы.

Работа при поступлении тепла зависит от начального и конечного состояния тела и от пути, по которому изменяется состояние тела. В связи с этим нельзя рассматривать тепловой эффект процесса как разность этих количеств в конечном и начальном состояниях.

С поглощением тепла в количестве dQ температура повышается на величину dT . Отношение $c = \frac{dQ}{mdT}$ (где m — масса тела) называется теплоемкостью тела. В физике пользуются теплоемкостью при постоянном давлении c_p и теплоемкостью при постоянном объеме c_v .

Применяя первый закон термодинамики для исследования процесса распространения тепла в теле, ограниченном сечениями сечения 1—1 и 2—2 (рис. 2.8) получим балансовое равенство для теплот. Пусть тело имеет какую-то определенную начальную температуру. К одному концу тела подводится источник тепла или холода. Соответственно этому в теле происходит нагревание или охлаждение.

Температура в какой-либо точке тела будет зависеть от расстояния точки до места подвода тепла и времени

$$T = T(x, t).$$

На текущее распределение температуры в теле оказывает влияние начальное распределение температуры, а также условия в концевых сечениях тел, в частности от температуры на обоих концах тела.

В приведенном примере через сечение 1—1 в единицу времени подводится количество тепла, равное $Q(x, t)$. Через сечение 2—2 в единицу времени отводится количество тепла, равное $Q(x + \Delta x, t)$. Разность между этими количествами тепла

$$\Delta Q = Q(x + \Delta x, t) - Q(x, t) \quad (2.130)$$

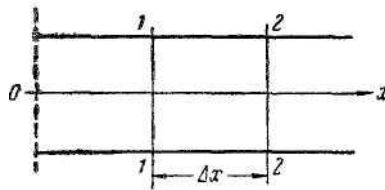


Рис. 2.8

в соответствии с первым законом термодинамики затрачивается на изменение температуры в отсеке между сечениями 1—1 и 2—2.

Если $\Delta Q < 0$, то тело нагревается, в противном случае — охлаждается, т. е. в первом случае

$$\Delta T = (T(x, t + \Delta t) - T(x, t)) > 0, \quad (2.131)$$

а во втором — $\Delta T < 0$.

При изменении количества подводимого и отводимого тепла на величину ΔQ температура тела (в соответствии с законом сохранения энергии и определением теплоемкости) должна изменяться на величину

$$\Delta T = -\frac{\Delta Q}{\Delta m_1 c_v} \Delta t \quad (2.132)$$

$$\Delta m_1 = \rho \Delta x S$$

где Δm_1 — элементарная масса тела; S — площадь поперечного сечения тела; ρ — плотность тела.

Так как $\Delta Q > 0$ при $\Delta T < 0$ и $\Delta Q < 0$ при $\Delta T > 0$, то в правой части (2.132) поставлен знак минус.

Подставив в (2.130) значения ΔQ и ΔT соответственно из (2.130), (2.131

) и разделив его на $\Delta x, \Delta t$ и перейдя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\frac{1}{S\rho c_v} \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.133)$$

Таким образом, в одном уравнении получаем два неизвестных Q и T .

Рассмотрим, каким образом можно получить недостающие уравнения. Например, для движения смеси двух несжимаемых жидкостей необходимо составить еще одно уравнение. Но в этом случае процесс определяется и давлением. Поэтому необходимо иметь два уравнения для нахождения Q_1 и Q_2 .

При изотермическом совместном движении газа и жидкости в трубопроводе неизвестными были ρ и V , а уравнение — одно. Но, как известно, ρ связано с давлением при помощи уравнения состояния Клайперона — Менделеева

$$\rho = \frac{p}{2RTg},$$

где p — давление.

Однако при этом появляется новое неизвестное p , т. е. опять не хватает одного уравнения. Приведенное выше уравнение соответствовало закону постоянства массы. Для исследуемого явления необходимо применить еще закон сохранения энергии, например в виде уравнения Бернулли. Но в этом случае появится новое неизвестное — работа сил трения, т. е. требуется опять одно уравнение для определения силы трения. Это уравнение устанавливается экспериментально.

Для совместного движения несжимаемых жидкостей закон сохранения энергии приводит также к необходимости определения силы трения. Указанный процесс характеризуется и давлением. Поэтому и в этом случае необходимо экспериментально составить одно уравнение для сил трения. Если движение неизотермическое, то следует применить и первый закон термодинамики. Тогда появятся два неизвестных Q и T , связанных одним уравнением типа

$$\frac{1}{S\rho c_v} \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial T}{\partial t},$$

т. е. и в этом случае необходимо определить одну экспериментальную зависимость для Q .

При изотермическом движении газированной жидкости в трубопроводе или при фильтрации газированной жидкости в пористой среде плотность газа ρ связана с давлением p . Появляется еще одно неизвестное p . Вводя понятие массовой скорости для жидкости w_1 и газа w_2 , можно через них вычислить соответственно G_1 и G_2 . Неизвестными в этом случае являются $w_1, w_2, G_3, G_4, S_2, \rho, p$. Таким образом, необходимо экспериментально определить зависимости для w_1, w_2 и G_3 .

При использовании закона сохранения энергии в этом случае необходимо знать работу силы трения, т. е. силу трения (новое неизвестное), причем применение закона сохранения энергии не уменьшает числа недостающих уравнений. Наоборот, количество уравнений увеличивается, соответственно этому увеличивается и количество неизвестных. При движении газоконденсатной смеси в трубах или в пористой среде имеем два уравнения и четыре неизвестных G_1, G_2, ρ_1, ρ_2 . Плотность ρ_1 связана с давлением при помощи уравнения состояния.

Таким образом, необходимо экспериментально определить две зависимости — для G_1 и G_2 .

При исследовании процесса распространения тепла в теле имеем два неизвестных Q и T и одно уравнение. Закон постоянства массы выполняется тождественно и недостающее уравнение для Q определяется экспериментально.

Пример Движения в круглой цилиндрической трубе вдоль кольца.

Покажем применение закона сохранения механической энергии. Обозначим через τ — касательное напряжение. Выведем дифференциальное уравнение движения в круглой цилиндрической трубе вдоль кольца. Для этого выделим в зоне на расстоянии r от оси трубы элементарный кольцевой слой толщиной dr и длиной l и составим уравнение равновесия сил, действующих на выделенный элемент. Этими силами будут: тормозящая сила $2\pi(r+\Delta r)l(\tau+\Delta\tau)$, ускоряющая сила $2\pi r l \tau$, сила давления $2\pi r dr \Delta\rho$ и сила инерции $2\pi r l \rho \frac{\partial v}{\partial t}$.

По принципу Д'Аламбера, сумма этих сил должна равняться нулю. Если при этом учесть, что первая и последняя из этих сил действуют в направлении, обратном действию остальных двух сил, то

$$-2\pi(r+dr)l(\tau+d\tau)+2\pi r dr \Delta\rho+2\pi r l \tau-2\pi r l \rho \frac{\partial v}{\partial t}=0 \quad (2.134)$$

Пренебрегая величиной $dr dx$ по сравнению с другими членами, получаем

$$-\tau dr - r d\tau + r dr \frac{\Delta\rho}{l} - r dr \rho \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (2.135)$$

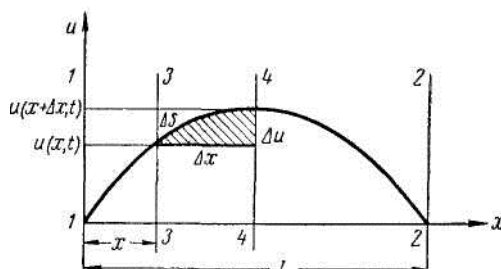


Рис.2.9.

Пример. Вывод уравнения колебаний натянутой упругой струны на основе закона сохранения энергии.

Колебания принимаются малыми, что позволяет пренебречь увеличением длины струны и приводит к постоянству натяжения в любом сечении и в любой момент времени. Пренебрегаем трением, т. е. диссипация (рассеяние) энергии принимается равной нулю (так как приток энергии извне принимается равным нулю). Предполагаем, что начальный момент времени соответствует состоянию равновесия. Например, в начальный момент времени струна натянута, находится в горизонтальном положении и концы ее закреплены. Для того чтобы начался процесс колебания струны, необходимо ее вывести из положения равновесия, положим, начальным импульсом. Обозначим отклонение струны от ее положения равновесия через $\xi(x, t)$.

На рис. 8 цифрами 1—1 и 2—2 обозначены сечения, в которых закреплены концы струны. Выделим на расстоянии x от начала оси x элементарный отрезок струны Δx между сечениями, обозначенными цифрами 3—4.

Для определения кинетической энергии необходимо найти скорость точек этого отрезка струны. Смещение (отклонение от положения равновесия) точки 3 будет $\xi(x, t)$ а через интервал времени Δt оно составит $\xi(x, t + \Delta t)$.

Средняя скорость этой точки равна

$$\frac{\xi(x, t + \Delta t) - \xi(x, t)}{\Delta t} \quad (2.136)$$

Мгновенная скорость в точке x определяется при $\Delta t \rightarrow 0$ соотношением

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\xi(x, t + \Delta t) - \xi(x, t)}{\Delta t} = \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Учитывая, что масса отрезка струны $\rho l \Delta x$, где ρl линейная плотность, получим изменение кинетической энергии элемента Δk имеет вид

$$\Delta k = \frac{1}{2} \rho l \Delta x \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \text{ или в дифференциалах } dk = \frac{1}{2} \rho l dx \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2.$$

Суммируя по длине получим

$$k = \frac{1}{2} \int_0^l \rho l \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.137)$$

Получим аналогичным образом соотношение для потенциальной энергии

$$d\Pi = P(dl - dx) \quad (2.138)$$

Применяя известную из курса математики формулу длины дуги кривой, получим

$$dl = \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2} \right) dx.$$

Тогда

$$d\Pi = P \left(\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2} \right) - 1 \right) dx,$$

или

$$\Pi = \int_0^l P \left(\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2} \right) - 1 \right) dx.$$

Используя для корня разложение в ряд Маклорена биномиального выражения, и ограничиваясь квадратичными членами получим

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2$$

и выражение для потенциальной энергии для всей струны

$$\Pi = \int_0^l P \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right) dx.$$

Поскольку сумма потенциальной и кинетической энергии составляет постоянную величину равную полной энергии получим $k + \Pi = \Phi$.

$$\frac{1}{2} \int_0^l \left(\rho l \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + P \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right) \right) dx = \Phi.$$

Продифференцируем по t

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \int_0^l \left(\rho l \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + P \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right) \right) dx \right) = 0$$

или

$$\int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho l \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial t} P \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right) \right) dx = 0$$

Продифференцируем как сложную функцию в подинтегральном выражении, тогда получим

$$\int_0^l \left(\rho l \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + P \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t} \right) dx = 0 \quad (2.139)$$

или интегрируя по частям второе слагаемое и учитывая, что концы струны жестко закреплены т.е. перемещения в начале и конце струны равны нулю

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=l} = 0$$

получим

$$\int_0^l \left(\rho l \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - P \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) dx = 0 \quad (2.140)$$

Учитывая, что выражение под знаком интеграла не отрицательно, то интеграл равен нулю в том случае, когда подинтегральная функция равняется нулю.

$$\rho l \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - P \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \quad (2.141)$$

Отсюда, поскольку $\frac{\partial \xi}{\partial x} \neq 0$, можно разделить левую и правую части уравнения на $\frac{\partial \xi}{\partial x}$. Тогда получим

$$\rho l \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = P \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (2.142)$$

Это равенство представляет собой дифференциальное уравнение колебаний струны. Отметим, что здесь одно уравнение и одна неизвестная функция – поперечное перемещение струны. Натяжение струны было принято постоянным, поэтому оно исключено как неизвестное.

Приведем еще один пример. Рассмотрим продольное колебание трубы, которое происходит в процессе спуска-подъема бурильных труб или же в процессе непосредственного бурения. Так, например, если имеется шарошечное долото, которое в процессе бурения производит колебательное движение, то в упругих бурильных трубах возникает продольное колебание.

Способ бурения принимается турбинным, так как при роторном в бурильных трубах возникают крутильные колебания, вызванные вращением инструмента. Чтобы не усложнять вывода, трением пренебрегаем. Дифференциальное уравнение в этом случае имеет такой же вид, как и для колебания струны. Но в отличие от колебания струны при продольном колебании упругие напряжения, возникающие в каждом сечении, уже не могут быть приняты постоянными как в сечениях, так и во времени.

Дифференциальное уравнение для этого случая можно получить из уравнения движения.

В данном продольном стержне смещение происходит вдоль оси.

Обозначим через $\xi(x, t)$ смещение вдоль оси ox (см. рис.2.10).

Скорость вдоль оси Ox

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\xi(x, t + \Delta t) - \xi(x, t)}{\Delta t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} = u(x, t)$$

Тогда ускорение вдоль оси Ох имеет вид

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

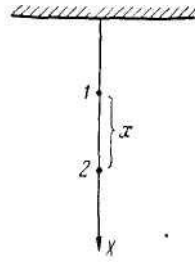


Рис. 2.10

Упругое напряжение в сечении 1—1 в момент времени t будет $F(x, t)$, а в сечении 2—2 — будет $F(x + \Delta x, t)$.

Согласно второму закону Ньютона можно записать

$$\Delta m_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F(x + \Delta x, t) - F(x, t)$$

или

$$\Delta m_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \Delta x F \rho \quad (2.142)$$

где ρ — плотность; F — площадь поперечного сечения стержня.

Разделив уравнение (1.78) на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим

$$\rho F \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x, t) - F(x, t)}{\Delta x} \quad (2.143)$$

$$\rho F \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x} \quad (2.144)$$

Таким образом, имеем одно уравнение и два неизвестных ξ и F .

Данные уравнения можно получить также, исходя из закона сохранения энергии.

В качестве примера возьмем вывод уравнения колебания груза на упругой нити на основе закона сохранения энергии.

Рассмотрим колебание груза, подвешенного к упругой нити. Примем, что сила упругости пропорциональна удлинению x (рис. 2.10).

На рис. 2.10 показаны: 1 — положение равновесия, 2 — отклонение от положения равновесия, которое изменяется в зависимости от времени. Если

в начальный момент времени груз находится в положении равновесия, то $x = 0$.

Кинетическая энергия в положении 2 равна $\frac{m(x')^2}{2}$, где m — масса; $x' = \frac{dx}{dt}$ — скорость груза.

Потенциальная энергия — это энергия упругости нити. Силы упругости приняты пропорциональными x , т. е. kx совершает элементарную работу $kx dx$, соответствующую элементарной потенциальной энергии. В положении 2 потенциальная энергия определяется как

$$\int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \Phi = \text{const}, \quad (2.145)$$

где Φ — полная энергия в положении 2.

Дифференцируя (2.145) по t , получаем

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} + kx \frac{dx}{dt} = 0.$$

При $x' \neq 0$

$$mx'' + kx = 0. \quad (2.146)$$

Уравнение (2.146) и есть выражение второго закона Ньютона.

Во всех приведенных случаях, как правило, число неизвестных было больше числа уравнений, за исключением одного случая — поперечного колебания струны. Однако и в последнем, как было отмечено, одно неизвестное — натяжение струны — исключили, приняв его постоянным.

Если совершаются продольные колебания стержня закон постоянства массы также выполняется тождественно и не дает нового уравнения. В этом случае недостает одного уравнения для вычисления упругих напряжений, которое находят экспериментально.

Для механических процессов необходимы данные о характерных свойствах рассматриваемой сплошной среды. Эти свойства описываются так называемым определяющим уравнением, которое представляет собой уравнение, описывающее механическую модель.

В связи с тем, что тепловые и диффузионные процессы приобретают все большее значение в нефтяной промышленности, будут рассмотрены недостающие уравнения при описании этих процессов. Метод моделирования широко применяется в различных отраслях

промышленности, в частности в нефтяной. Учитывая это, а также необходимость расчета электрических и магнитных цепей для различных задач нефтедобычи и бурения. В заключение этой главы приведем еще одно необходимое уравнение состояния — скалярное соотношение между плотностью, давлением и температурой.

Для некоторых механических задач часто берут такое уравнение состояния, которое не содержит температуры. Процессы, подчиняющиеся таким уравнениям состояния, называются баротропными.

Однородная несжимаемая жидкость представляет частный случай баротропной жидкости.

Важным частным случаем являются изотермические процессы, при которых температура сохраняется постоянной, и адиабатические процессы, при которых отсутствует теплообмен.

В заключении этого раздела рассмотрим уравнения состояния и переноса. Для описания состояний макrofизических свойств тел и переноса процесса взаимодействия важно понятие обобщенного заряда — объем, масса и т. д. Величина заряда в теле определяет его состояние, а перенос его количественно характеризует процесс взаимодействия.

Величина заряда относится к экстенсивным величинам, т. е. к величинам, распределенным по объему. Заряд может переноситься под действием обобщенного потенциала — интенсивной величины, т. е. величины, распределенной по поверхности. К обобщенным потенциалам относятся температура, давление, электрический потенциал, напряжение и т. д.

Законы переноса определяют зависимость между потоками заряда и разностью потенциалов. Закон же состояния определяет зависимость между потенциалом и зарядом. Так, например, для жидких, газообразных и твердых однородных тел заряд — это объем, обобщенные потенциалы — давление и температура, уравнение состояния — зависимость, выражающая связь между объемом, давлением и температурой. Зависимость между напряжениями и деформациями — это механическое уравнение состояния.

Если поток заряда переносится в пространстве в одном направлении, то такой перенос называется одномерным, в случае же переноса в двух направлениях — плоским, а в трех направлениях — пространственным.

Наибольшее распространение получило уравнение Менделеева — Клайперона ($pV = zRT$, где p — давление, V — объем, R — газовая постоянная, T — температура, К, z — коэффициент сжимаемости).

Безразмерный коэффициент сжимаемости зависит от безразмерного

давления $\pi_1 = \frac{p}{p_{кр}}$ и безразмерной температуры $\pi_2 = \frac{T}{T_{кр}}$ ($p_{кр}$ и $T_{кр}$ —

соответственно критическое давление и температура).

Для нефтепромысловой практики, учитывая точность расчетов,

определяемую допусками, точностью исходной информации, а также точностью контрольно-измерительных приборов, коэффициент z можно принять равным единице, т. е. газ принимается идеальным. Так, например, для контроля давления наиболее совершенное средство — образцовые манометры, погрешность которых для некоторых манометров и интервалов давлений составляет $+0,35\%$ максимального давления. Если при трубопроводном транспорте газа давление в начале трубопровода близко 100 кг/см^2 , то применяется манометр со шкалой 100 кг/см^2 , причем погрешность будет $0,35 \text{ кг/см}^2$. Учет коэффициента z при сравнительно небольшой протяженности газопровода внесет уточнение не более указанной погрешности.

Перейдем к рассмотрению различных уравнений переноса массы (закон Дарси и Фика), тепла (закон Фурье), электрического тока (закон Ома). Подробно изложим, как экспериментальным путем установлен закон переноса массы в пористой среде — закон Дарси. Рассмотрим движение практически несжимаемой жидкости. Введем понятие фиктивной средней скорости, т. е. когда поток жидкости «размазывается» по всему сечению твердого скелета и пор. Скорости и ускорения изменяются как по величине, так и по направлению пористой среды. Ввиду большого разнообразия пор невозможно учесть скорость отдельных частиц. Принято рассматривать значения скоростей $\bar{v}$ в некотором объеме. Практическая несжимаемость жидкости проверяется равенством расходов при входе и выходе, при этом имеется в виду равенство в пределах погрешности применяемых расходомеров. Таким образом, в данном случае заряд может быть охарактеризован

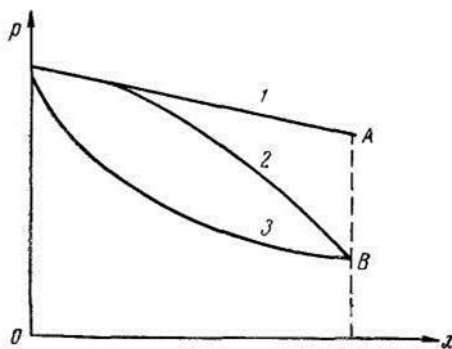


Рис. 2.11

скоростью фильтрации. При безынерционной фильтрации характерным будет перепад давления, отнесенный к единице длины. Так, например, зная перепад давления при заданном расходе на заданной длине, можно определить перепад давления на любой длине. Отмеченное не относится к сжимаемой жидкости, так как в этом случае распределение давления Рис.2.11 по длине не будет носить линейного характера. По мере удаления от входа давление падает, что при неизменности массового расхода приводит к увеличению объемного расхода. На рис. 2.11 приведены три кривые зависимости распределения давления.

Процесс фильтрации несжимаемой жидкости характеризуется прямой линией 1. Сравним случаи фильтрации сжимаемой и несжимаемой жидкостей (сравниваются жидкости, имеющие одинаковые плотности при одинаковых объемных расходах и давлениях на входе). Объемный расход по мере удаления от начала отсчета растет для сжимаемой жидкости, в результате чего давление в конце отсчета (точка *B*) ниже давления несжимаемой жидкости (точка *A*).

Рассмотрим, по какой из кривых (2 или 3) должно произойти изменение давления. По мере удаления от начала отсчета перепад давления должен увеличиваться ввиду непрерывного увеличения расхода (кривая 2). По кривой 3 интенсивность перепада давления уменьшается.

Для большей физической ясности рассмотрим другой пример, когда давление в начале и в конце отсчета для сжимаемой и несжимаемой жидкостей одинаково. По мере удаления от начала отсчета расход для сжимаемой жидкости будет расти, оставаясь меньше, чем для несжимаемой. В некоторой точке *M* (рис. 2.12) расходы несжимаемой и сжимаемой жидкостей будут одинаковы, после которой расход для сжимаемой жидкости будет больше, чем для несжимаемой. До точки *M* интенсивность изменения давления для сжимаемой жидкости будет больше, чем для несжимаемой, в точке *M* они равны, а затем интенсивность изменения давления сжимаемой жидкости будет меньше интенсивности несжимаемой. Так как интенсивность изменения давления характеризуется производной, то в точке *M* касательная, проведенная к кривой, будет параллельна прямой, проведенной для сжимаемой жидкости.

Следовательно (см. рис.2.11), при движении сжимаемой жидкости кривая распределения давлений обращена вогнутостью к оси абсцисс. Это относится к стационарной фильтрации, когда величины, характеризующие фильтрацию, практически неизменны во времени.

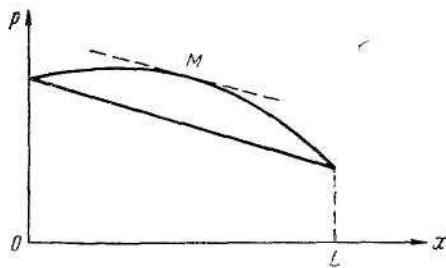


Рис. 2.12.

Состояние систем термодинамики характеризуется обобщенным зарядом. Если заряд находится в статическом состоянии и не изменяется во времени, то система является стационарной, равновесной (статика). Пронизывание системы неизменным зарядом соответствует стационарно неравновесной системе (кинетика). При изменяющемся заряде, но не пронизывающем систему, система нестационарно равновесна статодинамика; и, наконец, для нестационарно неравновесной системы (кинето-динамика) происходит перенос заряда и одновременное изменение во времени.

Так как будем рассматривать безынерционную фильтрацию, то плотность не характеризует данный процесс. Следовательно, скорость фильтрации w определяется следующей функциональной зависимостью:

$$w = w\left(\frac{\Delta p}{l}, \eta, d_1, K, d_n\right)$$

где d_i — диаметры зерен, составляющих пористую среду. На основании π -теоремы можно записать

$$\frac{w\eta l}{\Delta p} = d_1^2 f\left(\frac{d_1}{d_2}, \frac{d_1}{d_3}, K, \frac{d_1}{d_n}\right) = k$$

Стоящая в правой части величина k , характеризующая пористую среду и зависящая от ее состава, называется проницаемостью. Она имеет размерность квадрата длины и определяется опытным путем. На первый взгляд, приведенный закон переноса (закон Дарси) установлен лишь только на основе применения π -теоремы. Но это не так. π -теорема позволяет лишь экономно познать процесс. В данном случае безынерционность движения проверяется экспериментально на основе того, что зависимость между w и $\frac{\Delta p}{l}$ прямолинейная.

В дифференциальной форме закон Дарси может быть записан в виде

$$w_x = -\frac{k}{\eta} \frac{dp}{dx}.$$

В этом случае рассматривается одномерное движение вдоль оси x . Вдоль оси давление уменьшается и $\frac{dp}{dx} < 0$. В правой части поставлен

знак минус, так как скорость фильтрации, направленная вдоль оси x , положительна.

Для пространственной фильтрации в изотропной пористой среде:

$$\begin{aligned}w_x &= -\frac{k}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \\w_y &= -\frac{k}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \\w_z &= -\frac{k}{\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \\\bar{w} &= -\frac{k}{\eta} \text{grad } p\end{aligned}$$

Закон Дарси может быть истолкован как линейный закон сопротивления в уравнениях движения. При исследовании стационарных движений применяется закон сопротивления, полученный для стационарных движений, т. е. применяется принцип квазистационарности. Отмеченное, вероятно, справедливо для процессов, протекающих во времени сравнительно медленно.

Время релаксации нестационарных процессов, происходящих в пористой среде в результате сжимаемости жидкости и скелета, характеризуется коэффициентом пьезопроводности χ , имеющим размерность $\text{см}^2/\text{сек}$,

$$t \cong \frac{l^2}{\chi},$$

где l — характерный размер.

В частности, для одной скважины, расположенной в пласте, на котором скважины размещены по 200-метровой сетке l может быть принято равным половине расстояния между скважинами, т. е. 100 м.

Для пласта проницаемостью $0,25 \partial$, при коэффициенте упругой емкости $3 \cdot 10^{-5}$ и фильтрации жидкости вязкостью 7,5 сПа $\chi = 10^4 \text{ см}^2/\text{сек}$.

Тогда

$$t \cong \frac{10^8}{10^2} = 10^4 \text{ сек}$$

Таким образом, время релаксации будет около 3 ч,

т. е. нестационарность представляет интерес для кратковременного исследования скважин, т. е. таких исследований, время которых равно нескольким часам. Для разработки пластов, когда время исчисляется годами, нестационарность в этом случае можно не учитывать.

Для больших l , характеризующих размер пласта, например 10 км,

$$t \cong \frac{10^{12}}{10^2} = 10^8 \text{ сек}$$

т. е. время релаксации будет около 3 лет. Для разработки такой сравнительно крупной залежи нестационарность необходимо учитывать.

Отмеченное относится и к случаям приложения нагрузок статической и динамической, для которых напряжение зависит не только от упругой деформации, но и от ее скорости. Динамические расчеты с учетом неравновесности процесса представляют большой интерес для нефтепромысловой механики, особенно для новых методов воздействия на пласт. Тем не менее они не получили должного развития, поэтому в данной книге мы рассмотрим их кратко. Заметим, что для тиксотропных, изменяющихся во времени глинистых и цементных растворов, принцип квазистационарности не применим для расчета нестационарного движения в трубах. Закон Дарси справедлив в области линейной фильтрации.

Для нелинейной фильтрации находят применение степенные законы. Обычно степенные законы записываются для одномерных случаев. Представляет некоторый интерес рассмотрение обобщения и для пространственной фильтрации. Для одномерного случая

$$v_x = k_1 \left(-\frac{dp}{dx} \right)^n.$$

Проверим, можно ли для двухмерного случая применить аналогичные выражения

$$v_x = k_1 \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right)^n$$

$$v_y = k_1 \left(-\frac{\partial p}{\partial y} \right)^n.$$

Нетрудно показать, что приведенное уравнение неинвариантно относительно поворота осей координат. При повороте координатных осей координаты и проекции скоростей на соответствующей оси меняются следующим образом:

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi$$

$$y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi$$

$$v_x = v_x \cos \varphi - v_y \sin \varphi \quad (2.147)$$

$$v_y = v_x \sin \varphi + v_y \cos \varphi$$

Легко заметить, что проекции градиента давления на оси x и y

$\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}$ определяются по тем же формулам:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x'} \cos \varphi - \frac{\partial p}{\partial y'} \sin \varphi$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x'} \sin \varphi + \frac{\partial p}{\partial y'} \cos \varphi,$$

где $\frac{\partial p}{\partial x'}$, $\frac{\partial p}{\partial y'}$ и проекции градиента давления на оси x' и y' . Тогда

$$\begin{aligned} v_x &= k_1 \left(- \left(\frac{\partial p}{\partial x'} \cos \varphi - \frac{\partial p}{\partial y'} \sin \varphi \right) \right)^n \\ v_y &= k_1 \left(- \left(\frac{\partial p}{\partial x'} \sin \varphi + \frac{\partial p}{\partial y'} \cos \varphi \right) \right)^n \end{aligned} \quad (2.148)$$

Сравнивая (2.147) с (2.148), нетрудно показать, что выполнение

$$\begin{aligned} v_{x'} &= k_1 \left(- \frac{\partial p}{\partial x'} \right)^n \\ v_{y'} &= k_1 \left(- \frac{\partial p}{\partial y'} \right)^n \end{aligned}$$

возможно лишь при $n = 1$.

Следовательно, записанный нелинейный закон фильтрации неинвариантен относительно поворота осей координат.

Покажем, что одной из возможных записей нелинейного закона фильтрации, обеспечивающей инвариантность относительно поворота осей координат, является следующая.

Пусть

$$\begin{aligned} v_x &= A(|grag p|)^{B-1} \frac{\partial p}{\partial x} \\ v_y &= A(|grag p|)^{B-1} \frac{\partial p}{\partial y} \\ |grag p| &= \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2} \end{aligned}$$

Тогда проводя несложные преобразования получим

$$|grag p| = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y'} \right)^2}$$

модуль градиента инвариантен относительно поворота осей координат.

Проекций скорости в этом случае имеют вид :

$$\begin{aligned} v_x &= A(|grag p|)^{B-1} \left(\frac{\partial p}{\partial x'} \cos \varphi - \frac{\partial p}{\partial y'} \sin \varphi \right) \\ v_y &= A(|grag p|)^{B-1} \left(\frac{\partial p}{\partial x'} \sin \varphi + \frac{\partial p}{\partial y'} \cos \varphi \right) \end{aligned}$$

Естественно, что уравнение неразрывности, инвариантное относительно поворота осей координат, не изменяется при подстановке инвариантных величин v_x и v_y .

Следовательно,

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{\partial v'_y}{\partial y'} = 0$$

Или

$$v_{x'} = A(|\text{grag } p|)^{B-1} \left(\frac{\partial p}{\partial x'} \cos \varphi - \frac{\partial p}{\partial y'} \sin \varphi \right) \frac{\partial p}{\partial x'}$$

$$v_{y'} = A(|\text{grag } p|)^{B-1} \left(\frac{\partial p}{\partial x'} \sin \varphi + \frac{\partial p}{\partial y'} \cos \varphi \right) \frac{\partial p}{\partial y'}$$

В случае однопараметрической модели обобщение на пространственный случай проводится сравнительно просто, как было показано ниже. Если модель двухпараметрическая, например вязко-пластическая, т. е. характеризуется вязкостью и пластичностью — предельном напряжением сдвига, то на основании простейших одномерных течений нельзя описать уравнение для пространственного случая без применения той или иной гипотезы, которая в дальнейшем проверяется экспериментально. Так, для одномерного течения

$$\tau = -\eta \frac{\partial v_z}{\partial x} + \tau_0$$

Рассмотрим возможные пути обобщения приведенного закона, когда осевая скорость есть функция двух переменных $v = v_x(x, y)$, т. е. происходит движение в некруглой трубе. В этом случае имеют место два касательных напряжения τ_{zx}, τ_{zy} . Самое простое обобщение

$$\tau_{zx} = -\eta \frac{\partial v_z}{\partial x} + \tau_0$$

$$\tau_{zy} = -\eta \frac{\partial v_z}{\partial y} + \tau_0$$

Покажем на одном частном примере несостоятельность такого обобщения. Рассмотрим движение в круглой цилиндрической трубе.

Для одномерного случая имеем одно касательное напряжение τ_{zr} , направленное вдоль поверхности и зависящее ввиду симметрии только от r ,

$$\tau_{zr} = -\eta \frac{\partial v_z}{\partial r} + \tau_0$$

Из приведенных τ_{zx}, τ_{zy} невозможно получить формулу для τ_{zr} . Для

возможности отмеченного перехода в общем случае перед τ_0 ставится коэффициент

$$\tau_{zx} = -\eta \frac{\partial v_z}{\partial x} + \tau_0 f \left(\frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_z}{\partial y} \right).$$

Где ,например

$$f = A \left(|\text{grad } \vec{v}| \right)^{B-1} \frac{\partial v_z}{\partial x}$$

Это выражение инвариантно относительно поворота осей координат. При $n = 2$ получается обобщение в форме Генки — Ильюшина.

Как было отмечено, диффузионные процессы представляют большой интерес для нефтепромысловой механики. Приведем некоторые задачи, которые описываются диффузионной моделью. Это в первую очередь смешивающиеся вытеснения, которые могут быть как при использовании растворителей для увеличения нефтеотдачи, так и в случае вытеснения глинистого раствора цементным при цементировании скважин.

Диффузионные процессы происходят и в стволе газовой скважины при ее остановке. Их учет необходим для исследования сепарации газоконденсатных систем в трапах. Приведем один процесс, происходящий в глинистых пластах, для которых диффузия является определяющей. Известно, что глина имеет очень маленькую проницаемость и практически считается непроницаемой, т. е. исключается из рассмотрения как при подсчете запасов газа, так и при разработке. Ниже покажем, что диффузионный перенос газа в глинах и глинистых пластах довольно значителен. Феноменологически диффузия описывается законом Фика:

$$g_x = -D \frac{dc}{dx}$$

где g_x — проекция на ось x скорости переноса; c — концентрация D — коэффициент диффузии.

По аналогии с законом Дарси можно записать

$$\bar{g} = -D \text{grad } c$$

Коэффициент диффузии имеет размерность $\text{см}^2/\text{сек}$. Нетрудно показать из анализа размерности, как это делается при определении порядка времени релаксации, что порядок диффузионного времени определяется так:

$$t \sim \frac{l^2}{D}$$

где l — характерный размер.

Коэффициент диффузии в пористых средах составляет $10 \sim 5 \text{ см}^2/\text{сек}$ Для глинистого пропластка толщиной 10 см

$$t \sim \frac{10^2}{10^{-5}} = 10^7 \text{ сек}$$

т.е. диффузионное время составляет 100 суток.

Для пропластка толщиной 1 см это время будет составлять одни сутки.

Таким образом, прослойки глины могут представлять опасность как источник газопроявления при проводке скважин. Кроме того, их необходимо учитывать при подсчете запасов и анализе разработки линейризованных газовых и газоконденсатных пластов

Явление переноса тепла отмечается во всех звеньях бурения, нефтедобычи и транспорта и описывается законом Фурье

$$\bar{Q} = -\lambda \nabla T$$

где Q — плотность теплового потока; λ — коэффициент теплопроводности; T — температура.

Это уравнение, как и все приведенные выше, относится к однородной и изотропной средам, для которых коэффициенты проницаемости, диффузии и теплопроводности одинаковы во всех направлениях (изотропность) и во всех точках (однородность).

Для нефтепромысловой механики представляет большой интерес и закон переноса электрического тока как для расчета некоторых процессов, например электрокаротажа, электроподогревателей и т.д., так и в основном для метода электрических аналогий. Закон переноса электрического тока — закон Ома — имеет вид

$$\bar{i} = -\alpha \cdot \text{grad} V,$$

где $\bar{i}$ — плотность электрического тока; α — коэффициент пропорциональной электропроводности; V — потенциал.

В приведенной ниже таблице нетрудно заметить аналогию между законами Дарси, Фика, Фурье и Ома.

2.4.Метод аналогий.

Среди различных явлений, встречаемых в природе, выявлено много математических аналогий. За последние десятилетия в практике применяются лабораторные исследования и проекты, основанные на электрических, магнитных, электродинамических, электромагнитных, тепловых, звуковых, оптико-механических, магнитно-оптических и других аналогиях и на теории моделирования. Электромоделирование различных физических явлений широко используется в теории фильтрации, гидравлике, гидродинамике, строительстве, теплотехнике, теории упругости, механике грунтов, теории механизмов, акустике, теории автоматического регулирования, а также в других областях науки и техники.

В современном гидротехническом строительстве при строительстве больших и сложных гидротехнических объектов требуется проводить

сложные исследования по фильтрации. Теоретическое исследование этих вопросов очень сложно, а иногда и неразрешимо. Эти сложные вопросы очень легко разрешаются с помощью метода ЭГДА (электрогидродинамическая аналогия), в том числе разрешаются многие задачи, относящиеся к фильтрации нефти, газа и газированных жидкостей.

Применение метода ЭГДА при исследовании фильтрации почвенных вод под гидротехнические сооружения впервые в 1918 г. было предложено и теоретически обосновано академиком Н. Н. Павловским. Метод ЭГДА также широко используется в различных областях научных исследований.

Применение центробежного моделирования дает хорошие результаты при решении следующих задач, относящихся к статике и динамике пород: определение прочности земляных строительных откосов; определение прочности валов и других строительных фундаментов; распределение напряжений в породах и на контакте строительных поверхностей с породой; оседание зданий; фильтрация воды в породе и влияние фильтрации на породы; определение в связанных породах сил трения и сцепления и т. д. Ниже покажем два простых примера, относящихся к аналогии.

Наиболее часто применяются аналогии между электрическими и механическими явлениями. В замкнутую цепь (рис.2.13) включены конденсатор с емкостью C , омическое сопротивление R , катушка самоиндукции L и ключ K .

Через цепь проходит электрический ток I . Для последовательной цепи, как известно из закона Кирхгофа, разность потенциалов будет состоять из суммы разности напряжений на

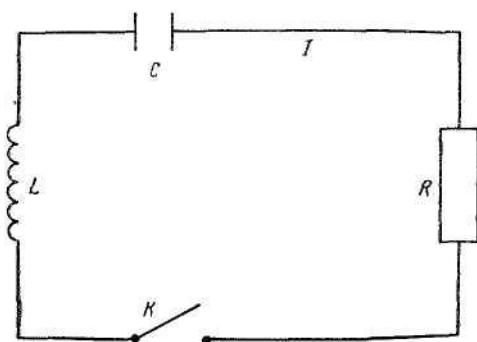


Рис.2.13

омическом сопротивлении, конденсаторе и катушке. Эти три составляющие рассчитываются следующим образом:

а) в результате самоиндукции разность напряжений равняется произведению коэффициента самоиндукции L на скорость изменения тока, т. е. $L \frac{dI}{dt}$;

б) разность напряжений, связанных с омическим сопротивлением, равна произведению RI (закон Ома);

в) разность напряжений на конденсаторе (по определению)

$$\frac{1}{C} \int_0^t Idt.$$

о

Таким образом, дифференциальное уравнение, описывающее явление, запишем в виде

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int_0^t Idt = 0$$

При решении этого дифференциального уравнения второго порядка для нахождения двух постоянных должны быть заданы два условия. Например, в начальный момент времени $t = t_0$ задаются

$$\text{утопия } I = I_0 \text{ и } \frac{dI}{dt} = I_0'.$$

Выделим условия, необходимые для решения уравнений. Если явление описывается обыкновенным дифференциальным уравнением n -го порядка, т. е. в уравнении искомая функция зависит только от одного аргумента (n — самый высокий порядок производной, входящей в уравнение, — целое число, которое может равняться единице или более), то в результате его решения должно получиться n произвольных постоянных. Для нахождения их должны быть заданы n условий. Эти условия, зависящие от характера изучаемого явления, могут быть заданы различными способами.

1. При определенном значении аргумента задается функция и ее $n - 1$ производные. Например, если в заданном уравнении третьего порядка искомая функция зависит от времени, то для определенного

значения времени должны быть даны функции и ее первая и вторая производные.

Такая задача называется задачей с начальными условиями, или задачей Коши.

2. При определенных значениях аргументов задаются функции и их производные. Например, если иметь дифференциальное уравнение пятого порядка, то из двух значений аргументов при одном из них даются искомая функция и ее первая и вторая производные, а при другом значении — функция и ее третья производная. Здесь в зависимости от постановки задачи возможны также различные другие варианты.

Для приведенной электрической цепи граничные условия могут быть заданы так:

$$I|_{t=t_0} = I_0$$

$$I|_{t=t_1} = I_1$$

Рассмотрим механическую цепь, имеющую одну степень свободы.

Напишем условие равновесия сил, действующих на пружину (рис. 2.14).



Рис. 2.14.

На пружину действуют активные силы тяжести и упругости и пассивная сила сопротивления.

Воспользовавшись принципом Д'Аламбера, условие равновесия запишем в виде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (A)$$

где m — масса; h — затухание колебания; k — коэффициент жесткости; x — перемещение.

В приводимом уравнении (A) первый член по абсолютному значению представляет силу инерции, второй — силу трения, а третий — силу упругости.

Уравнение механического колебания имеет тот же вид, что и уравнение, описывающее электрическое колебание. Следовательно, в указанных уравнениях аналогичными являются параметры: x — I ,

$$m — L; \quad h — R; \quad k — \frac{1}{C}.$$

Перейдем к безразмерным величинам следующим образом:

$$\bar{x} = \frac{x}{x_0}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \bar{I} = \frac{I}{I_0}$$

где t_0 — начальное значение аргумента; x_0 и I_0 — начальные значения функции. Таким образом,

$$\frac{LL_0}{t_0^2} \frac{d^2 \bar{I}}{d\bar{t}^2} + R \frac{I_0}{t_0} \frac{d\bar{I}}{d\bar{t}} + \frac{I_0}{C} \bar{I} = 0 \quad (2.149)$$

Если все члены уравнения разделить на $\frac{1}{C} I_0$, то получим следующее

уравнение с безразмерными коэффициентами:

$$\frac{LC}{t_0^2} \frac{d^2 \bar{I}}{d\bar{t}^2} + R \frac{C}{t_0} \frac{d\bar{I}}{d\bar{t}} + \bar{I} = 0 \quad (2.150)$$

Аналогично уравнение механических колебаний можно записать в безразмерном виде

$$\frac{m}{kt_0^2} \frac{d^2 \bar{x}}{d\bar{t}^2} + \frac{h}{kt_0} \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} + \bar{x} = 0$$

Напишем начальные условия для уравнения колебаний в электрической цепи в безразмерном виде:

$$\bar{t} = 1, \bar{I} = 1, \bar{I}' = \frac{I'_0}{I_0}$$

Начальные условия для уравнения механического колебание будут:

$$\bar{t} = 1, \bar{x} = 1, \bar{x}' = \frac{x'_0}{x_0}$$

Для равенства вторых начальных условий должно быть удовлетворено следующее условие:

$$\frac{x'_0}{x_0} = \frac{I'_0}{I_0} \quad (2.151)$$

Теперь, пользуясь аналогией уравнений механического и электрического колебаний, перейдем от одного уравнения к другому.

Предположим, что для механического контура m , k и h заданы. И электрическом контуре при известных L_1, L , задавшись I_0 , можно найти I_1 .

для идентичности уравнений описывающих механические и электрические колебания, необходимо

$$\frac{m}{kt_0^2} = \frac{LC}{t_0^2} \quad (2.152), (2.153)$$

$$\frac{h}{kt_0} = \frac{RC}{t_0}$$

Тогда будут равны друг другу $I = I'(t'), \bar{x} = \bar{x}(\bar{t})$.

В уравнениях (2.150) и (2.151) для нахождения неизвестных R , C , L нужно задаться одним из них. Например, задавшись значением C , можно найти R и L .

Для заданных начальных условий $\bar{I} = \bar{I}(t)$, чтобы в механической системе удовлетворить условию $\bar{x} = \bar{x}(t)$, рассмотрим выбор параметров

электрического контура и начальных условий. Для этого I'_0, I_0, L, C, R должны выбираться так, чтобы равенства (2.151) — (2.153) были удовлетворены. Например, задавшись значениями C и I'_0 , из этих трех уравнений можно найти I_0, L и R . Выбор этих параметров зависит от места и условий опыта.

После нахождения этих параметров для установления зависимости $I=I(t)$ собирается соответствующая электрическая цепь.

Кроме перечисленных существуют другие виды аналогий. Например, аналитическое решение задач теплопередачи со сложными краевыми условиями и изменяющимися термическими коэффициентами (которые часто встречаются в практике) связано с большими трудностями. Применение же метода элементарных балансов связано с трудоемкими вычислительными операциями. В связи с этим созданы счетно-решающие приборы, основанные на аналогиях, облегчающих вычислительные операции. При использовании метода аналогии стремятся воспроизвести исследуемое данное явление на аналогичном явлении, которое описывается теми же математическими зависимостями, но более просто управляемом. При этом значительно облегчаются вычислительные работы.

Известны электрические модели нестационарных процессов теплопроводности (электроинтегратор Л. И. Гутенмахера); нашел применение и метод гидравлической аналогии, предложенный В. С. Лукьяновым.

Гидравлический интегратор В. С. Лукьянова основан на аналогии математических соотношений, описывающих распространение температуры в твердом теле и распределение напоров в воде, движущейся через гидравлические сопротивления при ламинарном режиме.

Основной принципиальной особенностью, определяющей устройство гидроинтегратора, является замена в гидравлическом поле равномерно распределенных параметров сосредоточенными, т. е. переход от поля к цепи с сосредоточенными параметрами. В связи с этим процесс воспроизведения непрерывного температурного поля с сосредоточенными параметрами представляет собой переход от решения дифференциальных уравнений к решению уравнения в конечных разностях.

Этот прибор состоит из основных элементов аналогии гидравлической цепи с сосредоточенными элементами сопротивлений и емкостей, а также специальных элементов, воспроизводящих выделение скрытой теплоты при изменении агрегатного состояния; устройства для задания граничных условий; приспособлений для измерения напора в узлах гидравлической цепи; устройства, обеспечивающего питание прибора водой.

Рассмотрим конкретный пример определения распределения температуры в многослойной стенке при одномерном тепловом потоке.

Стенка задается размерами отдельных слоев и теплофизическими характеристиками материалов, т. е. объемными теплоемкостями ($c = c\gamma$, где c — удельная теплопроводность тела; γ — объемный вес тела), и коэффициентами теплопроводности (рис. 2.15).

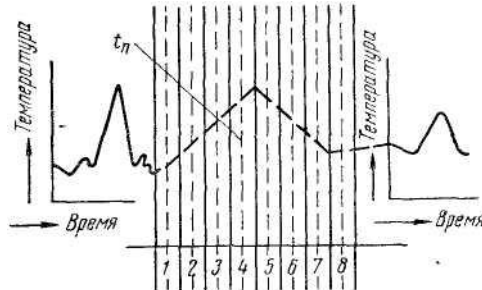


Рис. 2.15

Дано определенное начальное распределение температуры и произвольно выбранные воздействия температур наружных сред II тепловых потоков па поверхности стенки. Вначале составляется расчетная схема. Разбивают стенку на конечное число слоев. При этом допускается, что теплоемкость для каждого слоя сосредоточена в середине его и ограждается термическими сопротивлениями, равными половине толщины слоя.

Таким образом, расчетная схема представляет собой цепочку теплоемкостей c , разделенных между собой термическими сопротивлениями $r_{n,n+1}$.

Теплоемкости крайних слоев отделены от наружной среды дополнительным термическим сопротивлением теплоотдачи c поверхности. Процесс теплообмена элементарных слоев между собой и окружающей средой определяется следующей системой уравнений:

$$Q_{n,n+1} = \frac{1}{r_{n,n+1}}(t_n - t_{n-1}); \quad (2.154)$$

$$(Q_{n+1,n} - Q_{n,n-1})\Delta\tau_n = c_n\Delta t_n, \quad (2.155)$$

где $Q_{n+1,n}, Q_{n,n-1}$ — количество тепла соответственно в слоях n и $n-1, n, n+1$, t — температура соответствующих слоев; $\Delta\tau_n$ — время теплопроводности; Δt — разница температур. Гидравлическая аналогия осуществляется следующим образом. Составляется цепь из сосудов с определенными сечениями ω_n , соединенными между собой через гидравлическое сопротивление $\rho_{n,n-1}$ (рис. 2.16).

Число сосудов равно числу элементарных слоев. Крайние сосуды соединены с подвижными сосудами B_1 и B_2 . Изменение уровней воды в сосудах будет определяться следующей системой уравнений:

$$q_{n,n-1} = \frac{1}{\rho_{n,n-1}} (h_n - h_{n-1}) \quad (2.156), (2.157)$$

$$(q_{n+1,n} - q_{n,n-1}) \Delta \tau_n = \omega_n \Delta h_n$$

где q — расход жидкости; ρ — коэффициент гидравлических сопротивлений; h — уровень жидкости в сосуде; Δh — разница уровней жидкости в сосудах.

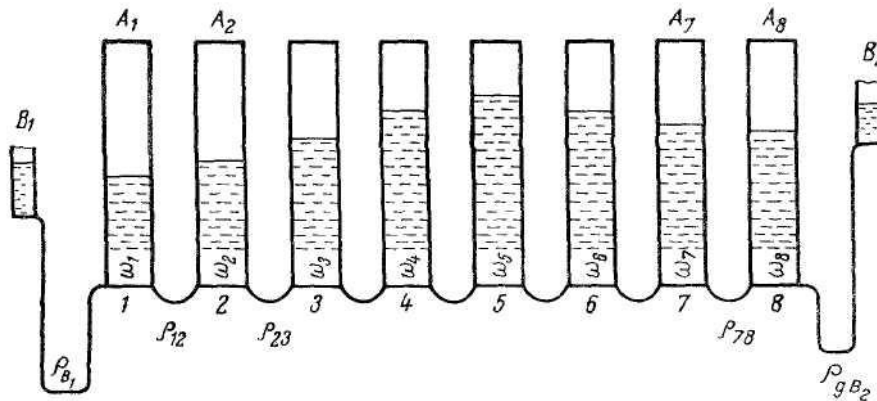


Рис. 2.16.

Расход жидкости q пропорционален разности уровней в сосудах Δh (аналог закона теплопроводности), а приращение содержания воды в сосуде Δq за время Δt равно произведению площади сечения сосуда на приращение высоты уровня.

Уравнения (2.154) и (2.155) аналогичны уравнениям (2.156) и (2.157). Предположим, что цепь сосудов составлена так, что в ней величины $\omega_n = c_n$, $\rho_{n,n-1} = r_{n,n-1}$ численно равны. Начальное распределение уровней h в соответствующем масштабе изображает начальное распределение температуры в центре элементарных слоев, а изменение уровней в подвижных сосудах происходит так же, как изменение температуры окружающих сред. Тогда уровень в сосудах будет изменяться аналогично изменению температуры в элементарных слоях. Если ω_n и ρ_n численно не равны c_n и r_n , а лишь пропорциональны им, то тепловой процесс также будет воспроизводиться на модели, но только в другом масштабе времени. Наличие такой возможности создает большие удобства, так как можно значительно ускорить воспроизведение медленных и замедлить воспроизведение быстро протекающих процессов теплообмена. В этом случае перейти от гидравлической модели к исследуемому процессу можно посредством выбора соответствующих масштабных соотношений.

Если все величины, входящие в уравнения (2.154) — (2.157), выразить в безразмерных величинах, то система (2.154) и (2.155) будет подобна системе (2.156) и (2.157), так как будут равны их безразмерные множители. Отсюда получим основное выражение для масштабных соотношений.

Получаем следующие критериальные соотношения:

$$k_1 = \frac{Q_2}{t}, k_1'' = \frac{q\rho}{h}$$

$$k_2 = \frac{r\tau}{c}, k_2'' = \frac{\rho\tau}{\omega}$$

Таким образом, когда гидравлическая цепь составлена в соответствии с теплофизическими характеристиками отдельных слоев, выбирают соответствие основных величин: $h \rightarrow t_1, \rho \rightarrow r, \omega \rightarrow c, \tau_\Gamma \rightarrow \tau_T$ и, если требуется, соответствие $q \rightarrow Q$. При этом необходимым условием является равенство $k_1 = k_1', k_2 = k_2'$. Здесь k — безразмерные множители соответствующих физических величин; индекс Γ отвечает гидравлической модели, индекс T — исследуемому тепловому процессу.

Пример. Допустим, что дана задача со следующими условиями. Толщина стенки $2R = 1$ м, коэффициент теплопроводности бетона $\lambda = 1,667$, удельная теплоемкость бетона $c = 0,2$, объемный вес $\gamma = 200$. Начальное распределение температуры задано в виде $t(x) = 20 \sin\left(\frac{\pi x}{R}\right)$. Требуется установить распределение температур в стенке через 10 и 20 ч.

$$c_0 = c\gamma \frac{R}{n} 1 \cdot 1 = 20$$

а также термическое сопротивление переходу тепла от одного слоя к другому

$$r_0 = \frac{R}{h\lambda} \frac{1}{1 \cdot 1} = 0,03$$

Для этого перейдем к составлению гидравлической модели. Ввиду симметричности температурного поля рассмотрим только половину его. Разобьем участок стенки, подлежащей исследованию ($R = 0,5$ м), на 10 равных по толщине слоев ($n = 10$). Вычислим теплоемкость одного такого слоя

$$c_0 = c\gamma \frac{R}{n} 1 \cdot 1 = 20$$

а также термическое сопротивление перехода тепла от одного слоя к другому

$$r_0 = \frac{R}{h\lambda} \frac{1}{1 \cdot 1} = 0,03$$

Схема разбивки поля приведена на рис.2.17, схема гидравлической цепочки, тождественной по начертанию цепочке, замещающей температурное поле, на рис.2.18. Крайнее сосредоточенное термическое сопротивление в два раза меньше остальных. На схеме гидравлической цепочки показаны (внизу) значения сосредоточенных сопротивлений $\rho_0, \rho_0 \cdot 0,5$ и гидравлических емкостей (площадей сосудов ω_0), воспроизводящих соответствующие сосредоточенные термические величины.

Для масштабных соотношений принимаем следующее соответствие 20 см напора $\div 20^\circ \text{ С}$; $0,3 \text{ мин/см}^2$ гидравлического сопротивления $\div 0,03 \text{ ч}^\circ \text{ С/ ккал}$ термического сопротивления слоя; 2 см^2 площади сосуда $\div 20 \text{ ккал/}^\circ \text{ С}$ теплоемкости слоя.

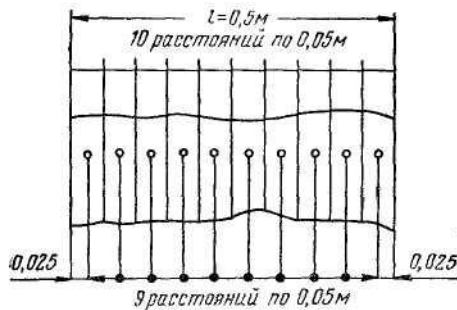


Рис. 2.17.

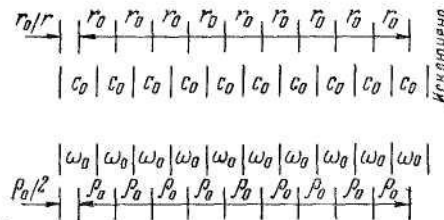


Рис. 2.18.

Вычислим масштаб времени $\frac{\tau_T}{T_T} = \frac{r_0 c_0}{\rho_0 \omega_0} = \frac{0,03 * 20}{0,3 * 2} = 1$

Так как требуется установить распределение температур в стенке через 10 и 20 ч от начала теплового процесса, то первая остановка прибора должна

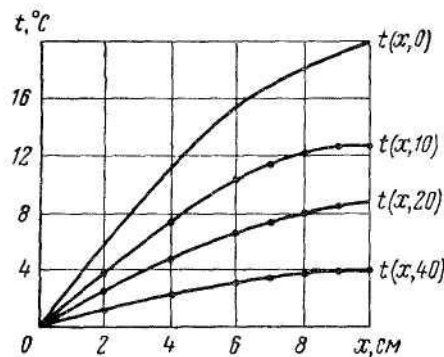


рис. 2.19

быть через 10 ч, а вторая через 20 ч от начала теплового процесса. Следовательно, первая остановка прибора должна быть через 10 мин, а вторая — через 20 мин после пуска. Для задания на приборе начального состояния вычисляем значения функции $t(x) = 20 \sin\left(\frac{\pi x}{R}\right)$ в точках $x = 0,025; 0,075; 0,125; 0,475 \text{ м}$ (рис. 2.19). Полученные величины будут заданы как начальные напоры в сосудах гидравлической модели. Граничное условие на поверхности стенки $t = 0^\circ \text{ С}$ будет воспроизведено на приборе подключением с левой стороны

цепочки сосуда с постоянным уровнем воды в нем, соответствующем 0°C . На правом крае цепочку следует отключить в соответствии с условием симметрии $\frac{\partial t}{\partial x} = 0$ (т. е. поток тепла во время теплового процесса равен нулю).

На рис. 2.19 приведена кривая начального распределения температур и кривые, рассчитанные на приборе распределений температур через 10, 20 и 40 ч от начала процесса. Следует отметить, что отклонения нигде не превосходят 1,5 мм, т. е. $0,15^{\circ}\text{C}$. На гидроинтеграторе можно решать одно-, двух- и трехмерные задачи.

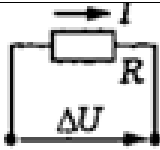
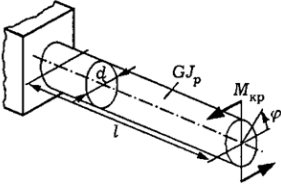
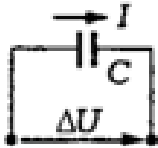
Для решения одномерных задач соединяют сосуды в цепочки. При решении двухмерных задач требуется соединить цепочки из сосудов между собой посредством сопротивления в соответствии с принятой разбивкой исследуемого температурного поля на блоки. возможно также и решение трехмерных задач, но так как при этом такое число сосудов равно 100, то схема разбивки поля на отдельные блоки должна быть заранее продумана.

В приведенных выше примерах аналогии для ясности были рассмотрены простые явления. Однако этот метод применим и для исследования отдельных сложных явлений, встречающихся в различных областях техники.

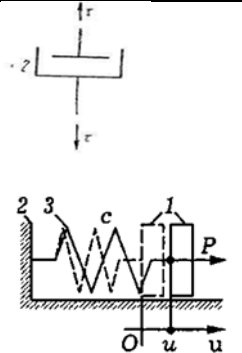
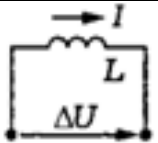
Ниже представлена таблица наиболее часто встречающихся аналогий между механическими и электрическими системами.

Таблица 2.3

Аналогия между механическими и электрическими системами

N		механика	схема		Электрический аналог	схема
1	Упру гое тело	$P = k_{\text{тр}} S v = R_M v$		Двухполюс ник с активным сопротивле нием	$U = I \cdot R$	
2	Вязк ое тело	$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \frac{l}{GJ_p} \frac{dM_{\text{кр}}}{dt} = C_M \frac{dM_{\text{кр}}}{dt},$		Двухполюс ник с емкостью	$I = C \frac{d\Delta U}{dt}.$	

Продолжение таблицы 2.3

3		$P = m \frac{dv}{dt} = L_m \frac{dv}{dt}, \quad L_m = m.$ $\tau = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$		Двухполюсник с индуктивностью	$\Delta U = L \frac{dI}{dt}$	
---	--	---	---	--------------------------------------	------------------------------	---

3. ОДНОМЕРНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

3.1. Механические математические модели

Пример 3.1. Рассмотрим хорошо известную *расчетную схему* математического маятника (рис. 3.1) в виде материальной точки массой m , подвешенной на невесомом стержне постоянной длины l , который может свободно вращаться относительно горизонтальной оси, проходящей через точку O . Отклонение маятника равновесия приведет к возрастанию потенциальной энергии материальной точки на величину $\Delta\P = mgl(1 - \cos(\varphi_0))$ где g — ускорение свободного падения. Если после отклонения маятник начнет движение, то при отсутствии сопротивления он в силу закона сохранения энергии будет совершать незатухающие колебания относительно положения равновесия (точка A на рис. 3.1). При прохождении положения равновесия скорость v материальной точки является наибольшей по абсолютной величине, поскольку в этом положении кинетическая энергия этой точки равна $\frac{mv^2}{2} = \Delta\P$, так

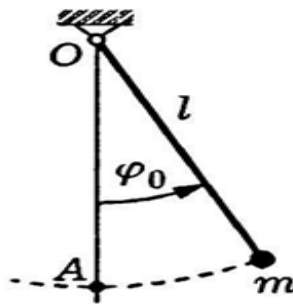


Рис. 3.1

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta\P}{m}} = \sqrt{2gl(1 - \cos \varphi_0)}$$

Пусть необходимо установить зависимость *периода T колебаний* маятника (т.е. наименьшего промежутка времени, через который маятник возвращается в некоторое фиксированное положение, не совпадающее с положением равновесия) от параметров m, l, φ_0, g (параметр v следует исключить из рассмотрения, поскольку его удалось выразить через указанные выше параметры). Размерности $[m, l, \varphi_0, g]$ четырех параметров и периода T колебаний можно выразить через $k = 3$ независимые стандартные единицы измерения: $[T] = \text{с}$, $[m] = \text{кг}$, $[l] = \text{м}$, $[\varphi_0] = 0$ и $[g] = \text{м/с}^2$. Поэтому в силу π -теоремы из $n = 5$ параметров можно составить $\bar{n} = n - k = 2$ безразмерные комбинации, причем угол φ_0 , будучи безразмерным, является одной из них. Во вторую безразмерную

комбинацию не удастся включить массу m материальной точки, поскольку единица измерения массы (кг) входит лишь в размерность массы. Следовательно, величина m не является аргументом искомой зависимости, что можно установить и при построении теоретической ММ рассматриваемого маятника. После исключения параметра m имеем $n = 4$ и $\kappa = 2$, т.е. снова $n = 2$, так что наряду с безразмерным параметром φ_0 остальные

Пример 3.2 В качестве примера убедимся, что для механической системы, включающей тело 1 массой m , движущееся

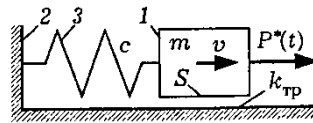


Рис. 3.2

поступательно по горизонтальной плоскости и связанное с неподвижной опорой 2 пружиной 3 жесткостью c (рис. 3.2). Действительно, в соответствии со вторым законом Ньютона

запишем

$$\frac{dv}{dt} = P^*(t) - k_{\text{тр}} S v - c u \quad (3.1)$$

где u — перемещение тела относительно положения равновесия, $v = \frac{du}{dt}$ — скорость тела, $P^*(t)$ — внешняя сила, приложенная к телу и изменяющаяся (в общем случае) во времени, $k_{\text{тр}}$ — коэффициент вязкого трения при движении тела по горизонтальной плоскости, S — площадь поверхности контакта тела с этой плоскостью.

Отметим, что этот процесс может быть представлен в виде эквивалентных электромеханических схем представленных в разделе 3.2. Например, в виде дуальных цепей, на рис. 3.3, а и б.

Используя введенные обозначения $R_M = k_{\text{тр}} S$, $C_M = 1/c$ и $L_M = m$, представим выражение в виде

$$R_M v + \frac{1}{C_M} \int_{t_0}^t v dt + L_M \frac{dv}{dt} = P^*(t) \quad (3.2)$$

где t_0 — некоторый момент времени, принятый за начальный. Из сравнения ММ рассматриваемой механической системы и ММ электрической цепи, изображенной на рис. 3.1, видно, что модели идентичны при выборе в механической системе силы в качестве потенциальной величины, аналогичной падению электрического напряжения, и скорости в качестве потоковой величины, аналогичной силе электрического тока. Это определяет I вариант электромеханической аналогии (табл. 3.1). Но если в механической системе

потенциальной величиной считать скорость, а потоковой — силу, то ММ этой системы будет идентична ММ электрической цепи, представленной на рис. 3.3, Действительно, обозначая $g_M^0 = R_M = k_{mp} S$, $p_M^0 = C_M = 1/c$, $c_M^0 = L_M = m$ вместо 8) получаем

$$g_M^0 v + \frac{1}{p_M^0} \int_{t_0}^t v dt + c_M^0 \frac{dv}{dt} = P^*(t) \quad (3.3)$$

что с точностью до обозначений совпадает с механической моделью и определяет II вариант электромеханической аналогии (см. табл. 3.3).

Таблица 3.1

Механическая система	Электрическая система	
	1-й вариант	2-й вариант
Сила	Напряжение	Сила тока
скорость	Сила тока	Напряжение
Вязкое трение	Сопротивление	Проводимость
Податливость	Емкость	Индуктивность
Масса	Индуктивность	Емкость
перемещение	Заряд	Потокосцепление
импульс	Потокосцепление	Заряд
Энергия		
потенциальная	электрическая	магнитная
кинетическая	магнитная	электрическая

Продолжение таблицы 3.1

Мощность		
Вязкого трения	Тепловыделение в резисторе	

Использование 2-ого варианта электромеханической аналогии удобнее при построении эквивалентной схемы механической системы, поскольку для этого варианта получают естественное механическое толкование законы Кирхгофа, используемые затем при переходе от эквивалентной схемы к ММ системы. В случае поступательного движения механической системы первый закон Кирхгофа будет аналогом уравнения равновесия всех сил (включая инерционные), действующих на рассматриваемый узел эквивалентной схемы, а второй — аналогом правила сложения скоростей при обходе контура этой схемы. При пространственном движении механической системы силы и скорости являются векторными величинами. Поэтому равенства, следующие из

законов Кирхгофа, должны быть выполнены для проекций этих величин на каждую из координатных осей.

3.2. Модели электротехники

Отметим, что в электротехнике возможно применение равноценных моделей в виде различных схем. Такие электрические цепи называются дуальными. Рассмотрим подробнее применение таких цепей [1].

Под эквивалентной схемой системы, состоящей из типовых элементов, понимают их условное изображение в виде двухполюсников и связей между этими двухполюсниками. Так как математические модели (ММ) макроуровня типовых элементов различных физических систем совпадают по форме с ММ электрических двухполюсников, то при построении эквивалентных схем обычно используют обозначения, характерные для электрических систем. Эквивалентную схему в виде электрической цепи, объединяющей двухполюсники, можно считать наглядным представлением структурной математической модели рассматриваемой системы. При построении ММ электрической системы объединяют ММ входящих в эту систему типовых элементов: резисторов, конденсаторов и индуктивных катушек. Такое объединение проводят, применяя к эквивалентной схеме законы Кирхгофа. Первый из них устанавливает равенство нулю алгебраической суммы мгновенных значений силы тока во всех ветвях электрической цепи, имеющих общий узел, а второй — равенство нулю алгебраической суммы мгновенных значений падений напряжения при обходе любого контура электрической цепи в любом направлении.

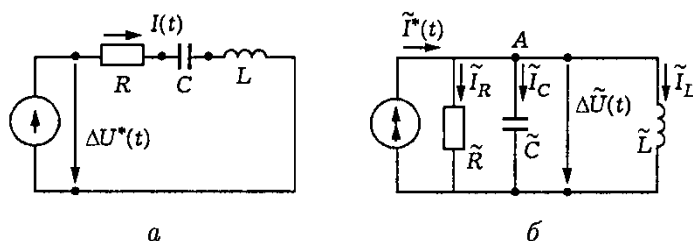


Рис. 3.3

Использование законов Кирхгофа рассмотрим на простом примере электрической цепи, включающей источник, задающий переменное (в общем случае) во времени t напряжение ΔU^* , резистор сопротивлением R , конденсатор емкостью C и катушку индуктивностью L (рис. 3.3а). Эта цепь состоит из одного замкнутого контура и четырех ветвей, в каждую из которых включен один из указанных двухполюсников. Применяя к каждому из узлов этой цепи первый закон Кирхгофа, приходим к выводу, что в любой момент времени t сила I электрического тока во всех ветвях одинакова. Для падений электрического напряжения на пассивных двухполюсниках имеем (3.4)

$$\Delta U_R = IR, \quad \Delta U_C = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t Idt, \quad \Delta U_L = L \frac{dI}{dt} \quad (3.4)$$

где t_0 — некоторый момент времени, принятый за начальный. При обходе замкнутого контура по ходу часовой стрелки в соответствии со вторым законом Кирхгофа получим — $\Delta U^*(t) + \Delta U_R + \Delta U_C + \Delta U_L = 0$, или с учетом (3.4)

$$IR + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t Idt + L \frac{dI}{dt} = \Delta U^*(t) \quad (3.5)$$

В качестве второго примера рассмотрим электрическую цепь, включающую наряду с пассивными двухполюсниками источник, задающий по определенному закону $I^*(t)$ силу

тока (рис. 3.3б). Из второго закона Кирхгофа следует, что падение напряжения $\Delta U^%$ в каждой из ветвей этой цепи в любой фиксированный момент времени t одинаково. Для токов в ветвях, содержащих пассивные двухполюсники, запишем $I_R^% = g \Delta U^%$, $I_C^% = C \frac{d\Delta U^%}{dt}$, $I_L^% = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t \Delta U^% dt$ (3.6)

где $g = \frac{1}{R}$ — проводимость резистора сопротивлением R . Все ветви этой цепи сходятся в два узла. Применяя первый закон Кирхгофа к одному из узлов (например, к узлу А), получим $I_R^% + I_C^% + I_L^% - I^*(t) = 0$, или, учитывая (3.6),

$$g \Delta U^% + C \frac{d\Delta U^%}{dt} + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t \Delta U^% dt = I^*(t) \quad (3.7)$$

Таким образом, ММ рассмотренных электрических цепей включают идентичные по форме уравнения (3.5), (3.7), содержащие помимо времени t различные величины. Соответствие между этими величинами представлено в табл. 3.2

Таблица 3.2

I	L	R	C	ΔU_R	ΔU_C	ΔU_L	$\Delta U^*(t)$
$\tilde{\Delta U}$	$\tilde{C}$	$\tilde{g}$	$\tilde{L}$	$\tilde{I}_R$	$\tilde{I}_L$	$\tilde{I}_C$	$\tilde{I}^*(t)$

Две электрические цепи, ММ которых удовлетворяют указанному соответствию величин, принято называть дуальными. При этом зависимости для падений напряжений на пассивных двухполюсниках в одной цепи аналогичны зависимостям для токов, протекающих через такие двухполюсники в дуальной цепи, и наоборот. Если связь между законами изменения напряжения и силы тока источников в дуальных цепях подчиняется зависимости $\Delta U^*(t) = R_0 I^*(t)$, где R_0 — коэффициент пропорциональности, имеющий размерность сопротивления, то из сопоставления 3.4-3.7 можно установить, что

$$\frac{\Delta \tilde{U}}{\tilde{I}} = \frac{\Delta U_R}{\tilde{I}_R} = \frac{\Delta U_C}{\tilde{I}_L} = \frac{\Delta U_L}{\tilde{I}_C} = R_0 \quad (3.8)$$

при выполнении условий

$$\frac{R}{\tilde{g}} = \frac{\tilde{L}}{\tilde{C}} = \frac{L}{\tilde{C}} = R_0^2. \quad (3.9)$$

Существуют правила преобразования сложных электрических цепей в дуальные. При этом число узлов дуальной цепи на единицу превышает число простых замкнутых контуров исходной цепи (к простым относят такие замкнутые контуры, внутренняя линия обхода которых не пересекает ветвей цепи). Проверкой правильности преобразования цепи в дуальную служит получение исходной цепи путем построения дуальной цепи по отношению к дуальной. Дуальность электрических цепей позволяет расширить возможности построения и преобразования эквивалентных схем применительно к различным физическим системам (прежде всего к механическим системам). Предположим, что сила тока в электрической цепи, представленной на рис. 3.3 а), изменяется по закону $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$, где I_0 — амплитуда колебаний силы тока, ω — угловая частота колебаний. Выясним, при каком законе $\Delta U^*(t)$ изменения напряжения источника это возможно. Для этого предварительно продифференцируем по t (3.5) и запишем

$$R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{I(t)}{C} + L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} = \frac{d\Delta U^*(t)}{dt},$$

или после подстановки выражения для $I(t)$

$$\omega R I_0 \cos \omega t + \frac{I_0}{C} \sin \omega t - \omega^2 L I_0 \sin \omega t = \frac{d\Delta U^*(t)}{dt}$$

Отсюда следует, что одним из возможных законов изменения напряжения источника является

$$\Delta U^*(t) = R I_0 \sin \omega t - \frac{I_0}{\omega C} \cos \omega t + \omega L I_0 \cos \omega t$$

Запишем комплексное представление этой функции в виде $\Delta U^*(t) = \text{Im}(\Delta \hat{U} e^{i\omega t})$, где $\Delta \hat{U}$ — комплексная амплитуда напряжения источника, равная $\Delta \hat{U} = I_0 \left(R - \frac{i}{\omega C} + i\omega L \right) = I_0 (Z_R + Z_C + Z_L)$, причем $Z_R = R, Z_C = -\frac{i}{\omega C}, Z_L = i\omega L$ — комплексные сопротивления (импедансы) резистора, емкости и индуктивной катушки соответственно. Так как комплексная амплитуда силы тока $I(t) = I_0 \sin(\omega t) = \text{Im}(\hat{I} e^{i\omega t})$ равна $\hat{I} = I_0$, то $\frac{\Delta \hat{U}}{\hat{I}} = Z = Z_R + Z_C + Z_L$, где Z — полное комплексное сопротивление цепи из последовательно соединенных резистора, емкости и индуктивной катушки. Таким образом, при последовательном соединении электрических двухполюсников сумма их комплексных сопротивлений дает полное сопротивление цепи. Теперь предположим, что падение напряжения во всех ветвях цепи, представленной на рис. 3.3 б, изменяется по закону $\Delta U^*(t) = \Delta U_0 \sin(\omega t)$, где ΔU_0 — амплитуда колебаний

напряжения. Найдем закон $i^*(t)$ изменения силы тока источника, при котором это возможно. Проинтегрировав по t 3.7, имеем

$$g \frac{\Delta \tilde{U}(t)}{dt} + \tilde{C} \frac{d^2 \Delta \tilde{U}(t)}{dt^2} + \frac{\Delta \tilde{U}(t)}{\tilde{L}} = \tilde{i}^*(t)$$

и после подстановки $g = \frac{1}{R}$ и выражения для $\Delta \tilde{U}(t)$ получим

$$\omega \frac{\Delta U_0}{\tilde{R}} \cos \omega t - \omega^2 \tilde{C} \Delta U_0 \sin \omega t + \frac{\Delta U_0}{\tilde{L}} \sin \omega t = \frac{d\tilde{i}^*(t)}{dt}.$$

Тогда возможным законом изменения силы тока источника является

$$\tilde{i}^*(t) = \frac{\Delta U_0}{\tilde{R}} \sin \omega t + \omega \tilde{C} \Delta U_0 \cos \omega t - \frac{\Delta U_0}{\omega \tilde{L}} \cos \omega t.$$

Комплексное представление этой функции имеет вид $i^*(t) = \text{Im}(\bar{I} e^{i\omega t})$, где $\bar{I}$ — комплексная амплитуда силы тока источника, равная

$$\bar{I} = \Delta U_0 \left(\frac{1}{\tilde{R}} + i\omega \tilde{C} - \frac{i}{\omega \tilde{L}} \right) = \Delta U_0 \left(\frac{1}{Z_{\tilde{R}}} + \frac{1}{Z_{\tilde{C}}} + \frac{1}{Z_{\tilde{L}}} \right),$$

причем $Z_{\tilde{R}} = R$; $Z_{\tilde{C}} = -\frac{i}{\omega C}$; $Z_{\tilde{L}} = i\omega L$. Поскольку

комплексная амплитуда падения напряжения $\Delta U(t) = \Delta U_0 \sin(\omega t) = \text{Im}(\Delta \bar{U} e^{i\omega t})$ равна $\Delta \bar{U} = \Delta U_0$, то

$$\frac{\Delta \bar{U}}{\bar{I}} = Z = \frac{1}{\frac{1}{Z_{\tilde{R}}} + \frac{1}{Z_{\tilde{C}}} + \frac{1}{Z_{\tilde{L}}}}.$$

Следовательно, при параллельном соединении электрических двухполюсников сумма их комплексных проводимостей, обратных комплексным сопротивлениям, дает полную комплексную проводимость цепи, обратную ее полному комплексному сопротивлению.

При построении математических моделей (ММ) макроуровня сравнительно простых механических систем, состоящих из небольшого количества типовых элементов, обычно непосредственно используют основные законы механики. Но для более сложной механической системы, включающей большое число взаимодействующих между собой элементов, удобнее, используя электромеханическую аналогию, предварительно составить эквивалентную схему, соответствующую расчетной схеме этой системы. Тогда при переходе от эквивалентной схемы к ММ можно применить приемы, разработанные и формализованные для электрических цепей. Установленный на основе идентичности ММ типовых элементов механической системы и электрических двухполюсников вариант электромеханической аналогии не является единственным, так как каждой из дуальных электрических цепей можно поставить в соответствие свой вариант такой аналогии. В связи с этим допустимо говорить о двойственности электромеханической аналогии.

3.3. Модели сопротивления материалов

Практически все курсы дисциплины «Сопротивление материалов» снабжены большим количеством примеров приводящих к обыкновенным дифференциальным уравнениям различных порядков. Там рассматриваются как статические так и динамические модели. Приведем пример расчета балки на упругом основании [13]. Эта модель широко применяется при сооружении газонефтепроводов.

Начнем с общих понятий. К числу статически неопределимых балок может быть отнесена балка на упругом основании. Так называется балка, опирающаяся по всей своей длине (Рис.3.4) на упругое основание, оказывающее в каждой точке на балку реакцию, пропорциональную y — прогибу балки в этой точке. Коэффициент пропорциональности обозначается буквой k .

Введение предположения о пропорциональности реакций прогибу является приближением, хотя и достаточно близким к действительным условиям.



Рис. 3.4. Расчетная схема балки на упругом основании.

Предложение ввести в расчет коэффициент пропорциональности k , именуемый «коэффициентом постели», было впервые сделано русским академиком Николаем Ивановичем Фуссом в 1801 году. Принимая это предположение, получаем, что *интенсивность* реакции основания в каждой точке сила равна ky и измеряется в единицах силы и длины; размерность коэффициента k при этом будет сила и квадрат длины. Будем считать, что основание оказывает реакцию при прогибах балки как вниз, так и вверх.

На практике задачи о расчете балки на упругом основании встречаются в железнодорожном деле (рельс, шпала), в строительстве — фундаменты различных сооружений, передающие нагрузку на грунт.

Статически неопределимой такая балка будет потому, что условие статики — сумма нагрузок равна всей реакции основания — не дает возможности установить *распределение* этой реакции по длине балки, а значит, вычислить изгибающие моменты и поперечные силы.

Интенсивность реакции в каждой точке связана с прогибами балки. Поэтому для решения задачи необходимо найти сначала уравнение изогнутой оси $y = f(x)$, а уже затем формулы для вычисления изгибающего момента и поперечной силы. Ход решения оказывается обратным обычному.

Найдем уравнение изогнутой оси для балки постоянного сечения, лежащей на упругом основании и нагруженной сосредоточенными силами P_1, P_2, K (Рис.3.4). Начало координат возьмем в любой точке, ось x направим вправо, ось y вертикально вверх. Направление нагрузок вверх будем считать положительным. Напишем обычное дифференциальное уравнение изгиба

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x)$$

Так как $M(x)$ нам неизвестен, то постараемся связать прогибы непосредственно с нагрузкой, для этого дифференцируем дважды предыдущее уравнение:

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x) \quad (3.10)$$

где $q(x)$ —интенсивность сплошной нагрузки, действующей на балку в сечении с абсциссой x .

Сплошной нагрузкой для нашей балки является лишь реакция упругого основания. Интенсивность ей пропорциональна прогибам; эта нагрузка направлена *вверх*, т. е. *положительна*, когда прогибы идут *вниз*, т. е. отрицательны, и наоборот. Таким образом, эта нагрузка имеет знак, обратный знаку прогибов:

$$q(x) = -ky$$

Тогда

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = -ky \quad (3.11)$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{k}{EJ} y = 0 \quad (3.12)$$

Если обозначить $\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} = \beta$, то общий интеграл уравнения (3.12) имеет вид:

$$y = e^{+\beta x} (A \sin \beta x + B \cos \beta x) + e^{-\beta x} (C \sin \beta x + D \cos \beta x) \quad (3.13)$$

Постоянные A, B, C, D должны быть определены в каждом частном случае нагрузки и длины балки. Величина β имеет измерение обратное длине.

Наиболее часто в строительстве, в том числе при сооружении магистральных нефтегазопроводов, используется модель нагруженной балки на упругом основании. Приведем несколько примеров расчета таких конструкций. Положим имеется бесконечно длинная балка на упругом основании, нагруженной одной силой P .

Наиболее просто решается задача об изгибе бесконечно длинной балки, нагруженной одной сосредоточенной силой (Рис.3.5). Помимо непосредственного практического значения решение этой задачи позволит путем последовательных приближений рассчитывать и балки конечной длины.

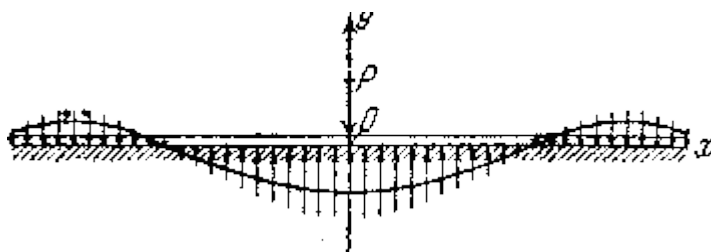


Рис.3.5 Расчетная схема балки бесконечной длины.

Начало координат расположим в точке приложения силы P . Определим постоянные A, B, C и D . Так как вся реакция основания, равная силе P должна быть конечной величиной, то прогибы балки в точках, бесконечно удаленных от точки приложения силы, должны обращаться в нуль:

$$y_{x \rightarrow \infty} = 0 \quad (3.14)$$

При бесконечно больших значениях x два вторых слагаемых в правой части формулы (3.13) обращаются в нуль благодаря множителю $e^{-\beta x}$, два же первых могут обратиться в нуль лишь при

$$A = 0 \text{ и } B = 0;$$

таким образом,

$$y = e^{-\beta x} (C \sin \beta x + D \cos \beta x) \quad (3.15)$$

Далее, по симметрии нагрузки и реакции основания, касательная к изогнутой оси в точке приложения силы должна идти параллельно оси абсцисс:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0$$

Дифференцируя (6), получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \theta = -\beta e^{-\beta x} [\sin \beta x (C + D) + \cos \beta x (D - C)]$$

Подставляя в это выражение $x=0$ и приравнявая результат нулю, находим:

$$D - C = 0 \text{ и } C = D;$$

таким образом, уравнения будут:

$$y = e^{-\beta x} C (\sin \beta x + \cos \beta x) \quad (3.16)$$

$$\frac{dy}{dx} = \theta = -2e^{-\beta x} C \beta \sin \beta x \quad (3.17)$$

Для определения последней постоянной C имеем еще одно уравнение: нам известна величина поперечной силы в начале координат.

Разрезав балку сечением в точке O справа от силы P и рассматривая правую часть балки, видим, что поперечная сила в этом сечении равна реакции основания, действующей на *правую половину* балки со знаком минус; так как реакция направлена *вверх* (для правой половины) и вся реакция основания равна P , значит, поперечная сила в сечении при $x = 0$ равна

$$Q(x)_{x=0} = -\frac{P}{2}$$

Но, с другой стороны

$$EJ \frac{d^3 y}{dx^3} = Q(x) \quad (3.18)$$

Таким образом,

$$EJ \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_{x=0} = -\frac{P}{2} \quad (3.19)$$

Вычисляем, пользуясь (3.17 8), $\frac{d^2 y}{dx^2}$ и $\frac{d^3 y}{dx^3}$:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -2C\beta^2 e^{-\beta x} [\cos \beta x - \sin \beta x] \quad (3.20)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = +4C\beta^3 e^{-\beta x} \cos \beta x \quad (3.21)$$

Подставляя (3.21) в (3.19) и приравнявая x нулю, получаем:

$$4EJC\beta^3 = -\frac{P}{2} \quad \text{и} \quad C = -\frac{P}{8EJ\beta^3}$$

Теперь значения y и ее производных получают вид

$$y = -\frac{P}{8EJ\beta^3} e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x) = -\frac{P}{8EJ\beta^3} \cdot \eta$$

$$\frac{dy}{dx} = \theta = +\frac{P}{4EJ\beta^2} e^{-\beta x} \sin \beta x = +\frac{P}{4EJ\beta^2} \cdot \eta_3$$

$$M(x) = EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = +\frac{P}{4\beta} e^{-\beta x} [\cos \beta x - \sin \beta x] = \frac{P}{4\beta} \cdot \eta_1$$

$$Q(x) = EJ \frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{P}{2} e^{-\beta x} \cos \beta x = -\frac{P}{2} \cdot \eta_2$$

Таким образом, напряженное состояние и деформации балки на упругом основании всецело определяются нагрузкой и коэффициентом β , зависящим от соотношения жесткостей балки и упругого основания.

На таких моделях можно рассматривать более сложные конструкции, включающие в себя множество сосредоточенных и распределенных нагрузок.

3.4. Модели гидравлики и гидромеханики.

Моделирование гидравлических и гидромеханических процессов может осуществляться различным образом.

Рассмотрим это на примере так называемых одномерных потоков [9,14]. Одномерными называются потоки, в которых основные параметры течения (скорости, давление и др.) зависят лишь от одной геометрической координаты, направление которой совпадает с направлением вектора скорости. Примером такого течения является рассматриваемое ранее движение жидкости в элементарной трубке тока, ввиду малости поперечного

сечения которой скорость и давление в нем постоянны. Использование модели одномерных течений позволяет достаточно просто решать многие важные практические задачи, а раздел прикладной гидромеханики, применяющий эту модель течения, называют гидравликой. Для решения широкого круга инженерных задач плодотворной оказалась так называемая струйная модель потока. Согласно этой модели поток представляется состоящим из бесконечного множества элементарных жидких струек. При рассмотрении потока поперечные сечения в нем выбираются так, чтобы пересекающие их линии тока в каждой точке сечения были направлены по нормали. В этом случае сечение потока называется *живым*. Вообще говоря, живое сечение представляет собой изогнутую поверхность, но, если линии тока в элементарных жидких струйках, составляющих его, параллельны, то живое сечение будет плоским.

Легко видеть, что объемный расход элементарной струйки жидкости может быть определен как:

$$dQ = u dS,$$

где u – скорость (постоянная) в поперечном сечении элементарной жидкой струйки,

dS - площадь ее сечения.

В соответствии со струйной моделью расход потока можно определить как:

$$Q = \iint_S u(r) dS.$$

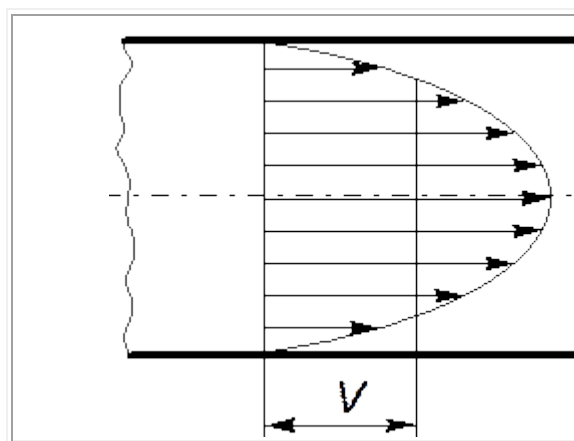


Рис.3.11

Рассмотрим движение вязкой жидкости в трубе круглого поперечного сечения. Для реального течения вязкой жидкости распределение скоростей в поперечном сечении трубопровода (эпюра скоростей) будет неравномерным, в частности, может иметь вид, показанный на рисунке.

Соответственно, запись $u(r)$ в предыдущей формуле означает, что местные скорости в сечении трубы изменяются по радиусу, а $u(r)$ представляет закон изменения скорости, т.е. является математическим описанием эпюры скоростей. Следовательно, для того, чтобы вычислить расход по этой зависимости, необходимо знать уравнение эпюры скоростей, которое, вообще говоря, априори неизвестно. С чисто математических позиций интеграл в правой части выражает объем эпюры скорости. Представим теперь, что при неизменном расходе Q жидкость становится идеальной, т.е. теряет вязкость. Это, очевидно, приведет к перестройке эпюры скоростей, причем, поскольку исчезнут силы вязкого трения, все частицы жидкости будут двигаться с некоторой одинаковой скоростью V . При этом, ввиду того, что расход остается неизменным, объем новой эпюры скоростей равен объему старой. Таким образом, реализуется условие: $u(r) = V = \text{const}$ и, соответственно, получаем:

$$Q = \iint_S V dS = V \iint_S dS = VS = \iint_S u(r) dS$$

$$V = \frac{Q}{S}$$

Скорость V , введенная таким образом носит название среднерасходной, либо средней скорости. Следовательно, формально средняя скорость может быть определена как фиктивная скорость, с которой должны были бы двигаться все частицы жидкости для того, чтобы расход был равен его истинному значению. Заменяв истинные, неравномерно распределенные по сечению скорости средней скоростью V и приняв давление постоянным по живому сечению, мы заменяем рассмотрение реального потока течением, в котором все частицы жидкости имеют одну и ту же скорость. С физико-математической точки зрения использование понятия средней скорости позволяет свести задачу о движении жидкости в трубах и каналах к одномерной. Для такого течения решением упрощенной одномерной задачи является получение зависимости распределения давления по длине трубы, удобной для технических расчетов.

Если поперечное сечение трубы или канала изменяется по длине, то поток является трехмерным, но в некоторых случаях приближенно может быть сведен к одномерной модели. Это возможно, если кривизна линий тока и углы их расхождения малы. Потоки, удовлетворяющие этим условиям, называют плавно изменяющимися (параллельно струйными), живые сечения их слабо искривлены и могут считаться плоскими. Выбирая продольную координату вдоль оси потока, проходящей через центры инерции живых сечений, можно рассматривать плавно изменяющийся поток, как одномерный.

Рассмотрим свойства плавно изменяющегося движения несжимаемой жидкости в трубах и каналах с точки зрения перехода к одномерной модели.

Если считать поток установившимся, то все производные по времени, входящие в уравнения движения, равны нулю. Если исходить из одномерной модели, то малы и могут быть приняты равными нулю также поперечные компоненты скорости u_y, u_z . Применительно к этому случаю система дифференциальных уравнений Навье-Стокса принимает вид:

$$\begin{cases} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Последние два уравнения полностью совпадают с уравнениями гидростатики, а это означает, что в пределах живого сечения движущейся жидкости давление распределено по гидростатическому закону. В частности, если объемной силой является сила тяжести, то для произвольной точки, находящейся в живом сечении, имеем $Y=0$, $Z = -g \cos \alpha$, где α – угол между направлением вертикали и нормалью к вектору скорости. Следовательно, в пределах живого сечения (для $X = \text{const}$) гидростатический напор постоянен:

$$z + \frac{p}{\rho g} = \text{const}, \text{ либо } gz + \frac{p}{\rho} = \text{const}$$

Этот вывод приближенно справедлив для плавно изменяющихся течений и позволяет распространить уравнение Бернулли на поток конечных размеров, введя в него средние по сечению величины.

4. ВЫВОД ОСНОВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ

4.1. Вывод дифференциального уравнения продольных колебаний стержня с распределенными по длине параметрами.

Рассмотрим стержень (Рис.4.1) длиной l , площадью поперечного сечения $F(x)$, модулем упругости E , плотностью $\rho(x)$. Пусть на стержень вдоль оси Ox действует продольная сила с интенсивностью $q(x,t)$. Ось Ox направлена вдоль оси стержня. Функция $F(x)$, $\rho(x)$ и $q(x)$ непрерывны, или кусочно-непрерывны [3,5,21].

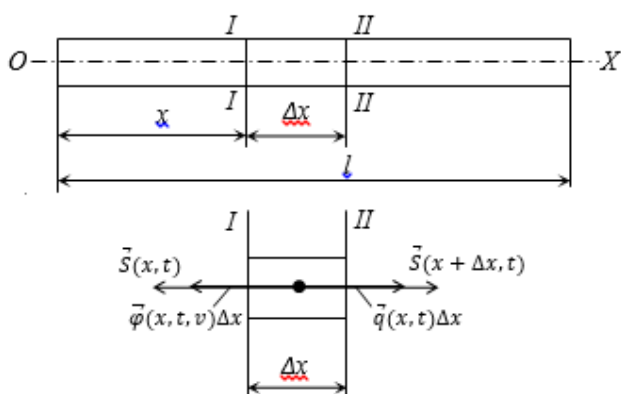


Рис 4.1

Из стержня выделим малый участок Δx сечениями I-I и II-II, на который действуют следующие силы:

а) продольная внешняя нагрузка, равная $q(x,t)\Delta x$ направленная вдоль оси Ox ;

б) равнодействующая натяжения со стороны левого участка I-I, равная $S(x;t)=F(x)\Delta(x;t)$ и направленная противоположно оси Ox . Здесь

$\Delta(x;t)$ - напряжение в сечении $F(x)$, согласно закону Гука равное

$$\sigma = E\varepsilon = E \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x} = E \frac{\partial u}{\partial x},$$

где u – упругое перемещение;

в) равнодействующая натяжения со стороны правого участка II-II, равная $S(x+\Delta x,t)=F(x)\Delta(x+\Delta x,t)$ и направлено по оси Ox . Здесь $\Delta(x+\Delta x,t)$ напряжение в сечении II-II;

г) сила сопротивления среды. Если её интенсивность по длине стержня обозначить через $\Phi(x,t,v)$, то на участок Δx придёт сила $\Phi(x,t,v)\Delta x$.

Так как сила сопротивления направлена противоположно скорости, то её знак определяется характером её зависимости. Например, для кулонова трения сила сопротивления запишется в виде

$$- \Phi \operatorname{sign} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right),$$

где

$$\operatorname{sign} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \begin{cases} 1 & \text{при } \frac{\partial u}{\partial t} > 0 \\ -1 & \text{при } \frac{\partial u}{\partial t} < 0 \end{cases},$$

Для случая, когда сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости, знак минус перед Φ сохраняется и опускается $\operatorname{sign} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)$.

Сила инерции малого элемента стержня определяется выражением

$$-\rho(x) F(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Тогда по принципу Даламбера

$$-\rho(x)F(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta x + S(x + \Delta x, t) - S(x, t) - \Phi\left(x, t, \frac{\partial u}{\partial t}\right) \Delta x + q(x, t) \Delta t = 0 \quad (4.1)$$

Разлагая $S(x+\Delta x, t)$ в ряд Тейлора, поставив в (6.1.1), после деления на Δx и перехода к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ получим

$$-\rho(x)F(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[EF(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \Phi\left(x, t, \frac{\partial u}{\partial t}\right) + q(x, t) = 0 \quad (4.2)$$

Аналогичный результат может быть получен, если в результате разложения $S(x+\Delta x, t)$ пренебречь членами, содержащими Δx степени выше второй. В дальнейшем, учитывая это обстоятельство при выводе других дифференциальных уравнений, в разложениях будем оставлять два члена разложения, подразумевая, что имеет место такой предельный переход.

Таким образом, получено дифференциальное уравнение вынужденных колебаний однородного стержня в среде с сопротивлением. Из этого уравнения можно получить в качестве частных случаев уравнения продольных колебаний стержня при различных предположениях относительно распределения массы, жёсткости, сопротивления среды и внешней нагрузки.

Например, если принять $\rho(x)=const$, $F(x)=const$, а также принять пропорциональность силы сопротивления скорости, то получится дифференциальное уравнение вынужденных продольных колебаний однородного стержня

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2h \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(x, t) \quad (4.3)$$

где $a^2 = \frac{E}{\rho}$; $g(x, t) = \frac{q(x, t)}{\rho F}$; h – коэффициент сопротивления.

Приняв $g(x, t) = 0$, получим дифференциальное уравнение свободных колебаний однородного стержня

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2h \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (4.4)$$

При $h=0$ из (4.4) получится уравнение свободных колебаний стержня в идеальной среде.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.5)$$

Для решения дифференциальных уравнений в частных производных необходимо задание начальных и граничных условий.

В качестве начальных условий обычно задается значения функции и ее первой производной по аргументу t в момент времени $t = t_0$. При задании только начальных условий совместно с дифференциальным уравнением имеет место задача Коши. Начальные условия для уравнения типа (1.5) могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} u(x, t)|_{t=0} &= \varphi(x), \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \psi(x), \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданные функции.

В качестве граничных условий задаются значения функции и ее производных в некоторых фиксированных точках. Так, например если известен закон движения обоих концов стержня, то эти условия задаются в виде

$$\left. \begin{aligned} u(x, t)|_{x=0} &= \mu_1(x), \\ u(x, t)|_{x=l} &= \mu_2(x), \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Если на одном из концов известна внешняя действующая сила, то согласно закону Гука

$$\sigma F = EF\varepsilon = EF \frac{\partial u}{\partial x} = P(t)$$

или $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{EF} P(t) = v(t)$, где $v(t) = \frac{P(t)}{EF}$.

Следовательно $\frac{\partial u}{\partial x} = v(t)$. Тогда граничное условие имеет вид

$$\frac{u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = v(t) \quad (4.8)$$

В случае, если на концах стержня имеет место упругое закрепление, то граничное условие составляются исходя из равенства силы натяжения пружины силе реакции конца стержня, т.е.

$$EF \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = cu|_{x=0} \quad (4.9)$$

где c – жесткость пружины.

Если точки закрепления являются подвижными и их перемещения задаются функциями типа $S(t)$, то граничные условия (4.9) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= k[u(x, t)|_{x=0} - S(t)], \\ k &= \frac{c}{EF}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Различные комбинации указанных выше граничных условий приводят к специальным граничным условиям. Так, например, если на одном конце стержня задается закон перемещения, а на другом – упругая заделка, то получается смешанная задача:

$$\left. \begin{aligned} u(x, t)|_{x=0} &= v_1(t), \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} &= -k[u(x, t)|_{x=l} - S(t)] \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Для неограниченного стержня вместо полной задачи можно рассматривать задачу только с начальными условиями – задачу Коши:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ \left. \begin{aligned} u(x, t)|_{t=0} &= \varphi(x), \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \psi(x), \end{aligned} \right\} & -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

При изучении динамики стержня вблизи одной границы влиянием другой границы можно пренебречь, если она на протяжении интересующего нас промежутка времени не оказывает существенного влияния на рассматриваемую часть стержня. При этом стержень можно рассматривать как полу-бесконечный. Задача формулируется в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & 0 \leq x < \infty, t > 0; \\ u(x, t)|_{x=0} &= \mu(t), & t \geq 0; \\ u(x, t)|_{t=0} &= \varphi(x), & 0 \leq x < \infty \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \psi(x), \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

К таким задачам можно отнести изучение динамики верхней части колонны труб достаточно большой длины в процессе торможения или же при ее посадке на клиновой захват; определение давления жидкости или газа в начале трубопровода при пуске насоса или компрессора; определение давления жидкости внутри обсадной колонны при закрытии преентера для предотвращения выброса из скважины и т.д.

Если в качестве граничного условия задана периодическая функция времени, влиянием начальных условий после определенного времени можно пренебречь. Такие задачи называются «задачами без начальных условий» и формулируются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} &\text{найти решение уравнения} \\ &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2h \frac{\partial u}{\partial t}, (h > 0), 0 < x < l; t > -\infty \\ &\text{при заданных граничных условиях} \\ &u(x, t)|_{x=0} = \mu_1(x), \\ &u(x, t)|_{x=l} = \mu_2(x), \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

4.2. Вывод дифференциальных уравнений поперечных колебаний балки

Рассмотрим балку, установленную на двух опорах (Рис.4.2). Пусть масса

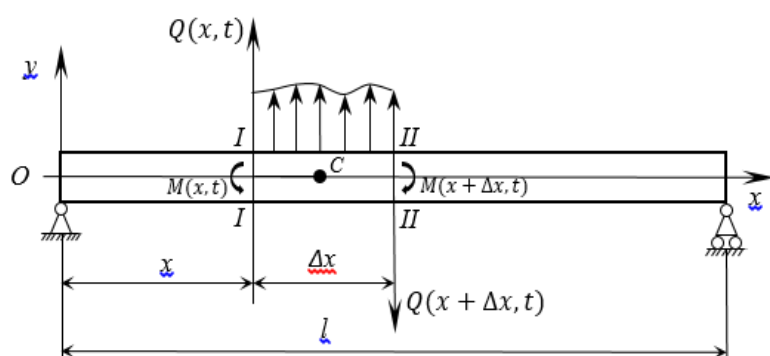


Рис 4.2

единицы длины балки равна μ ; модуль упругости материала – E ; момент инерции поперечного сечения балки относительно нейтральной оси, перпендикулярной к плоскости чертежа – J ; момент инерции единицы длины балки относительно

центральной оси, перпендикулярной к плоскости его колебаний – I_0 .

Принимается, что в недеформированном состоянии ось балки прямолинейна и совпадает с осью Ox . Отклонение точек оси балки при поперечных колебаниях перпендикулярно оси Ox обозначим через $u(x; t)$. Выделим элемент балки сечения I-I и II-II. В сечении I-I действует поперечная сила $Q(x; t)$ и изгибающий момент $M(x; t)$, а в сечении II-II – $Q(x + \Delta x; t)$ и $M(x + \Delta x; t)$. Интенсивность внешней нагрузки, действующей на балку равна $f(x; t)$.

Под действием указанных сил и моментов выделенный элемент будет совершать плоскопараллельное движение. Так как смещением по оси Ox пренебрегают, то остается составить одно уравнение по принципу Даламбера для сил в проекциях на ось Oy и одно уравнение моментов относительно центра инерции элемента.

Масса элемента равна $\mu \Delta x$, а ее осевой момент инерции относительно центральной оси, перпендикулярной к плоскости xOy , равен $I_0 \Delta x$. Угол поворота элемента вокруг той же оси обозначим через φ . Для малых углов поворота $\varphi \approx tg \varphi = \frac{du}{dx}$. Сила инерции малого элемента при перемещении по оси Oy равна $\mu \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, а момент силы инерции относительно центральной оси элемента, перпендикулярной к плоскости xOy равен $I_0 \Delta x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$.

Составим уравнения равновесия проекций и моментов указанных сил:

$$-\mu \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Q(x, t) - Q(x + \Delta x, t) + f(x, t) \Delta x = 0 \quad (4.14)$$

$$-I_0 \Delta x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + M(x, t) - M(x + \Delta x, t) - Q(x, t) \frac{\Delta x}{2} - Q(x + \Delta x, t) \frac{\Delta x}{2} = 0 \quad (4.15)$$

Разложив в ряд Тейлора $Q(x + \Delta x, t)$ и $M(x + \Delta x, t)$ и оставив первые два члена разложения, получим

$$Q(x + \Delta x, t) = Q(x, t) + \frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x,$$

$$M(x + \Delta x, t) = M(x, t) + \frac{\partial M}{\partial x} \Delta x,$$

Подставляем эти выражения в (4.14) и (4.15)

$$-\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial Q}{\partial x} + f(x, t) = 0 \quad (4.16)$$

$$-I_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial M}{\partial x} - Q = 0 \quad (4.17)$$

Из уравнения (4.17) следует: $-Q = \frac{\partial M}{\partial x} - I_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$. Подставляя это выражение в (4.16), получим

$$-\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(I_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) + f(x, t) = 0$$

Учитывая, что $\varphi = \frac{\partial u}{\partial x}$; $M = -EJ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

$$-\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(I_0 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right) + f(x; t) = 0$$

При $I_0 = \text{const}$, $EJ = \text{const}$ получим уравнение поперечных колебаний однородной балки в виде

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - I_0 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - f(x, t) = 0 \quad (4.18)$$

При длине балки, значительно превосходящей поперечные размеры, инерцией вращения можно пренебречь. Тогда уравнение примет вид:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f(x, t) \quad (4.19)$$

если принять $f(x; t) = 0$, получится дифференциальное уравнение свободных поперечных колебаний однородной балки

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad (4.20)$$

где $c = \sqrt{EJ/\mu}$ - скорость распространения поперечных волн.

Для поперечных колебаний балки в качестве начальных условий задаются начальное смещение и начальная скорость балки

$$\left. \begin{aligned} u(x, t)|_{t=0} &= \xi(x), \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \psi(x). \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Граничные условия определяются в зависимости от способа закрепления концов балки. Причем количество условий определяется высшим порядком производной по x в уравнении (4.20). Следовательно, должно быть задано четыре условия. Если концы балки закреплены шарнирно, то это значит что на обоих концах его смещение и изгибающие моменты равны нулю, т.е.

$$\begin{aligned} u(x, t)|_{x=0} &= 0, & u(x, t)|_{x=l} &= 0. \\ M(x, t)|_{x=0} &= 0, & M(x, t)|_{x=l} &= 0. \end{aligned}$$

Известно, что $EJ_0 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = -M(x, t)$.

Следовательно, для балки, шарнирно закрепленного на обоих концах, имеют место следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} u(x, t)|_{x=0} &= 0, & u(x, t)|_{x=l} &= 0. \\ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} &= 0, & \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l} &= 0. \end{aligned}$$

Для консольной балки граничные условия при $x = 0$ будут определяться исходя из того, что на защемленном конце отсутствует прогиб и равен нулю угол поворота сечения балки, т.е.

$$u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad \varphi(x, t)|_{x=0} = 0,$$

а для свободного конца, т.е. при $x = l$, если отсутствуют изгибающий момент и поперечная нагрузка можно написать

$$M(x, t)|_{x=l} = 0, \quad Q(x, t)|_{x=l} = 0.$$

так как

$$\varphi(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x},$$

$$EJ_0 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = -M(x, t), \quad Q(x, t) = \frac{\partial M(x, t)}{\partial x},$$

то для консольной балки окончательно получим следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} u(x, t)|_{x=0} &= 0, & \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l} &= 0, & \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=l} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Если на свободном конце будут действовать момент $M(t)$ и поперечная сила $Q(t)$, то граничные условия при $x = l$ будут иметь вид

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = -\frac{M(t)}{EJ_0}, \quad \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=l} = -\frac{Q(t)}{EJ_0} \quad (4.23)$$

Для балки с жестко закрепленными концами можно принять, что прогибы и углы поворота сечений в местах защемления равны нулю. Тогда

$$\left. \begin{aligned} u(x, t)|_{x=0} &= 0, & \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0 \\ u(x, t)|_{x=l} &= 0, & \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

Аналогично можно составить граничные условия и для других видов закрепления концов балки.

4.3. Вывод дифференциального уравнения поперечных колебаний струны

Пусть струна имеет начальное натяжение T_0 , ось ее совпадает с осью Ox (Рис.4.3). Рассмотрим элемент струны Δx после вывода её из положения равновесия и предположим, что струна все время в своем движении остается в плоскости Oxy , смещение точек от оси Ox мало; натяжение струны T_0 во всех ее сечениях постоянно и направленно по оси струны. Отклонение точек струны от начального положения обозначим через $u(x, t)$, её плотность на единицу длины – через ρ и предположим, что точки струны получают смещение только по направлению оси Oy .

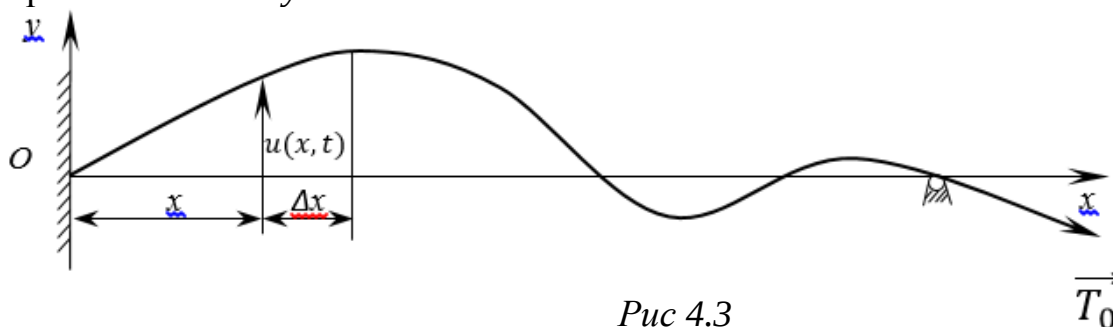


Рис 4.3

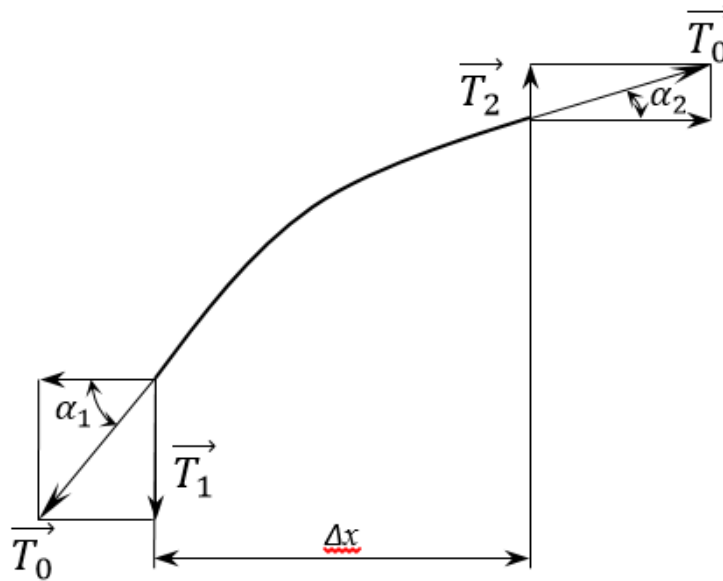


Рис 4.3'

Для достаточно малых углов приближенно выполняется условие равенства нулю суммы проекций сил на ось Ox ;

$$T_0 \cos \alpha_1 - T_0 \cos \alpha_2 = 0.$$

Применяя принцип Даламбера для малого элемента струны, в проекциях на ось Oy , учитывая, что масса элементов равна $\sim \rho \Delta x$, а ускорение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, можно написать

$$\sim \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T_1 + T_2 = 0 \quad (4.25)$$

Длин дуги определяется выражением

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = tg \alpha.$$

Для малых углов пренебрегаем $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ и тогда струна считается нерастяжимой.

Из Рис.6.3.2 видно, что

$$T_1 = T_0 \sin \alpha_1 ; T_2 = T_0 \sin \alpha_2.$$

Тогда $T_2 - T_1 = T_0 (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$. Для малых перемещений струны можно принять, что $\sin \alpha_1 \approx tg \alpha_1 = u(x, t)$, $\sin \alpha_2 \approx tg \alpha_2 = u_x(x + \Delta x, t)$, где $u_x(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$.

При этом

$$\begin{aligned}
T_2 - T_1 &= T_0[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] = T_0 \left[u_x(x, t) + \frac{\partial u_x(x, t)}{\partial x} \Delta x - u_x(x, t) \right] \\
&= \\
&= T_0 \frac{\partial u_x(x, t)}{\partial x} \Delta x = T_0 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Delta x.
\end{aligned}$$

Подставляя это значение в (6.3.1), получим

$$- \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x = 0$$

$$\text{откуда} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.26)$$

где $a_1^2 = \frac{T_0}{\rho}$.

Уравнение (4.26) является дифференциальным уравнением поперечных колебаний струны.

Сформулируем дополнительные условия для струны с закрепленными концами. Так как концы струны длины l закреплены, то их отклонения $u(x, t)$ в точках $x = 0$ и $x = l$ должны быть равны нулю при любых t :

$$u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad u(x, t)|_{x=l} = 0 \quad (4.27)$$

В начальный момент времени всем точкам струны сообщаются некоторые смещения и скорости:

$$u(x, t)|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x), \quad (4.28)$$

где $f(x)$ и $F(x)$ - заданные функции.

Помимо граничных условий (4.28) возможны граничные условия других типов. Наиболее распространенными являются следующие

$$\begin{aligned}
\text{I. } & u(x, t)|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u(x, t)|_{x=l} = \mu_2(t); \\
\text{II. } & \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = v_1(t), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = v_2(t); \\
\text{III. } & \left(\frac{\partial u}{\partial x} + h_1 u \right) \Big|_{x=0} = \omega_1(t), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + h_2 u \right) \Big|_{x=l} = \omega_2(t);
\end{aligned}$$

где $\mu_1(t), \mu_2(t), v_1(t), v_2(t), \omega_1(t), \omega_2(t)$ - известные функции, h_1 и h_2 - известные постоянные.

Приведенные граничные условия называют соответственно граничными условиями первого, второго, третьего рода. Условия I имеют место в том случае, если концы объекта (струна, стержень и т.д.) перемещаются по заданному закону; условия II - в случае, если к концам приложены заданные силы; условия III - в случае упругого закрепления концов. Если функции,

заданные в правой части равенств, равны нулю, то граничные условия называются однородными. Так, граничные условия (4.27) – однородные.

4.4. Вывод дифференциального уравнения крутильных колебаний валов.

Пусть в сечении I-I (Рис.4.4), перпендикулярном к оси вала, момент внутренних сил равен $M(x, t)$, а в сечении II-II $M(x + \Delta x, t)$; на участке вала Δx действует момент внешней нагрузки с интенсивностью $m(x, t)$ и момент сопротивления среды $\Phi\left(x, t, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \Delta x$. Обозначим погонный осевой момент инерции вала через $I_0(x)$, полярный момент инерции площади сечения вала через $J_0(x)$, модуль сдвига через $G(x)$ и угол поворота сечения вокруг оси вала через $\varphi(x, t)$. Согласно принципу Даламбера можно написать

$$-I_0(x) \Delta x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + M(x + \Delta x, t) - M(x, t) - \Phi\left(x, t, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \Delta x + m(x, t) \Delta x = 0. \quad (4.29)$$

Разложив $M(x + \Delta x, t)$ в ряд Тейлора и оставив первые два члена разложения, получим

$$M(x + \Delta x, t) = M(x, t) + \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} \Delta x.$$

Тогда

$$-I_0(x) \Delta x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + M(x, t) + \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} \Delta x - M(x, t) - \Phi\left(x, t, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \Delta x + m(x, t) \Delta x = 0. \quad (4.30)$$

Или

$$-I_0(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} - \Phi\left(x, t, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + m(x, t) = 0. \quad (4.31)$$

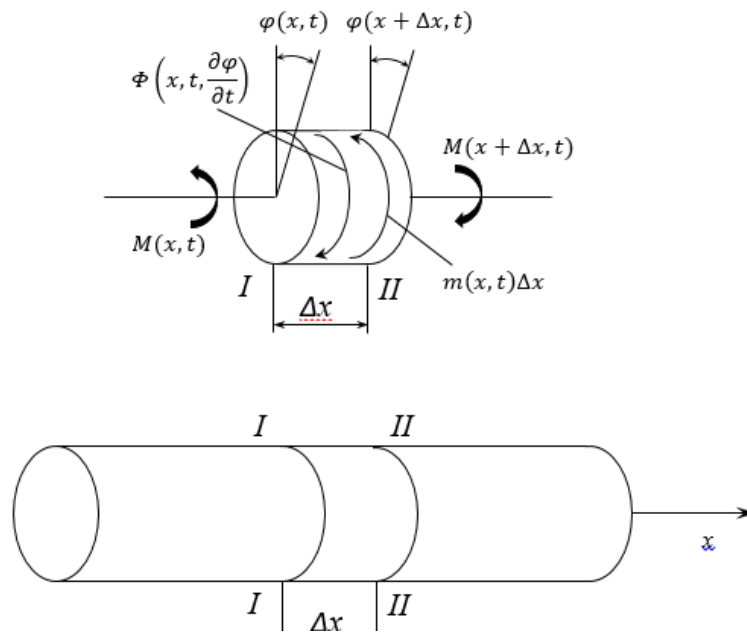


Рис 4.4

Согласно закону Гука касательное напряжение в сечении на расстоянии r от центра сечения равно

$$\tau = \gamma G = Gr \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x},$$

Где γ – угловое смещение сечения вала.

Момент внутренних касательных сил относительно центра сечения равен:

$$M = \int_F \tau \cdot r dF = G \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \int_F r^2 dF = J_0 G \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x}.$$

Следовательно,

$$M(x, t) = GJ_0(x) \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x}.$$

Подставляя значение $M(x, t)$ получим

$$-I_0(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[GJ_0(x) \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \right] - \Phi \left(x, t, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + m(x, t) = 0. \quad (4.32)$$

Уравнение является дифференциальным уравнением 0 среде.

При $I_0(x) = \text{const}$; $G = \text{const}$; $J_0(x) = \text{const}$; $\Phi = 0$; $m = 0$ получим дифференциальное уравнение свободных крутильных колебаний однородного вала в идеальной среде:

$$-I_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + GJ_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0.$$

Обозначив $\frac{GJ_0}{I_0} = c^2$, получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Учитывая, что $\frac{I_0}{J_0} = \rho$, можем написать

$$c^2 = \frac{G}{\rho}.$$

4.5. Вывод дифференциального уравнения нестационарного движения сжимаемой идеальной жидкости в длинном трубопроводе.

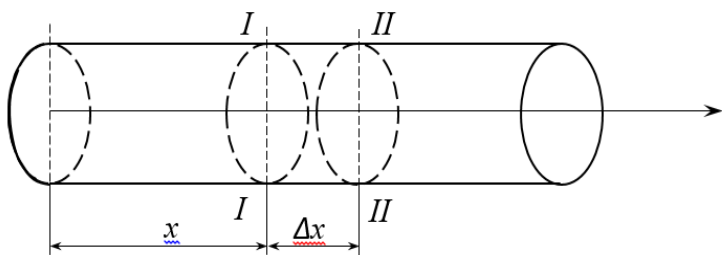


Рис.4.5

Выделим в потоке жидкости в трубе два поперечных сечения с расстоянием Δx между ними (Рис 4.5). Введем обозначения: ρ – плотность жидкости или газа; p – среднее давление в сечении; f – площадь поперечного сечения; v –

осредненная по площади продольная скорость; x – координата; t – время. Составим баланс массы втекающей и вытекающей из элемента потока Δx .

Массовый расход через сечение I-I будет $M(x, t) = \rho f v(x, t)$, а через сечение II-II $M(x + \Delta x, t) = \rho f v(x + \Delta x, t)$.

Если $M(x + \Delta x, t) > M(x, t)$, то в объеме $f \Delta x$ произойдет уменьшение плотности. Если в момент времени t плотность выделенного объема была равна $\rho(x, t + \Delta t)$, то уменьшение массы жидкости в объеме $f \Delta x$ равно

$$\begin{aligned} \rho(x, t) f \Delta x - \rho(x, t + \Delta t) f \Delta x &= \rho(x, t) f \Delta x - \\ - \left[\rho(x, t) + \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} \Delta t \right] f \Delta x &= - \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta t f \Delta x \end{aligned} \quad (4.33)$$

Разность масс, входящих и выходящих через соответствующие сечения I-I и II-II за промежуток времени Δt , равна

$$M[(x + \Delta x, t) - M(x, t)] \Delta t = \left[M(x, t) + \frac{\partial M}{\partial x} \Delta x - M(x, t) \right] \Delta t = \frac{\partial M}{\partial x} \Delta x \Delta t \quad (4.34)$$

Приравняв (6.5.1) и (6.5.2), получим

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -f \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Подстановка сюда выражения M дает

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Это уравнение представляет собой уравнение неразрывности потока для сжимаемой жидкости в длинном трубопроводе с постоянным поперечным сечением.

Теперь составим уравнение движения выделенного элемента с массой $M = \rho f \Delta x$. Если силу давления в сечении I-I обозначим через $P(x, t)$, а в сечении II-II $P(x + \Delta x, t)$, то проекция равнодействующей этих сил на ось x будет

$$\begin{aligned}\Delta P &= P(x, t) - P(x + \Delta x, t) = P(x, t) - \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \Delta x - p(x, t) = \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x} \Delta x = -f \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x.\end{aligned}\quad (4.35)$$

Тогда уравнение движения примет вид

$$\rho f \Delta x \frac{dv}{dt} = -f \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x$$

или

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}.\quad (4.36)$$

Уравнение (6.5.5) есть дифференциальное уравнение движения сжимаемой жидкости в длинном прямом трубопроводе с постоянным поперечным сечением.

Уравнения (6.5.3) и (6.5.5) образуют систему

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \end{cases}\quad (4.37)$$

в которую входят три неизвестные величины: $\rho(x, t)$, $v(x, t)$ и $p(x, t)$. Следовательно должно быть задано физическое уравнение, устанавливающее зависимость между плотностью и давлением. Для случая капельной сжимаемой жидкости, согласно закону Гука, изменение плотности жидкости принимается пропорциональным изменению давления

$$\rho - \rho_0 = \frac{(p - p_0)\rho_0}{k_*},\quad (4.38)$$

где k_* – модуль объемного сжатия жидкости; ρ_0 – плотности при давлении p_0 .

Из (4.38) получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho_0}{k_*} \frac{\partial p}{\partial t}.\quad (4.39)$$

Подставляем (4.39) в (4.37) получим:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = -\frac{\rho_0}{k_*} \frac{\partial p}{\partial t}. \end{cases}\quad (4.40)$$

Для малых дозвуковых скоростей движение идеальной жидкости с равномерным распределением скоростей в сечении в уравнениях движения можно пренебречь членами $v \frac{\partial v}{\partial x}$ и $v \frac{\partial \rho}{\partial x}$. Тогда система (4.40) примет вид

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\rho_0}{k_*} \frac{\partial p}{\partial t}. \end{cases}\quad (4.41)$$

Для случая малых изменений плотности можно принять $\rho = \rho_0$. Тогда (4.41) примет вид

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\rho_0}{k_*} \frac{\partial p}{\partial t} \end{cases} \quad (4.43)$$

Дифференцируя первое уравнение системы по x и второе по t

$$\begin{cases} \frac{\partial^2(\rho_0 v)}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2(\rho_0 v)}{\partial x \partial t} = -\frac{\rho_0}{k_*} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \end{cases}$$

Тогда получим

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{k_*}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

Обозначив $\frac{k_*}{\rho_0} = a^2$ получим

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (4.44)$$

Уравнение (4.44) есть дифференциальное уравнение описывающее изменение давления капельной идеальной жидкости в длинном трубопроводе постоянного сечения.

В качестве начальных условий могут быть заданы распределения скорости и давления по длине трубопровода:

$$v(x, t)|_{t=0} = \varphi(x) \text{ и } p(x, t)|_{t=0} = \psi(x) \quad (4.45)$$

Используя зависимость (4.39), начальные условия (4.45) можно представить только для v или p . Так, например, при помощи зависимости

$$-\frac{\partial p}{\partial t} = \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.46)$$

условие (4.45) можно представить в виде

$$\begin{aligned} p(x, t)|_{t=0} &= \psi(x), \\ \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{t=0} &= -\rho a^2 \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Обычно переходный режим в трубопроводе создается при пуске насоса, турбины компрессора, открытии или закрытии задвижек. При этом указанные агрегаты могут быть присоединены к трубопроводу непосредственно или же через устройства, предназначенные для регулирования расхода или уменьшения колебаний давления (например, воздушный колпак, уравнильная шахта, буферный резервуар компрессора и т.п.).

В случае если к одному концу трубопровода непосредственно присоединен насос с расходом $Q(t)$, а на другом конце задано давление, граничные условия можно представить в виде

$$p(x, t)|_{x=0} = \mu(t), \quad v(x, t)|_{x=l} = \frac{Q(t)}{F}, \quad (4.48)$$

где F – поперечное сечение трубопровода.

Пользуясь уравнением $-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t}$, условие при $x = l$ в (6.5.16) можно представить так:

$$\left. \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \right|_{x=l} = -\rho/F \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (4.49)$$

Тогда задача о распределении давления в длинном трубопроводе, к одному концу которого присоединен насос с расходом $Q(t)$, а на другом конце поддерживается давление $\mu(t)$, формулируется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \quad t > 0; \\ p(x,t)|_{t=0} &= \psi(x), & 0 \leq x \leq l; \\ \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{t=0} &= -\rho a^2 \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}, & 0 \leq x \leq l; \\ p(x,t)|_{x=0} &= \mu(t), & t \geq 0; \\ \left. \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \right|_{x=l} &= -\frac{\rho}{F} \frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{x=l}, & t \geq 0; \end{aligned} \right\} \quad (4.50)$$

Если насос отделен от трубопровода воздушным колпаком, для составления граничных условий при $x = l$ следует составить уравнение баланса для жидкости и уравнение состояния для воздуха, находящегося в воздушном колпаке.

Обозначим расход жидкости, вытекающей из колпака через $Q(t)$, увеличение объема жидкости (или уменьшение объема газа) в колпаке через ΔV , площадь трубопровода через F , средний объем и абсолютное давление воздуха в колпаке через V_0 и p_0 . Прирост объема жидкости в колпаке в единицу времени будет

$$\frac{d\Delta V}{dt} = Fv(x,t)|_{x=l} - Q(t) \quad (4.51)$$

Если принять, что уравнение состояния для воздуха описывается законом Бойля-Мариотта, получится

$$p_0 V_0 = p(V_0 - \Delta V),$$

откуда

$$p = \frac{p_0 V_0}{V_0 - \Delta V} = \frac{p_0}{1 - \frac{\Delta V}{V_0}} \approx p_0 \left(1 + \frac{\Delta V}{V_0} \right) \quad (4.52)$$

т.е. можно принять $p = p_0 \left(1 + \frac{\Delta V}{V_0} \right)$

Подставляем значение ΔV из (4.52) в (4.51):

$$\left. \frac{V_0}{p_0} \frac{dp}{dt} \right|_{x=l} = Fv(x,t)|_{x=l} - Q(t).$$

Учитывая (6.5.14) получим

$$-\frac{V_0}{p_0} \rho a^2 \left. \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right|_{x=l} = Fv(x,t)|_{x=l} - Q(t).$$

Отсюда

$$v(x, t)|_{x=l} + k \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = f(t), \quad (4.53)$$

где $k = \frac{V_0 \rho a^2}{F p_0}$; $f = \frac{Q(t)}{F}$.

Выражение (4.53) является граничным условием для длинного трубопровода, к одному из концов которого через воздушный колпак присоединен насос. В этом случае задачу о переходном процессе в трубопроводе можно сформулировать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \quad t > 0; \\ v(x, t)|_{t=0} &= 0, & 0 \leq x \leq l; \\ \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0, & 0 \leq x \leq l; \\ \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, & t \geq 0; \\ v(x, t)|_{x=l} + k \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} &= f(t), & t \geq 0; \end{aligned} \right\} \quad (4.54)$$

4.6. Вывод дифференциального уравнения колебаний мембраны.

Мембраной называется плоская тонкая пластинка, несопротивляющаяся изгибу и сдвигу. Мембрана способна значительно прогибаться под действием поперечной нагрузки и поэтому применяется в качестве чувствительного элемента в приборах для измерения давления, в акустических приборах, упругих муфтах и т.п.

Рассмотрим мембрану (Рис.4.6), натянутую по контуру силой, величина которой на единицу длины равна T . Плотность единицы площади мембраны обозначим через ρ . Примем, что плоскость xOy совпадает с плоскостью мембраны при ее недеформированном состоянии. Мембрана нагружена по поверхности внешней нагрузкой с интенсивностью $q(x, y, t)$. Предполагается что деформация мембраны мала и происходит в направлении перпендикулярном плоскости xOy . В связи с этим так же предполагается, что натяжение мембраны и после деформации остается постоянным; увеличением площади мембраны в процессе колебаний пренебрегают. Отклонение точки мембраны от плоскости xOy обозначим через $u(x, y, t)$.

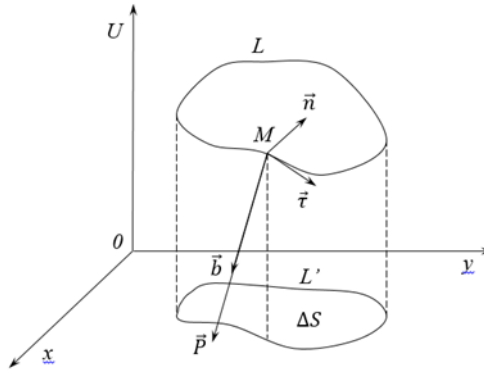
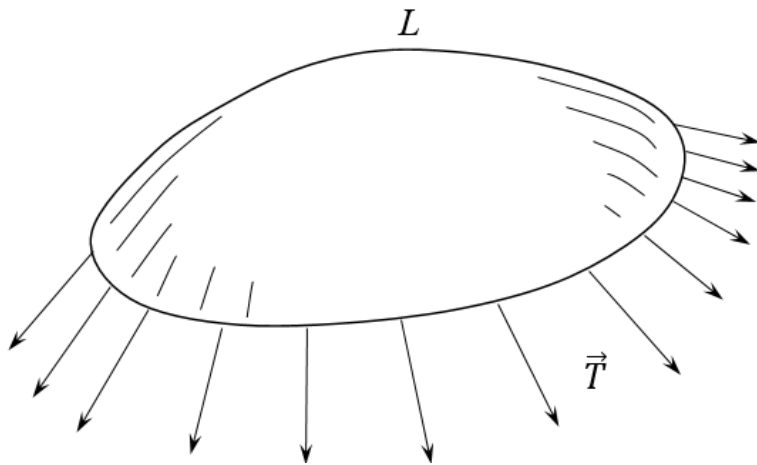


Рис.4.6



Для составления дифференциального уравнения колебаний мембраны из нее выделяется элемент с контуром L . Положительным направлением обхода этого контура принимается направление, противоположное направлению вращения

Рис.4.6'

часовой стрелки. На длину dl данного контура действует сила натяжения $\vec{P}$, по модулю равная Tdl .

Равнодействующая внешней нагрузки, действующей на выделенный элемент, будет равна $q(x, y)\Delta s$, а сила инерции - $-\rho\Delta s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, где Δs - проекция выделенного элемента мембраны с контуром L на плоскость xOy . Проекция равнодействующей сил натяжения, действующих по контуру L , на ось Ou обозначим через $\lim \Sigma P_u$, тогда согласно принципу Даламбера имеем:

$$-\rho\Delta s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \lim \Sigma P_u + q(x, y)\Delta s = 0 \quad (4.55)$$

Вектор, по величине равный dl и касательный к контуру L в точке $M(x, y, u)$, обозначим через $\vec{\tau} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}du$. Единичный вектор нормали к поверхности мембраны в этой же точке обозначим через $\vec{n}$. Сила $\vec{P}$ направлена перпендикулярно плоскости, образованной векторами $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$, то есть она совпадает с направлением вектора $\vec{b}$ и равна векторному произведению $\vec{\tau} \times \vec{n}$.

Для фиксированного значения t и для случая выпуклой поверхности $u(x, y, t)$ направляющие косинусы углов между нормалью $\vec{n}$ и осями Ox , Oy и Oz можно определить из выражений:

$$\cos(\widehat{\vec{n}, \vec{i}}) = \frac{(\text{grad } u)_x}{|\text{grad } u|} = \frac{-\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\cos(\widehat{\vec{n}, \vec{j}}) = \frac{(\text{grad } u)_y}{|\text{grad } u|} = \frac{-\frac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\cos(\widehat{\vec{n}, \vec{k}}) = \frac{(\text{grad } u)_z}{|\text{grad } u|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}},$$

Для малых перемещений мембраны значением $\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]$ по сравнению с единицей можно пренебречь, и тогда

$$\cos(\widehat{\vec{n}, \vec{i}}) = -\frac{\partial u}{\partial x}; \quad \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{j}}) = -\frac{\partial u}{\partial y}; \quad \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{k}}) = 1.$$

Следовательно $\vec{n} = -\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}$. Тогда $\vec{b}$ определяется из векторного произведения

$$\begin{aligned} \vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & du \\ -\frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial y} & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \left(dy + \frac{\partial u}{\partial y} du \right) + \vec{j} \left(-\frac{\partial u}{\partial x} du - dx \right) + \vec{k} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right). \end{aligned}$$

По модулю $b = \tau \cdot 1 \cdot \sin 90^\circ = dl$.

Сила $\vec{P}$ направлена по вектору $\vec{b}$:

$$\vec{P} = T\vec{b} = \vec{i}T \left(dy + \frac{\partial u}{\partial y} du \right) + \vec{j}T \left(-\frac{\partial u}{\partial x} du - dx \right) + \vec{k}T \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) \quad (4.56)$$

Отсюда для проекции силы $\vec{P}$ на ось Ou получим

$$\vec{P}_u = T \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right)$$

Сумма проекций всех сил натяжений, действующих по контуру направлений Ou

$$\lim \Sigma P_u = \int_L T \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right).$$

Подынтегральное выражение зависит только от x и y , по этому криволинейный интеграл по контуру L можно заменить криволинейным интегралом по контуру L' .

Согласно формуле Грина

$$\int_{L'} P dx + Q dy = \iint_{\Delta S} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Приняв $P = -\frac{\partial u}{\partial y}$; $Q = \frac{\partial u}{\partial x}$, получим

$$\begin{aligned} \lim \Sigma P_u &= T \int_L \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) = T \iint_{\Delta S} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ &= T \iint_{\Delta S} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Согласно теореме о среднем можно принять

$$\lim \Sigma P_u = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \Delta S.$$

Подставляя это значение $\lim \Sigma P_u$ в (6.6.1), получим

$$-\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + q(x, y, t) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = g(x, y, t), \quad (4.57)$$

где $a^2 = \frac{T}{\rho}$; $g(x, y, t) = \frac{q(x, y, t)}{\rho}$.

Уравнение (6.6.3) есть дифференциальное уравнение вынужденных колебаний мембраны. При $g(x, y, t) = 0$ получим дифференциальное уравнение свободных колебаний мембраны в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4.58)$$

Если мембрана прямоугольная и жестко закреплена по краям, то граничные условия будут:

на краях мембраны, параллельных оси Oy

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, t)|_{x=0} &= 0, \\ u(x, y, t)|_{x=a} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.59)$$

на краях мембраны, параллельных оси Ox

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, t)|_{y=0} &= 0, \\ u(x, y, t)|_{y=b} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.60)$$

Если мембрана круглая, нагружена осесимметрично и края ее жестко закреплены, тогда перемещения сечений при $r = R$ будут равны нулю, т.е.

$$u(r, \varphi, t)|_{r=R} = 0. \quad (4.61)$$

Кроме того, условие

$$\lim_{r \rightarrow 0} u(r, \varphi, t) \neq \infty \quad (4.62)$$

Позволяет определить ограниченное решение. В качестве начальных условий принимаются

$$\left. \begin{aligned} u(r, \varphi, t)|_{t=0} &= \xi(r, \varphi), \\ \frac{\partial u(x, \varphi, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \psi(r, \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (4.63)$$

4.7. Вывод дифференциального уравнения движения колонны бурильных труб.

Рассмотрим малый элемент колонны бурильных труб, отстоящий от устья скважины на расстояние x (Рис.4.7). Обозначим площадь поперечного сечения этого элемента через F , удельный вес материала γ_1 и модуль упругости E . На этот элемент действуют следующие силы: Вес элемента $\gamma_1 F \Delta x$, сила сопротивления среды $d_x \Phi$, упругая сила отброшенной части колонны бурильных труб в сечении x есть $S(x, t) = F \delta(x, t)$, а в сечении $x + \Delta x$ это $S(x + \Delta x, t) = F \delta(x + \Delta x, t)$.

Согласно принципу Даламбера

$$-\frac{\gamma_1 F \Delta x}{g} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + S(x + \Delta x, t) - S(x, t) + \gamma_1 F \Delta x - d_x \Phi = 0, \quad (4.64)$$

где u – абсолютное перемещение сечения колонны.

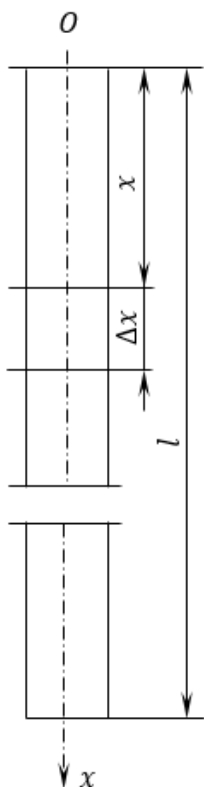


Рис.4.7

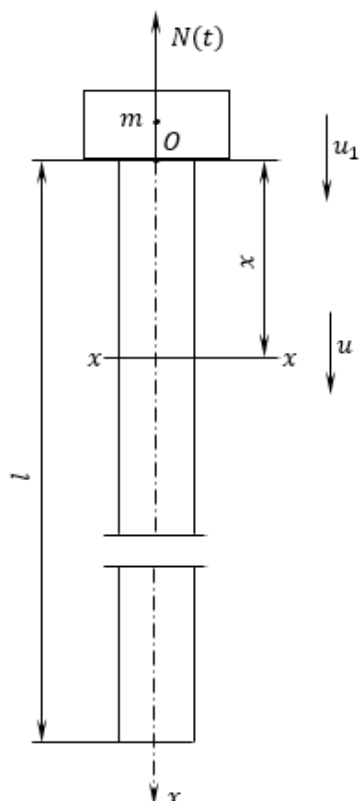
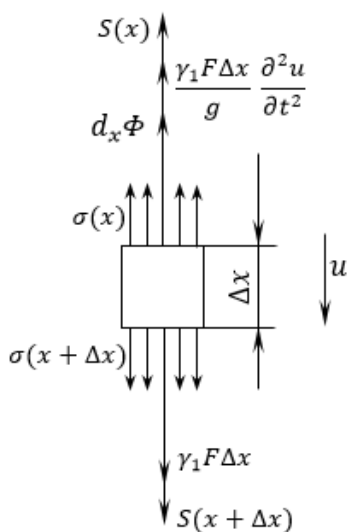


Рис.4.8

Разложим выражение $S(x + \Delta x, t)$ в ряд Тейлора. Отбрасывая члены второго и высших порядков малости, получим

$$S(x + \Delta x, t) = S(x, t) + \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \Delta x + \dots$$

Учитывая, что $S(x, t) = F\delta(x, t) = EF \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$, выражение (4.64) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g - \frac{g}{F\gamma_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (4.65)$$

Уравнение (4.65) есть дифференциальное уравнение движения колонны бурильных труб с учетом сопротивления среды. При $d_x \Phi = 0$ получим дифференциальное уравнение движения колонны бурильных труб в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g. \quad (4.66)$$

Граничные условия для движения колонны бурильных труб будут выглядеть следующим образом:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=0} = EF \frac{\partial u}{\partial x} - N(t); \quad (4.67)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0. \quad (4.68)$$

где $N(t)$ – тормозное усилие спускового механизма.

Начальные условия имеют вид:

$$u(x, t) \Big|_{t=0} = \frac{g(2lx - x^2)}{2a^2}, \quad (4.69)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (4.70)$$

4.8. Вывод уравнения теплопроводности (одномерный случай).

Уравнения параболического типа наиболее часто встречаются при изучении процессов теплопроводности и диффузии. К этим уравнениям приводятся также задачи о движении вязкой жидкости, например, нефти.

Рассмотрим однородный стержень длины l , теплоизолированный с боков (через поверхность не происходит теплообмена с окружающей средой) и достаточно тонкий, чтобы в любой момент времени температуру во всех точках поперечного сечения можно было считать одинаковой. Расположим ось Ox так, чтобы один конец стержня совпадал с точкой $x = 0$, а другой – с точкой $x = l$ (Рис.4.9). Если тело нагрето неравномерно, то в нем происходит передача тепла из мест с более высокой температурой в места с более низкой температурой. Процесс может быть описан функцией $u = u(x, t)$, дающей температуру u в каждой точке тела и в любой момент времени.

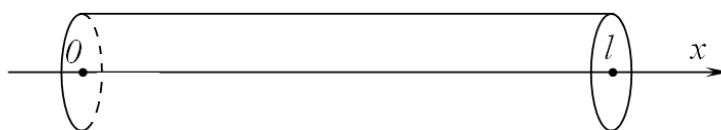


Рис.4.9

При выводе дифференциального уравнения теплопроводности воспользуемся следующими физическими закономерностями, связанными с распространением тепла.

1. Количество тепла ΔQ , которое необходимо сообщить однородному телу, чтобы повысить его температуру на Δu , равно

$$\Delta Q = cm\Delta u,$$

где c - удельная теплоемкость, m - масса тела. Для стержня имеем

$$\Delta Q = c\rho S\Delta x\Delta u, \quad (4.71)$$

где ρ - плотность материала стержня; S - площадь его поперечного сечения.

2. Перенос тепла в теле подчиняется эмпирическому закону Фурье: количество тепла ΔQ , протекающее за время Δt через площадку ΔS в направлении нормали $\vec{n}$ к этой площадке, равно

$$\Delta Q = -k \frac{\partial u}{\partial n} \Delta S \Delta t,$$

где k - коэффициент внутренней теплопроводности (зависит от точки и не зависит от направления, если тело изотропно).

Для стержня имеем

$$\Delta Q = -kS \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t, \quad (4.72)$$

где коэффициент k будем считать постоянным в силу предположения о его однородности. Если стержень неоднороден, то $k = k(x)$.

3. Если внутри тела есть источники тепла, то выделение тепла можно характеризовать плотностью тепловых источников, т.е. количеством выделяемого (или поглощаемого) тепла в единицу времени в единице объема. Обозначим через $F(x, t)$ плотность источников в точке x рассматриваемого стержня в момент t . Тогда в результате действия этих источников на участке $(x, x + \Delta x)$ за промежуток Δt будет выделено количество тепла

$$\Delta Q = F(x, t)S\Delta x\Delta t. \quad (4.73)$$

И, наконец, воспользуемся законом сохранения энергии.

Итак, приступим к выводу уравнения. Выделим элементарный участок стержня, заключенный между сечениями $x = x_1$ и $x = x_2$ ($x_2 - x_1 = \Delta x$), и составим уравнение теплового баланса на отрезке $[x_1, x_2]$. Так как боковая поверхность стержня теплоизолирована, то элемент стержня может получать тепло только через поперечные сечения. Согласно (6.8.2) количество тепла, прошедшее через сечение $x = x_1$, равно

$$\Delta Q_1 = -k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_1} S \Delta t;$$

через сечение $x = x_2$:

$$\Delta Q_2 = -k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_2} S \Delta t.$$

Найдем приток тепла $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$ в элемент стержня:

$$\begin{aligned} \Delta Q_1 - \Delta Q_2 &= -k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_1} S \Delta t + k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_2} S \Delta t = \\ &= k \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_2} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_1} \right) S \Delta t \approx k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x S \Delta t. \end{aligned}$$

(К разности частных производных применена теорема Лагранжа).

Кроме того, в результате действия внутренних источников тепла на этом участке в течение времени Δt выделится количество тепла согласно (4.73)

$$\Delta Q_3 = F(x, t) S \Delta x \Delta t.$$

Все тепло $\Delta Q = \Delta Q_1 - \Delta Q_2 + \Delta Q_3$ за время Δt пойдет на изменение температуры выделенного элемента стержня на величину Δu . И поэтому сообщенное количество тепла ΔQ , с другой стороны, может быть найдено согласно формуле (4.71):

$$\Delta Q = c \rho S \Delta x (u(x, t_2) - u(x, t_1)) \approx c \rho S \Delta x \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t.$$

В силу закона сохранения энергии имеем равенство

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x S \Delta t + F(x, t) S \Delta x \Delta t = c \rho S \Delta x \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t.$$

Сокращая на общий множитель $S \Delta x \Delta t$, получим уравнение

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) = c \rho \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Введя обозначения $\frac{k}{c \rho} = a^2$, $\frac{F(x, t)}{c \rho} = f(x, t)$, придем к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t). \quad (4.74)$$

Это и есть искомое дифференциальное уравнение распространения тепла в однородном стержне. Уравнение (4.74) называют уравнением теплопроводности, в котором постоянную a^2 называют **коэффициентом температуропроводности**. Коэффициент a^2 имеет размерность $\text{м}^2/\text{с}$. Уравнение (4.74) является **линейным неоднородным уравнением параболического типа**.

Вывод дифференциального уравнения распространения тепла внутри тела, отнесенного к пространственной системе координат, основан на тех же физических законах. Поэтому, ограничившись выводом уравнения для

простейшего случая – одномерного, лишь приведем уравнение для трехмерного пространства.

Процесс распределения температуры $u = u(x, y, z, t)$ в изотропном теле описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t), \quad (4.75)$$

которое кратко записывается так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t), \quad (4.76)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

Уравнение (4.76) описывает также процессы диффузии, где u - концентрация диффундирующего вещества, и другие.

Чтобы определить температуру внутри тела в любой момент времени, недостаточно одного уравнения (4.76). Необходимо, как следует из физических соображений, знать еще распределение температуры внутри тела в начальный момент времени (начальное условие) и тепловой режим на границе тела (граничное условие).

Начальное условие в отличие от уравнения гиперболического типа задается только одно, т.к. исходное уравнение содержит лишь первую производную по времени.

Граничные или краевые условия могут быть различны в зависимости от температурного режима на границе тела. Основными видами тепловых режимов являются следующие: I – на границе поддерживается определенная температура; II – на границу подается определенный тепловой поток; III – происходит теплообмен с внешней средой, температура которой известна. Им соответствуют граничные условия первого, второго, третьего рода.

Сформулируем прежде условия для одномерного уравнения теплопроводности.

Начальное условие состоит в задании функции $u = u(x, t)$ в начальный момент времени ($t = 0$):

$$u(x, 0) = u|_{t=0} = \varphi(x). \quad (4.77)$$

Выведем граничные условия в случаях I – III.

1. На концах стержня (или на одном конце) задается температура

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=\lambda} = \mu_2(t), \quad (4.78)$$

где $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ - функции, заданные в некотором промежутке $t_0 \leq t \leq T$, причем T есть промежуток времени, в течении которого изучается процесс. В частности, $\mu_1(t) = u_1 = \text{const}$, $\mu_2(t) = u_2 = \text{const}$, т.е. на концах поддерживается постоянная температура u_1 и u_2 .

2. На одном из концов (или на обоих) задано значение производной искомой функции. Например, для сечения $x = 0$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = v_1(t). \quad (4.79)$$

Дадим физическое толкование этому условию. Пусть $q_1(t)$ - величина теплового потока, т.е. количество тепла, протекающего через торцевое сечение $x = 0$ в единицу времени. Тогда уравнение теплового баланса для элемента стержня $(0; \Delta x)$ в период времени $t_2 - t_1 = \Delta t$, как и при выводе уравнения (4.74) запишется в виде

$$q_1(t)\Delta t + k \frac{\partial u(\Delta x, t)}{\partial x} S \Delta t = c\rho S \Delta x \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t.$$

Сократив на Δt и перейдя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим $u'_x(0, t) = -\frac{q_1(t)}{k \cdot S}$.

Таким образом, имеем условие (4.80), в котором $v_1(t)$ - известная функция, выражающаяся через заданный поток тепла $q_1(t)$ по формуле $v_1(t) = -\frac{q_1(t)}{k \cdot S}$.

Аналогично для сечения $x = l$, через которое протекает количество тепла $q_2(t)$, найдем

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = \frac{q_2(t)}{k \cdot S}.$$

Следовательно, условие $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = v_1(t)$ или $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = v_2(t)$ имеет место в случае, когда на соответствующем конце стержня задан тепловой поток, втекающий или вытекающий. В частности, если концевое сечение теплоизолировано, то $q_1(t) = 0$ или $q_2(t) = 0$, и следовательно,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \text{ или } \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0$$

3. На одном из концов (или на обоих) задается линейное соотношение между функцией и ее производной. Например, для сечения $x = l$

$$\left(u + h \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=l} = v_3(t). \quad (4.80)$$

Условие (4.80) используется в случае процесса теплоотдачи, т.е. переноса тепла от тела к окружающей среде. Закон теплообмена сложен; но для упрощения задачи он может быть принят в виде закона Ньютона. Согласно эмпирическому закону Ньютона количество тепла, отдаваемого в единицу времени с единицы площади поверхности тела в окружающую среду, температура θ которой известна, пропорционально разности температур поверхности тела и окружающей среды:

$$q = \alpha(u - \theta),$$

где α - коэффициент теплообмена (или внешней теплопроводности).

Можно определить тепловой поток через сечение стержня, воспользовавшись двумя выражениями в силу закона сохранения энергии. Согласно закону Ньютона тепловой поток $q(t)$, вытекающий через сечение $x = l$, равен

$$q(t) = \alpha(u(l, t) - \theta(t)).$$

С другой стороны, такой же тепловой поток должен подводиться изнутри путем теплопроводности. Поэтому согласно закону Фурье

$$q(t) = -k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l}.$$

Приравняв правые части этих выражений, найдем

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = -\frac{\alpha}{k}(u(l, t) - \theta(t)).$$

Отсюда получаем математическую формулировку условия в виде

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + hu(l, t) = v_3(t),$$

в котором положено $h = \frac{\alpha}{k}$, $v_3(t) = h\theta(t)$.

Граничные условия, наложенные на значение производной $u'_x(x, t)$, называют условиями второго рода. А условия, наложенные как на значение функции $u(x, t)$, так и на значение производной $u'_x(x, t)$, называют условиями третьего рода.

В случае граничных условий вида (4.78) - (4.80) говорят соответственно о первой, второй, третьей краевых задачах для уравнения теплопроводности. Начальное условие для всех указанных краевых задач остается тем же самым и дается равенством (4.77).

Так, первая краевая задача состоит в отыскании решения $u = u(x, t)$ уравнения

$$u'_t = a^2 u''_{xx} + f(x, t) \text{ при } 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T,$$

удовлетворяющего условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l,$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Аналогично ставятся другие краевые задачи с различными комбинациями граничных условий при $x = 0$ и $x = l$.

Кроме названных задач довольно часто встречаются предельные случаи – вырождения основных краевых задач. Одним из таких случаев является задача Коши, которая состоит в отыскании решения $u(x, t)$ в неограниченной области, удовлетворяющего только начальному условию.

Если процесс теплопроводности изучается в очень длинном стержне, таком что влияние температурного режима, заданного на границе, в центральной части стержня оказывается весьма слабым в течение небольшого промежутка времени и определяется в основном лишь начальным

распределением температуры, то тогда считают, что стержень имеет бесконечную длину и ставят задачу Коши.

Задача Коши для «бесконечного» стержня (идеализация достаточно длинного стержня) математически формулируется так: найти решение $u = u(x, t)$ уравнения теплопроводности в области $-\infty < x < \infty, \quad t \geq 0$, удовлетворяющее начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (-\infty < x < \infty),$$

где $\varphi(x)$ - заданная функция.

Если участок стержня, температура которого нас интересует, находится вблизи одного конца и далеко от другого, то в этом случае температура практически определяется температурным режимом близкого конца и начальным условием. При этом стержень считают полубесконечным. Приведем в качестве примера формулировку первой краевой задачи для «полубесконечного» стержня: найти решение $u = u(x, t)$ уравнения теплопроводности в области $0 < x < \infty, \quad t \geq 0$, удовлетворяющее условиям

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad (0 < x < \infty),$$

$$u|_{x=0} = \mu(t), \quad t \geq 0,$$

где $\varphi(x)$ и $\mu(t)$ - заданные функции.

Для уравнения (4.76) теплопроводности в пространстве V , ограниченном поверхностью S , начальное условие записывают в виде

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z),$$

а на границе S области V функция $u = u(x, y, z, t)$ должна удовлетворять одному из условий:

$$1) \quad u(x, y, z, t)|_S = f_1(M, t) \quad (\text{граничное условие 1-го рода});$$

$$2) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \right|_S = f_2(M, t) \quad (\text{граничное условие 2-го рода});$$

где $\bar{n}$ - внешняя нормаль к поверхности S ; в частности, если поверхность S теплоизолирована, то $\left. \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \right|_S = 0$;

$$3) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} + hu \right) \Big|_S = f_3(M, t) \quad (\text{граничное условие 3-го рода}).$$

Здесь $M(x, y, z)$ - текущая точка поверхности S .

5.МНОГОМЕРНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

5.1. Механические модели деформации среды.

Качественное описание процессов деформации основаны на различных теоретических моделях. Для построения замкнутой теории движения среды должна быть известна связь между кинематическим и динамическим состояниями частицы, в частности между напряжениями и деформациями, выражаемая при помощи механического уравнения состояния тела [1,4,5].

К простым средам относятся следующие тела: упругое, вязкое, жестко-пластическое. Механическое уравнение состояния упругого тела выражается при помощи закона Гука, который для одноосного напряженного состояния имеет вид:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (5.1)$$

где σ — напряжение; E — модуль Юнга; ε — относительная деформация.

Механическое уравнение состояния упругого тела изображается в виде механической модели, представляющей собой пружину (рис. 5.1).

Механическое уравнение состояния вязкого тела для одноосного напряженного состояния выражается при помощи закона Ньютона

$$\tau = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (5.2)$$

где η — вязкость; $\frac{d\varepsilon}{dt}$ — скорость деформации.

Вязкое тело изображается моделью, состоящей из поршня,двигающегося в цилиндре с вязкой жидкостью (рис.5.2).

Жестко-пластическое тело при напряжениях ниже предела текучести σ_t не деформируется. В таком теле течение развивается лишь при напряжениях, удовлетворяющих условию текучести $\sigma = \sigma_t$. Модель такой среды может быть изображена в виде площадки с кулоновым трением (рис.5.3).

Выше были приведены три простейшие механические модели, иллюстрирующие механические уравнения состояния вязкого, упругого и жестко-пластического тела. Комбинируя эти простые модели,

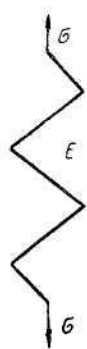


Рис. 5.1

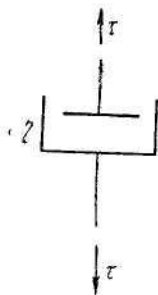


Рис. 5.2

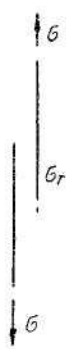


Рис. 5.3

можно рассматривать различные сложные среды. Так, упруго-пластическую среду можно характеризовать моделью, в которой



Рис. 5.4

последовательно соединены упругий и пластический элементы (рис.5.4).

Упруго-вязкая среда Фойхта характеризуется моделью, в которой параллельно соединены упругий и вязкий элементы (рис. 5.5).

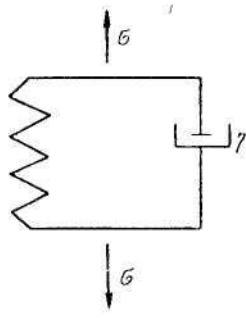


Рис. 5.5



Рис. 5.6

Для такой среды полное напряжение будет складываться из напряжения, соответствующего упругой деформации, и напряжения, вызываемого вязким сопротивлением,

$$\sigma = E\epsilon + \eta \frac{d\epsilon}{dt}. \quad (5.3)$$

В состоянии покоя, т. е. при $\frac{d\epsilon}{dt} = 0$, такая среда ведет себя как упругая.

При $\epsilon = \text{const}$ в среде возникает постоянное напряжение $\sigma = E\epsilon$. Если при $t = 0$, $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$, то из (5.3) получим

$$\epsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta} t} \right). \quad (5.4)$$

Рассмотрим теперь среду, которой соответствует модель, состоящая из последовательно соединенных упругого и вязкого элементов (рис. 5.6). Для такой среды Максвеллом, получен следующий закон деформации:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d\epsilon_1}{dt} + \frac{d\epsilon_2}{dt}, \quad (5.5)$$

где $\frac{d\epsilon}{dt}$ - скорость деформации; $\frac{d\epsilon_1}{dt}$ - скорость упругой деформации;

$\frac{d\epsilon_2}{dt}$ - скорость вязкой деформации.

Из закона Гука дифференцированием определим

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} \quad (5.6)$$

Определив $\frac{d\varepsilon_2}{dt}$ - из закона Ньютона (5.2) и подставив полученные значения $\frac{d\varepsilon_1}{dt}$ из (5.5) и (5.6), получим

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (5.7)$$

Если $\sigma = const$, то тело, описываемое уравнением (5.7), будет деформироваться с постоянной скоростью, т. е. течь подобно вязкой жидкости.

Теперь рассмотрим другой случай. Пусть в момент времени $t = 0$ на тело действует напряжение σ_0 и соответствующее начальное

относительное удлинение, равное $\frac{\sigma_0}{E}$. Положим $\varepsilon = \varepsilon_0 = const$, что достигается,

в частности, закреплением концов стержня. В этом случае $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$ и из уравнения (5.7)

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{t}{t_0}}, \quad (5.9)$$

где $t_0 = \frac{E}{\eta}$ время релаксации

Из (5.9) видно, что напряжение со временем изменяется по закону экспоненты при $t \rightarrow \infty$ σ стремится к нулю (рис. 5.7). Уравнение Максвелла с качественной стороны описывает так называемую релаксацию напряжения, т. е. ослабление со временем напряженного состояния при неизменной деформации. В дальнейшем уравнение Максвелла будет нами использовано для конкретного объяснения явления вытекания глин в скважину в процессе проводки скважины и дальнейшей ее эксплуатации. Находясь под нагрузкой, твердые тела (в частности, цементный камень) медленно деформируются. С повышением температуры это явление текучести тел резко возрастает.

Текущность твердых тел при высоких температурах обладает рядом характерных свойств и называется ползучестью, или крипом. Изучение ползучести твердых тел проводится опытным путем — растяжением стержней при постоянной температуре и фиксированных нагрузках.

Отложим на оси ординат относительное удлинение, а на оси абсцисс — общее время испытания t , тогда кривая длительных испытаний будет иметь вид, показанный на рис. 8. Отрезок OA соответствует начальной деформации ε_0 , полученной стержнем при его

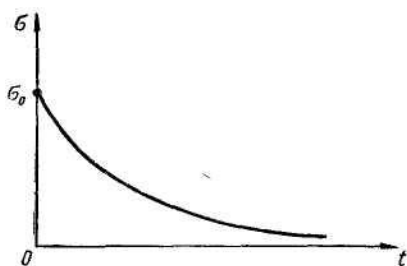


Рис. 5.7

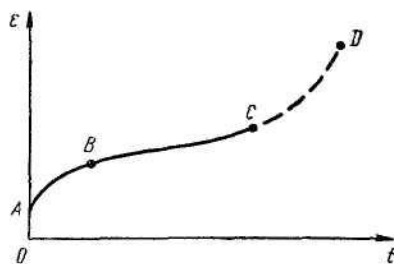


Рис.5.8.

нагрузении. Отрезок AB характеризует убывание скорости ползучести. С приближением к точке B уменьшение скорости деформации замедляется, и на участке BC , называемом вторым периодом ползучести, скорость деформации практически становится постоянной. Указанный период, характеризуемый минимальной скоростью ползучести, бывает обычно наиболее длительным и заканчивается разрушением тела.

Вязко-пластическое тело изображается моделью, которая состоит из вязкого элемента и площадки с кулоновым трением, соединенных параллельно (рис.5.9). Уравнение деформации вязко-пластического тела Шведова — Бингама имеет следующий вид:

$$\tau = \tau_0 + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \text{ при } \tau \geq \tau_0,$$

где τ — предельное напряжение сдвига.

При $\tau < \tau_0$ то тело не деформируется. Из рис. 5.10 видно, что для ряда тел течение наступает только после определенной нагрузки, при этом скорость течения зависит от вязкости среды.

Для выражения механических свойств высокополимеров необходимо привлекать модели, состоящие из многих элементов. Обычно для таких моделей характерно большое число параметров. Авторы рассматривали двухпараметрические модели (E, σ_r, E_1, η , или σ_r, η).

Рассмотрим модель (рис. 11), содержащую три параметра E_1, E_2, η_1 . Для такой среды закон деформации можно получить следующим образом.

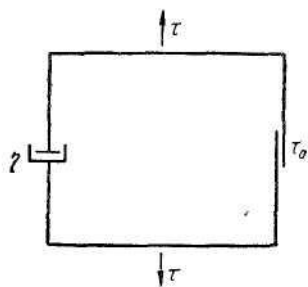


Рис.5.9

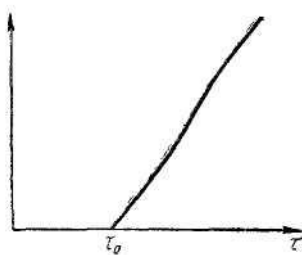


Рис.5.10

Напишем закон деформации для простых элементов I, II, III:

$$\sigma_I = E_1 \varepsilon_1, \sigma_{II} = \eta_2 \frac{d\varepsilon_2}{dt}, \sigma_{III} = E_2 \varepsilon_3$$

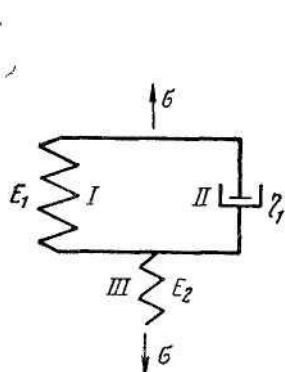


Рис. 5.11

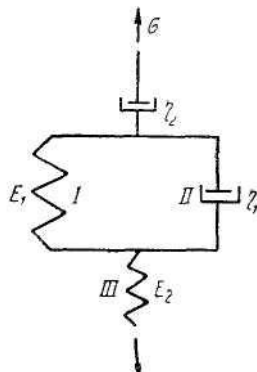


Рис. 5.12

а также для условий равновесия и неразрывности

$$\sigma_I + \sigma_{II} = \sigma, \sigma_{III} = \sigma, \varepsilon_1 + \varepsilon_3 = \varepsilon,$$

$$E_1 \varepsilon + \eta_1 \frac{d\varepsilon}{dt} = \left(1 + \frac{E_1}{E_2}\right) \sigma + \frac{\eta_1}{E_2} \frac{d\sigma}{dt}$$

Аналогично можно привести модель с четырьмя параметрами E_1, E_2, η_1, η_2 (рис. 5.12).

5.2. Модели теории упругости в задачах сооружения нефтегазопроводов, нефтебаз и нефтехранилищ.

В качестве примера моделирования рассмотрим модели расчета [10-14,21,25,26]

напряженно-деформированного состояния трубопровода на переходных участках трассы продольно-поперечным изгибом стержня. Прежде чем проводить расчеты необходимо провести исследование НДС трубопровода с учетом воздействия внутреннего давления, вызывающего дополнительный изгиб. Проведем учет воздействия внутреннего давления, вызывающего дополнительный изгиб трубопровода.

Трубопровод, пересекая карстовые, обводненные и подрабатываемые территории (полости, воронки, провалы), деформируется вместе с грунтом под действием собственного веса и давления грунта, находящегося на трубе, а также под воздействием температурных напряжений и внутреннего рабочего давления. Подобные деформации испытывает трубопровод в однопролетных

безкомпенсаторных надземных переходах без специальных опор, в местах пересечения автомобильных и железных дорог, оврагов и т.п.

В вышеупомянутых условиях прокладки трубопроводов общим является изменение грунтовых условий по длине трассы, сочетание подземных, надземных и подводных частей. Такие участки трубопровода будем называть переходными.

В работе [14] расчет однопролетного бескомпенсаторного надземного перехода на прочность и устойчивость сводится к решению двух последовательных задач. На первом этапе решается задача об изгибе трубы под действием поперечной нагрузки, на втором - в расчете на продольные усилия действие поперечной нагрузки заменяется начальным прогибом, вызванным этой нагрузкой. В самой расчетной схеме рассматриваемый участок условно делится на три части: средняя часть соответствует переходу, а две крайние – примыкающим к переходу подземным участкам трубопровода. Грунтовые условия и условия нагружения трубопровода в примыкающих участках одинаковые и постоянны по длине. Такая постановка задачи позволяет применить уравнение изгиба балки на опорах для средней части и уравнение изгиба балки на упругом основании – для примыкающих слева и справа частей. Однако эти уравнения не учитывают воздействие внутреннего рабочего давления и температурных напряжений, вызывающего дополнительный изгиб трубопровода и потерю его устойчивости.

В аналогичной постановке [10] выполнено исследование НДС трубопровода в оползающем грунте. В отличие от ранее упомянутой публикации в этой работе для описания НДС средней части используется уравнение продольно-поперечного изгиба балки на опорах, а для примыкающих частей – также уравнение изгиба балки на упругом основании, что приводит к невыполнению условия непрерывности продольного усилия, растяжения – сжатия трубы в узлах сопряжения этих частей.

В узлах сопряжения средней и крайних частей выполняется условие непрерывности прогиба и моментов. Поскольку в узлах сопряжения отсутствуют два условия: непрерывность (равенство) углов поворота и непрерывность (равенство) поперечной силы, то автор принимает дополнительное условие равенства нулю угла поворота в узле сопряжения и из этого условия определяет поперечную силу, которую в дальнейшем использует в решении задачи. Как и в постановке задачи о НДС однопролетного бескомпенсаторного перехода [14], не учитывается воздействие внутреннего рабочего давления и температурных напряжений, вызывающего дополнительный изгиб трубопровода. Это воздействие заменяется действием продольного усилия N_x , которое возникает в защемленных грунтом прямолинейных примыкающих частях.

Величина продольного усилия N_x в защемленной части строго прямолинейного участка трубопровода, определяемая по формуле

$$N_x = (\mu \cdot \sigma_{\kappa\zeta} - E \alpha \Delta t) F, \quad (5.10)$$

где F – площадь поперечного сечения стенки трубы;

Δt — разность температур эксплуатации и замыкания при строительстве;
 E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона металла трубы соответственно;

$\sigma_{\text{кц}}$ — кольцевые напряжения от рабочего давления p_o ;

α — коэффициент температурного расширения металла трубы;

в зависимости от соотношения между эксплуатационными параметрами p_o и Δt , может принимать положительное или отрицательное значения или равняться нулю.

В случае, когда оно положительное, труба в заземленной части трубопровода растягивается в продольном направлении. При значительном положительном температурном перепаде величина продольного усилия, определяемая по формуле (5.10), принимает отрицательное значение, и труба в этом случае сжимается в продольном направлении. В случае, когда величина продольного усилия N_x равна нулю, в заземленной части труба в продольном направлении не деформируется.

Согласно положениям СНиП 2.05.06-85 расчет прочности и устойчивости должен учитывать воздействие эквивалентного продольного осевого усилия S_x , которое для заземленного грунтом трубопровода определяется по формуле

$$S_x = p_o \cdot F_{\text{св}} - N_x, \quad (5.11)$$

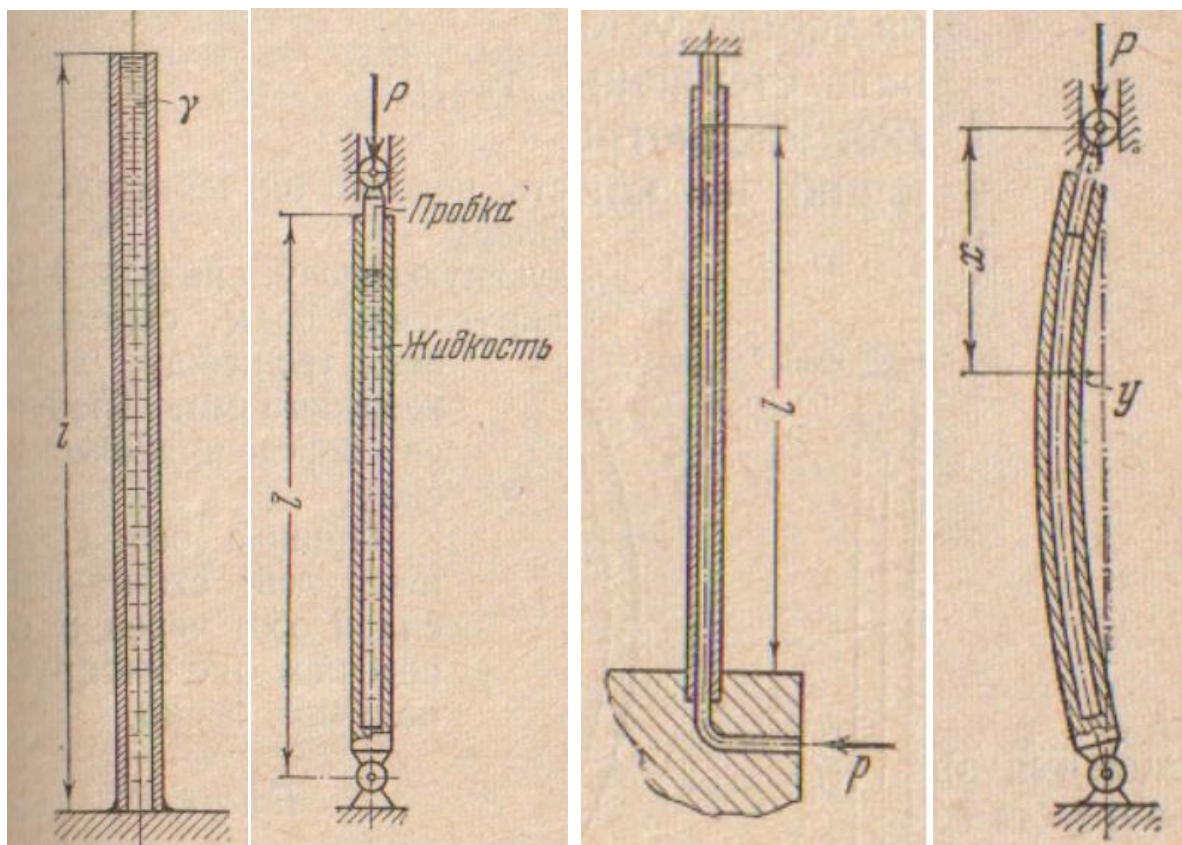
где $F_{\text{св}}$ — площадь поперечного сечения трубы «в свету».

Поясним воздействие эквивалентного продольного усилия S_x на изгиб трубопровода и его отличие от воздействия продольной силы на примере классической задачи продольно-поперечного изгиба стержня. Принимая предположение о том, что рассматриваемый участок трубопровода составлен из прямых труб, эквивалентное продольное усилие S_x , определяемое как разность силы воздействия внутреннего давления в поперечном сечении трубы «в свету» и продольного усилия N_x в стенке трубы, принимает постоянное значение, система нелинейных дифференциальных уравнений и соотношений, которая после выполнения элементарных преобразований сведена к классическому уравнению продольно-поперечного изгиба стержня. Этот стержень деформируется под действием вертикальной распределенной нагрузки q_y и внешней продольной силы S_x , приложенной к стержню на одной из опор. Под действием силы стержень может перемещаться в продольном направлении. При этом на другой опоре стержень является неподвижным в продольном направлении. Именно такое закрепление стержня на опорах подразумевается в классической задаче продольно-поперечного изгиба стержня. Концы рассчитываемого участка трубопровода, заземленные грунтом, и стержень, концы которого закреплены на опорах, перемещаются в продольном направлении неодинаково. Например, в заземленном грунтом трубопроводе стенка трубы в зависимости от эксплуатационных нагрузок либо растягивается, либо сжимается в продольном направлении, или она не испытывает продольных деформаций. В этом случае она, под действием внутреннего давления расширяясь в радиальном направлении, не может укорачиваться в

продольном направлении, что приводит к возникновению в ней растягивающих напряжений в этом направлении. Ослабление степени заземления трубопровода грунтом уменьшает его растяжение в продольном направлении. Это уменьшение, в свою очередь, увеличивает эквивалентное продольное усилие, под действием которого трубопровод может потерять устойчивость. Именно этим объясняется большое количество разрушений линейной части магистральных газопроводов в весенний период эксплуатации.

Вышеописанная постановка задачи для оползневого участка не может корректно описывать НДС трубопровода и его потерю устойчивости в силу того, что в данном случае увеличение внутреннего давления приводит к уменьшению продольного усилия N_x в уравнении продольно-поперечного изгиба, используемого в работе [10]. Следовательно, увеличение давления будет способствовать повышению устойчивости трубопровода, что противоречит известным результатам классических исследований по теории сопротивления материалов.

Обоснованием учета воздействия давления в постановке задачи изгиба трубопровода являются результаты решения задач о НДС труб, заполненных жидкостью, для случаев, когда отсутствует воздействие продольного усилия, но при этом труба теряет продольную устойчивость [10]. Феодосьев В. И. показал, что труба, заземленная нижним концом, заполняемая через верхнее отверстие жидкостью с удельным весом γ , может потерять устойчивость по Эйлеру. Труба представлена на рисунке 5.13 а. Казалось бы, в трубе отсутствуют продольные осевые усилия и она устойчивости терять не должна. Но труба, заполненная жидкостью, будет вести себя точно так же, как и свободно стоящий стержень, находящийся под действием собственного веса. Поэтому, если суммарный вес трубы и заполнившей ее жидкости будет больше критического веса для стержня той же длины и жесткости, то труба устойчивость потеряет.



- а) б) в) г)
а) трубка, зашеченная нижним концом, заполняемая жидкостью;
б) толстостенная трубка, заполненная жидкостью;
в) тонкая трубка, надетая без трения на жесткую неподвижную пробку;
г) трубка в отклоненном состоянии
Рисунок 5.13 – Схемы трубок

Далее рассмотрена тонкостенная прямая трубка, заполненная несжимаемой жидкостью. В верхнее отверстие трубки без трения вставлена пробка. Трубка и пробка закреплены шарнирно, как это показано на рисунке 5.13б. Когда к пробке прикладывается сила P , давление в жидкости повышается, но в трубке продольная сжимающая сила отсутствует.

Может ли трубка при этих условиях потерять устойчивость по Эйлеру?

Оказывается, что система теряет устойчивость так же, как если бы сила была приложена непосредственно к самой трубке. В данном случае продольная сжимающая критическая сила $P_{кр}$ определяется по формуле

$$P_{кр} = \pi^2 EJ / \ell^2, \quad (5.2)$$

где J – момент инерции поперечного сечения стенки трубы.

Иногда приходится слышать, что в рассматриваемом случае трубка не может потерять устойчивость ни при каких условиях. Такое мнение основано на ложном представлении, что в вопросе устойчивости по Эйлеру основную роль играет наличие внутренней сжимающей силы. На самом деле это не так.

Для того чтобы правильно решить поставленную задачу, достаточно рассмотреть трубку в отклоненном состоянии, представленную на рисунке 5.13г. Для трубки дифференциальное уравнение изогнутой оси будет, как и для сжатой стойки, следующим:

$$y'' + \frac{P}{EJ}y = 0. \quad (5.3)$$

Отсюда при шарнирном закреплении концов получаем приведенное выше значение критической силы.

Также Феодосьевым В.И. изучено поведение тонкой длинной трубки, которая верхним отверстием надета без трения на жесткую неподвижную пробку. Нижним концом трубка зажата в жестком основании, как показано на рисунке 5.13в. В трубку подается давление p .

Может ли такая трубка при достаточно большом давлении потерять устойчивость?

После разбора предыдущей задачи можно сразу сказать, что трубка потеряет устойчивость при

$$pF = \frac{4\pi^2 EJ}{\ell^2}, \quad (5.4)$$

где F — площадь сечения трубки «в свету».

Существование критического давления для данной системы легко обнаруживается и из энергетических соображений. В искривленном положении объем внутренней полости трубки увеличивается на $F\lambda$ вследствие того, что трубка при изгибе сходит с верхней пробки на величину λ , где

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} y'^2 dx. \quad (5.5)$$

Критическая сила определяется из условия

$$p_{кр} F \lambda = U_{изг}, \quad (5.6)$$

где $U_{изг}$ — потенциальная энергия деформации трубки при изгибе.

При обычном же нагружении стержня сжимающей силой

$$p_{кр} \lambda = U_{изг}, \quad (5.7)$$

получаем

$$p_{кр} F = P_{кр} = \frac{4\pi^2 EJ}{\ell^2}. \quad (5.8)$$

Возникновение продольной силы от воздействия внутреннего давления, которая вызывает изгиб трубопровода, объяснил М.А. Ильгамов решением следующей наглядной задачи. В ней рассматривается изогнутая труба, представленная на рисунке 5.14. В работе отмечается, что при искривлении

трубы с радиусом кривизны ρ площадь, на которую действует внутреннее давление p_o , с выпуклой стороны больше, чем с вогнутой. Если принять обычную для изгиба балки гипотезу плоских сечений, то избыточная площадка будет иметь вид, заштрихованный на рисунке 5.2. Равнодействующая от давления, действующего на эту площадку, вычисляется по формуле

$$Z = 2 \int_0^{\pi/2} p(\beta) \ell(\beta) r_1 d\beta, \quad (5.9)$$

где r_1 –внутренний радиус трубы;

β – центральный угол в поперечном сечении трубы, отсчитывается от плоскости изгиба.

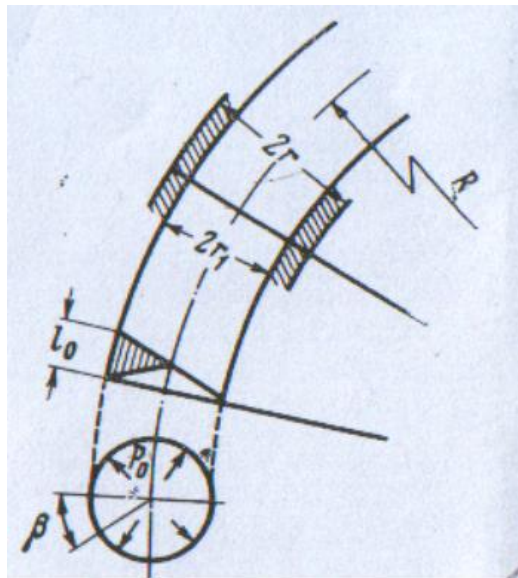


Рисунок 5.14 – Труба с радиусом кривизны ρ

Функции $p(\beta)$ и $\ell(\beta)$ равны

$$p = p_o \cos \beta, \quad \ell = \ell_o \cos \beta. \quad (5.10)$$

Здесь $\ell_o = 2r_1/\rho$ – разность длин дуг радиусов $\rho + r_1$ и $\rho - r_1$, отнесенная к длине дуги радиуса ρ . Подставляя (5.10) в (5.9), находим боковое давление на единицу длины дуги

$$Z = \pi p_o r_1^2 / \rho \quad (5.11)$$

или учитывая, что

$$1/\rho \approx -d^2 w / dx^2, \quad (5.12)$$

где w – прогиб продольной оси трубы;

x – продольная осевая координата,

$$Z = -\pi p_o r_1^2 \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (5.13)$$

Учитывая, что

$$F_{ce} = \pi r_1^2$$

имеем

$$Z = -p_o F_{ce} \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (5.14)$$

Усилие Z вызывает дополнительный изгиб трубы от воздействия внутреннего давления.

Таким образом, одним из основных факторов, которые влияют на изгиб трубопровода, является воздействие, кроме веса трубы с продуктом, внутреннего давления в трубе.

Теперь можно перейти к постановке задачи с учетом воздействия внутреннего давления, вызывающего дополнительный изгиб трубопровода (первый вариант постановки задачи).

Наиболее простой схемой нагружения трубопровода с продуктом является случай, когда однопролетный бескомпенсаторный надземный переход моделируется полым стержнем круглого сечения, концы которого принимаются заземленными. Эта схема нагружения позволяет выявить влияние на изгиб трубопровода внутреннего рабочего давления и температурных напряжений. В рассматриваемом случае трубопровод составлен из прямолинейных труб без углов поворота. В этой упрощенной постановке не учитывается влияние на НДС надземной части перехода деформаций прилегающих слева и справа подземных участков.

Схема нагружения перехода представлена на рисунке 5.15, где приведены основные обозначения и направление осей координат. Начало координат находится в середине пролета в точке O . По горизонтальной оси плоскости чертежа откладывается продольная осевая координата x , а по вертикальной оси – прогиб оси трубы w . Ось OZ направлена перпендикулярно к плоскости чертежа, а ось OY – по вертикали вниз. M_z – осевой изгибающий момент.

Данная схема нагружения перехода является симметричной относительно середины его прогиба.

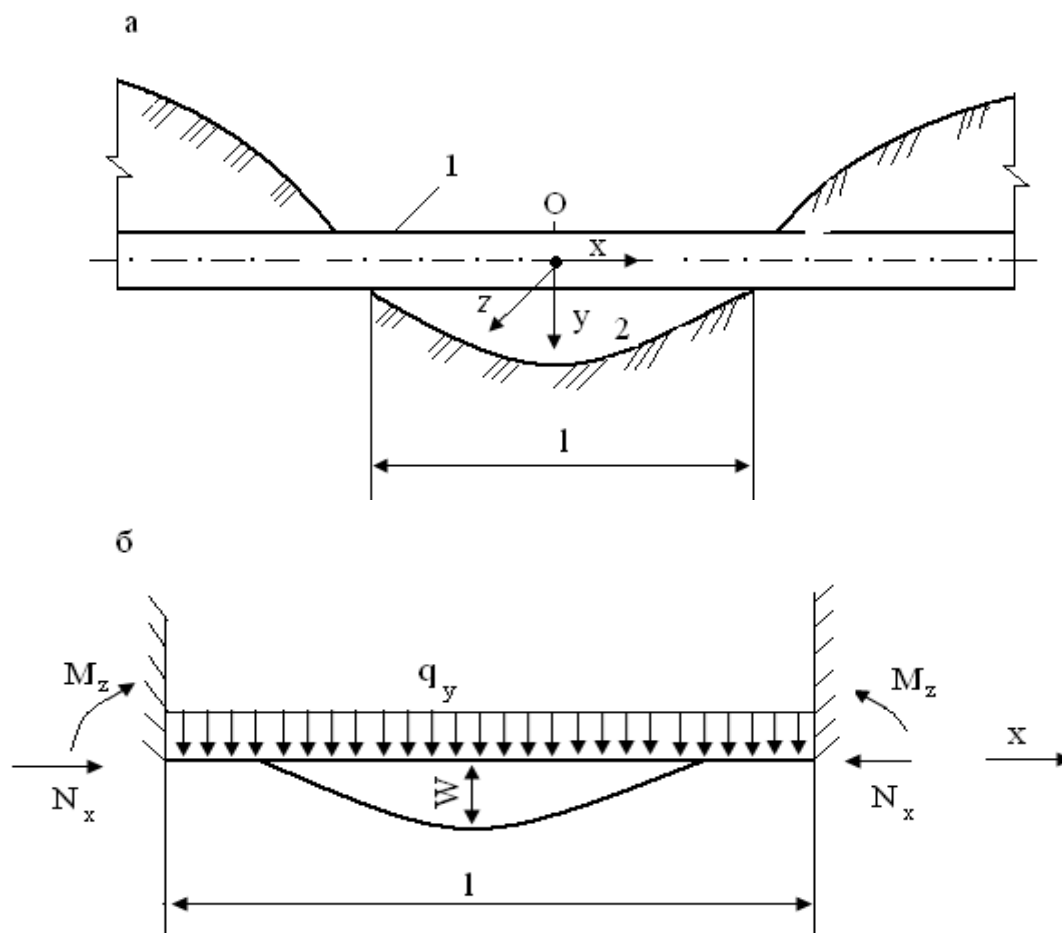
НДС надземной части перехода описывается следующим уравнением продольно-поперечного изгиба трубопровода

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{S_x}{EJ} \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{q_y}{EJ}, \quad (5.15)$$

где w – прогиб трубопровода;

q_y – вертикальная составляющая нагрузки, равная весу трубы с продуктом;

x – продольная осевая координата.



а- конструкции перехода; б- расчетная схема;

1- трубопровод; 2- овраг

Рисунок 5.15 – Однопролетный балочный переход без компенсации продольной деформации

На концах рассчитываемого участка (на границах раздела надземной и подземной части) трубопровод принимается защемленным грунтом. Из этого следует, что прогиб w и угол поворота продольной оси трубопровода w' в этих сечениях $\left(x = \pm \frac{\ell}{2}\right)$ равны нулю

$$w(\pm \ell / 2) = 0; \quad (5.16)$$

$$w'(\pm \ell / 2) = 0.$$

При решении этой задачи в более строгой постановке (с учетом совместных деформаций надземной части с прилегающими подземными частями) далее будут показаны границы применимости условия (5.16).

Дифференциальное уравнение (5.15) совпадает с уравнением продольно-поперечного изгиба стержня на опорах, деформирующегося под действием вертикальной нагрузки и продольного осевого усилия S_x , приложенного на одном из концов стержня, например, на правом. На левом конце стержня его продольное перемещение равно нулю (рисунок 5.16).

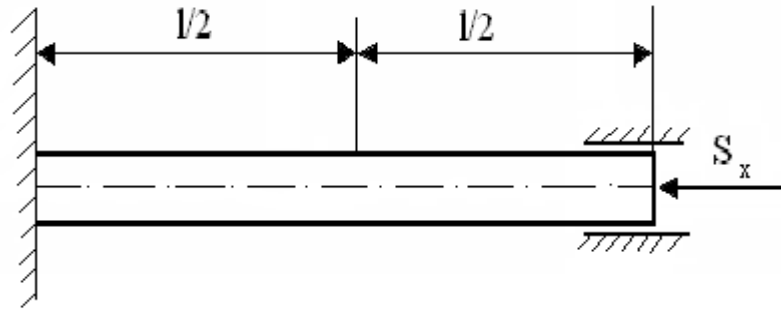


Рисунок 5.16 – Расчетная схема

В отличие от стержня, на концах перехода на трубопровод действует не продольное усилие S_x , а продольное осевое усилие N_x , определяемое по формуле (5.10). При этом трубопровод испытывает дополнительный изгиб не только от действия осевого усилия N_x , возникающего на защемленных концах, но и от воздействия внутреннего рабочего давления, результирующая которого по оси OX равна $p_o F_{cv}$. Основным недостатком в постановке данной задачи предыдущих исследований является пренебрежение воздействием внутреннего рабочего давления, вызывающим дополнительный изгиб трубопровода.

Ниже приведено решение задачи по первому варианту постановки.

Дифференциальное уравнение (5.15) для случая с равномерно распределенной по длине вертикальной нагрузкой имеет следующее общее решение

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x + \frac{q_y}{2S_x} x^2, \quad (5.17)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования;

$$\beta = \sqrt{\frac{S_x}{EJ}}. \quad (5.18)$$

Поскольку принято условие симметричного нагружения перехода, то в общем интеграле (5.17), принимая $C_2 = 0$, $C_4 = 0$, можно сохранить только четные функции, т.е. этот интеграл можно принять в следующем виде

$$w(x) = C_1 + C_3 \cos \beta x + \frac{q_y}{2S_x} x^2. \quad (5.19)$$

Далее найдем угол поворота $\omega_1 = \omega_1(x)$, изгибающий момент $M_z = M_z(x)$ и поперечную силу $Q_y = Q_y(x)$

$$\omega_1(x) = \frac{dw(x)}{dx} = -C_3 \beta \sin \beta x + \frac{q_y}{S_x} x, \quad (5.20)$$

$$M_z(x) = -EJ \frac{d^2 w}{dx^2} = -C_3 \beta^2 \cos \beta x + \frac{q_y}{S_x}, \quad (5.21)$$

$$Q_y(x) = -EJ \frac{d^3 w}{dx^3} = C_3 \beta^3 \sin \beta x. \quad (5.22)$$

Подставляя (5.18), (5.20) в граничные условия (5.16), получим следующую систему двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных C_1 и C_3

$$\begin{cases} C_1 + C_3 \cos \beta \frac{\lambda}{2} = -\frac{q_y \lambda^2}{8S_x}, \\ -C_3 \beta \sin \beta \frac{\lambda}{2} = -\frac{q_y \lambda}{2S_x}. \end{cases} \quad (5.23)$$

Система (5.23) имеет единственное решение

$$C_3 = \frac{q_y}{2S_x} \frac{\lambda}{\beta} \frac{1}{\sin \beta \frac{\lambda}{2}}, \quad C_1 = \frac{q_y \lambda}{2S_x} \left(\frac{\lambda}{\beta} \operatorname{ctg} \beta \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{4} \right), \quad (5.24)$$

если $S_x \neq 0$, $\sin \beta \frac{\lambda}{2} \neq 0$ и $\beta \neq 0$.

Заменяя C_1 и C_3 по (5.24) в (5.18) – (5.22), имеем следующие характеристики НДС трубопровода

$$w(x) = \frac{q_y}{2S_x} \frac{\lambda}{\beta} \left[\frac{\cos \beta x}{\sin \beta \frac{\lambda}{2}} - \operatorname{ctg} \beta \frac{\lambda}{2} + \frac{x^2 \beta}{\lambda} - \frac{\lambda \beta}{4} \right], \quad (5.25)$$

$$\omega_1(x) = \frac{q_y \lambda}{2S_x} \left(\frac{2x}{\lambda} - \frac{\sin \beta x}{\sin \beta \frac{\lambda}{2}} \right), \quad (5.26)$$

$$M_z(x) = -\frac{q_y \lambda}{2\beta} \left(\frac{\cos \beta x}{\sin \beta \frac{\lambda}{2}} - \frac{2}{\beta \lambda} \right), \quad (5.27)$$

$$Q_y(x) = \frac{q_y \lambda}{2} \frac{\sin \beta x}{\sin \beta \frac{\lambda}{2}}. \quad (5.28)$$

Найдем значения прогиба $w = w(x)$ и изгибающего момента $M_z = M_z(x)$ в середине пролета перехода при $x = 0$

$$w(0) = \frac{q_y}{2s_x} \left[-\lambda \left(\frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{\beta} \operatorname{ctg} \beta \frac{\lambda}{2} \right) + \frac{\lambda}{\beta} \frac{1}{\sin \beta \frac{\lambda}{2}} \right], \quad (5.29)$$

$$M_z(0) = -\frac{q_y}{2\beta^2} \left(2 - \frac{\beta \lambda}{\sin \beta \frac{\lambda}{2}} \right), \quad (5.30)$$

а также величину изгибающего момента $M_z = M_z(x)$ и поперечной силы $Q_y = Q_y(x)$ на концах пролета при $x = \pm \frac{\lambda}{2}$

$$M_z\left(\pm \frac{\lambda}{2}\right) = -\frac{q_y}{2\beta^2} \left(2 - \beta \lambda \operatorname{ctg} \beta \frac{\lambda}{2} \right), \quad (5.31)$$

$$Q_y\left(\pm \frac{\lambda}{2}\right) = \pm \frac{q_y \lambda}{2}. \quad (5.32)$$

Если пренебречь воздействия внутреннего рабочего давления и температурных и напряжений, то можно перейти к следующей постановке задачи и ее решение (второй вариант постановки задачи).

Полагая в дифференциальном уравнении (5.15) эквивалентное продольное усилие равным нулю ($S_x = 0$), получим следующее уравнение изгиба трубопровода

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} = q_y. \quad (5.33)$$

Уравнение (5.33) имеет общее решение в следующем виде

$$w(x) = \frac{q_y x^4}{EJ 24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4, \quad (5.34)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования.

Для условия симметричного нагружения перехода, полагая $C_1 = C_3 = 0$, имеем

$$w(x) = \frac{q_y x^4}{EJ 24} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_4. \quad (5.35)$$

Подставляя в граничные условия (5.16) функцию прогиба (5.35) и её производную при $x = \pm \frac{\ell}{2}$, находим постоянные интегрирования и основные характеристики НДС перехода

$$Q_y(x) = q_y x, \quad (5.36)$$

$$\sigma_M(x) = \frac{q_y D_n}{2J} \left(\frac{\lambda^2}{24} - \frac{x^2}{2} \right), \quad (5.37)$$

$$w'(x) = \frac{q_y}{EJ} \left(-\frac{\lambda^2}{24} + \frac{x^2}{6} \right), \quad (5.38)$$

$$w(x) = \frac{q_y}{EJ} \left(\frac{\lambda^4}{384} - \frac{\lambda^2 x^2}{48} + \frac{x^4}{24} \right), \quad (5.39)$$

где $\sigma_M = \sigma_M(x)$ – изгибные напряжения.

Подставляя $x = \pm \frac{\lambda}{2}$ в (5.36) и (5.37), находим значения перерезывающей

силы $Q_y\left(\pm \frac{\lambda}{2}\right)$ и изгибных напряжений $\sigma_M\left(\pm \frac{\lambda}{2}\right)$ на концах пролета

$$Q_y\left(\pm\frac{\lambda}{2}\right)=\pm\frac{q_y\lambda}{2}, \quad (5.40)$$

$$\sigma_M\left(\pm\frac{\lambda}{2}\right)=\frac{q_y D_n}{2J} \frac{\lambda^2}{12}, \quad (5.412.42)$$

а также значения изгибных напряжений и прогиба по формулам (5.37), (5.39) в середине пролета при $x = 0$

$$\sigma_M(0)=\frac{q_y D_n}{2J} \frac{\lambda^2}{24}, \quad (5.42)$$

$$w(0)=\frac{q_y \lambda^4}{384}. \quad (5.432.44)$$

Рассмотрим теперь постановку задачи для растягиваемого трубопровода компенсатором при его изгибе. В случае, когда составляющая усилия от температурных напряжений меньше, чем составляющая, обусловленная воздействием внутреннего рабочего давления в защемленном трубопроводе, то продольное усилие N_x , определяемое формулой (5.10), принимает положительное значение. Поэтому в ранних исследованиях НДС трубопроводов вместо дифференциального уравнения (5.15) применялось следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{N_x}{EJ} \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{q_y}{EJ}, \quad (5.44)$$

которое совпадает с уравнением продольно-поперечного изгиба стержня при его растяжении.

Основным недостатком использования уравнения (5.44) является пренебрежение воздействием внутреннего давления на изгиб трубопровода, поэтому постановка задачи о НДС с использованием уравнения (5.44) является некорректной.

Уравнение продольно-поперечного изгиба стержня при растяжении последнего в продольном направлении может быть использовано для описания НДС трубопровода с компенсатором с целью выявления воздействия внутреннего давления на изгиб. Если пренебречь жесткостью конструкции компенсатора, то на концах трубопровода будет действовать растягивающее усилие от воздействия давления, определяемое по формуле

$$S_x = p_o F_{св} = \frac{p_o \cdot \pi \cdot D_{вн}^2}{4}. \quad (5.45)$$

Аналогичным образом растягивается трубопровод от действия внутреннего давления, на закрытые задвижки (заглушки), находящиеся на его

концах. НДС такого трубопровода описывается следующим дифференциальным уравнением

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{S_x}{EJ} \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{q_y}{EJ}. \quad (5.46)$$

Отличием данного уравнения от уравнения (5.44) является то, что продольное усилие в уравнении (5.46) определяется не по формуле (5.10), а по формуле (5.45) и оно описывает совершенно другую задачу. В ней трубопровод имеет возможность растягиваться в продольном направлении, поэтому в нем отсутствует воздействие усилия от температурных напряжений.

Дифференциальное уравнение (5.46) имеет следующее общее решение

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \operatorname{ch} \alpha x + C_4 \operatorname{sh} \alpha x - \frac{q}{2S_x} x^2, \quad (5.47)$$

$$\text{где } \alpha = \sqrt{\frac{S_x}{EJ}}.$$

Учитывая условие симметричного нагружения перехода, принимаем в (5.47) постоянные интегрирования $C_1 = C_4 = 0$. Тогда имеем

$$w(x) = C_1 + C_3 \operatorname{ch} \alpha x - \frac{q_y}{2S_x} x^2. \quad (5.48)$$

Подставляя (5.48) в граничные условия (5.16), имеем следующую систему двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных C_1 и C_3

$$\begin{cases} C_1 + C_3 \operatorname{ch} \alpha \frac{\lambda}{2} = \frac{q_y \lambda^2}{8S_x}; \\ C_3 \operatorname{sh} \alpha \frac{\lambda}{2} = \frac{q_y \lambda}{2S_x}, \end{cases} \quad (5.49)$$

которая имеет единственное решение

$$C_1 = \frac{q_y \lambda}{2S_x} \left(\frac{\lambda}{4} - \frac{1}{\alpha} \operatorname{cth} \alpha \frac{\lambda}{2} \right), \quad C_3 = \frac{q_y \lambda}{2S_x} \frac{1}{\alpha \operatorname{sh} \alpha \frac{\lambda}{2}}, \quad (5.50)$$

если $S_x \neq 0$, $\alpha \neq 0$, $\operatorname{sh} \alpha \frac{\lambda}{2} \neq 0$.

Подставляя C_1 и C_3 по (5.50) в (5.48), найдем прогиб

$$w(x) = \frac{q_y}{2S_x} \left(\frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda}{\alpha} \operatorname{cth} \alpha \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda \operatorname{ch} \alpha x}{\alpha \operatorname{sh} \alpha \frac{\lambda}{2}} - x^2 \right) \quad (5.51)$$

и по нему – $\omega_1(x)$, $M_z(x)$, $Q_y(x)$

$$\omega_1(x) = \frac{dw(x)}{dx} = \frac{q_y}{2S_x} \left(\frac{\lambda sh \alpha x}{sh \alpha \frac{\lambda}{2}} - 2x \right), \quad (5.522.53)$$

$$M_z(x) = -EJ \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -\frac{EJq_y}{2S_x} \left(\frac{\lambda \alpha ch \alpha x}{sh \alpha \frac{\lambda}{2}} - 2 \right), \quad (5.53)$$

$$Q_y(x) = -EJ \frac{d^3 w(x)}{dx^3} = -\frac{q_y}{2} \frac{\lambda sh \alpha x}{sh \alpha \frac{\lambda}{2}}. \quad (5.54)$$

Найдем значения прогиба $w = w(x)$, изгибающего момента $M_z = M_z(x)$ в середине пролета стержня при $x = 0$

$$w(0) = \frac{q_y}{2S_x} \left(\frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda}{\alpha} ch \alpha \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{\alpha} \frac{1}{sh \alpha \frac{\lambda}{2}} \right), \quad (5.55)$$

$$M_z(0) = -\frac{q_y}{2\alpha^2} \left(2 - \frac{\lambda \alpha}{sh \alpha \frac{\lambda}{2}} \right), \quad (5.56)$$

а также значение изгибающего момента $M_z = M_z(x)$ и поперечной силы

$Q_y = Q_y(x)$ на концах стержня при $x = \pm \frac{\lambda}{2}$

$$M_z\left(\pm \frac{\lambda}{2}\right) = \frac{q_y}{2\alpha^2} \left(2 - \lambda \alpha ch \alpha \frac{\lambda}{2} \right), \quad (5.57)$$

$$Q_y\left(\pm \frac{\lambda}{2}\right) = \pm q_y \frac{\lambda}{2}. \quad (5.58)$$

Рассмотрим пример расчета и проведем анализ его результатов. Приведем расчет НДС однопролетного балочного перехода газопровода с длиной надземной части $\ell = 59,3$ м при следующих исходных данных [14]:

- 1) категория участка – III;

- 2) наружный диаметр D_n и толщина стенки трубы δ – 1020×14,3 мм;
- 3) нормативное сопротивление растяжению (сжатию) металла сварных соединений (принимается равным минимальному значению предела текучести) – $R_2^H=363$ МПа;
- 4) расчетное сопротивление сжатию – $R_2=270$ МПа;
- 5) вес единицы длины трубы – $q_{тр}=3890$ Н/м;
- 6) вес газа под давлением 7,5 МПа в единице длины трубы – $q_{газ}=737$ Н/м;
- 7) вес снега на единице длины трубы – $q_{сн}=490$ Н/м;
- 8) вес льда на единице длины трубы – $q_{лед}=220$ Н/м;
- 9) площадь поперечного сечения стенки трубы – $F=0,045$ м²;
- 10) осевой момент сопротивления – $W=8,516 \cdot 10^{-3}$ м³;
- 11) осевой момент инерции поперечного сечения – $J=5,71 \cdot 10^{-3}$ м⁴;
- 12) внутреннее рабочее давление – $p_o=7,5$ МПа;
- 13) перепад температуры эксплуатации и замыкания трубопровода при строительстве – $\Delta t=40$ °С и $\Delta t=-30$ °С.

Представим результаты расчета НДС перехода для трех вариантов постановки задачи:

- 1) изгиб трубопровода под действием собственного веса с продуктом, с учетом дополнительного изгиба, вызываемого воздействием внутреннего рабочего давления и температурных напряжений.

Основные характеристики НДС для этого варианта имеют следующие обозначения:

- $Q_s = Q_s(x)$ – поперечная сила;
- $msz = msz(x)$ – изгибные напряжения;
- $ws1 = ws1(x)$ – угол поворота продольной оси трубы;
- $ws = ws(x)$ – прогиб;

- 2) то же с пренебрежением воздействия на изгиб трубопровода внутреннего рабочего давления и температурных напряжений.

Основные характеристики НДС для этого варианта имеют следующие обозначения:

- $Q_y = Q_y(x)$ – поперечная сила;
- $myz = myz(x)$ – изгибные напряжения;
- $wy1 = wy1(x)$ – угол поворота продольной оси трубы;
- $wy = wy(x)$ – прогиб;

- 3) изгиб трубопровода, который растягивается под воздействием внутреннего давления на закрытую задвижку (заглушку).

Основные характеристики НДС для этого варианта имеют следующие обозначения:

$$\sigma_{кц} = \frac{np_o D_{вн}}{2\delta} = 286 \text{ МПа};$$

$n = 1,1$ – коэффициент надежности по нагрузке от внутреннего давления;

$Q_v = Q_v(x)$ – поперечная сила;

$m_{vz} = m_{vz}(x)$ – изгибные напряжения;

$w_{v1} = w_{v1}(x)$ – угол поворота продольной оси трубы;

$w_v = w_v(x)$ – прогиб.

Для заданных исходных данных имеем следующие значения расчетных характеристик:

1) нагрузка от собственного веса трубопровода с газом, снега и льда

$$q_y = q_{tr} + q_{газ} + q_{сн} + q_{лед} = 3890 + 737 + 490 + 220 = 5337 \text{ Н/м} = 5,337 \text{ кН/м};$$

2) эквивалентное продольное усилие

$$S_x = (\alpha \cdot \Delta t \cdot E + 0,2 \sigma_{кц}) \cdot F = 7110 \text{ кН};$$

3) продольное усилие, действующее на заземленных концах трубопровода

$$N_x = (0,3 \sigma_{кц} - \alpha \cdot \Delta t \cdot E) \cdot F_o = 675,3 \text{ кН};$$

4) продольное растягивающее усилие S_p , вызванное воздействием внутреннего рабочего давления на закрытую задвижку (заглушку)

$$S_p = n p_o \frac{\pi D_{вн}^2}{4} = 6369 \text{ кН}.$$

Далее представим эпюры основных характеристик НДС перехода: поперечной силы, изгибных напряжений, угла поворота продольной оси трубы и прогиба для вышеприведенных трех вариантов задачи. В них прогибы продольной оси трубы совпадают с направлением действия вертикальной распределенной нагрузки – веса трубы с продуктом. Если изгибные напряжения положительные, то вогнутость продольной оси трубы обращена вниз. При отрицательных изгибных напряжениях – продольная ось трубы выпуклая, т.е. изогнута вверх.

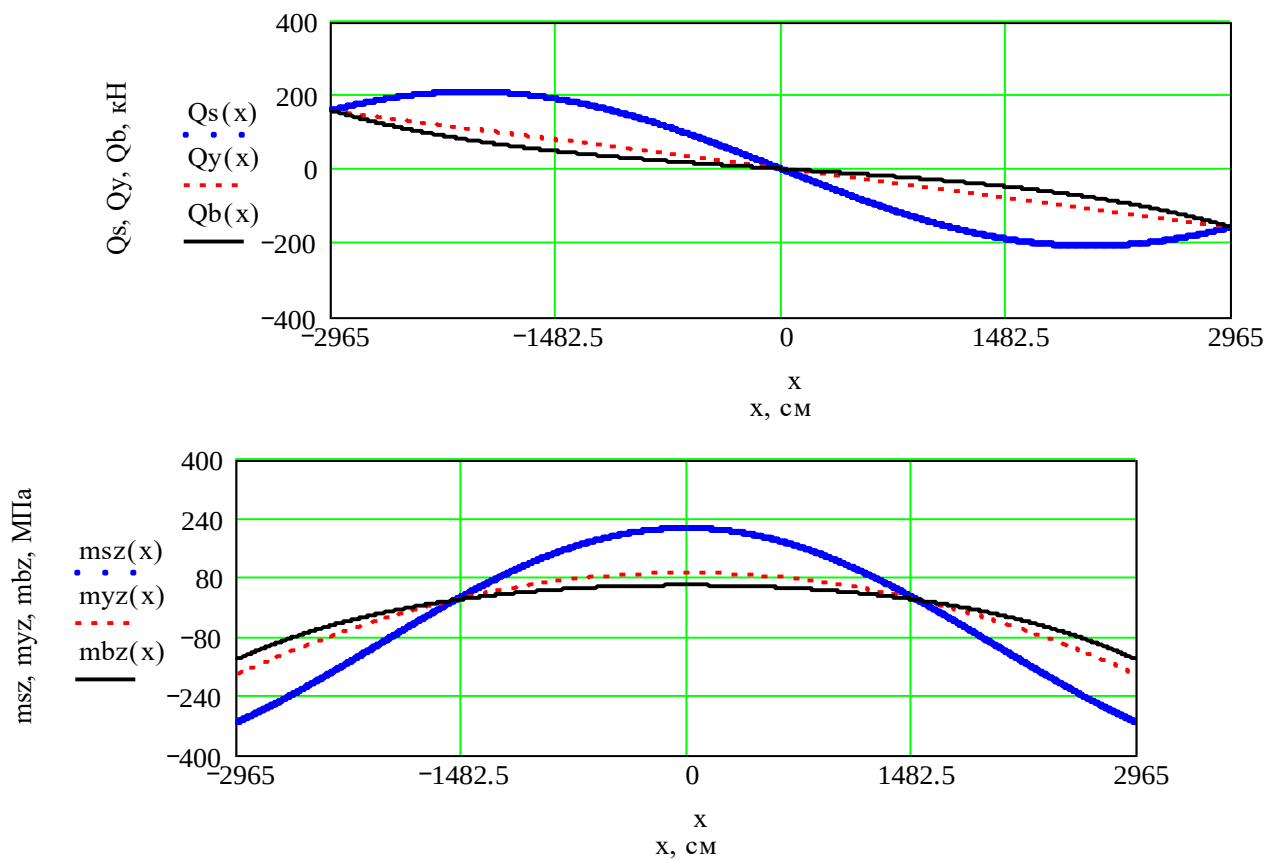
Представленные на рисунке 5.17 эпюры прогибов, углов поворота продольной оси трубопровода, а также изгибных напряжений и поперечных сил, которые построены по формулам (5.25) - (5.28), (5.36) – (5.39), (5.51) – (5.54), адекватно отображают напряженно-деформированное состояние перехода. Каждая из этих формул связана между собой дифференциальными зависимостями. В частности, там, где функция прогибов достигает по переменной x экстремальных значений, функция угла поворота пересекает ось OX , т.к. она определяется через производную от функции прогиба. Если прогиб убывает, то угол поворота принимает отрицательные значения, а если угол поворота больше 0, то прогиб возрастает. Аналогичные зависимости выполняются между функциями угла поворота и изгибных напряжений, а также между функциями изгибных напряжений и поперечных сил. Таким образом, основные закономерности, которые следуют из дифференциального

уравнения изогнутой оси перехода, сохраняются и на эпюрах характеристик НДС.

Максимальные значения прогиба и изгибных напряжений от пролетных и опорных изгибающих моментов для трех вариантов постановки задачи представим в таблице 5.1.

Таблица 5.1 – Максимальные значения прогиба и изгибных напряжений от пролетных и опорных изгибающих моментов ($p_o=7,5$ МПа, $\Delta t = 40^\circ\text{C}$)

Вариант постановки задачи	Прогиб, см	Изгибные напряжения, МПа	
		от пролетных изгибающих моментов	от опорных изгибающих моментов
Первый	$ws(0) = -30,2$	$msz(0) = 212,2$	$msz\left(\pm\frac{\ell}{2}\right) = -313,1$
Второй	$wy(0) = -14,3$	$myz(0) = 91,8$	$myz\left(\pm\frac{\ell}{2}\right) = -183,6$
третий	$w\epsilon(0) = -9,8$	$mbz(0) = 58,3$	$mbz\left(\pm\frac{\ell}{2}\right) = -143,7$



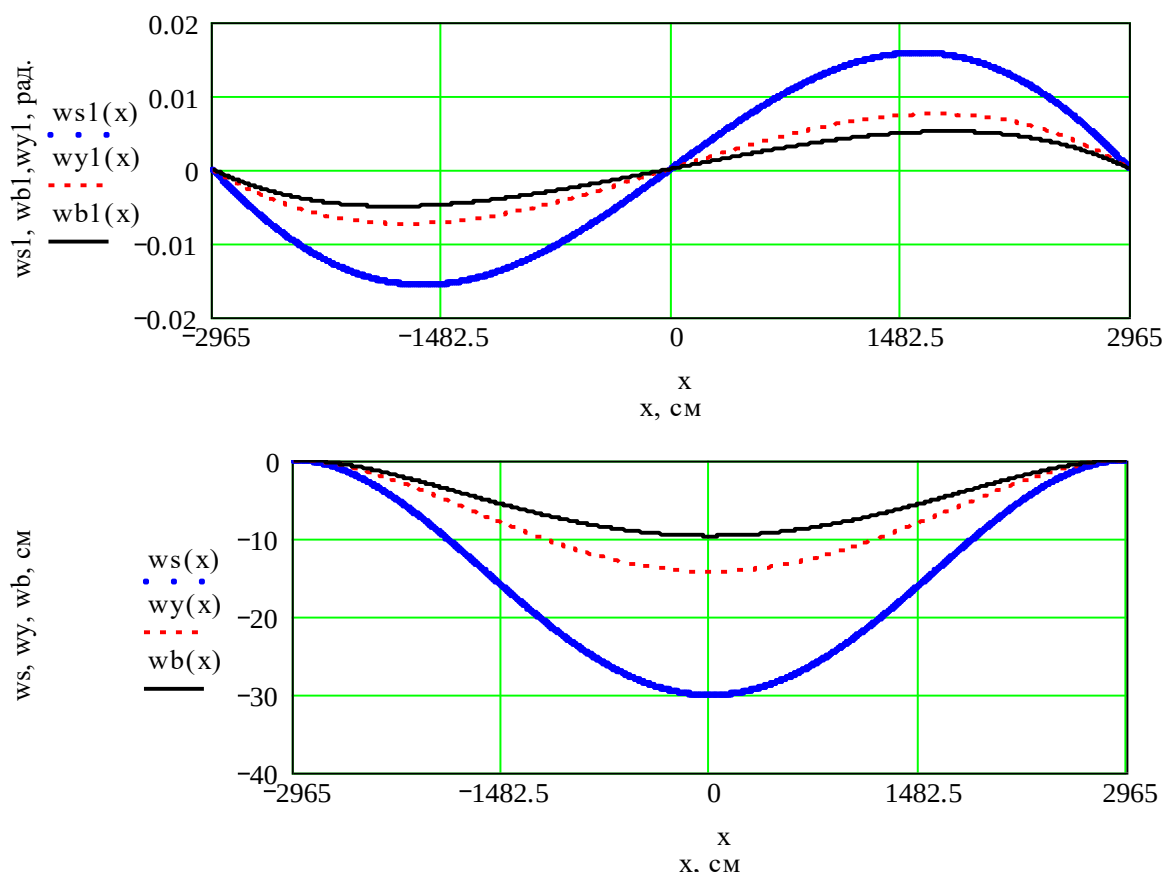


Рисунок 5.17 – Расчет основных характеристик НДС балочного перехода газопровода ($l_0=59,3$ м, $p_0=7,5$ МПа, $dt=40$ °С, $S_x=7110$ кН, $S_r=6369$ кН, $N_x=-675,3$ кН): а) поперечная сила; б) изгибные напряжения; в) угол поворота продольной оси трубы; г) прогиб

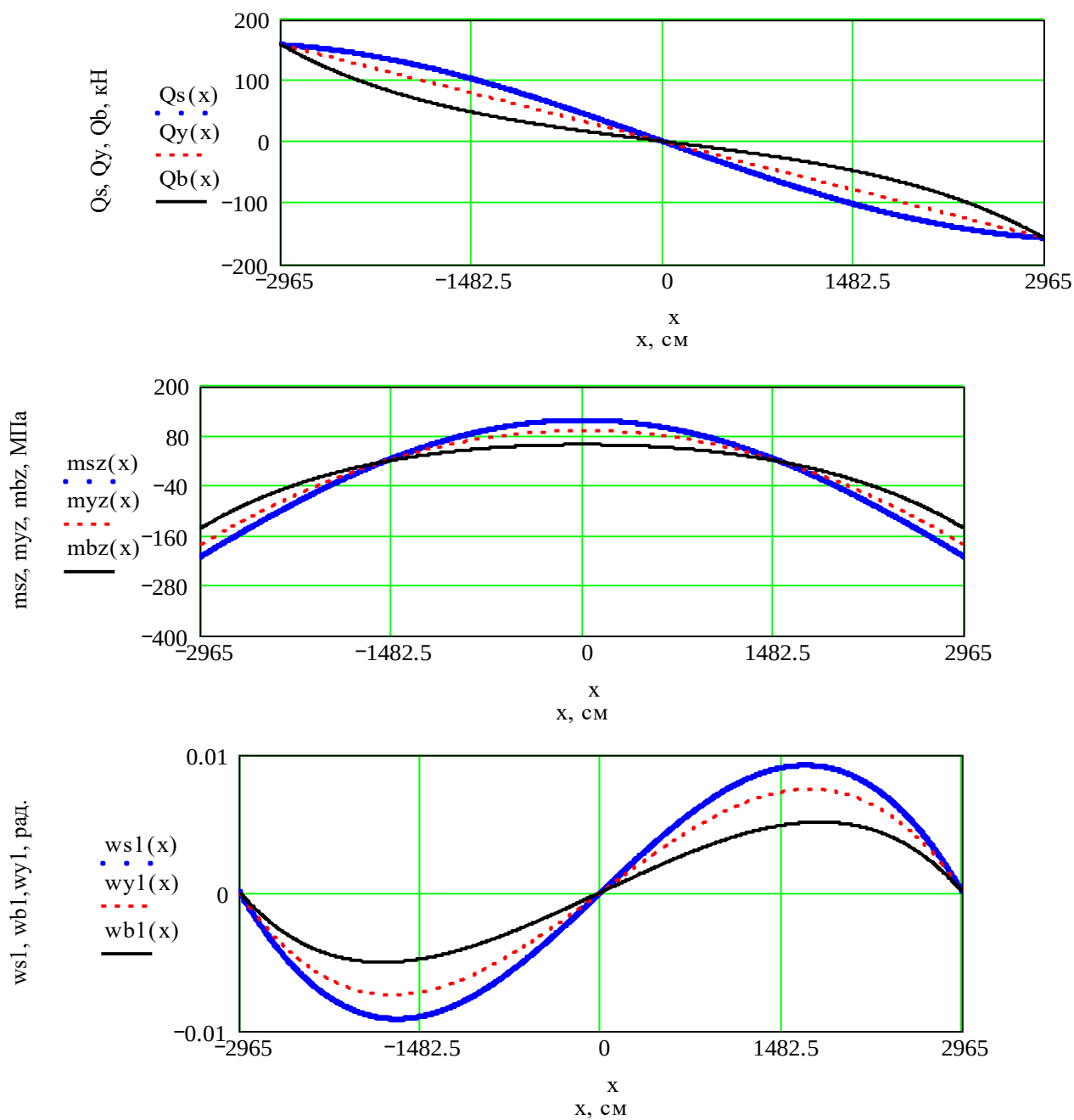
Анализ данных таблицы 5.1 показывает, что пренебрежение в расчетах воздействием внутреннего рабочего давления и температурных напряжений на изгиб трубопровода приводит к уменьшению в 2 раза экстремальных значений характеристик НДС. Растяжение трубопровода при изгибе, что имеет

место при воздействии внутреннего рабочего давления на закрытую задвижку или при наличии компенсатора в конструкции перехода, уменьшает максимальный прогиб и изгибные напряжения от пролетных изгибающих моментов более чем в 3 раза, а изгибные напряжения от опорных изгибающих моментов – более чем в 2 раза.

На рисунке 5.18 представлены основные характеристики НДС перехода для случая, когда $p_o=7,5$ МПа, а величина $\Delta t = 0$ °С, т.е. температура эксплуатации перехода равна температуре замыкания при строительстве. Дополнительный изгиб трубопровода происходит только за счет воздействия внутреннего рабочего давления. Сравнение эпюр для 2 варианта постановки задачи на рисунках 5.17 и 5.18 показывает их полное совпадение. Аналогичное совпадение имеет место и для 3 варианта постановки задачи. Это объясняется тем, что во 2 – м варианте пренебрегаем воздействием температурных напряжений, а в 3 – м варианте, где рассматривается растяжение трубопровода

от воздействия внутреннего рабочего давления, температурные напряжения отсутствуют.

Сравнение эпюр для 1 – го варианта постановки задачи на рисунках 5.17 и 5.18 показывает уменьшение максимального значения прогиба почти в 2 раза, изгибных напряжений от пролетных изгибающих моментов – почти в 2 раза, а от опорных – в 1,5 раза. Это объясняется уменьшением эквивалентного продольного усилия от $S_x = 7110$ кН до $S_x = 2574$ кН за счет отсутствия температурных напряжений.



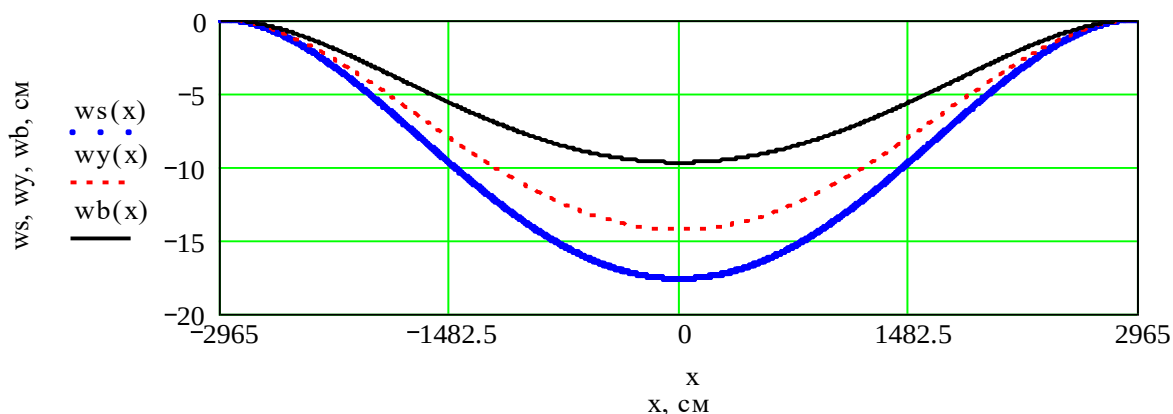


Рисунок 5.18 – Расчет основных характеристик НДС балочного перехода газопровода ($l_0=59.3$ м, $p_0= 7,5$ МПа, $\Delta t=0$ °С, $S_x=2574$ кН, $S_p=6369$ кН, $N_x=3861$ кН): а) поперечная сила; б) изгибные напряжения; в) угол поворота продольной оси трубы; г) прогиб

Далее рассмотрим случай снижения внутреннего давления до 0 ($p_o = 0$ МПа, $\Delta t = 40^\circ\text{C}$). При сбросе давления уменьшается вес трубы с газом, т.е. уменьшается вертикальная составляющая нагрузки с 5,337 кН/м до 4,6 кН/м, т.к. вес газа в 1 м без избыточного давления пренебрежимо мал ($q_{\text{газ}} \approx 0$). Тогда дополнительный изгиб трубопровода вызывается только температурными напряжениями. Отсутствует воздействие внутреннего давления на закрытую задвижку, поэтому решение задачи по 2 – му и 3 – му варианту должны совпасть. Это подтверждается характером эпюр на рисунке 5.19, где представлены основные характеристики НДС перехода для случая $p_o = 0$ МПа, $\Delta t = 40^\circ\text{C}$.

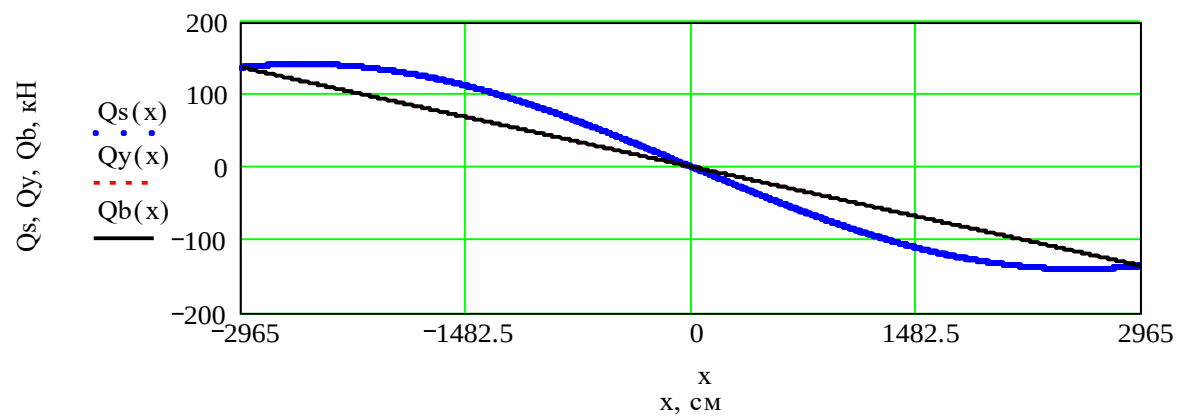
На рисунке 5.20 представлены основные характеристики НДС перехода при $p_o = 0$ МПа и $\Delta t = 0^\circ\text{C}$ для трех вариантов постановки задачи. Здесь все соответствующие эпюры для 3-х вариантов постановки задачи совпадают, что и следовало ожидать.

Практический интерес представляет случай, когда продольное усилие $N_x = 0$. Здесь трубопровод, концы которого заземлены грунтом (1-й вариант постановки задачи) испытывает дополнительный изгиб под воздействием эквивалентного продольного усилия S_x

$$S_x = p_o \cdot F_{\text{св}}.$$

В этом случае уравнение (5.15) совпадает с классическим уравнением, описывающим продольно-поперечный изгиб стержня, один конец которого, например, левый не может перемещаться в продольном направлении, а на другом, правом конце прикладывается продольная сила $S_x = p_o \cdot F_{\text{св}}$.

В третьем варианте постановки задачи на закрытую задвижку, заглушку (своего рода компенсатор) действует растягивающая продольная сила, равная $S_x = p_o \cdot F_{\text{св}}$, а само уравнение (5.44), описывающее НДС перехода, совпадает с классическим уравнением продольно-поперечного изгиба стержня при его растяжении продольной силой, равной $p_o \cdot F_{\text{св}}$.



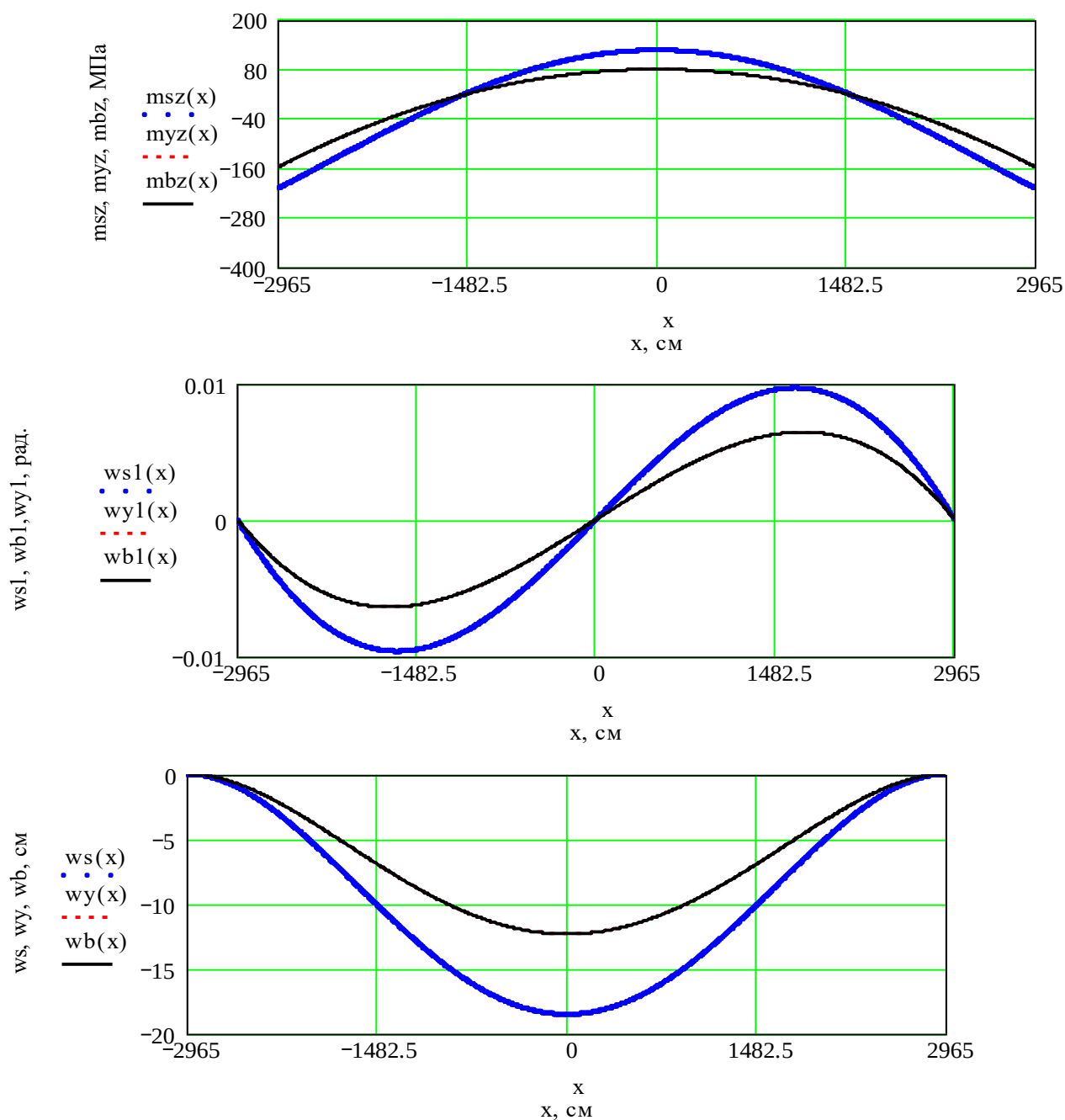


Рисунок 5.19 – Расчет основных характеристик НДС балочного перехода газопровода ($l_0=59,3$ м, $p_0=0$ МПа, $dt=40$ °С, $S_x=4536$ кН, $S_p=0$ кН, $N_x=-4536$ кН)

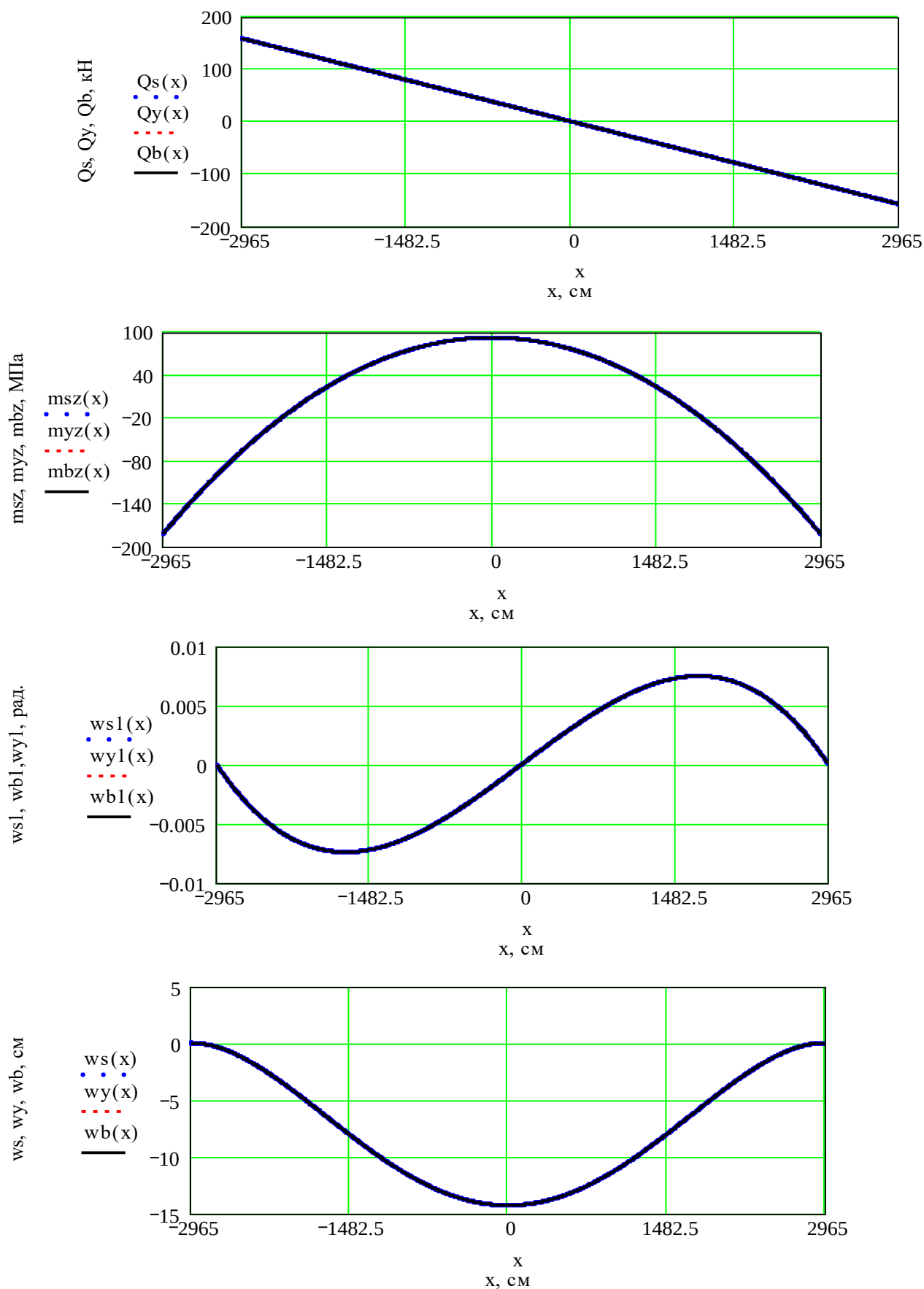


Рисунок 5.20 – Расчет основных характеристик НДС балочного перехода газопровода ($l_0=59.3$ м, $p_0=0$, $dt=0^\circ\text{C}$, $S_x=0$, $S_p=0$, $N_x=0$)

На рисунке 5.21 представлены эпюры основных характеристик НДС перехода для 3 – х вариантов постановки задачи, а в таблице 5.2 приведены максимальные значения прогиба в середине пролета и изгибные напряжения от пролетных и опорных изгибающих моментов.

Таблица 5.2 – Максимальные значения прогиба и изгибных напряжений от пролетных и опорных изгибающих моментов ($p_0=7,5$ МПа, $\Delta t = 34$ °С)

Вариант постановки задачи	Прогиб, см	Изгибные напряжения, МПа	
		от пролетных изгибающих моментов	от опорных изгибающих моментов
Первый	$ws(0) = - 27,3$	$msz(0) = 190,9$	$msz\left(\pm \frac{\ell}{2}\right) = - 290,8$
Второй	$wy(0) = - 14,3$	$myz(0) = 91,8$	$myz\left(\pm \frac{\ell}{2}\right) = - 183,6$
третий	$wv(0) = - 9,8$	$mbz(0) = 58,3$	$mbz\left(\pm \frac{\ell}{2}\right) = - 143,7$

Анализ данных таблицы 5.2 показывает, что воздействие внутреннего рабочего давления приводит к увеличению прогиба в 2 раза, к увеличению изгибных напряжений от пролетных изгибающих моментов в 2 раза, к увеличению изгибных напряжений от опорных изгибающих моментов в 1,5 раза.

Если следовать ранней постановке задачи других исследователей, в которых не учитывается воздействие внутреннего рабочего давления, вызывающего дополнительный изгиб трубопровода, то результаты решения задачи по первому и второму варианту должны совпасть. Это объясняется тем, что в ранних исследованиях считается: дополнительный изгиб вызывается только воздействием продольного усилия, возникающим на защемленных концах трубопровода.

Таким образом, в случае, когда на концах защемленного трубопровода отсутствует воздействие продольного усилия, трубопровод испытывает дополнительный изгиб, обусловленный воздействием внутреннего давления. Данный вывод находит свое подтверждение в приведенных нами примерах решения задач классической теории стержней, в которых труба теряет устойчивость от воздействия внутреннего давления при отсутствии действия продольного сжимающего усилия.

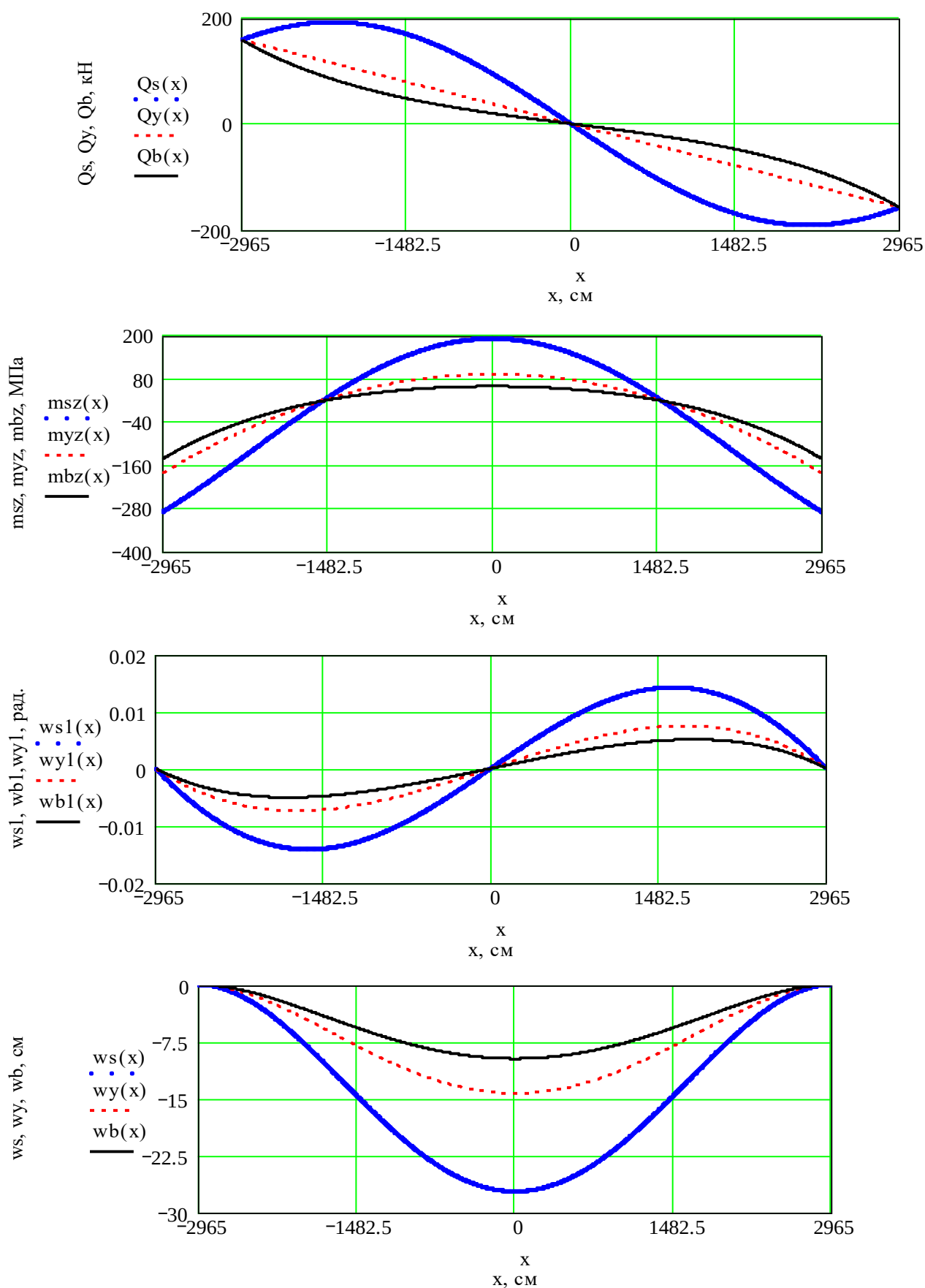


Рисунок 5.21 – Расчет основных характеристик НДС балочного перехода газопровода ($l_0=59,3$ м, $p_0= 7,5$ МПа, $dt=34$ °С, $S_x=6369$ кН, $S_p=6369$ кН, $N_x=0$ кН)

Определим критические значения эквивалентного продольного усилия S_x из решения уравнения продольно-поперечного изгиба трубопровода.

Практический интерес представляет анализ НДС трубопровода в случаях, когда эквивалентное продольное усилие S_x принимает значение, равное критическому, а сам трубопровод при изгибе теряет устойчивость. Найдем это критическое значение из решения задачи продольно-поперечного изгиба трубопровода.

Прогиб трубы, определяемый решением (5.25) уравнения (5.15) продольно-поперечного изгиба стержня, в отличие от решений уравнений балки на опорах и балки на упругом основании, при определенных значениях параметров S_x , β и λ неограниченно возрастает, что означает потерю устойчивости стержня, моделирующего трубопровод. В отличие от решения классической задачи устойчивости стержня, сжимаемого продольной осевой силой, где заранее задается форма выпучивания продольной оси стержня (что не позволяет оценить НДС стержня до его потери устойчивости), с помощью решения (5.25) можно отслеживать деформацию трубы в зависимости от значений вышеупомянутых параметров и найти критические значения этих параметров и соответствующие им формы потери устойчивости.

Если выполняется одно из следующих равенств

$$S_x = 0, \quad \beta = 0, \quad \sin \beta \frac{\lambda}{2} = 0, \quad (5.59)$$

то прогиб в центре пролета, определяемый выражением (2.30) неограниченно возрастает. Это означает потерю устойчивости трубопровода при его изгибе под действием собственного веса и эквивалентного продольного усилия S_x . Используем эти условия для нахождения критической величины S_x , т.е. $S_{x,кр}$.

Выполнение первых двух условий, т.е. когда величина осевой сжимающей силы равна нулю ($S_x = 0$) или изгибная жесткость стержня неограниченно возрастает ($EJ \rightarrow \infty$), не представляет практического интереса.

Последнее условие (5.59) представляет собой тригонометрическое уравнение.

Найдем множество значений аргумента, удовлетворяющих тригонометрическому уравнению

$$\beta \frac{\lambda}{2} = k\pi, \quad (5.60)$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$.

Подставляя в (5.60) вместо β его значение по (5.19), имеем следующую формулу для $S_{x,кр}$

$$S_{x.kp} = \frac{4\pi^2 k^2 EJ}{\lambda^2}. \quad (5.61)$$

Полагая в (5.60) $k = 1$, найдем наименьшее значение $S_{x.kp}$

$$S_{x.kp} = \frac{4\pi^2 EJ}{\lambda^2}. \quad (5.62)$$

Полученное выражение совпадает с формулой для критического значения осевой сжимающей силы S_x для жестко опертого на концах стержня при потере его устойчивости в классической задаче устойчивости. Как и в случае шарнирного опирания стержня на опорах в классической задаче устойчивости, величина прогиба жестко опертого на концах стержня определяется с точностью до постоянного множителя, следовательно, и форма изогнутой оси стержня находится также с точностью до постоянного множителя.

5.3. Математические модели течения несжимаемых жидкостей.

Рассмотрим совместное движение двух несжимаемых и взаимно нерастворимых жидкостей в трубе вдоль ее оси x (рис. 5.22). Будем считать, что движение происходит при постоянной температуре, т. е. процесс изотермический. Примером таких жидкостей могут быть нефть и вода. Выделим в трубе два сечения 1—1 и 2—2 соответственно на расстоянии x и $x + \Delta x$ от начала оси x . Объем, заключенный между этими сечениями, обозначим через ΔV . В этом объеме находятся жидкости 1 и 2. Процесс рассматриваем в единицу времени или за промежуток времени Δt . Задаемся соотношением между объемами этих жидкостей. Отношение объема одной жидкости ΔV_1 или другой ΔV_2 к объему, занимаемому обеими жидкостями ΔV , называется насыщенностью и обозначается соответственно через S_1 или S_2 (в долях или процентах).

Обозначим плотность первой жидкости ρ_1 объем этой жидкости, проходящей через сечение 1—1 за единицу времени, Q_1 , и проходящей через сечение 2—2, — Q_{12} . Для второй жидкости введем соответственно обозначения ρ_2, Q_2, Q_{22} . Тогда масса первой жидкости, прошедшей через сечение 1—1, будет $G_1 = \rho_1 Q_1$ а масса второй жидкости $G_2 = \rho_2 Q_2$. В случае движения одной несжимаемой жидкости, т. е. когда $S_1 = 1$ (или $S_2 = 0$), $Q_1 = Q_{22}$ (или $Q_2 = Q_{22}$). Ввиду того, что в объеме ΔV содержится объем ΔV_1 первой жидкости, объем ΔV_2

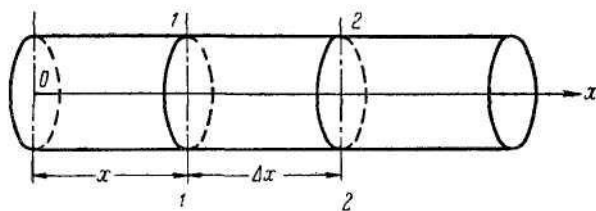


Рис. 5.22.

второй жидкости и соотношения их в объеме ΔV могут изменяться, то в общем случае

$$Q_1 \neq Q_{12} \text{ и } Q_2 \neq Q_{22}. \quad (5.63)$$

Проиллюстрируем вышесказанное на следующем примере.

Пусть в объеме $\Delta V = 10 \text{ м}^3$ нефтенасыщенность составляет 50%, т. е. в нем содержится 5 м^3 воды. Количество жидкости, протекающей через сечение 1—1 (см. рис. 6) и вытекающей из сечения 2—2, может отличаться друг от друга. Так, если через сечение 1—1 поступает 2 м^3 нефти, то через сечение 2—2 может быть отобрано 2 м^3 нефти, а может быть больше или меньше, но не больше 7 м^3 (суммы объема нефти в общем объеме и объема нефти, поступившей через сечение 2—2, должны быть равны объему нефти, поступающей в сечение 1—1). S_1 не изменяется во времени, т. е. процесс движения установившийся.

Если через сечение 2—2 отбирается нефти больше, чем втекает через сечение 1—1, то S_1 уменьшается. Так, если из сечения 2—2 отбирается 3 м^3 нефти, а через сечение 1—1 поступает 2 м^3 , то

$$S_1 = \frac{\Delta V_1 + Q_1 \Delta t - Q_{12} \Delta t}{\Delta V} = \frac{5 + 2 - 3}{10} = 0,4,$$

т. е. нефтенасыщенность снизится на 11) %.

Если через сечение 1—1 поступает 1 м^3 воды, то из сечения 2—2 может быть отобрана вода в количестве, равном, большем или меньшем чем 1 м^3 , но в соответствии с поступившим в сечение 1—1 и отобранном из сечения 2—2 объемом нефти, т. е. должен быть соблюден следующий баланс: $Q_1 - Q_{12} + Q_2 + Q_{22} = 0$

Следовательно, для рассмотренного примера

$$Q_{22} = Q_1 + Q_2 - Q_{12} = 2 + 1 - 3 = 0.$$

Таким образом, ввиду несжимаемости жидкостей сумма их объемов, поступивших в сечение 1—1, равна сумме объемов жидкостей, вытекающих из сечения 2—2,

$$Q_1 + Q_2 = Q_{12} + Q_{22} \quad (5.64)$$

Формула (5.64) отражает закон постоянства массы в конечной форме.

Масса каждой жидкости, а также сумма их масс в объеме ΔV во времени не постоянна. Так, в приведенном выше примере объем нефти в

объеме ΔV станет равным 4 м^3 , а объем воды — 6 м^3 . При $\rho_1 = 800 \text{ т/м}^3$ и $\rho_2 = 1000 \text{ т/м}^3$ первоначальная масса жидкостей, находящихся в объеме ΔV , составляла $G(t) = (0,8 \cdot 5 + 1 \cdot 5) = 9 \text{ т}$.

После прохождения отмеченных объемов жидкостей через некоторое время Δt масса их в том же объеме составит $G(t + \Delta t) = 0,8 \cdot 4 + 1 \cdot 6 = 9,2 \text{ т}$. Следовательно, вес жидкости в объеме ΔV увеличивается на $0,2 \text{ т}$. Разность между массой жидкости, втекающей через сечение 1—1 и вытекающей через сечение 2—2, идет на изменение насыщенности в объеме ΔV .

$$G_{12} - G_1 = \Delta \sigma_1 \Delta V \rho_1, \quad (5.65)$$

где $\Delta \sigma_1$ — изменение нефтенасыщенности (в приведенном выше примере $\Delta \sigma_1 = 10\%$).

Рассмотрим процесс совместного движения двух жидкостей, характеризующийся величинами Q_1 , Q_2 , S_1 и S_2 , которые меняются; как вдоль оси x , так и во времени.

Запишем уравнения (5.64) и (5.65) для любого сечения и в любой момент времени. Процесс исследуется в интервале Δx за промежуток времени Δt . Чтобы получить выражения (5.64) и (5.65) для любого сечения и в любой момент времени, необходимо, чтобы $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$.

В приведенном примере Q_1 и Q_{12} принимались (и в дальнейшем принимаются) постоянными во времени, но они могут быть и переменными.

Таким образом, для первой жидкости в сечении 1—1 имеем ($Q_1(x, t)$), а в сечении 2—2 $Q_1(x + \Delta x, t)$, соответственно для второй жидкости имеем ($Q_2(x, t)$, $Q_2(x + \Delta x, t)$). Следовательно,

$$Q_{12} = Q_1(x + \Delta x, t)$$

$$Q_{22} = Q_2(x + \Delta x, t)$$

В момент времени t в сечении 1—1 насыщенность будет $S_1(x, t)$, через промежуток времени Δt насыщенность станет $S_1(x, t + \Delta t)$, а в сечении 2—2 соответственно $S_1(x + \Delta x, t)$ и $S_1(x + \Delta x, t + \Delta t)$. Запишем закон постоянства массы (1.37) для данного элементарного объема

$$\begin{aligned} Q_1(x, t) + Q_2(x, t) &= Q_1(x + \Delta x, t) + Q_2(x + \Delta x, t) \\ Q_1(x + \Delta x, t) - Q_1(x, t) &= -Q_2(x + \Delta x, t) + Q_2(x, t) \end{aligned}$$

Разделим на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$.

Выражение (5.67) представляет собой закон постоянства массы в дифференциальной форме.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(Q_1(x + \Delta x, t) - Q_1(x, t))}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(Q_2(x + \Delta x, t) - Q_2(x, t))}{\Delta x},$$

или

$$\frac{\partial Q_1(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial Q_2(x,t)}{\partial x}, \quad (5.66)$$

или

$$\frac{\partial (Q_1 + Q_2)}{\partial x} = 0, \quad (5.67)$$

$$(G_1(x+\Delta x, t) - G_1(x, t))\Delta t = (S_1(x+\Delta x, t) - S_1(x, t))\Delta V \rho_1, \quad (5.68)$$

где

$$S_1(x+\Delta x, t) - S_1(x, t) = \Delta S_1$$

Запишем выражение (5.65) для элемента объема ΔV

Здесь ΔS_1 — изменение насыщенности во времени из-за накопления первой жидкости.

Отметим, что $S_1(x+\Delta x, t), S_1(x, t)$ будут иметь одинаковые значения при $\Delta x \rightarrow 0$. Следовательно, изменение насыщенности ΔS_1 в объеме ΔV (при $\Delta x \rightarrow 0$ можно выразить как $S_1(x, t+\Delta t) - S_1(x, t)$, так и $S_1(x+\Delta x, t+\Delta t) - S_1(x+\Delta x, t)$.

В выражении (5.68) левая часть умножена на Δt , так как масса жидкости G отнесена к единице времени, а процесс рассматривается в течение времени Δt .

Если масса первой жидкости в объеме ΔV увеличивается, то накопление имеет положительный знак

$$S_1(x, t+\Delta t) - S_1(x, t) > 0.$$

Это может быть в случае, если $G_1(x+\Delta x, t) < G_1(x, t)$, т. е. масса первой жидкости, поступающей через сечение 1—1, больше отбора ее через сечение 2—2. Поэтому в (5.68) знак в правой части должен быть противоположным знаку в левой части, т. е.

$$G_1(x+\Delta x, t) - G_1(x, t) = -(S_1(x, t+\Delta t) - S_1(x, t))\Delta V \rho_1 \quad (5.69)$$

или, зная, что $\Delta V = \Delta x F$,

$$G_1(x+\Delta x, t) - G_1(x, t) = -(S_1(x, t+\Delta t) - S_1(x, t))\Delta x \rho_1 F \quad (5.70)$$

Разделив обе части (1.43) на $\Delta x, \Delta t$ и перейдя к пределу при

$$\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(G_1(x+\Delta x, t) - G_1(x, t))}{\Delta x} = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(S_1(x, t+\Delta t) - S_1(x, t))}{\Delta t} F \rho_1$$

откуда для первой жидкости, получим

$$\frac{\partial G_1(x, t)}{\partial x} = -F \rho_1 \frac{\partial S_1(x, t)}{\partial t} \quad (5.71)$$

или

$$\frac{\partial Q_1(x, t)}{\partial x} = -F \frac{\partial S_1(x, t)}{\partial t} \quad (5.72)$$

Для второй жидкости аналогично

$$\frac{\partial G_2(x,t)}{\partial x} = -F \rho_2 \frac{\partial S_2(x,t)}{\partial t} \quad (5.73)$$

$$\frac{\partial Q_2(x,t)}{\partial x} = -F \frac{\partial S_2(x,t)}{\partial t} \quad (5.74)$$

Заметим, что (5.71), (5.72) и (5.67) являются независимыми уравнениями, а (5.73) и (5.74) могут быть получены из них. Или формула (5.67) может быть получена из уравнений (5.71), (5.72), (5.73), (5.74). Покажем это на примере.

Сложив (5.72) и (5.74), получим

$$\frac{\partial(Q_1 + Q_2)}{\partial x} = -F \frac{\partial(S_1 + S_2)}{\partial t} \quad (5.73)$$

Так как $S_1 + S_2 = 1$, то

$$\frac{\partial(S_1 + S_2)}{\partial t} = 0$$

Откуда

$$\frac{\partial(Q_1 + Q_2)}{\partial t} = 0$$

Как было отмечено выше, в рассматриваемом примере необходимо определить Q_1 , Q_2 и S_1 . Зная же S_1 , можно определить $S_2 = 1 - S_1$, т. е. для трех величин имеется два уравнения (5.72) и (5.74).

5.4. Математические модели движения смеси жидкости и газа.

Рассмотрим движение смеси жидкости и растворенного в ней газа и выделенном объеме трубы (см. рис. 5.22). Будем считать, что движение происходит при постоянной температуре, т. е. процесс изотермический. Принимается, что жидкость несжимаема, а газ, как обычно, сжимаем.

В данном случае через сечение 1—1 поступают жидкость с растворенным в ней газом и газ в свободном состоянии. В объеме ΔV имеется насыщенность газом и жидкостью. Причем насыщенность газом в отличие от предыдущего случая может изменяться как в результате изменения количества газа в этом объеме, так и вследствие его сжимаемости.

Обозначения приняты те же, что и в предыдущем случае, но вместо первой жидкости взят свободный газ, а вместо второй — насыщенная газом жидкость.

Введем следующие дополнительные обозначения для масс газа и жидкости: G_3 — масса газа в растворенном состоянии, поступающего через сечение 1—1 за единицу времени; G_{32} — масса газа в растворенном состоянии, выходящего через сечение 2—2 за единицу времени; G_4 — масса растворенного газа в единице объема жидкости за единицу времени.

Принимаем, что масса растворенного в жидкости газа, по сравнению с массой самой жидкости очень мала. Поэтому ею можно пренебречь, т. е. G_2 и G_{22} рассмотрим как массу жидкости. Но это предположение не всегда справедливо. Для иллюстрации этого приведем следующий пример. Пусть имеется нефть, плотность которой (при 20°C) $\rho = 780 \text{ кг/м}^3$, и газ, относительная плотность которого (по воздуху) $\Delta = 0,7$; газовый фактор $\Gamma = 100 \text{ м}^3/\text{м}^3$.

Относительная молекулярная масса газа будет

$$M_1 = M_3 \Delta = 29 \cdot 0,7 = 20,3,$$

где M_3 — молекулярный вес воздуха.

Число киломолей газа, растворенных в 1 м^3 нефти,

$$N = \frac{\Gamma}{22,4} = \frac{100}{22,4} = 4,46,$$

где $22,4 \text{ м}^3$ — объем 1 кмоль газа при нормальных условиях.

Кажущаяся плотность газа (при относительной плотности 0,7) в нефти (плотность 780 кг/м^3) $\rho_k = 320 \text{ кг/м}^3$. Следовательно, увеличение объема 1 м^3 нефти, вызванное растворением газа, составит

$$\Delta V_1 = \frac{M_1 N}{\rho_k} = \frac{20,3 \cdot 4,46}{320} = 0,283 \text{ м}^3.$$

Общий объем насыщенной газом нефти, отнесенной к атмосферным условиям, будет

$$V_1 = V + \Delta V_1 = 1 + 0,283 \text{ м}^3$$

а, масса нефти с растворенным в ней газом

$$G = G_0 + M_2 N = 780 + 20,3 \cdot 4,46 = 870,5 \text{ кг},$$

где G_0 — вес ненасыщенной нефти; V — объем ненасыщенной нефти. Плотность нефти с растворенным в ней газом рассчитывается по формуле

$$\rho_{12} = \frac{G}{V_1} = \frac{870,5}{1,283} = 680 \text{ кг/м}^3.$$

Следовательно, при растворении газа в жидкости масса ее

увеличивается.

Рассмотрим изменение массы жидкости в элементарном объеме, т. е. запишем закон постоянства масс жидкости (по аналогии с предыдущим случаем)

$$(G_2 - G_{22})\Delta t = \Delta S_2 \Delta V \rho_2. \quad (5.74)$$

Запишем закон постоянства массы для газовой фазы. Изменение массы газа за время Δt — разность массы газа, поступающего через сечение 1—1 (см. рис. 6), и массы газа, выходящего из сечения 2—2, т. е. $(G_1 + G_3 - (G_{12} + G_{32}))\Delta t$, соответствует изменению массы газа в рассматриваемом объеме и равно сумме изменения масс растворенного и свободного газа в объеме ΔV , т. е. равно $\Delta G_4 \Delta V S_2 + \Delta G_1$.

Таким образом, можно записать

$$(G_1 + G_3 - (G_{12} + G_{32}))\Delta t = \Delta G_4 \Delta V S_2 + \Delta G_1 l. \quad (5.75)$$

В соответствии с ранее принятым (в предыдущем случае)
 $G_{32} = G_3(x + \Delta x, t)$.

Изменение G_1 происходит в результате изменения ρ_1, S_1 . Следовательно,
 $\Delta G_1 = (u(x, t + \Delta t) - u(x, t))\Delta V$; $u = \rho_1 S_1$.

Для того чтобы уравнения (5.74) и (5.75) записать для любого момента времени и для любого сечения, сделаем следующее.

Запишем уравнение (5.71), согласно принятым обозначениям, в виде

$$(G_2(x + \Delta x, t) - G_2(x, t))\Delta t = (S_2(x, t + \Delta t) - S_2(x, t))F \Delta x \rho_2. \quad (5.76)$$

Если масса жидкости в объеме ΔV увеличивается, то накопление имеет положительный знак, т. е. $S_2(x, t + \Delta t) - S_2(x, t) > 0$. Это может быть при $G_2(x + \Delta x, t) < G_2(x, t)$, т. е. когда масса жидкости, поступающей в сечение

1—1, больше массы жидкости, отбираемой из сечения 2—2. Поэтому в (5.76) знак в правой части должен быть противоположным знаку в левой части

$$(G_2(x + \Delta x, t) - G_2(x, t))\Delta t = -(S_2(x, t + \Delta t) - S_2(x, t))F \Delta x \rho_2 \quad (5.77)$$

Разделив обе части (5.77) на Δx и Δt и перейдя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(G_2(x + \Delta x, t) - G_2(x, t))}{\Delta x} = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(S_2(x, t + \Delta t) - S_2(x, t))}{\Delta t} F \rho_2$$

$$\frac{\partial G_2(x, t)}{\partial x} = -F \rho_2 \frac{\partial S_2(x, t)}{\partial t} \quad (5.78)$$

Из уравнения (5.75) имеем

$$(G_1 + G_3 - (G_{12} + G_{32}))\Delta t = \Delta G_1 + \Delta G_4 \Delta x F S_2 \quad (5.79)$$

$$\begin{aligned} & (G_1(x, t) + G_3(x, t) - (G_1(x + \Delta x, t) + G_3(x + \Delta x, t)))\Delta t = \\ & = -((u(x, t + \Delta t) - u(x, t))F\Delta x - G_4 F \Delta x S_2) \end{aligned} \quad (5.80)$$

Разделив обе части уравнения (5.80) на $\Delta x, \Delta t$ и перейдя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G_1(x, t) - G_1(x + \Delta x, t) + G_3(x, t) - G_3(x + \Delta x, t)}{\Delta x} = \\ & = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(u(x, t + \Delta t) - u(x, t))}{\Delta t} S + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta G_4}{\Delta t} S^2 \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial (G_1(x, t) + G_3(x, t))}{\partial x} = -S \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + S \frac{\partial G_4(x, t)}{\partial t} \right) \quad (5.81)$$

Объем жидкости, поступающей в сечение 1—1, будет $— \frac{G_2}{\rho_2}$, т.е. в

объеме $\frac{G_2}{\rho_2}$ — содержится масса растворенного газа $G_4 \frac{G_2}{\rho_2}$, т. е.

$$G_3 = G_4 \frac{G_2}{\rho_2}. \quad (5.82)$$

Таким образом, в трех уравнениях (5.78), (5.81) и (5.82) имеются неизвестные: G_x, G_2, G_3, G_4, S_2 и ρ_1 .

Приведенному выше примеру аналогичен случай движения газоконденсатной смеси в трубах или в пористой среде. В газоконденсатной системе в отличие от газонефтяной при снижении давления выпадает жидкость-конденсат. Следовательно, в выделенный объем поступает газ с конденсатом. Принимая, что выпавший конденсат неподвижен, и пренебрегая изменением массы газа от выпадения конденсата, можно применить закон постоянства массы для определения изменения насыщенности конденсатом рассматриваемого объема.

Через сечение 1—1 в единицу времени прошли масса газа G_1 и масса конденсата G_2 . Через сечение 2—2 отобраны масса газа G_{12} и масса конденсата G_{22} . Тогда масса конденсата, накопившегося в объеме в единицу времени,

$$\Delta G_2 = G_{22} - G_2 .$$

Это приращение массы конденсата приведет при условии несжимаемости конденсата ($\rho = \text{const}$) к изменению объема в единицу времени на величину $\frac{\Delta G_{12}}{\rho_2}$.

За отрезок времени Δt изменение объема будет $\frac{\Delta G_{12}}{\rho_2} \Delta t$. Это изменение объема приведет к изменению насыщенности конденсатом на величину ΔS_2 .

Аналогично предыдущему случаю запишем

$$\left(\frac{G_2(x + \Delta x, t) - G_2(x, t)}{\rho_2} \right) \Delta t = - (S_2(x, t + \Delta t) - S_2(x, t)) F \Delta x \quad (5.83)$$

Знак минус перед правой частью поставлен, исходя из следующих соображений: если $G_2(x + \Delta x, t) > G_2(x, t)$, то насыщенность конденсата в объеме ΔV уменьшается, т. е. $S_2(x, t + \Delta t) < S_2(x, t)$, и наоборот.

Разделив обе части уравнения (5.83) на Δx и Δt и перейдя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\frac{\partial G_2(x, t)}{\partial x} = -F \rho_2 \frac{\partial S_2(x, t)}{\partial t} \quad (5.84)$$

Так как было принято, что масса газа не изменяется при выпадении конденсата, то для газовой фазы можно написать закон постоянства массы в форме, записанной выше,

$$\frac{\partial G_1(x, t)}{\partial x} = -F \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \quad (5.85)$$

В уравнениях (5.84) и (5.85), описывающих процесс движения газоконденсатной системы, имеются четыре неизвестных. Отметим, что закон сохранения имеет множество приложений, в том числе для расчета химико – технологических процессов.

5.5. Математические модели тепловых процессов.

Для тепловых процессах закон сохранения энергии отражается в виде первого закона термодинамики, который формулируется следующим образом: бесконечно малое изменение внутренней энергии состоит из двух частей — из количества тепла, полученного телом, и произведенной телом работы.

Работа при поступлении тепла зависит от начального и конечного состояния тела и от пути, по которому изменяется состояние тела. В связи с этим нельзя рассматривать тепловой эффект процесса как разность этих количеств в конечном и начальном состояниях.

С поглощением тепла в количестве dQ температура повышается на величину dT . Отношение $c = \frac{dQ}{mdT}$ (где m — масса тела) называется теплоемкостью тела. В физике пользуются теплоемкостью при постоянном давлении c_p и теплоемкостью при постоянном объеме c_v .

Применяя первый закон термодинамики для исследования процесса распространения тепла в теле, ограниченном сечениями сечения 1—1 и 2—2 (рис. 5.23) получим балансовое равенство для теплот. Пусть тело имеет какую-то определенную начальную температуру. К одному концу тела подводится источник тепла или холода. Соответственно этому в теле происходит нагревание или охлаждение.

Температура в какой-либо точке тела будет зависеть от расстояния точки до места подвода тепла и времени

$$T = T(x, t).$$

На текущее распределение температуры в теле оказывает влияние начальное распределение температуры, а также условия в концевых сечениях тел, в частности от температуры на обоих концах тела.

В приведенном примере через сечение 1—1 в единицу времени подводится количество тепла, равное $Q(x, t)$. Через сечение 2—2 в единицу времени отводится количество тепла, равное $Q(x + \Delta x, t)$. Разность между этими количествами тепла

$$\Delta Q = Q(x + \Delta x, t) - Q(x, t) \quad (5.86)$$

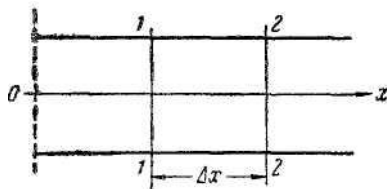


Рис. 5.23

в соответствии с первым законом термодинамики затрачивается на изменение температуры в отсеке между сечениями 1—1 и 2—2.

Если $\Delta Q < 0$, то тело нагревается, в противном случае — охлаждается, т. е. в первом случае

$$\Delta T = (T(x, t + \Delta t) - T(x, t)) > 0, \quad (5.87)$$

а во втором — $\Delta T < 0$.

При изменении количества подводимого и отводимого тепла па величину ΔQ температура тела (в соответствии с законом сохранения энергии и определением теплоемкости) должна изменяться на величину

$$\Delta T = -\frac{\Delta Q}{\Delta m_1 c_v} \Delta t \quad (5.88)$$

$$\Delta m_1 = \rho \Delta x S$$

где Δm_1 — элементарная масса тела; S — площадь поперечного сечения тела; ρ — плотность тела.

Так как $\Delta Q > 0$ при $\Delta T < 0$ и $\Delta Q < 0$ при $\Delta T > 0$, то в правой части (5.88) поставлен знак минус.

Подставив в (5.88) значения ΔQ и ΔT соответственно из (5.87), (5.88) и разделив его на $\Delta x, \Delta t$ и перейдя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$,

получим

$$\frac{1}{S \rho c_v} \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.89)$$

Таким образом, в одном уравнении получаем два неизвестных Q и T .

Рассмотрим, каким образом можно получить недостающие уравнения. Например, для движения смеси двух несжимаемых жидкостей необходимо составить еще одно уравнение. Но в этом случае процесс определяется и давлением. Поэтому необходимо иметь два уравнения для нахождения Q_1 и Q_2 .

При изотермическом совместном движении газа и жидкости в трубопроводе неизвестными были ρ и V , а уравнение — одно. Но, как известно, ρ связано с давлением при помощи уравнения состояния Клайперона — Менделеева

$$\rho = \frac{p}{2RTg},$$

где p — давление.

Однако при этом появляется новое неизвестное p , т. е. опять не хватает одного уравнения. Приведенное выше уравнение соответствовало закону постоянства массы. Для исследуемого явления необходимо применить еще закон сохранения энергии, например в виде уравнения Бернулли. Но в этом случае появится новое неизвестное — работа сил трения, т. е. требуется опять одно уравнение для определения силы трения. Это уравнение устанавливается экспериментально.

Для совместного движения несжимаемых жидкостей закон сохранения энергии приводит также к необходимости определения силы трения. Указанный процесс характеризуется и давлением. Поэтому и в этом случае

необходимо экспериментально составить одно уравнение для сил трения. Если движение неизотермическое, то следует применить и первый закон термодинамики. Тогда появятся два неизвестных Q и T , связанных одним уравнением типа

$$\frac{1}{S\rho c_v} \frac{\partial Q}{\partial x} = - \frac{\partial T}{\partial t},$$

т. е. и в этом случае необходимо определить одну экспериментальную зависимость для Q .

При изотермическом движении газированной жидкости в трубопроводе или при фильтрации газированной жидкости в пористой среде плотность газа ρ связана с давлением p . Появляется еще одно неизвестное p . Вводя понятие массовой скорости для жидкости w_1 и газа w_2 , можно через них вычислить соответственно G_1 и G_2 . Неизвестными в этом случае являются $w_1, w_2, G_3, G_4, S_2, \rho, p$. Таким образом, необходимо экспериментально определить зависимости для w_1, w_2 и G_3 .

При использовании закона сохранения энергии в этом случае необходимо знать работу силы трения, т. е. силу трения (новое неизвестное), причем применение закона сохранения энергии не уменьшает числа недостающих уравнений. Наоборот, количество уравнений увеличивается, соответственно этому увеличивается и количество неизвестных. При движении газоконденсатной смеси в трубах или в пористой среде имеем два уравнения и четыре неизвестных G_1, G_2, ρ_1, ρ_2 . Плотность ρ_1 связана с давлением при помощи уравнения состояния.

Таким образом, необходимо экспериментально определить две зависимости — для G_1 и G_2 .

При исследовании процесса распространения тепла в теле имеем два неизвестных Q и T и одно уравнение. Закон постоянства массы выполняется тождественно и недостающее уравнение для Q определяется экспериментально.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Конечно, в данном учебном пособии рассмотрены не все вопросы связанные с задачами нефтегазовой отрасли. В нем мы затронули лишь ряд простейших задач связанных, как правило, с механическими математическими моделями. Отметим, что не затронут ряд вопросов по разведке нефтегазовых месторождений, вопросы перекачки и переработке углеводородного сырья. Эти задачи имеют высокий уровень сложности и авторы не имели возможности разметить такой материал в предлагаемом пособии. Для этого нужны отдельные издания посвященные отдельным направлениям развития нефтегазовой отрасли. Основной задачей издания являлось понимание того, как подходить к задачам постановки, разработки, выводу основных балансовых уравнений и разрешения их некоторыми математическими методами. Авторы надеются, что данное пособие поможет магистрам при постановке и решении проблем связанных с математическим моделированием задач нефтегазовой отрасли.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике: учебник для вузов. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 496 с.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука. Главная редакция физико - математической литературы, 2003. - 288с.
3. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1969. - 268с.
4. Мирзаджанзаде А.Х., Гусейнзаде М.А. Решение задач нефтепромысловой механики. - М.: Недра, 1971. - 200с.

Дополнительная литература

5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. - 736 с.
6. Будак Б.М. и др. Сборник задач по математической физике. - М.: Наука, 1972. - 688 с.
7. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. М.: Наука, 1964. - 208 с.
8. Сайт «Решение задач по ТОЭ, ОТЦ, Высшей математике, Физике, Программированию, ТерМеху..., лекция 31». – URL: <http://toehelp.ru/theory/sopromat/31.html>.
9. Качанов И.В., Кулебякин В.В., Недбальский В.К. Механика жидкости и газа: курс лекций: в 4 ч. /– Минск: БНТУ, 2011. – Ч.3. , – URL: https://studopedia.su/6_34960_odnomernaya-model-techeniya-vyazkoy-neszhimaemoy-zhidkosti.html.
10. Коробков Г.Е., Зарипов Р.М., Шаммазов И.А. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния и устойчивости трубопроводов и резервуаров в осложненных условиях эксплуатации. - СПб.: Недра, 2009. - 409 с.
11. СП 36.13330.2012. Свод правил. Магистральные трубопроводы. Актуализированная редакция СНиП 2.05.06-85. - М.: Госстрой, ФАУ «ФЦС», 2013. - 100 с.
12. СТО Газпром 2-3.5-454-2010. Правила эксплуатации магистральных газопроводов. - М.: ООО «ИРЦ Газпром», 2010. - 241 с.
13. Расчет и обеспечение прочности трубопроводов в сложных инженерно-геологических условиях. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния и устойчивости трубопроводов / А. М. Шаммазов, Р.М. Зарипов, В.А. Чичелов, Г.Е. Коробков. - М.: Изд-во «Интер», 2005. - Т.1. - 706 с.

14. Расчет и обеспечение прочности трубопроводов в сложных инженерно-геологических условиях. Оценка и обеспечение прочности трубопроводов / А. М. Шаммазов, Р. М. Зарипов, В. А. Чичелов, Г. Е. Коробков. - М.: Изд-во «Интер», 2006. - Т.2. - 564 с.
15. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. - М.: Едиториал УРСС, 2004. - 400 с.
16. Кобелев Н.Б. Практика применения экономико-математических методов и моделей: учеб.-практ. пособие. — М.: ЗАО «Финстатин-форм», 2000. — 246 с.
17. Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2 т. / Н. С. Пискунов. - стер. изд. - М.: Интеграл-Пресс. - 2009. - Т. 1. - 416 с.
18. Санников Р.Х. Теория подобия и моделирования. Планирование инженерного эксперимента: учебное пособие. - Уфа: Нефтегазовое дело, 2010. - 263 с.
19. Бордовский Г.А. Физические основы математического моделирования. — М.: Издательский центр «Академия», 2005 - 320 с.
20. Учебно-методический комплекс дисциплины «Математика». Раздел 13 «Дифференциальные уравнения». Методические указания для студентов. — Уфа: Издательство УГНТУ, 2010.
21. Учебно-методический комплекс дисциплины «Математика». Раздел 13 «Дифференциальные уравнения». Контрольно-измерительные материалы. — Уфа: Издательство УГНТУ, 2010.
22. Учебно-методический комплекс дисциплины «Математика». Раздел 14 «Математическая статистика». Методические указания для студентов. — Уфа: Изд-во УГНТУ, 2010.
23. Учебно-методический комплекс дисциплины «Математика». Раздел 14 «Математическая статистика». Контрольно-измерительные материалы. — Уфа: Издательство УГНТУ, 2010.
24. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. - 12-е изд., перераб. и доп. - М.: Юрайт, 2012. - 479 с.
25. Численное моделирование условий эксплуатации газовой скважины с учетом реальных свойств потока газа и неоднородности теплофизических характеристик разреза горных пород [Электронный ресурс]: учебное пособие / УГНТУ, каф. РГКМ; сост.: А. И. Пономарев, К. Р. Зарипова, Р. М. Зарипов. - Уфа: УГНТУ, 2014. - 1,33 Мб.
26. Расчет основных характеристик напряженно-деформированного состояния и устойчивости трубопровода, составленного из прямых труб и кривых вставок с учетом воздействия эксплуатационных нагрузок [Электронный ресурс]: учебное пособие / УГНТУ, каф. «Математика»; сост.: Г. Е. Коробков, Р. М. Зарипов, Р. Б. Масалимов. - Уфа: УГНТУ, 2015. - 1,60 Мб.
27. Методические указания для студентов [Электронный ресурс] // УГНТУ, кафедра математики. — URL: <http://math.rusoil.net/>.

28. Российское образование. Федеральный портал [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.edu.ru/modules>.
29. Система дистанционного обучения УГНТУ «Moodle» [Электронный ресурс]. – URL: <http://do.rusoil.net/login/index.php>.
30. Электронная библиотека "Нефть-Газ" [Электронный ресурс]. – URL: www.nglib.ru.
31. Портал Естественных Наук [Электронный ресурс]. – URL: <http://e-science.ru/>.
- 32.- Общероссийский математический портал [Электронный ресурс]. – URL: mathnet.ru.
- 33.- Курс лекций по математическому анализу [Электронный ресурс] //МГТУ им. Баумана. – URL: energy.bmstu.ru.
- 34.- Математическая энциклопедия [Электронный ресурс]. – URL: algebraic.ru.
- 35.- Формулы и справочная информация по математике [Электронный ресурс]. – URL: mathem.h1.ru.
- 36.- Формулы и справочная информация по математике и физике [Электронный ресурс]. – URL: fxyz.ru.
- 37.- Математические формулы и справочные материалы [Электронный ресурс] //Высшая математика. – URL: <http://mathprofi.ru/>.
- 38.- Российский общеобразовательный сайт [Электронный ресурс]. – URL: expontnta.ru/.