

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Уфимский государственный нефтяной технический университет»

Кафедра «Математики»

Т.В. Умергалина, В.М. Якупов

**Приложение теории аналитических функций и операционного
исчисления**

Лабораторный практикум
по дисциплине «Математические методы в электротехнике»

Уфа - 2018

Авторы:

Умергалина Т.В., канд.тех.наук, доц. каф. математики

Якупов В.М., доц. каф. математики

Рецензенты:

Потанина О.А., канд.пед.наук, доц. каф. математики

Сахарова Л.А., канд.тех. наук, доцент каф. математики

В учебно-методическом пособии даны рекомендации по выполнению лабораторных работ следующих тем: вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов(применение элементов теории функции комплексного переменного); нахождение функции-изображения при графически заданной функции-оригинала(применение элементов операционного исчисления); решение линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и систем дифференциальных уравнений с применением методов операционного исчисления. В пособии представлены: краткий теоретический материал, примеры с решениями, индивидуальные задания по вариантам, подробная инструкция для студентов, образец оформления лабораторных работ.

Пособие предназначено студентам, изучающим дисциплину «Математические методы в электротехнике», которые обучаются по основным профессиональным образовательным программам уровня высшего образования бакалавриат, всех форм обучения для направления подготовки: 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника.

© Умергалина Т.В., 2018

©Уфимский государственный нефтяной технический университет, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1. Лабораторная работа №1. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов.....	6
2. Задания по вариантам для лабораторной работы №1.....	11
3. Лабораторная работа №2. Нахождение функции-изображения для графически заданной функции-оригинала.....	13
4. Задания по вариантам для лабораторной работы №2.....	17
5. Лабораторная работа №3. Решение систем дифференциальных уравнений методами операционного исчисления.....	26
6. Задания по вариантам для лабораторной работы №3.....	30
7. Лабораторная работа №4. Решение линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами операционным методом.....	34
8. Задания по вариантам для лабораторной работы №4.....	35
9. Контрольные вопросы для защиты лабораторных работ.....	37
10. Приложение. Таблица изображений для простейших оригиналов.....	38
Список литературы.....	39

ВВЕДЕНИЕ

Лабораторные занятия, так же, как и лекционные, практические занятия и самостоятельная работа способствуют освоению студентами образовательной программы, формированию общекультурных, общеобразовательных и профессиональных компетенций за счет выполнения реальных практических задач. В настоящем методическом пособии приводится описание лабораторных работ, выполняемых студентами на кафедре математики. Каждая работа посвящена рассмотрению вопросов применения математических разделов «Элементы теории функций комплексного переменного» и «Элементы операционного исчисления». Во всех лабораторных работах дан материал, призванный закрепить у студентов теоретические знания по представленной теме, приобрести практические умения, развить навыки выполнения математических вычислений, формирующие определенные учебные компетенции.

Описание лабораторных работ дано по следующей схеме: вначале даются основы теории, подробно разобраны примеры использования представленного метода, изложен порядок выполнения вычислений, даны индивидуальные задания не менее 30 вариантов для самостоятельного выполнения. Форма отчета по проделанной работе приведена в Приложении. Отчет по лабораторным исследованиям должен содержать следующее: название работы, ее цель, исходные данные, основные формулы, расчеты, таблицы, графики, анализ результатов и выводы. Лабораторная работа проводится в аудиторное время, оформление отчета и защита в установленные преподавателем сроки. Организация лабораторно практикума может предусматривать его выполнение малыми группами студентов, организующихся как при аудиторной работе, так и вне ее, т.е. при самостоятельной работе по анализу материала, обработке результатов, их оформлению. Это делает лабораторный практикум важнейшим фактором формирования общекультурных компетенций студентов: познавательных, творческих социально-личностных качеств, таких, например, как способность работать в коллективе и др. По результатам выполнения и защиты

лабораторной работы формируется рейтинг студента, критерии оценивания изложены в балльно-рейтинговой системе, принятой на кафедре математики.

В соответствии с учебным планом для специальности БАЭ факультета автоматизации (ФАПП) по предмету «Математические методы в электротехнике» обучающиеся проходят **четыре** лабораторные работы. Для специальности БАЭ предусмотрено четыре по предмету «Математические методы в электротехнике».

Лабораторная работа №1 «Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов».

Работа проводится после полного прохождения курса «Основы теории функции комплексного переменного»: лекции, практика, аттестационное тестирование и выполнения расчетно-графических заданий по данной теме [1], [2], [3], [4].

Лабораторная работа №2 «Нахождение функции-изображения для графически заданной функции-оригинала».

Лабораторная работа №3 «Решение систем дифференциальных уравнений методами операционного исчисления».

Лабораторная работа №4 «Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами методами операционного исчисления».

Эти работы проводятся после полного прохождения курса «Элементы операционного исчисления»: лекции, практика, аттестационное тестирование и выполнения расчетно-графических заданий по данной теме [1], [2], [5].

Методика выполнения лабораторных работ

Лабораторная работа №1. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов

Цель работы: научить студентов применять теорию вычетов к вычислению несобственных интегралов. Выполнение данной работы основано на следующей теории.

Напомним, что **мнимая единица** $i = \sqrt{-1}$ и $z = x + iy$ - комплексная переменная величина $\in R^2$. Здесь $x = \operatorname{Re} z$ - реальная (действительная) часть переменной z ; $y = \operatorname{Im} z$ - мнимая часть переменной z (коэффициент при мнимой единице i).

Тригонометрическая и показательная формы комплексной переменной z имеют вид: $z = \rho(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) = \rho \cdot e^{i\varphi}$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ - модуль комплексной переменной z ; $\varphi = \operatorname{arg} z$ - аргумент комплексной переменной z . Причем $0 \leq \varphi \leq \pi$; $\operatorname{Re} z = \rho \cdot \cos \varphi$; $\operatorname{Im} z = \rho \cdot \sin \varphi$. Формула Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$. В ниже изложенной теории будет использоваться $z = e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$, тогда $|z| = |e^{ix}| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$; $\operatorname{Re} e^{ix} = \cos x$; $\operatorname{Im} e^{ix} = \sin x$.

Определение. Пусть z_0 – конечная изолированная особая точка (см.[5]) однозначной функции $w = f(z)$. **Вычетом** функции $f(z)$ относительно точки z_0 называется комплексное число, обозначаемое символом **$\operatorname{Resf}(z_0)$** и определяемое равенством $\operatorname{Resf}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint f(z) dz$. Здесь интеграл вычисляется по замкнутому контуру, содержащему точку z_0 и обходимому в положительном направлении.

Лемма. Если функция $f(z)$ есть аналитическая функция в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ за исключением конечного числа конечных изолированных особых точек и существуют действительные числа $R > 0$, $M > 0$, $\delta > 0$, для которых имеет место оценка

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}} \quad \text{при } |z| > R \quad (1) \quad \text{тогда}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\omega_R} f(\eta) d\eta = 0 \quad (2)$$

где (рис. 1) ω -полуокружность радиуса R с центром в начале координат.

Доказательство. Согласно (1) имеет место оценка

$$\left| \int_{\omega_R} f(\eta) d\eta \right| < \frac{M \pi R}{R^{1+\delta}} = \frac{\pi M}{R} \rightarrow 0$$

При $R \rightarrow \infty$, что равносильно (2).

Теорема. Если $f(z)$ - аналитическое продолжение $f(x)$ при $x \in (-\infty; \infty)$ на верхнюю полуплоскость $\text{Im } z > 0$ и удовлетворяет требованиям:

- 1) $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы ;
- 2) не имеет особых точек z_k на оси OX ;
- 3) все изолированные особые точки z_k ($k=1, \dots, N$) в верхней полуплоскости конечны совместно с их числом, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^N \text{Res } f(z_k) \quad (3)$$

Доказательство. Число R выберем таким образом, чтобы все изолированные особые точки z_k ($k=1, \dots, N$) находились внутри замкнутого контура $L = [-R; R] \cup \omega_R$ (рис.1). Тогда по основной теореме Коши о вычетах имеем

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\omega_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res } f(z_k) \quad (4)$$

Совершаем в последнем равенстве предельный переход при $R \rightarrow \infty$ и вспоминаем лемму, приходим к (2), если учесть, что правая часть (4) не зависит от R , что и требовалось доказать.

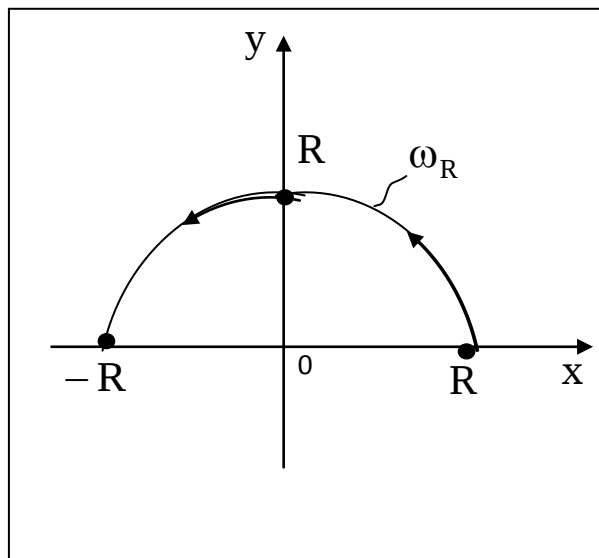


Рис1

Лемма Жордана. Если $f(z)$ – аналитическая функция в верхней полуплоскости $\text{Im} z > 0$, за исключением конечного числа конечных изолированных особых точек, и равномерно относительно $\arg z$ ($0 \leq \arg z \leq \pi$) стремится к нулю при $|z| \rightarrow \infty$, то при $a > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\omega_R} e^{ia\eta} f(\eta) d\eta = 0. \quad (5)$$

Доказательство. Равномерное стремление к нулю при $0 \leq \arg z \leq \pi$ означает следующее: при $|f(z)| < \mu R$, $|z|=R$, $\lim_{R \rightarrow \infty} \mu R = 0$. (6)

Уравнение полуокружности $\omega_R: z = R \cdot e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, R выбрано так, чтобы изолированные особые точки z_k ($k=1, \dots, n$) находились внутри замкнутого контура $L = [-R; R] \cup \omega_R$ (рис. 1). Тогда согласно (6)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\omega_R} e^{ia\eta} f(\eta) d\eta \right| &\leq \mu_R R \cdot \int_0^\pi \left| e^{iaR(\cos \varphi + i \sin \varphi)} \right| d\varphi = \\ &= R \cdot \mu_R \cdot \int_0^\pi e^{-aR \sin \varphi} d\varphi = 2R \mu_R \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi. \end{aligned} \quad (7)$$

Но при $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ имеет место оценка $\sin \varphi \geq \frac{2\varphi}{\pi}$, в чем можно убедиться, строя графики рассматриваемых функций на $(0; \pi/2)$, что дает

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2aR\varphi}{\pi}} d\varphi = -\frac{\pi}{2aR} \cdot e^{-\frac{2aR\varphi}{\pi}} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= -\frac{\pi}{2aR} \cdot (e^{-aR} - 1) = \frac{\pi}{2aR} \cdot (1 - e^{-aR}). \end{aligned}$$

С учетом последней оценки из соотношения (7) получаем

$$\left| \int_{\omega_R} e^{ia\eta} \cdot f(\eta) d\eta \right| \leq \frac{\pi}{a} \cdot \mu_R \cdot (1 - e^{-aR}) \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty.$$

Теорема. Если $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана и является аналитическим продолжением функции $f(x)$, $x \in (-\infty; \infty)$ на верхнюю полуплоскость $\text{Im} z \geq 0$ и $f(x)$ не имеет особых точек на оси Ox , тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res } F(z_k), \quad (8)$$

где $z_k, (k = \overline{1, N})$ есть особые точки $f(z)$ в $\text{Im} z > 0$, $F(z) = e^{iaz} f(z)$.

Доказательство. $L = [-R; R] \cup \omega_R$ - замкнутый контур (см. рис.1), обходимый в положительном направлении, внутри которого расположены особые точки функции $f(z)$. Тогда

$$\oint_L e^{iaz} f(z) dz = \int_{-R}^R e^{iax} f(x) dx + \int_{\omega_R} e^{ia\eta} f(\eta) d\eta = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^N \text{Res } F(z_k), \quad (9)$$

где правая часть (9) не зависит от R . Переходя в (9) к пределу при $R \rightarrow \infty$ и учитывая лемму Жордана, получим формулу (8), что и следовало доказать.

Пример 1.1. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 9} dx$ по формуле (8), то есть с помощью вычетов.

Решение. Так как подынтегральная функция $F(x) = \frac{\cos x}{x^2 + 9}$ есть четная функция, то интеграл можно распространить на всю числовую ось Ox :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 9} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 9} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re}(e^{ix})}{x^2 + 9} dx = \frac{1}{2} \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 9} dx.$$

Если подынтегральную функцию в последнем интеграле аналитически продолжить на множество комплексного переменного z , то она принимает вид

$F(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 9}$. Эта функция аналитична в верхней полуплоскости $\text{Im} z > 0$ за

исключением особой точки $z = 3i$, и $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2 + 9} = 0$. То есть $F(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана. Особые точки функции $F(z)$ определяются из уравнения $z^2 + 9 = 0$. Это точки $z_1 = -3i$ и $z_2 = 3i$. Определим характер особой

точки $z_2 = 3i$: $\lim_{z \rightarrow 3i} F(z) = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{e^{iz}}{z^2 + 9} = \frac{e^{-3}}{0} = \infty$;

$$\lim_{z \rightarrow 3i} F(z) \cdot (z - 3i) = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{e^{iz}(z - 3i)}{(z - 3i)(z + 3i)} = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{e^{iz}}{(z + 3i)} = \frac{e^{-3}}{6i} \neq \infty;$$

Делаем вывод, что точка $z_2 = 3i$ есть простой полюс функции $F(z)$. Вычислим

$$\text{вычет функции } F(z) \text{ в точке } z_2 = 3i : \operatorname{Res} F(z_2) = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{e^{iz}}{z + 3i} = \frac{e^{-3}}{6i}.$$

$$\text{Тогда} \quad \frac{1}{2} \cdot \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 9} dx = \frac{1}{2} 2\pi i \cdot \frac{1}{6ie^3} = \frac{\pi}{6e^3}, \quad \text{что дает}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + 9} = \frac{\pi}{6 \cdot e^3} - \text{ответ.}$$

Пример 1.2. Вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}$ по формуле (9), то есть с

помощью вычетов.

Решение. Подынтегральная функция $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 4x + 13)^2}$ – непрерывная функция для всех $x \in (-\infty; +\infty)$. Аналитически продолжим функцию $f(x)$ на множество комплексного переменного z на верхнюю полуплоскость

$$\operatorname{Im} z > 0. \text{ Тогда функция принимает вид } f(z) = \frac{z}{(z^2 + 4z + 13)^2}, \text{ причем}$$

$$|f(z)| = \frac{1}{|z|^3 \left| 1 + \frac{4}{z} + \frac{13}{z^2} \right|} < \frac{1}{|z|^3} \quad \text{и} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0. \text{ То есть } f(z) \text{ удовлетворяет условиям}$$

леммы Жордана. Особые точки $f(z)$ определяются из уравнения $z^2 + 4z + 13 = 0$:
 $z_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-9} = -2 \pm 3i, \quad z_1 = -2 - 3i, \quad z_2 = -2 + 3i.$

Поскольку было сделано продолжение функции в полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$, то рассмотрим только ту особую точку, которая лежит в этой полуплоскости, а именно $z_2 = -2 + 3i$. Исследуем характер этой особой точки:

$$\lim_{z \rightarrow z_2} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{z}{(z - z_1)^2 (z - z_2)^2} = \frac{z_2}{(z_2 - z_1)^2 0^2} = \frac{-2 + 3i}{0^2} = \infty$$

$$\lim_{z \rightarrow z_2} f(z) \cdot (z - z_2) = \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{(z - z_2) \cdot z}{(z - z_1)^2 (z - z_2)^2} = \frac{z_2}{(z_2 - z_1)^2 0} = \frac{-2 + 3i}{0} = \infty$$

$$\lim_{z \rightarrow z_2} f(z) \cdot (z - z_2)^2 = \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{(z - z_2)^2 \cdot z}{(z - z_1)^2 \cdot (z - z_2)^2} = \frac{z_2}{(z_2 - z_1)^2} = \frac{-2 + 3i}{(-6i)} = \frac{2 - 3i}{(6i)} \neq \infty.$$

Делаем вывод, что точка $z_2 = -2 + 3i$ есть полюс кратности два (в расчетах получена ∞ два раза). Вычислим вычет функции $f(z)$ в точке z_2 :

$$\begin{aligned} \text{Res } f(z_2) &= \lim_{z \rightarrow z_2} (f(z) \cdot (z - z_2)^2)' = \lim_{z \rightarrow z_2} \left(\frac{z}{(z - z_1)^2} \right)' = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{(z - z_1)^2 - z \cdot 2(z - z_1)}{(z - z_1)^4} = \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{(z - z_1) - 2z}{(z - z_1)^3} = \\ &= \frac{z_2 - z_1 - 2z_2}{(z_2 - z_1)^3} = \frac{(-2 + 3i) - (2 - 3i) - 2(-2 + 3i)}{((-2 + 3i) - (2 - 3i))^3} = \frac{+4}{(6i)^3} = \frac{1}{54}i \end{aligned}$$

Итак, искомый интеграл по формуле (8) равен $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \, dx}{(x^2 + 4x + 13)^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{54}i = \frac{-\pi}{27}$ - ответ.

Задания по вариантам для лабораторной работы № 1

Вычислить несобственные интегралы

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2};$

19. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 dx}{(4 + 9x^2)^4};$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx;$

20. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9\pi^2) \ln x}$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3};$

21. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2};$

4. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1};$

22. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4x + 20)^2};$

5. $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 16)^2} dx;$

23. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)};$

6. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2};$

24. $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{1 + x^4} dx;$

$$7. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx;$$

$$25. \int_0^{\infty} \frac{\cos 4x}{4 + x^2} dx;$$

$$8. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4x + 13)^2};$$

$$26. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx;$$

$$9. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)};$$

$$27. \int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2 + 1)^2} dx;$$

$$10. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx;$$

$$28. \int_0^{\infty} \frac{\cos 2x dx}{x^2 + 16}$$

$$11. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 10} dx;$$

$$29. \int_0^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 + 4} dx;$$

$$12. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 4x + 8} dx;$$

$$30. \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx;$$

$$13. \int_0^{\infty} \frac{\cos 4x}{x^2 + 25} dx;$$

$$31. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + x + 1} dx;$$

$$14. \int_0^{\infty} \frac{x \sin 6x}{x^2 + 9} dx;$$

$$32. \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx.$$

$$15. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^2};$$

$$33. \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 1} dx;$$

$$16. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)};$$

$$34. \int_0^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^4 + 16} dx;$$

$$17. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{1 + x^6} dx;$$

$$35. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1 + x^2)^3};$$

$$18. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} dx;$$

$$36. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 16)(x^2 + 81)}.$$

Лабораторная работа №2. Нахождение функции-изображения для графически заданной функции-оригинала

Цель работ: научить студентов нахождению функции-изображений. Выполнение этой лабораторной работы состоит в освоении двух методов решения данной задачи.

Метод первый. Необходимо найти функцию-изображение $F(z)$, применяя определение интегрального преобразования Лапласа.

Метод второй. Нахождение $F(z)$ с помощью функции Хевисайда.

Пример 2.1. Найти функцию-изображение $F(z)$ по графику функции-оригинала $f(t)$, заданной на рис.2:

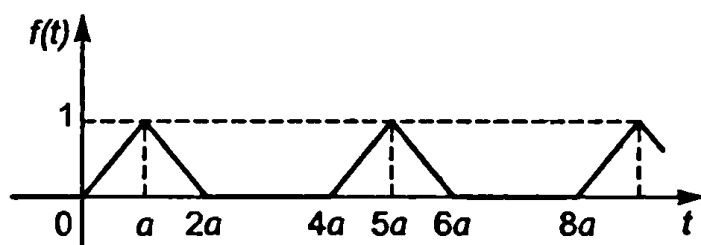


Рис.2

Для нахождения функции-изображения $F(z)$ в данном примере воспользуемся определением интегрального преобразования Лапласа, то есть формулой (1.1) из пособия [5].

Рассмотрим случай задания только одного «зубца» для $0 \leq t \leq 2a$. Изобразим систему координат в более привычном виде с осями Ox и Oy :

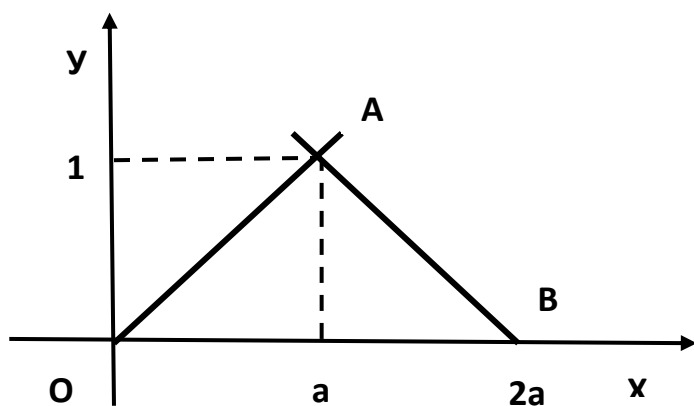


Рис.3

У графика на рис. 3 имеем три угловые точки с координатами: $O(0;0)$; $A(a;1)$; $B(2a;0)$.

Выведем уравнения двух прямых: OA и AB , применяя формулу уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $\frac{X-X_0}{X_A-X_0} = \frac{Y-Y_0}{Y_A-Y_0}$, то есть $\frac{X-0}{a-0} = \frac{Y-0}{1-0}$, тогда $y = (1/a) \cdot x$. Уравнение прямой AB : $\frac{X-X_B}{X_A-X_B} = \frac{Y-Y_B}{Y_A-Y_B}$, т.е. $\frac{x-2a}{a-2a} = \frac{y-0}{1-0}$, тогда $y = (-1/a) \cdot x + 2$.

Перейдем от координат XOY (рис.3) к исходной системе координат, данной на рис.2.

Итак функция-оригинал в нашем примере имеет вид

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}t, & 0 \leq t \leq a \\ -\frac{1}{a}t + 2 & a \leq t \leq 2a \\ 0 & t > 2a \end{cases}$$

По формуле (1.1) из [5] функцию $F(z)$ находим через интеграл Лапласа:

$$F(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt} dt. \text{ В нашем случае } F(z) = \int_0^a \frac{1}{a}t \cdot e^{-zt} dt + \int_a^{2a} (-\frac{1}{a}t + 2)e^{-zt} dt + 2a \cdot 0 \cdot e^{-zt} dt.$$

Так как последний интеграл равен нулю, то $F(z) = \frac{1}{a} \int_0^a te^{-zt} dt - \frac{1}{a} \int_a^{2a} te^{-zt} dt + 2 \int_a^{2a} e^{-zt} dt$. Получили три интеграла. Вычисляем первый по

$$\text{формуле интегрирования по частям } \int_0^a te^{-zt} dt = \left| \begin{matrix} u = t, & du = dt \\ dv = e^{-zt} dt; & v = -\frac{1}{z}e^{-zt} \end{matrix} \right| =$$

$$-\frac{1}{z} \left(te^{-zt} \Big|_0^a \right) + \frac{1}{z} \int_0^a e^{-zt} dt =$$

$$= -\frac{1}{z} (ae^{-az}) + \frac{1}{z} \left(-\frac{1}{z} e^{-zt} \Big|_0^a \right) = -\frac{a}{z} e^{-az} - \frac{1}{z^2} (e^{-az} - 1) = -\frac{a}{z} e^{-az} - \frac{1}{z^2} e^{-az} + \frac{1}{z^2}.$$

Вычисляем второй интеграл аналогично первому:

$$\int_a^{2a} te^{-zt} dt = \left| \begin{matrix} u = t, & du = dt \\ dv = e^{-zt} dt; & v = -\frac{1}{z}e^{-zt} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{z} \left(te^{-zt} \Big|_a^{2a} \right) + \frac{1}{z} \int_a^{2a} e^{-zt} dt = -\frac{1}{z} (2ae^{-2az} - ae^{-az}) -$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{z^2} \left(e^{-zt} \Big|_a^{2a} \right) &= -\frac{2a}{z} e^{-2az} + \frac{a}{z} e^{-az} - \frac{1}{z^2} (e^{-2az} - e^{-az}) = \\
&= -\frac{2a}{z} e^{-2az} + \frac{a}{z} e^{-az} - \frac{1}{z^2} e^{-2az} + \frac{1}{z^2} e^{-az}.
\end{aligned}$$

Вычислим третий интеграл :

$$\int_a^{2a} e^{-zt} dt = -\frac{1}{z} \left(e^{-zt} \Big|_a^{2a} \right) = -\frac{1}{z} (e^{-2az} - e^{-az}).$$

Итак, собираем вместе : $F(z) = \frac{1}{a} \left(-\frac{a}{z} e^{-za} - \frac{1}{z^2} e^{-za} + \frac{1}{z^2} \right) - \frac{1}{a} \left(-\frac{2a}{z} e^{-2az} + aze^{-az} - \frac{1}{z^2} e^{-2az} + \frac{1}{z^2} e^{-az} \right)$. Для первого «зубца» получили изображение: $F(z) = \frac{1}{z^2 a} (e^{-az} - 1)^2 + \frac{1}{z} (e^{-az} - 1) e^{-az}$.

Аналогично для второго «зубца» имеем $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq t \leq 4a \\ \frac{1}{a}t - 4, & \text{при } 4a \leq t \leq 5a \\ -\frac{1}{a}t + 6, & \text{при } 5a \leq t \leq 6a \\ 0, & \text{при } t \geq 6a \end{cases}$

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt = \int_{4a}^{5a} \left(\frac{1}{a}t - 4 \right) e^{-zt} dt + \int_{5a}^{6a} \left(-\frac{1}{a}t + 6 \right) e^{-zt} dt = \\
&(\text{оба интеграла вычисляем по частям}) = \frac{1}{z^2 a} (e^{-4at} - 2e^{-5az} + e^{-6az}) = \\
&= \frac{1}{z^2 a} \cdot e^{-4at} (1 - e^{-az})^2.
\end{aligned}$$

Сделаем обобщение. Для каждого из «зубцов» функцию $f(t)$ можно записать

$$\text{в виде: } f(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq t \leq 4an \\ \frac{1}{a}t - 4n, & \text{при } a \cdot 4n \leq t \leq a(4n + 1) \\ -\frac{1}{a}t + (4n + 2), & \text{при } a(4n + 1) \leq t \leq a(4n + 2) \\ 0, & \text{при } t \geq a(4n + 2) \end{cases}$$

Тогда первый «зубец» будет иметь $f(t)$ при $n = 0$; второй – при $n = 1$ и так далее. Вычислим $F(z)$ для каждого n -го «зубца»:

$$\begin{aligned}
F(z) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-zt} dt = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{4na}^{(4n+1)a} \left(\frac{1}{a}t - 4n\right) e^{-zt} dt \\
&\quad + \int_{(4n+1)a}^{(4n+2)a} \left(-\frac{1}{a}t + (4n+2)\right) e^{-zt} dt = \\
&= \left(\frac{1}{a}t - 4n\right) \left(-\frac{1}{z}\right) \left(e^{-zt} \Big|_{4na}^{(4n+1)a}\right) \\
&\quad - \frac{1}{a} \left(-\frac{1}{z}\right) \int_{4na}^{(4n+1)a} e^{-zt} dt + \left(-\frac{1}{a}t + (4n+2)\right) \left(-\frac{1}{z}\right) \left(e^{-zt} \Big|_{(4n+1)a}^{(4n+2)a}\right) \\
&\quad - \frac{1}{az} \int_{(4n+1)a}^{(4n+2)a} e^{-zt} dt = \\
&\dots = \frac{1}{az^2} \cdot (e^{-4naz} - 2e^{(4n+1)az} + e^{(4n+2)az}) = \frac{1}{az^2} \cdot e^{-4naz} (1 - e^{-az})^2.
\end{aligned}$$

Пример 2.2. Найти функцию-изображение $F(z)$ по графику оригинала $f(t)$ через функцию Хевисайда:

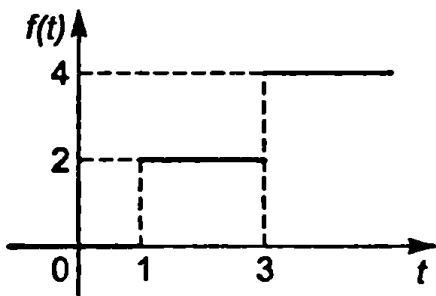


Рис.4

Решение. График функции $f(t)$ переведем в аналитическое представление:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq t < 1 \\ 2, & \text{при } 1 \leq t < 3 \\ 4, & \text{при } 3 \leq t < \infty. \end{cases}$$

Наша исходная функция $f(t)$ через функцию Хевисайда имеет вид [3]:

$$f(t) = 2(\eta(t-1) - \eta(t-3)) + 4(\eta(t-3) - \eta(t-\infty)) \\ = 2\eta(t-1) - 2\eta(t-3) + 4\eta(t-3) - 4\eta(t-\infty).$$

Далее из таблицы изображений для простейших оригиналов (см. Приложение) находим $\eta(t) \leftarrow \frac{1}{z}$. Применяем теорему запаздывания: если $f(t) \rightarrow F(z)$, тогда $f(t-\tau) \leftarrow e^{-z\tau} \cdot F(z)$. По этой теореме:

$$\eta(t-1) \leftarrow e^{-z} \cdot \frac{1}{z}; \quad \eta(t-3) \leftarrow e^{-3z} \cdot \frac{1}{z};$$

$$\eta(t-\infty) \leftarrow e^{-\infty z} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{e^{\infty z}} \cdot \frac{1}{z} = 0.$$

Вычисляем изображение, то есть функцию $F(z)$:

$$F(z) = 2e^{-z} \cdot \frac{1}{z} - 2e^{-3z} \cdot \frac{1}{z} + 4e^{-3z} \cdot \frac{1}{z} - 4 \cdot 0 = \frac{1}{z}(2e^{-z} + 2e^{-3z}) = \frac{2}{z}(e^{-z} + e^{-3z})$$

- ответ.

Замечание. Пример 2.2 можно решить, не применяя функцию Хевисайда, а исходя из интегрального преобразования Лапласа. Итак, исходная функция-оригинал имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq t < 1 \\ 2, & \text{при } 1 \leq t < 3 \\ 4, & \text{при } 3 \leq t < \infty. \end{cases}$$

Найдем для нее изображение: $F(z) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-zt} dt = \int_0^1 0e^{-zt} dt + \int_1^3 2e^{-zt} dt +$

$$\int_3^{\infty} 4e^{-zt} dt = -2ze^{-zt} \Big|_1^3 - 4ze^{-zt} \Big|_3^{\infty} =$$

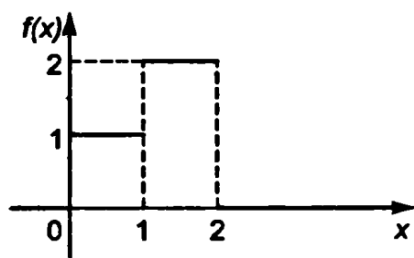
$$= \frac{2}{z}e^{-z} - \frac{2}{z}e^{-3z} + \frac{4}{z}e^{-3z} = \frac{2}{z}(e^{-z} + e^{-3z}) \quad - \text{ответ.}$$

Полученная функция определена для всех z , удовлетворяющих неравенству $\operatorname{Re} z > 0$.

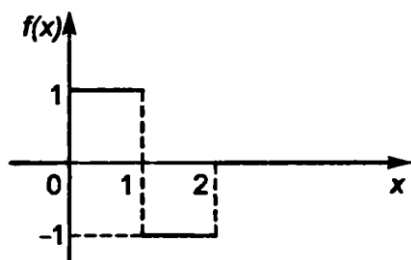
Задания по вариантам для лабораторной работы № 2

Найти функцию-изображение $F(z)$ по графику функции-оригинала.

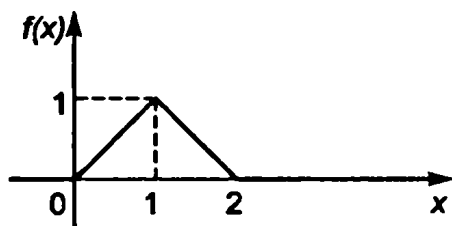
1.



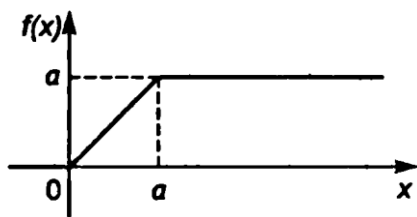
2.



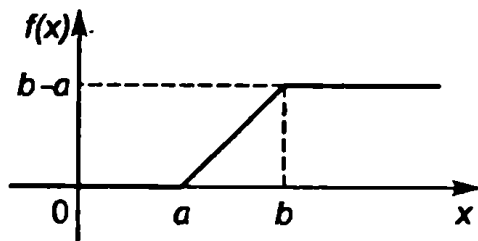
3.

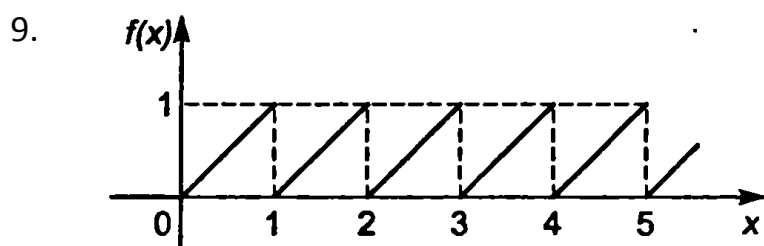
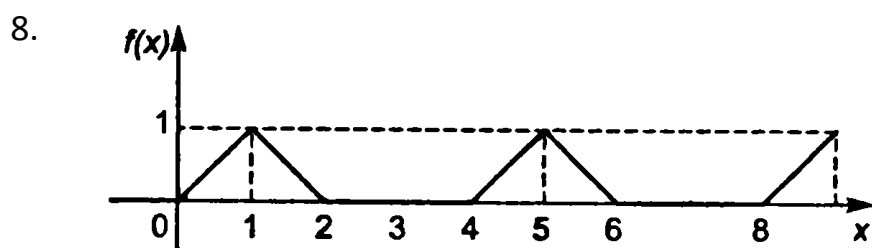
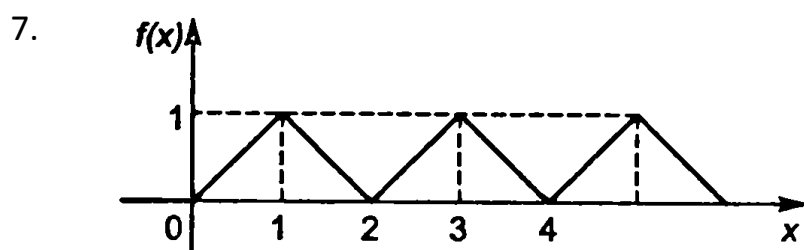
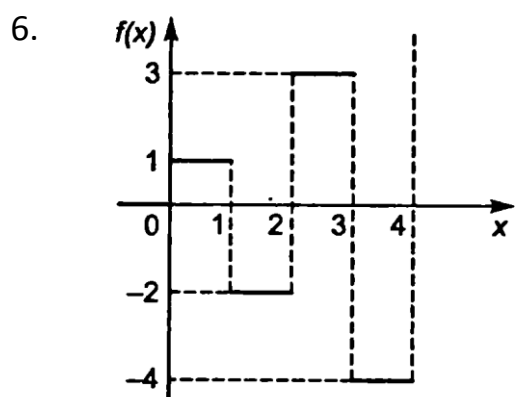


4.

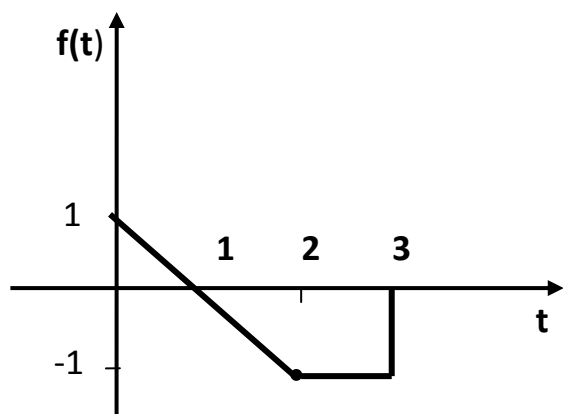


5.

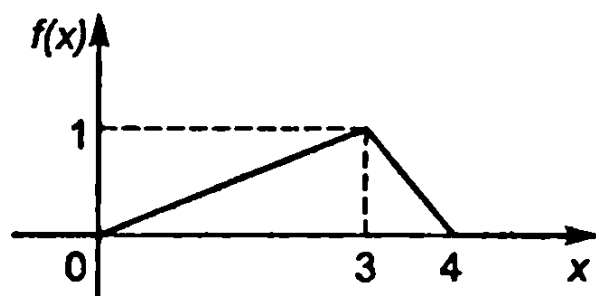




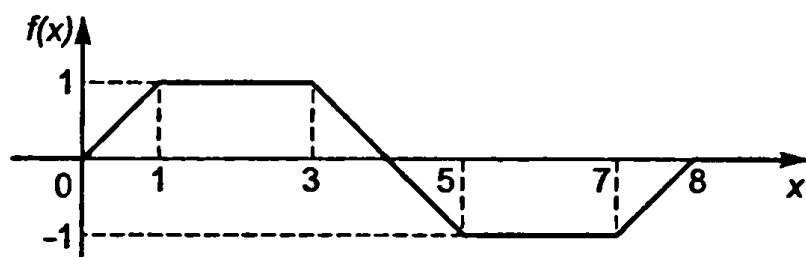
10.



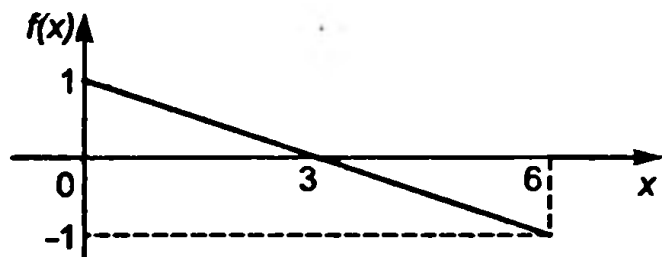
11.



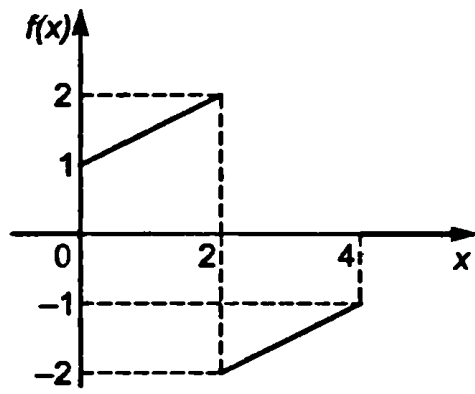
12.



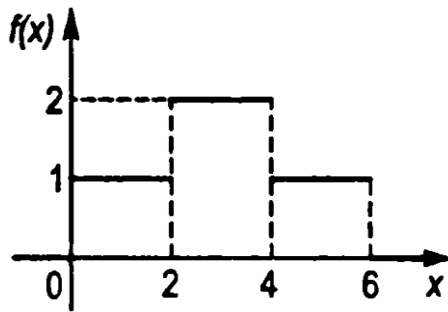
13.



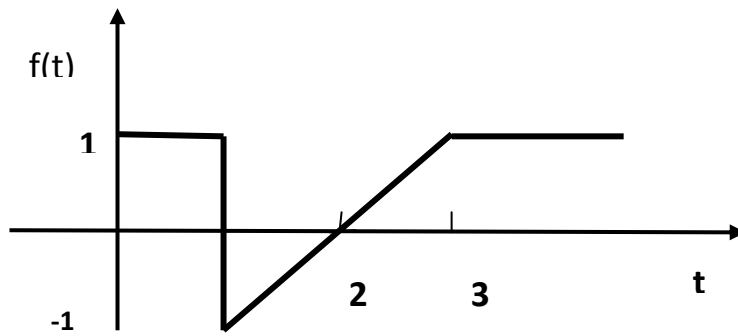
14.



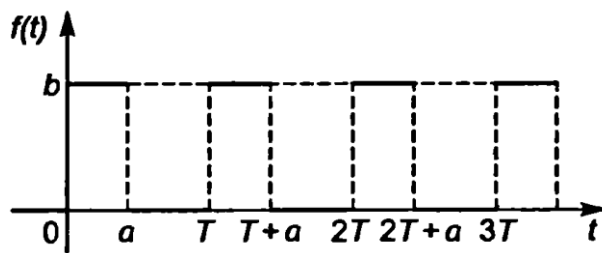
15.



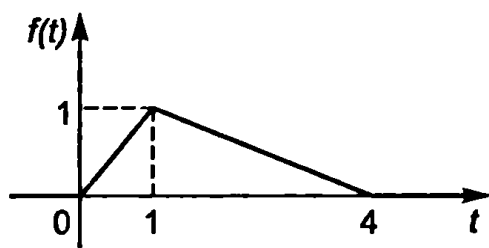
16.



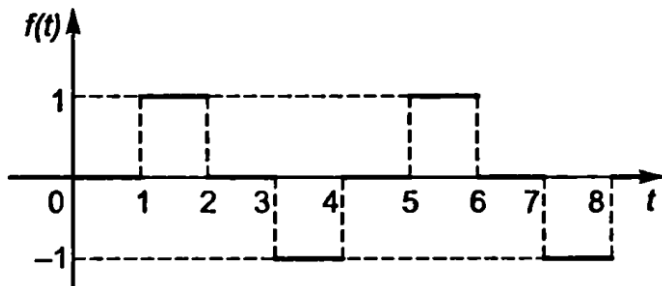
17.



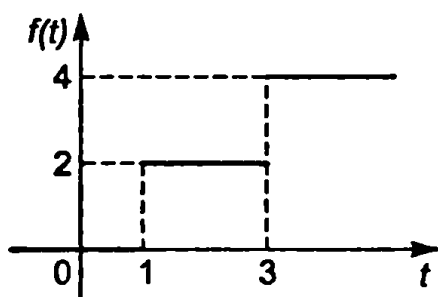
18.



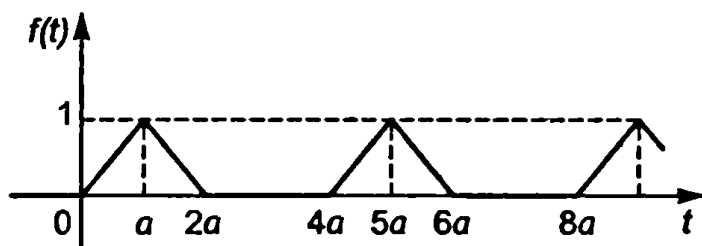
19.



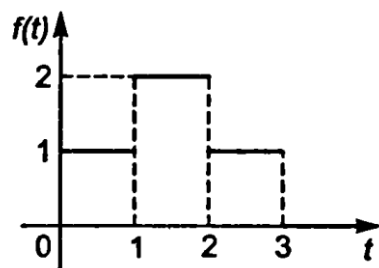
20.



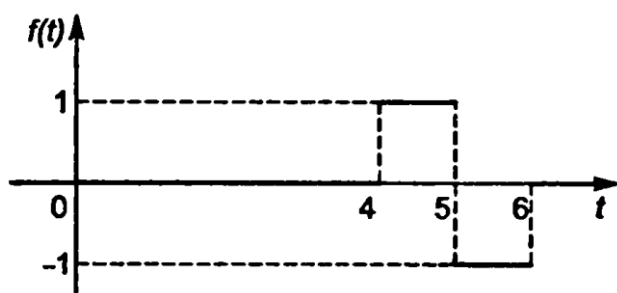
21.



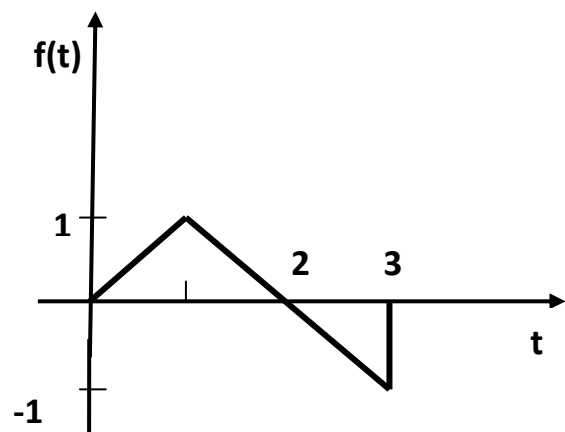
22.



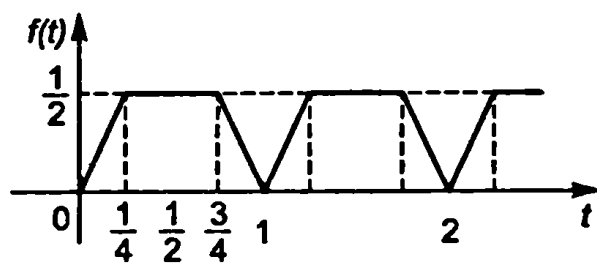
23.



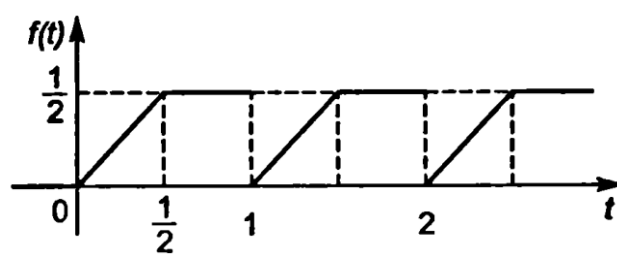
24.

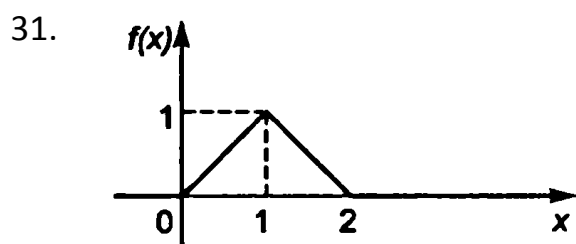
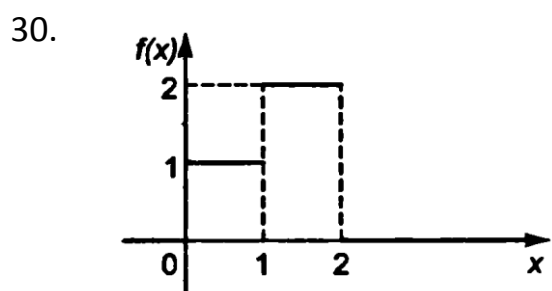
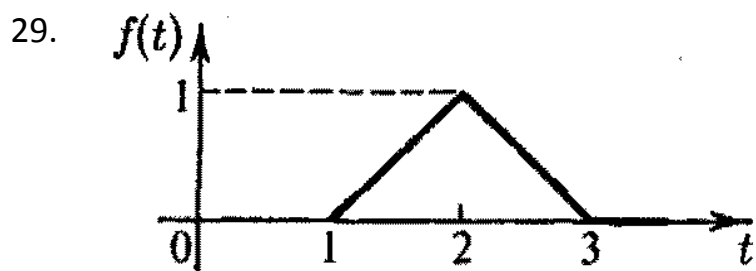
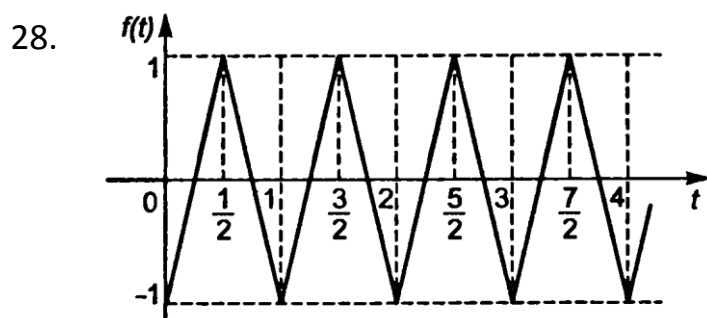
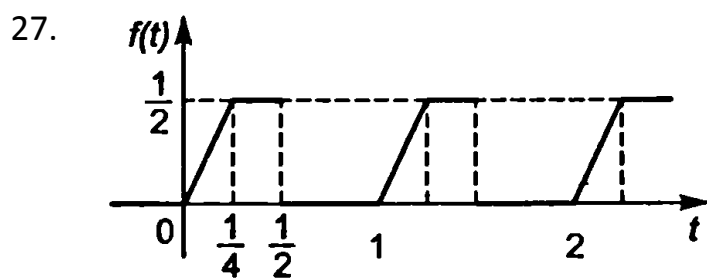


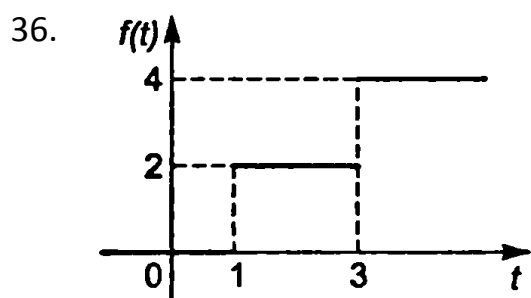
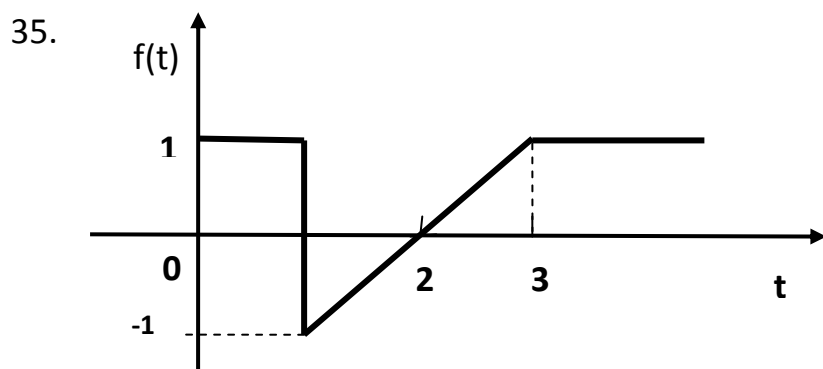
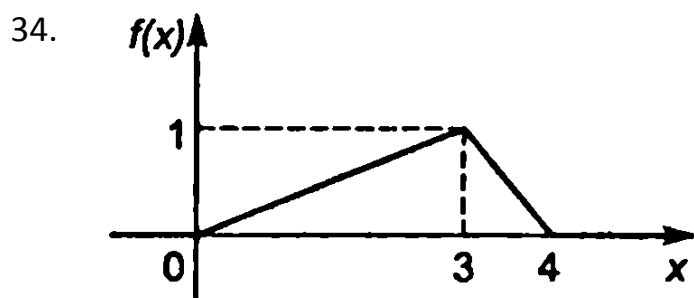
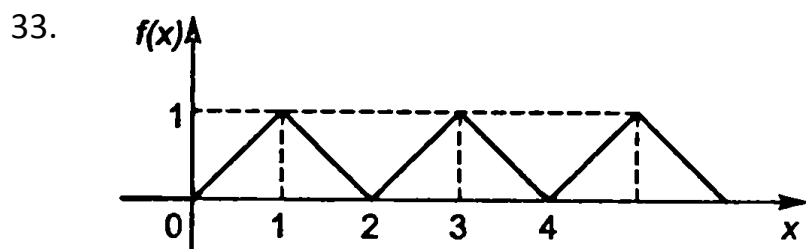
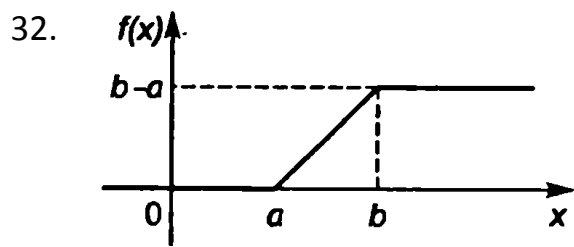
25.



26.







Лабораторная работа №3. Решение систем дифференциальных уравнений методами операционного исчисления

Цель работы: научить студентов решать задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений методами операционного исчисления.

Пример3.1. Решить систему из двух дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями $x = x(t)$ и $y = y(t)$ где t - действительная переменная:

$$\begin{cases} x' + 2x + 2y = 10e^{2t} \\ y' + x + y = 7e^{2t} \end{cases} \quad x(0) = 1; \quad y(0) = 3.$$

Необходимо решить данную систему, то есть найти неизвестные функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$.

Решение. Переводим исходные функции, их производные и правые части уравнений в область комплексного переменного(в соответствии с теоремами и таблицей из Приложения).

$$x(t) \leftarrow X(z)$$

$$x'(t) \leftarrow z \cdot X(z) - x(0) = zX(z) - 1$$

$$y(t) \leftarrow Y(z)$$

$$y'(t) \leftarrow z \cdot Y(z) - y(0) = zY(z) - 3$$

$$e^{2t} \leftarrow \frac{1}{z-2}$$

Подставим в исходные уравнения:

$$\begin{cases} zX(z) - 1 + 2X(z) + 2Y(z) = 10/(z-2) \\ zY(z) - 3 + X(z) + Y(z) = 7/(z-2) \end{cases}$$

Приводим систему к нормальному виду:

$$\begin{cases} (z+2) \cdot X(z) + 2Y(z) = \frac{10}{z-2} + 1 = \frac{z+8}{z-2} \\ x(z) + (z+1)Y(z) = \frac{7}{z-2} + 3 = \frac{z+1}{z-2} \end{cases}$$

В результате получена система из двух алгебраических уравнений .

Решаем ее с помощью формул Крамера, то есть вычисляем три определителя: основной Δ и два вспомогательных Δ_x , Δ_y .

$$\Delta = \begin{vmatrix} (z+2) & 2 \\ 1 & (z+1) \end{vmatrix} = (z+2)(z+1) - 2 = z^2 + 3z = z(z+3);$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \frac{z+8}{z-2} & 2 \\ \frac{z+1}{z-2} & (z+1) \end{vmatrix} = \frac{(z+8)(z+1) - 2(z+1)}{(z-2)} = \frac{(z+1)(z+6)}{(z-2)} = \frac{z^2 + 7z + 6}{z-2}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} (z+2) & \frac{z+8}{z-2} \\ 1 & \frac{z+1}{z-2} \end{vmatrix} = \frac{(z+2)(z-1) - (z+8)}{z-2} = \frac{z^2 + 2z - 6}{z-2}$$

Вычисляем функции $X(z)$ и $Y(z)$:

$$X(z) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{z^2 + 7z + 6}{(z-2)z(z+3)};$$

$$Y(z) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{z^2 + 2z - 6}{(z-2)z(z+3)}.$$

Получили две дроби, которые надо разложить на простейшие дроби.

Раскладываем первую (нахождение коэффициентов для простейших дробей предлагается произвести самостоятельно студентам, здесь приводим готовый результат):

$$\frac{z^2 + 7z + 6}{(z-2)z(z+3)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z} + \frac{C}{z+3} = \frac{2,4}{z-2} + \frac{-1}{z} + \frac{-0,4}{z+3}.$$

Раскладываем вторую дробь:

$$\frac{z^2 + 2z - 6}{(z-2)z(z+3)} = \frac{D}{z-2} + \frac{E}{z} + \frac{F}{z+3} = \frac{0,2}{z-2} + \frac{1}{z} + \frac{-0,2}{z+3}.$$

Итак:

$$X(z) = 2,4 \cdot \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z} - 0,4 \cdot \frac{1}{z+3}$$

$$Y(z) = 0,2 \cdot \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z} - 0,2 \cdot \frac{1}{z+3}$$

Из таблицы соотношений простейших оригиналов и изображений (см. Приложение) находим $\frac{1}{z-2} \rightarrow e^{2t}$; $\frac{1}{z} \rightarrow 1$; $\frac{1}{z+3} \rightarrow e^{-3t}$.

В результате получаем искомые функции действительного переменного t :

$$x(t) = 2,4 \cdot e^{2t} - 1 - 0,4 e^{-3t}$$

$$y(t) = 0,2 \cdot e^{2t} + 1 - 0,2 e^{-3t}$$

Далее необходимо сделать проверку, исходя из определения решения дифференциального уравнения, то есть:

- 1) Полученные функции необходимо подставить в исходную систему уравнений и убедиться, что уравнения обратятся в тождество;
- 2) Проверить, удовлетворяют ли эти функции заданным начальным условиям.

Пример 3.2. Решить систему из трех дифференциальных уравнений первого порядка с тремя неизвестными функциями $x = x(t)$; $y = y(t)$; $u = u(t)$, где t — действительная

переменная:
$$\begin{cases} x'(t) = u(t) + y(t) - x(t) \\ y'(t) = u(t) + x(t) - y(t) \\ u'(t) = x(t) + y(t) - u(t) \end{cases}$$

с начальными условиями: $x(0) = 1$; $y(0) = 0$; $u(0) = 0$.

Решение. Искомые функции переводим на множество комплексного переменного

$$x(t) \leftarrow X(z); \quad y(t) \leftarrow Y(z); \quad u(t) \leftarrow U(z).$$

Для производных $x'(t)$; $y'(t)$; $u'(t)$ по теореме 5 (дифференцирование оригинала) из таблицы изображений (см. Приложение) находим изображения:

$$\begin{aligned} x'(t) &\leftarrow z \cdot X(z) - x(0) = z \cdot X(z) - 1 \\ y'(t) &\leftarrow z \cdot Y(z) - y(0) = z \cdot Y(z) - 0 \\ u'(t) &\leftarrow z \cdot U(z) - u(0) = z \cdot U(z) - 0 \end{aligned}$$

Все подготовленные функции подставим в исходную систему

$$\begin{cases} zX(z) - 1 = U(z) + Y(z) - X(z) \\ zY(z) - 0 = U(z) + X(z) - Y(z) \\ zU(z) - 0 = U(z) + Y(z) + X(z) \end{cases}$$

Приводим систему к нормальному виду:
$$\begin{cases} (z+1)X(z) - Y(z) - U(z) = 1 \\ -X(z) + (z+1)Y(z) - U(z) = 0 \\ -X(z) - Y(z) + (z+1)U(z) = 0 \end{cases}$$

Решаем систему методом Крамера, для этого вычисляем четыре определителя: основной Δ и три вспомогательных Δ_x , Δ_y , Δ_u .

$$\Delta = \begin{vmatrix} (z+1) & -1 & -1 \\ -1 & (z+1) & -1 \\ -1 & -1 & (z-1) \end{vmatrix} = (z+1)^2 \cdot (z-1) - 2 - 2(z+1) - (z-1) \\ = (z+1)(z-2)(z+2);$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & (z+1) & -1 \\ 0 & -1 & (z-1) \end{vmatrix} = z^2 - 2; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} (z+1) & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & (z-1) \end{vmatrix} = z;$$

$$\Delta_u = \begin{vmatrix} (z+1) & -1 & 1 \\ -1 & (z+1) & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = z + 2.$$

Вычисляем функции $X(z)$, $Y(z)$, $U(z)$:

$$X(z) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{z^2 - 2}{(z+1)(z-2)(z+2)};$$

$$Y(z) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{z}{(z+1)(z-2)(z+2)};$$

$$U(z) = \frac{\Delta_u}{\Delta} = \frac{z+2}{(z+1)(z-2)(z+2)}.$$

Все полученные дроби раскладываем на простейшие дроби. Процесс разложения предлагаем произвести самостоятельно студентам. Приведем готовый результат:

$$X(z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z+1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z+2}; \quad Y(z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z+1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z-2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z+2};$$

$$U(z) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z-2}.$$

По таблице (см. Приложение) и применяя теорему линейности, получим искомые функции-оригиналы:

$$x(t) = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-2t}; \quad y(t) = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t};$$

$$u(t) = -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}, \quad \text{то есть система решена.}$$

Далее необходимо сделать проверку полученного результата: найденные функции и их производные необходимо подставить в исходную систему уравнений и убедиться, что все уравнения обратятся в тождества. Кроме того необходимо проверить для полученных функций выполнение начальных условий.

Задания по вариантам для лабораторной работы № 3

Решить следующие системы дифференциальных уравнений операционным исчислением

$$1. \quad \begin{cases} x' + y - x = \sin t - t, \\ y' + x = t + 1 + \cos t, \end{cases} \quad x(0) = 1; \quad y(0) = 0;$$

$$2. \quad \begin{cases} x' + y = 2t + e^t, \\ y' - y + x = t^2, \end{cases} \quad x(0) = 0; \quad y(0) = 1;$$

$$3. \quad \begin{cases} x' + x + y = 1 + t + \sin t, \\ y' + x = t + \cos t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0;$$

$$4. \quad \begin{cases} x' + x + y = t^2, \\ y' + x = 2t + e^{-t}, \end{cases} \quad x(0) = 1; \quad y(0) = 0;$$

$$5. \quad \begin{cases} x' - 2x - y = \sin t \\ y' - 3x - 2y = t \end{cases} \quad x(0) = 0; \quad y(0) = 1;$$

$$6. \quad \begin{cases} x' + x + y = 2 + \operatorname{sh} t, \\ y' + y - x = -(2 \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t), \end{cases} \quad x(0) = 1; \quad y(0) = 0;$$

$$7. \begin{cases} x' - 2x - 2y = \sin t \\ y' - 2x - y = 1 + t \end{cases} \quad x(0) = 1; \quad y(0) = 0;$$

$$8. \begin{cases} x' - x + y = \operatorname{ch} t \\ y' - x - 3y = t \end{cases} \quad x(0) = 2; \quad y(0) = 1;$$

$$9. \begin{cases} x' + x - y = e^t, \\ y' + y - x = e^t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1;$$

$$10. \begin{cases} x' - y' + 2x + 2y = 1 - 2t \\ y' + 2y = 0 \end{cases} \quad x(0) = 0; \quad y(0) = 1;$$

$$11. \begin{cases} x' = x - 5y + \operatorname{sh} t \\ y' = 2x - y + \operatorname{ch} t \end{cases} \quad x(0) = 1; \quad y(0) = 0;$$

$$12. \begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2x + 2y, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1;$$

$$13. \begin{cases} x' = x + 2y + \sin t \\ y' = 4x + 3y + \cos t \end{cases} \quad x(0) = 0; \quad y(0) = 1;$$

$$14. \begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0;$$

$$15. \begin{cases} 3x' + 2x + y' = 1, \\ x' + 4y' + 3y = 0, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0;$$

$$16. \begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ -2x + y' - y = t, \end{cases} \quad x(0) = 2; \quad y(0) = 4;$$

$$17. \begin{cases} x' - x + 2y = 0 \\ x' - 2y' = 2t - \cos 2t \end{cases} \quad x(0) = 0; \quad y(0) = 1/2;$$

$$18. \begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t \\ x' + 2y' + x = 0 \end{cases} \quad x(0) = 1; \quad y(0) = 1;$$

$$19. \begin{cases} x' + y = \cos t \\ y' + x = \sin t \end{cases} \quad x(0) = 2; \quad y(0) = 0;$$

20. $\begin{cases} x' + y = \cos t \\ y' + x = \sin t \end{cases} \quad x(0) = 2; \quad y(0) = 0;$
21. $\begin{cases} x' = -y - z, \\ y' = -x - z, \\ z' = -x - y, \end{cases} \quad x(0) = -1; \quad y(0) = 0; \quad z(0) = 1;$
22. $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = 3x + z, \\ z' = 3x + y, \end{cases} \quad x(0) = 0; \quad y(0) = z(0) = 1;$
23. $\begin{cases} x' = 3y - x, \\ y' = y + x + e^t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1;$
24. $\begin{cases} x' + 5x + y = e^t \\ y' + 3y = x + e^{2t} \end{cases} \quad x(0) = 0; \quad y(0) = 0;$
25. $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 2y - x - 5e^t \sin t \end{cases} \quad x(0) = 1; \quad y(0) = 0;$
26. $\begin{cases} x' = 2x - 4y + 4e^{-2t} \\ y' = 2x - 2y \end{cases} \quad x(0) = 2; \quad y(0) = 0;$
27. $\begin{cases} x' + y = 2 \cos t, \\ y' + x = 0, \end{cases} \quad x(0) = 0; \quad y(0) = 1;$
28. $\begin{cases} x' = 5x - 3y + 2e^{3t} \\ y' = x + y + 5e^{-t} \end{cases} \quad x(0) = -1; \quad y(0) = -2;$
29. $\begin{cases} x' + y = 2 \operatorname{ch} t, \\ y' - x = 0, \end{cases} \quad x(0) = 0; \quad y(0) = 1;$
30. $\begin{cases} x' = 2x - 4y \\ y' = x - 3y + 3e^t \end{cases} \quad x(0) = 1; \quad y(0) = 3;$
31. $\begin{cases} x' - 2y = 0, \\ y' - 2x = 0 \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 2;$

$$32. \begin{cases} x' - 3x - 4y = 0, \\ y' = 4x - 3y \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

$$33. \begin{cases} x' + x - y = \sin t, \\ y' + 2x = \sin t, \end{cases} \quad x(0) = 0; \quad y(0) = 1;$$

$$34. \begin{cases} x' - 3x - 4y = 0, \\ y' = 4x - 3y \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

$$35. \begin{cases} x' + 2x + 2y = 10e^{2t}, \\ y' - 2x + y = 7e^{2t}, \end{cases} \quad x(0) = 1; \quad y(0) = 3;$$

$$36. \begin{cases} x' = y - z, \\ y' = x + y, \\ z' = x + z, \end{cases} \quad x(0) = 1; \quad y(0) = 2; \quad z(0) = 3.$$

Лабораторная работа №4. Решение линейных дифференциальных уравнений второго порядка

с постоянными коэффициентами операционным методом

Цель работы: научить студентов решать линейные дифференциальные уравнения второго порядка методами операционного исчисления.

Дано дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами ($a_1, a_2 \in \mathbb{R}$) :

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t) \quad (4.1)$$

и начальные условия

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1 \quad (4.2)$$

Необходимо решить уравнение (4.1), то есть найти функцию $x = x(t)$, которая удовлетворяет уравнению (4.1) и начальным условиям (4.2).

Будем считать, что функция $f(t)$ и решение $x(t)$ вместе с их производными до второго порядка являются функциями-оригиналами. Переводим искомую функцию $x(t)$, ее производные $x'(t)$, $x''(t)$ и функцию $f(t)$ в область комплексного переменного (в соответствии с теоремами и таблицей из Приложения):

$$\begin{aligned} x(t) &\leftarrow X(z), & f(t) &\leftarrow F(z); \\ x'(t) &\leftarrow z \cdot X(z) - x_0; & x''(t) &\leftarrow z^2 \cdot X(z) - z \cdot x_0 - x_1. \end{aligned}$$

Подставив $x''(t)$, $x'(t)$, $x(t)$ и $f(t)$ в исходное уравнение (4.1), получаем операторное уравнение

$$(z^2 + a_1 z + a_2) X(z) = F(z) + x_0(z + a_1) + x_1$$

Решаем полученное уравнение относительно функции $X(z)$, найдем

$$X(z) = \frac{F(z) + x_0(z + a_1) + x_1}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

Раскладываем данную дробь на простейшие дроби. Затем по формулам из таблицы изображений для простейших оригиналов (см. Приложение) находим

оригинал для $X(z)$. Это и будет искомое решение уравнения (4.1), удовлетворяющее начальным условиям (4.2).

ПРИМЕР. Решить дифференциальное уравнение второго порядка

$$x'' + 4x' + 4x = 8 \cdot e^{-2t}, \quad x(0)=1, \quad x'(0)=1$$

Решение:

Так как $8 \cdot e^{-2t} \leftarrow \frac{8}{z+2}$ и по условию $x_0 = x_1 = 1$, то операторное уравнение

будет иметь вид $(z^2 + 4z + 4) X(z) = \frac{8}{z+2} + z + 4 + 1$

Следовательно, операторное решение $X(z) = \frac{z^2 + 7z + 18}{(z+2)^3}$

Раскладываем правую часть последнего равенства на сумму простейших рациональных дробей и получаем $X(z) = \frac{8}{(z+2)^3} + \frac{3}{(z+2)^2} + \frac{1}{z+2}$

Переходя к оригиналам, получим решение поставленной задачи $x(t) = 4t^2 e^{-2t} + 3t e^{-2t} + e^{-2t}$

Далее необходимо сделать проверку, то есть полученное решение $x(t)$ подставить в исходное уравнение, сделать преобразования в правой части и убедиться, что уравнение обратилось в тождество. Кроме того необходимо проверить, что полученная функция $x(t)$ удовлетворяет начальным условиям.

Задания по вариантам для лабораторной работы № 4

Решите следующие линейные дифференциальные уравнения второго порядка с заданными начальными условиями $x(0)$ и $x'(0)$ методами операционного исчисления.

Номер варианта	Дифференциальное уравнение	Начальные условия
1	$x'' + 3x' + 2x = 2t^2 + 1,$	$x(0) = 4, \quad x'(0) = -3$
2	$x'' - 2x' - 3x = 3 + 7t + 3t^2,$	$x(0) = x'(0) = -1$
3	$x'' - 7x' = -(14t + 5),$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 2$

4	$x'' + 2x' = 6t^2,$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = -\frac{3}{2}$
5	$x'' + 6x' = e,$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = -\frac{1}{36}$
6	$x'' + x = 2 \cdot e^t,$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 2$
7	$7x'' + 14x' = (1+t) \cdot e^{-2t},$	$x(0) = 2, \quad x'(0) = -\frac{1}{56}$
8	$x'' - 4x' + 4x = (t-1)e^{2t},$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$
9	$4x'' - 4x' + x = e^{\frac{t}{2}},$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$
10	$x'' + 3x' + 2x = e^{-t} + e^{-2t}$	$x(0) = 2, \quad x'(0) = -3$
11	$x'' - x' - 6x = 6e^{3t} - 2e^{-2t},$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = \frac{4}{5}$
12	$x'' + 4x' + 4x = t^2 e^{-2t},$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$
13	$x'' - x' = 2\sin t,$	$x(0) = 2, \quad x'(0) = 0$
14	$x'' + 9x' = 18\cos 3t,$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = 9$
15	$x'' + 4x' = 4\cos 2t - \sin 2t,$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = \frac{1}{8}$
16	$x'' + 2x' + 3x = t \cos t,$	$x(0) = -\frac{1}{4}, \quad x'(0) = 0$
17	$x'' - 2x' + 10x = \cos 3t,$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = \frac{18}{37}$
18	$x'' - 4x' + 5x = 2e^{2t} (\sin t + \cos t),$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 2$
19	$x'' + 4x' = 8\sqrt{2} \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right),$	$x(0) = -\frac{31}{6}, \quad x'(0) = \frac{17}{24}$
20	$x'' + 4x' = 8\sqrt{2} \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right),$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = -2$
21	$x'' + x' - 2x = e^{-t},$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$
22	$x'' - 3x' + 2x = e^{5t},$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 2$
23	$x'' - x' = t^2,$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$
24	$x'' + 3x' = e^{2t},$	$x(0) = 1, \quad x'(0) = 1$
25	$x'' - 3x' = t \cdot e^{2t},$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$
26	$x'' + 2x' + x = 2\cos^2 t,$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$
27	$x'' + x' = t \cdot e^t,$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$
28	$x'' + 2x' + x = 2\cos t \cdot \cos 3t,$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$

29	$x'' + 2x' + x = t^2,$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$
30	$x'' + 3x' + 2x = \cos t,$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$
31	$x'' + 2x' + 2x = t,$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$
32	$x'' + x = \sin t,$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$
33	$x'' - 4x = e^{2t},$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$
34	$x'' + 9x = \sin 3t,$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$
35	$x'' + 3x' + 2x = t \cdot \sin t,$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$
36	$x'' + 2x' + 10x = e^{-t} \sin 3t,$	$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$

Контрольные вопросы для защиты лабораторных работ

1. Особые точки аналитических функций и их классификация
2. Определение вычета аналитической функции
3. Формула для вычисления вычета для простого полюса и для полюса k -го порядка
4. Основная теорема о вычетах
5. Вычет в бесконечно удаленной точке
6. Определение функции–оригинала и определение функции–изображения
7. Дифференцирование оригинала
8. Дифференцирование изображения
9. Теорема смещения изображения
10. Теорема запаздывания
11. Интегрирование оригинала
12. Интегрирование изображения
13. Обратное преобразование Лапласа
14. Первая теорема разложения
15. Вторая теорема разложения
16. Теорема существования изображения
17. Ряд Лорана. Разложения в ряд Лорана аналитических функций
18. Изображения периодических оригиналов
19. Лемма Жордана
20. Применение операционного исчисления к решению задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений

Таблица изображений для простейших оригиналов

1) $\eta(t) \leftarrow \frac{1}{z};$	5) $\sin t \leftarrow \frac{1}{z^2+1};$
2) $\frac{t^n}{n!} \leftarrow \frac{1}{z^{n+1}};$	6) $sht \leftarrow \frac{1}{z^2-1};$
3) $e^t \leftarrow \frac{1}{z-1};$	7) $cht \leftarrow \frac{z}{z^2-1}.$
4) $\cos t \leftarrow \frac{z}{z^2+1};$	

T1. (линейность). Если $f_1(t) \leftarrow F_1(z)$ и $f_2(t) \leftarrow F_2(z)$, тогда $af_1(t) \pm bf_2(t) \leftarrow aF_1(z) \pm bF_2(z)$.

T2. (подобие). Если $f(t) \leftarrow F(z)$ и $\alpha > 0$, тогда $f(\alpha t) \leftarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{z}{\alpha}\right)$.

T3. (запаздывание). Если $f(t) \leftarrow F(z)$, тогда $f(t - \tau) \leftarrow e^{-z\tau} \cdot F(z)$, где $\tau > 0$.

T4. (смещение). Если $f(t) \leftarrow F(z)$, тогда $e^{\alpha t} \cdot f(t) \leftarrow F(z - \alpha)$, где α - действительное или комплексное число.

T5. (дифференцирование оригинала). Если $f(t) \leftarrow F(z)$, тогда

$$f'(t) \leftarrow z F(z) - f(0); \quad f''(t) \leftarrow z^2 F(z) - z \cdot f(0) - f'(0).$$

T6. (дифференцирование изображения). Если $f(t) \leftarrow F(z)$, тогда $t^n f(t) \leftarrow (-1)^n F^{(n)}(z)$ или $F^{(n)}(z) \rightarrow (-1)^n t^n f(t)$.

T7. (Интегрирование изображения). Если $f(t) \leftarrow F(z)$, тогда $\frac{f(t)}{t} \leftarrow \int_z^\infty F(x) dx$.

T8. (Интегрирование оригинала). Если $f(t) \leftarrow F(z)$, тогда $\int_0^t f(\tau) d\tau \leftarrow \frac{F(z)}{z}$.

T9. (Опережение оригинала). Если $f(t) \leftarrow F(z)$, тогда

$$f(t + \tau) \leftarrow e^{z\tau} \cdot \left(F(z) - \int_0^\tau f(u) e^{-zu} du \right)$$

Список литературы

Основная литература

1. Араманович И.Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости : учебное пособие / И. Г. Араманович, Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц. - М.: Наука, 1968. – 415 с.
2. Бугров Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: учебник для втузов/ Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Ростов н/Д: Феникс, 1997. – 511 с.
3. Краснов М.А. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: учебное пособие/М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М.: Наука, 1981. – 304 с.

Учебные пособия кафедры «Математика»

1. Учебно-методическое пособие по дисциплине «Математика»: учебно-методический комплекс / сост. Р. Р. Абзалимов [и др.]; ред. Р.Н.Бахтизин;
Раздел 11: Элементы теории функции комплексного переменного. Теоретические основы. Методические указания для студентов. Материалы для самостоятельной работы студентов. УГНТУ, ИАУ, каф. Математики. – Уфа: Изд-во УГНТУ, 2015. - 118 с.
2. Учебно-методическое пособие по дисциплине «Математика»: учебно-методический комплекс / сост. Р. Р. Абзалимов [и др.]; ред. Р.Н.Бахтизин;
Раздел 15: Элементы операционного исчисления. Теоретические основы. Методические указания для студентов. Материалы для самостоятельной работы студентов. УГНТУ, ИАУ, каф. Математики. - Уфа: Изд-во УГНТУ, 2015. - 102 с.
3. Учебно-методический комплекс дисциплины «Математика» учебно-методический комплекс/ Р. Р. Абзалимов [и др.] ; ред. Р.Н. Бахтизин: УГНТУ, ИАУ, каф. Математики. – Уфа: Изд-во УГНТУ.
Раздел 11: Теория функции комплексного переменного. Элементы операционного исчисления: Контрольно-измерительные материалы. - 2008. - 276 с.