

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЯНОЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математики

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Лабораторный практикум
для бакалавров по направлению «Экономика»

Учебное пособие

Уфа
2012

Лабораторный практикум предназначен для студентов бакалавров по направлению 080100.62 «Экономика».

Пособие содержит описание лабораторных работ по дисциплине «Методы оптимальных решений», включая теоретический материал, руководства по выполнению лабораторных работ, варианты индивидуальных заданий.

Задачи актуализированы применительно к условиям современной экономики и рекомендуются для получения навыков экономического расчета и при решении оптимизационных задач.

Составитель: Мухаметзянов И.З., профессор, д-р физ.-мат. наук

Рецензент: Сулейманов И.Н., доц., канд. техн. наук

СОДЕРЖАНИЕ

1	Лабораторная работа 1. Нахождение допустимой области решений задач математического программирования с применением MS Excel	4
2	Лабораторная работа 2. Одноиндексная задача линейного программирования. Распределение ресурсов. Решение в MS Excel	20
3	Лабораторная работа 3. Одноиндексная задача линейного программирования. Анализ чувствительности целочисленные задачи. Решение в MS Excel	40
4	Лабораторная работа 4. Двухиндексная задача линейного программирования. Транспортная задача. Решение в MS Excel	49
5	Лабораторная работа 5. Двухиндексная задача линейного программирования. Оптимальное распределение производственных мощностей. Решение в MS Excel	61
6	Лабораторная работа 6. Решение векторных задач линейного программирования (ВЗЛП) различными методами с использованием MS Excel	73
7	Лабораторная работа 7. Решение задачи о распределении ресурсов в стохастическом варианте с применением MS Excel. (варианты Р-постановки, Е-постановки задачи)	82
8	Отчетность, оформление лабораторной работы	92

Лабораторная работа 1

НАХОЖДЕНИЕ ДОПУСТИМОЙ ОБЛАСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ MS EXCEL

Цель работы: Построение и анализ допустимой области решений задач математического программирования средствами пакета MS Excel

Теоретическая часть

Математическое программирование является одной из основных частей современной математики. В общей постановке задачи этого раздела выглядят следующим образом.

Имеются переменные $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и функция этих переменных $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которая носит название целевой функции. Ставится задача: найти экстремум (максимум или минимум) целевой функции $f(x)$ при условии, что переменные x принадлежат некоторой области G :

$$\begin{cases} f(x) \Rightarrow \text{extr}_x \\ x \in G \end{cases}$$

В зависимости от вида функции $f(x)$ и области G и различают разделы математического программирования: квадратичное программирование, выпуклое программирование, целочисленное программирование и т.д.

Непустая область G является открытой или замкнутой и может быть описана системой неравенств или уравнений вида

$$g_i(x) < (\leq > \geq) b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

Часть соотношений (в зависимости от задачи) определена равенствами, часть неравенствами. Функции $g_i(x)$ в общем случае нелинейные. В n -мерном пространстве $g_i(x) - b_i = 0$ определяют поверхность (или гиперплоскость) размерности ниже n , а в случае неравенств задают область – часть пространства. В результате пересечения всех областей, образуется область G . Если G пусто – то задача решения не имеет. Иначе G является открытой или замкнутой областью.

Линейное программирование характеризуется тем, что и функция $f(x)$ является линейной функцией переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, и область G определяется системой линейных равенств или неравенств.

Поэтому, анализ допустимой области решений задачи G включает нахождение решения систем линейных (нелинейных) уравнений с последующим построением допустимой области.

1. Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом нахождения обратной матрицы

Пусть задана СЛАУ следующего вида:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}$$

Эту систему можно представить в матричном виде: $AX = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{- матрица} \\ \text{коэффициентов} \\ \text{системы} \\ \text{уравнений;} \end{array}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{- вектор} \\ \text{неизвестных,} \end{array} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{- вектор} \\ \text{правых частей} \end{array}$$

При выполнении лабораторной работы систему линейных алгебраических уравнений необходимо будет решать методом обратной матрицы и с использованием надстройки **Excel** «Поиск Решения».

Вспомним основные формулы, используемые в этих методах.

Систему линейных алгебраических уравнений $AX = b$ умножим слева на матрицу, обратную к A . Система уравнений примет вид:

$$A^{-1}AX = A^{-1}b, \quad EX = A^{-1}b, \quad (E - \text{единичная матрица})$$

Таким образом, вектор неизвестных вычисляется по формуле $X = A^{-1}b$.

ПРИМЕР 1. Решить систему методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_2 - 13x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 21x_2 - 5x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$$

В этом случае матрица коэффициентов A и вектор свободных коэффициентов b имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -13 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 21 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Введём матрицу **A** и вектор **b** в рабочий лист MS Excel (рис. 1).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		0	1	-13	4		-5	
2		1	0	-2	3		-4	
3		3	21	0	-5		2	
4		4	3	-5	0		3	
5								

Рис. 1

В нашем случае матрица **A** находится в ячейках **B1:E4**, а вектор **b** в диапазоне **G1:G4**. Для решения системы методом обратной матрицы необходимо вычислить матрицу, обратную к **A**. Для этого выделим ячейки для хранения обратной матрицы (это нужно сделать обязательно!!!); пусть в нашем случае это будут ячейки **B6:E9**. Теперь обратимся к мастеру функций, и в категории Математические выберем функцию **МОБР**, предназначенную для вычисления обратной матрицы (рис. 2, 3), щелкнув по кнопке **ОК**, перейдём ко второму шагу мастера функций. В диалоговом окне, появляющемся на втором шаге мастера функций, необходимо заполнить поле ввода Массив (рис. 1.). Это поле должно содержать диапазон ячеек, в котором хранится исходная матрица - в нашем случае **B1:E4**. Данные в поле ввода Массив можно ввести, используя клавиатуру или выделив их на рабочем листе, удерживая левую кнопку мыши.

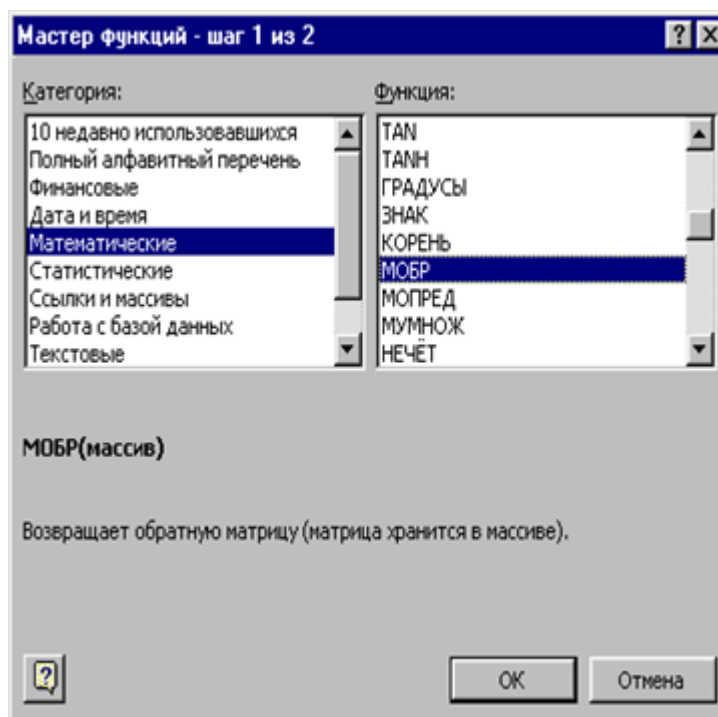


Рис. 2

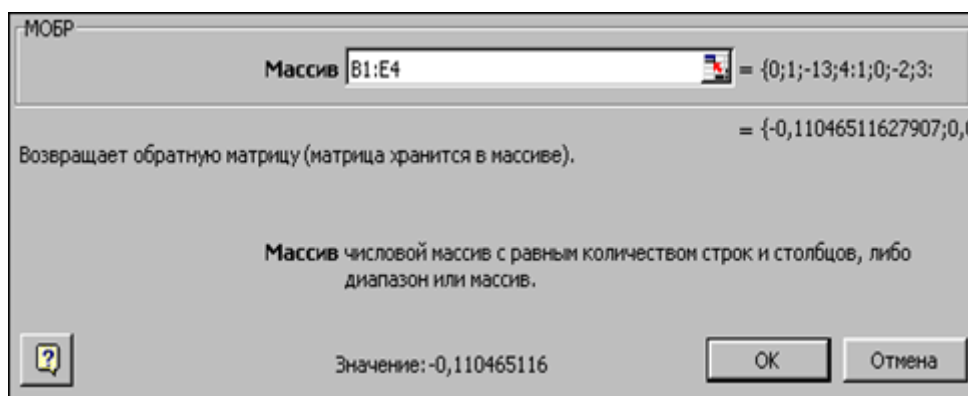


Рис. 3

Если поле Массив заполнено, можно нажать кнопку **ОК**. В первой ячейке, выделенного под обратную матрицу диапазона, появится некое число. Для того чтобы получить всю обратную матрицу, необходимо нажать клавишу **F2** для перехода в режим редактирования, а затем одновременно клавиши **Ctrl+Shift+Enter**. В нашем случае рабочая книга MS Excel примет вид изображенный на рис. 4.

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the formula bar displaying $=\{=МОБР(B1:E4)\}$. The spreadsheet contains two matrices, A and B, and their product.

	A	B	C	D	E	F	G
1	A=	0	1	-13	4	b=	-5
2		1	0	-2	3		-4
3		3	21	0	-5		2
4		4	3	-5	0		3
5							
6		-0,11047	0,096899	-0,03023	0,24845		
7		0,011628	0,077519	0,055814	-0,06124		
8		-0,0814	0,124031	0,009302	-0,03798		
9		-0,01744	0,383721	0,016279	-0,10814		
10							

Рис. 4

Теперь необходимо умножить полученную обратную матрицу на вектор **b**. Выделим ячейки для хранения результирующего вектора, например **H6:H9**. Обратимся к мастеру функций, и в категории **Математические** выберем функцию **МУМНОЖ**, которая предназначена для умножения матриц. Напомним, что умножение матриц происходит по правилу строка на столбец и матрицу **A** можно умножить на матрицу **B** только в том случае, если количество столбцов матрицы **A** равно количеству строк матрицы **B**. Кроме того, при умножении матриц важен порядок сомножителей, т.е. **AB** ≠ **BA**.

Перейдём ко второму шагу мастера функций. Появившееся диалоговое окно (рис. 5) содержит два поля ввода **Массив1** и **Массив2**. В поле **Массив1** необходимо ввести диапазон ячеек, в котором содержится первая из перемножаемых матриц, в нашем случае **B6:E9** (обратная матрица), а в поле **Массив2** ячейки, содержащие вторую матрицу, в нашем случае **G1:G4** (вектор **b**).

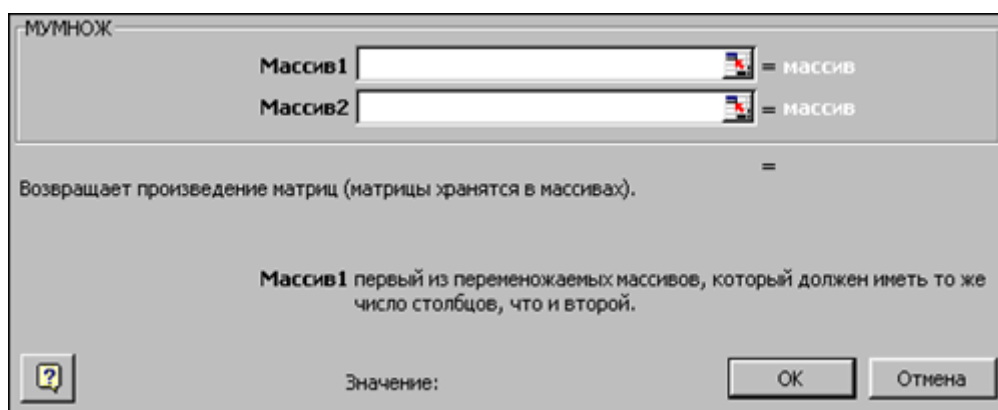


Рис. 5

Если поля ввода заполнены, можно нажать кнопку **ОК**. В первой ячейке выделенного диапазона появится соответствующее число результирующего вектора. Для того чтобы получить весь вектор, необходимо

нажать клавишу **F2**, а затем одновременно клавиши **Ctrl+Shift+Enter**. В нашем случае результаты вычислений (вектор **x**), находится в ячейках **H6:H9**.

Для того чтобы проверить, правильно ли решена система уравнений, необходимо умножить матрицу **A** на вектор **x** и получить в результате вектор **b**. Умножение матрицы **A** на вектор **x** осуществляется при помощи функции **МУМНОЖ(B1:E4;H6:H9)**, так как было описанной выше.

В результате проведенных вычислений рабочий лист примет вид изображенный на рис. 6.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	A=	0	1	-13	4	b=	-5		Проверка	-5
2		1	0	-2	3		-4			-4
3		3	21	0	-5		2			2
4		4	3	-5	0		3			3
5										
6		-0,11047	0,096899	-0,03023	0,24845		x=	0,849612		
7		0,011628	0,077519	0,055814	-0,06124			-0,44031		
8		-0,0814	0,124031	0,009302	-0,03798			-0,1845		
9		-0,01744	0,383721	0,016279	-0,10814			-1,73953		

Рис. 6

2. Решение систем нелинейных (линейных) уравнений с помощью решающего блока (Сервис → Поиск Решения)

С помощью решающего блока (пункт меню **Сервис → Поиск Решения**), который позволяет решать не только оптимизационные задачи, но и обычные уравнения и системы уравнений. Рассмотрим, как можно решить систему уравнений:

$$F_1(x)=0,$$

$$F_2(x)=0,$$

...

$$F_n(x)=0$$

где $F_i(x)$ - произвольные непрерывные функции.

Для решения этой задачи ее можно сформулировать следующим способом:

найти минимум функции:

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n F_i^2(x) = F_1^2(x) + F_2^2(x) + \dots F_n^2(x).$$

В этом случае задача решается без ограничений.

ПРИМЕР 2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4 = 0 \end{cases}$$

В ячейках **D1** и **D2** будем хранить переменные x_1 и x_2 . В ячейки **E1** и **E2** введем уравнения системы: **E1** = 2*D1-3*D2+4, **E2**=D1+D2-4. В качестве функции цели в ячейку **F1** введем формулу = **E1**^2+E2^2. Обратимся к решающему блоку (см. рис. 7.9) и введём условие задачи оптимизации. В результате получаем следующее решение системы: $x_1 = 1,60$, $x_2 = 2,40$

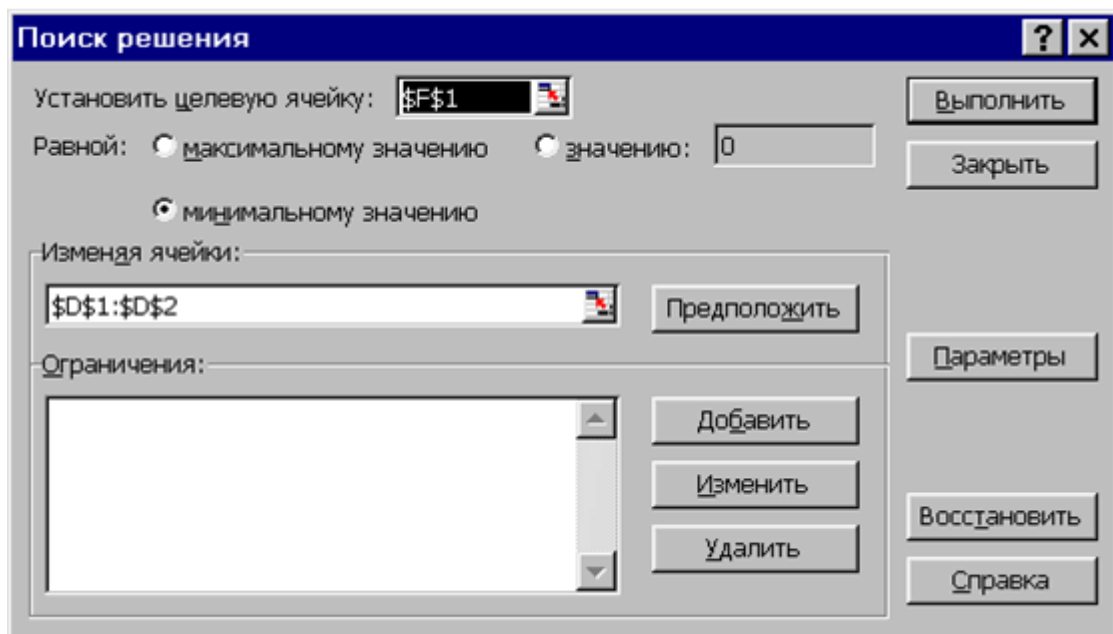


Рис. 7

3. Нахождение корней уравнения с помощью решающего блока (Сервис → Подбор параметра)

ПРИМЕР 3. Найти корни полинома $x^3 - 0,01x^2 - 0,7044x + 0,139104 = 0$.

Для начала решим уравнение графически. Известно, что графическим решением уравнения $f(x)=0$ является точка пересечения графика функции $f(x)$ с осью абсцисс, т.е. такое значение x , при котором функция обращается в ноль.

Проведем табулирование нашего полинома на интервале от -1 до 1 с шагом 0,2. Результаты вычислений приведены на рис. 8., где в ячейку **B2** была введена формула: = **A2**^3 - 0,01*A2^2 - 0,7044*A2 + 0,139104. На

графике видно, что функция три раза пересекает ось Ox , а так как полином третьей степени имеется не более трех вещественных корней, то графическое решение поставленной задачи найдено. Иначе говоря, была проведена локализация корней, т.е. определены интервалы, на которых находятся корни данного полинома: $[-1, -0.8]$, $[0.2, 0.4]$ и $[0.6, 0.8]$.

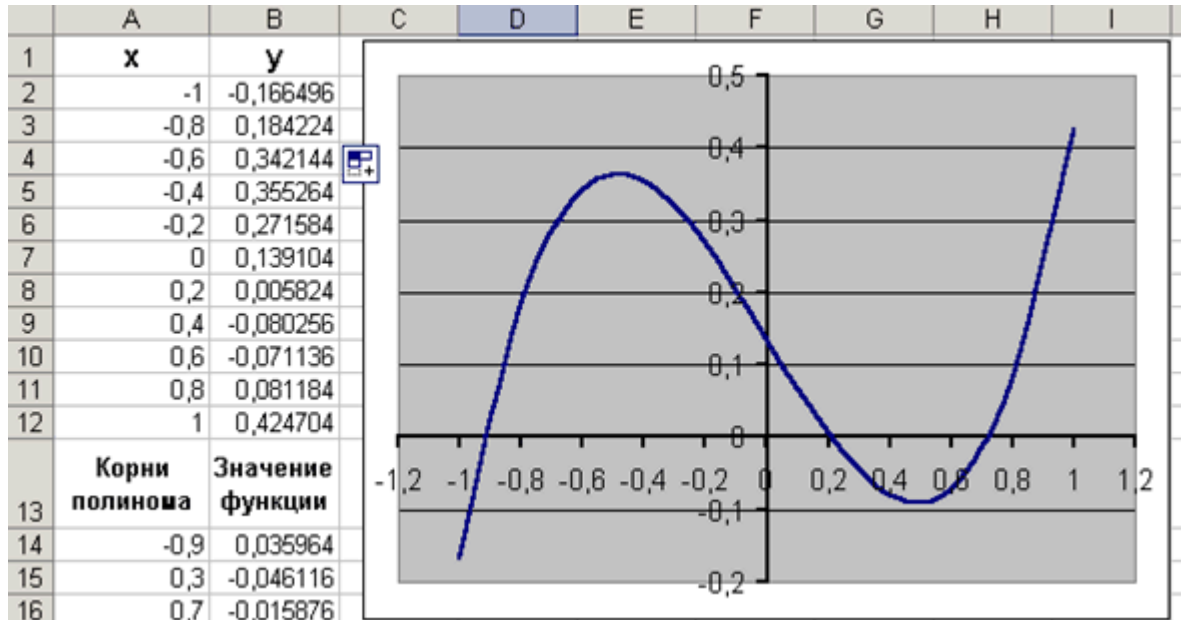


Рис. 8

Теперь можно найти корни полинома методом последовательных приближений с помощью команды **Сервис → Подбор параметра**. Относительная погрешность вычислений и предельное число итераций (например, 0,00001 и 1000) задаются на вкладке **Сервис → Параметры**.

После ввода начальных приближений и значений функции можно обратиться к пункту меню **Сервис → Подбор параметра** и заполнить диалоговое окно следующим образом (см. рис. 9).

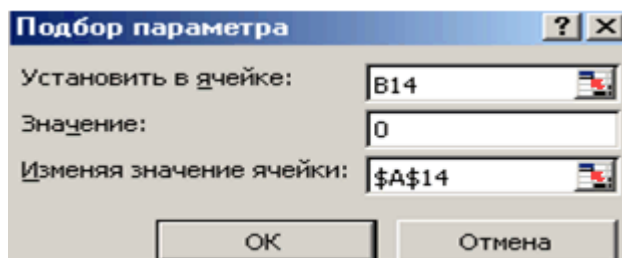


Рис. 9

В поле **Установить в ячейке** дается ссылка на ячейку, в которую введена формула, вычисляющая значение левой части уравнения (уравнение должно быть записано так, чтобы его правая часть не содержала переменную). В поле **Значение** вводим правую часть уравнения, а в поле **Изменяя значения ячейки** дается ссылка на ячейку, отведенную под

переменную. Заметим, что вводить ссылки на ячейки в поля диалогового окна **Подбор параметров** удобнее не с клавиатуры, а щелчком на соответствующей ячейке.

После нажатия кнопки **ОК** появится диалоговое окно **Результат подбора параметра** (см. рис. 10) с сообщением об успешном завершении поиска решения, приближенное значение корня будет помещено в ячейку **A14**.

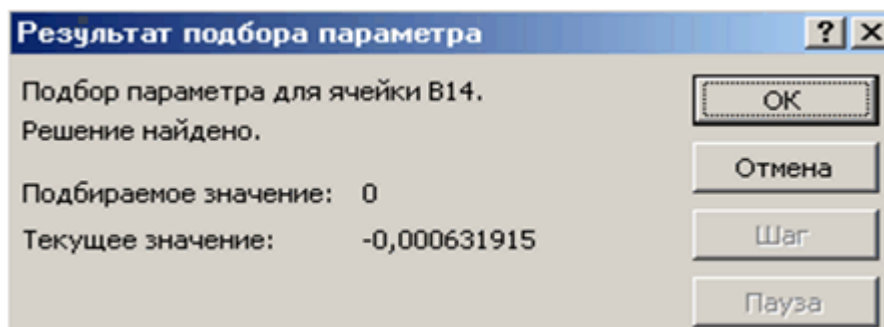


Рис. 10

Два оставшихся корня находим аналогично. Результаты вычислений будут помещены в ячейки **A15** и **A16** (см. рис. 11).

	А	В
	Корни полинома	Значение функции
13		
14	-0,92034081	-0,000632
15	0,210213539	-0,000123
16	0,720718302	0,0006019

Рис. 11

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

- 1) Решить систему уравнений применяя «Надстройку» Поиск решения.
- 2) Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы.
- 3) а,б) Найти корни уравнения с помощью Сервис → Подбор параметра.

При решении систем обязательно выполнить проверку.

Вариант №1 1)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x + 8y - z = -7 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \end{cases}$$

3) а) $x^4 - x - 1 = 0$;
 б) $x^3 + x - 3 = 0$.

Вариант №2 1)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$$

3) а) $2x^4 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$;
 б) $x^3 - 2x + 2 = 0$.

Вариант №3 1)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$$

3) а) $2x^4 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$;
 б) $x^3 - 2x + 2 = 0$.

Вариант №4 1)
$$\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

3) а) $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$;
 б) $x^3 + 2x^2 + 2 = 0$.

Вариант №5

$$1) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$$

3) а) $3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 10 = 0$;
 б) $x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0$.

Вариант №6

$$1) \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 20 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 9 \\ 5x_1 - 7x_2 + 10x_4 = -9 \\ 3x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

3) а) $2x^4 - x^2 - 10 = 0$;
 б) $x^3 - 0, 2x^2 + 0, 4x - 1, 4 = 0$.

Вариант №7

$$1) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

3) а) $x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 17 = 0$;
 б) $x^3 - 0, 2x^2 + 0, 5x - 1, 4 = 0$.

Вариант №8

$$1) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$$

3) а) $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$;
 б) $x^3 + 4x - 6 = 0$.

Вариант №9

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 10 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

3) а) $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0$;
 б) $x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0$.

Вариант №10

$$1) \begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_4 = -9 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -7 \\ 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases}$$

3) а) $3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 2 = 0$;
 б) $x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$.

Вариант №11

$$1) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

3) а) $2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 1 = 0$;
 б) $x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0$.

Вариант №12

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 8 \\ 2x_2 + 7x_3 = 17 \end{cases}$$

3) а) $2x^4 + 8x^4 + 8x^2 - 1 = 0$;
 б) $x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0$.

Вариант №13

$$1) \begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_4 = -9 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = -7 \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 = -16 \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = -7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

3) а) $x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 1 = 0$;
 б) $x^3 + 3x + 1 = 0$.

Вариант №14

$$1) \begin{cases} 2x_1 + x_3 + 4x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 16 \\ 3x - 2y - 5z = 12 \end{cases}$$

3) а) $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$;
 б) $x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0$.

Вариант №15 1)
$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 12 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$
 2)
$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8 \\ 2x - y - 3z = -1 \\ x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

3) а) $2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$;
 б) $x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0$.

Вариант №16 1)
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$
 2)
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

а) $x^4 - x - 1 = 0$;
 3) б) $x^3 - 3x^2 + 9x - 10 = 0$.

Вариант №17 1)
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$
 2)
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 20 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$$

а) $x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 17 = 0$;
 3) б) $x^3 + 3x - 1 = 0$.

Вариант №18 1)
$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$
 2)
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

а) $3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 10 = 0$;
 3) б) $x^3 + 0,4x^2 + 0,6x - 1,6 = 0$.

Вариант №19 1)
$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$$
 2)
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

а) $x^4 - 18x^2 + 6 = 0$;
 3) б) $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x + 2 = 0$.

Вариант №20 1)
$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 11x + 3y - 3z = 2 \\ 2x + 5y - 5z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

3) a) $2x^4 - x^2 - 10 = 0$;
b) $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x - 1 = 0$.

Вариант №21 1)
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 7x + 5y + 2z = 18 \\ x - y - z = 3 \\ x + y + 2z = -2 \end{cases}$$

3) a) $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$;
b) $x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0$.

Вариант №22 1)
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 = -4 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x + z = 0 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

3) a) $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0$;
b) $x^3 + 0,2x^2 + 0,5x + 0,8 = 0$.

Вариант №23 1)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 2y - 2z = 3 \\ x + y - 2z = 0 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

3) a) $3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 2 = 0$;
b) $x^3 + 0,1x^2 + 0,4x - 1,2 = 0$.

Вариант №24 1)
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = -6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 28 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \text{a) } 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0; \\ 3) & \text{b) } x^3 - 0,1x^2 + 0,4x - 1,5 = 0. \end{aligned}$$

Вариант №25

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -15 \end{cases} & 2) & \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases} \\ & \text{a) } 2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0; \\ 3) & \text{b) } x^3 + 2x + 4 = 0. \end{aligned}$$

Вариант №26

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 8 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 7x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 7 \end{cases} & 2) & \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \\ & \text{a) } x^4 - x - 1 = 0; \\ 3) & \text{b) } x^3 - 0,2x^2 + 0,3x - 1,2 = 0. \end{aligned}$$

Вариант №27

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases} & 2) & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \\ & \text{a) } 2x^4 - x^2 - 10 = 0; \\ 3) & \text{b) } x^3 + 0,2x^2 + 0,5x - 2 = 0. \end{aligned}$$

Вариант №28

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases} & 2) & \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases} \\ & \text{a) } 3x^4 + 8x^3 + 10 = 0; \\ 3) & \text{b) } x^3 + 0,2x^2 + 0,5x - 1,2 = 0. \end{aligned}$$

Вариант №29

$$1) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 = -3 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -3 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = -4 \end{cases}$$

а) $x^4 - 18x^2 + 6 = 0$;

3) б) $x^3 + 0,1x^2 + 0,4x - 1,2 = 0$.

Вариант №30

$$1) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = -5 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = -3 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

а) $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0$;

3) б) $x^3 - 0,1x^2 + 0,3x - 0,6 = 0$.

Лабораторная работа 2

ОДНОИНДЕКСНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ. РЕШЕНИЕ В MS EXCEL

Цель работы: Приобретение навыков построения математических моделей одноиндексных задач ЛП и решения их в Microsoft Excel.

Теоретическая часть

Линейное программирование является одной из основных частей того раздела современной математики, который получил название математического программирования. В общей постановке задачи этого раздела выглядят следующим образом.

Имеются какие-то переменные $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и функция этих переменных $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которая носит название целевой функции. Ставится задача: найти экстремум (максимум или минимум) целевой функции $f(x)$ при условии, что переменные x принадлежат некоторой области G :

$$\begin{cases} f(x) \Rightarrow \text{extr} \\ x \in G \end{cases}$$

В зависимости от вида функции $f(x)$ и области G и различают разделы математического программирования: квадратичное программирование, выпуклое программирование, целочисленное программирование и т.д.

Линейное программирование характеризуется тем, что

- а) функция $f(x)$ является линейной функцией переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$;
- б) область G определяется системой линейных равенств или неравенств.

Задача о составлении плана производства

Рассмотрим деятельность некоторой производственной единицы (цеха, отдела и т.д.). Пусть наша производственная единица может производить некоторые товары $G_1, G_2, \dots, G_n$. Для производства этих товаров приходится использовать некоторые сырьевые ресурсы. Пусть число этих ресурсов есть m ; обозначим их через $R_1, R_2, \dots, R_m$.

Технологией производства товара G_j назовем набор чисел a_{ij} , $i = \overline{1, m}$, показывающий, какое количество i -го ресурса необходимо для производства единицы товара G_j . Это можно записать в виде технологической матрицы, которая полностью описывает технологические потребности производства и элементами которой являются числа a_{ij} .

$$\begin{array}{ccccccc}
& G_1 & G_2 & \dots & G_j & \dots & G_n \\
R_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
R_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
R_i & a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
R_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn}
\end{array}$$

Пусть у нас имеется b_j запасов каждого ресурса и мы планируем произвести x_i единиц i -го товара. Так как мы не можем выскочить за пределы имеющихся у нас ресурсов, то наш план производства $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ должен удовлетворять ограничениям

[illegible]

при очевидных условиях неотрицательности переменных x_i :

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \dots x_n \geq 0;$$

Естественно, мы стремимся получить за нашу продукцию возможно больше. Поэтому стоящая перед нами задача составления плана производства приобретает вид:

[illegible]

Пример Одноиндексная задача ЛП

Рассмотрим пример нахождения решения для следующей одноиндексной задачи ЛП:

$$\begin{cases} L(X) = 130,5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87,8x_4 \rightarrow \max; \\ -1,8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 756, \\ -6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \geq 450, \\ 4x_1 - 1,5x_2 + 10,4x_3 + 13x_4 \leq 89, \\ x_j \geq 0; j = \overline{1,4}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Ввод исходных данных

Создание экранной формы и ввод в нее условия задачи

Экранная форма для ввода условий задачи (1.1) вместе с введенными в нее исходными данными представлена на рис.1.1.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				ПЕРЕМЕННЫЕ				
2	Имя	X1	X2	X3	X4			
3	Значение							
4	Нижн.гр.	0	0	0	0	ЦФ		
5						Значение	Направл.	
6	Кэф. ЦФ	130,5	20	56	87,8		max	
7								
8				ОГРАНИЧЕНИЯ				
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4		=	756
11	Огран.2	-6	2	4	-1		>=	450
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13		<=	89
13								

Рис. 1.1. Экранная форма задачи (1.1) (курсор в ячейке F6)

В экранной форме на рис. 1.1 каждой переменной и каждому коэффициенту задачи поставлена в соответствие конкретная ячейка в Excel.

Имя ячейки состоит из буквы, обозначающей столбец, и цифры, обозначающей строку, на пересечении которых находится объект задачи ЛП.

Так, например, переменным задачи (1.1) соответствуют ячейки **B3** (x_1), **C3** (x_2), **D3** (x_3), **E3** (x_4), коэффициентам ЦФ соответствуют ячейки **B6** ($c_1 = 130,5$), **C6** ($c_2 = 20$), **D6** ($c_3 = 56$), **E6** ($c_4 = 87,8$), правым частям ограничений соответствуют ячейки **H10** ($b_1 = 756$), **H11** ($b_2 = 450$), **H12** ($b_3 = 89$) и т.д.

Ввод зависимостей из математической модели в экранную форму

Зависимость для ЦФ

В ячейку **F6**, в которой будет отображаться значение ЦФ, необходимо ввести формулу, по которой это значение будет рассчитано. Согласно (1.1) значение ЦФ определяется выражением

$$130,5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87,8x_4. \quad (1.2)$$

Используя обозначения соответствующих ячеек в Excel (см. рис. 1.1), формулу для расчета ЦФ (1.2) можно записать как сумму произведений каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (**B3**, **C3**, **D3**, **E3**), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов ЦФ (**B6**, **C6**, **D6**, **E6**), то есть

$$B6 \cdot B3 + C6 \cdot C3 + D6 \cdot D3 + E6 \cdot E3. \quad (1.3)$$

Чтобы задать формулу (1.3) необходимо в ячейку F6 ввести следующее выражение и нажать клавишу "Enter"

$$=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B6:E6), \quad (1.4)$$

где символ \$ перед номером строки 3 означает, что при копировании этой формулы в другие места листа Excel номер строки 3 не изменится; символ : означает, что в формуле будут использованы все ячейки, расположенные между ячейками, указанными слева и справа от двоеточия (например, запись **B6:E6** указывает на ячейки **B6**, **C6**, **D6** и **E6**). После этого в целевой ячейке появится 0 (нулевое значение) (рис. 1.2).

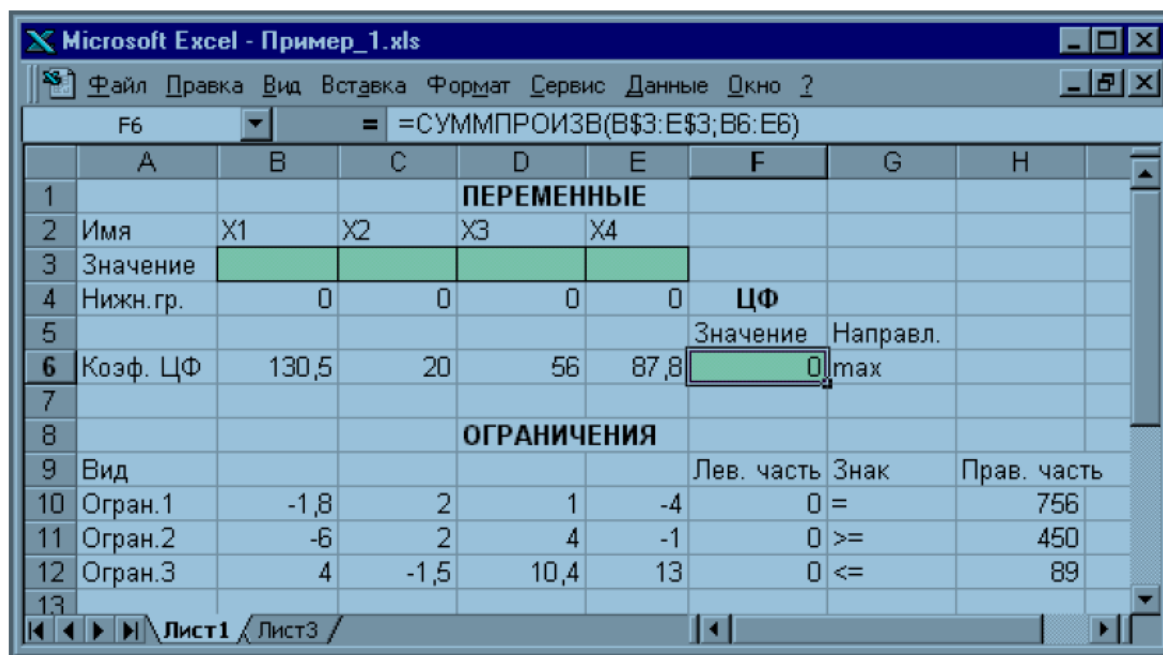


Рис.1.2. Экранная форма задачи (1.1) после ввода всех необходимых формул (курсор в ячейке F6)

Примечание 1.1. Существует другой способ задания функций в Excel с помощью режима "**Вставка функций**", который можно вызвать из меню "**Вставка**" или при нажатии кнопки " f_x " на стандартной панели инструментов. Так, например, формулу (1.4) можно задать следующим образом:

- курсор в поле **F6**;
- нажав кнопку " f_x ", вызовите окно "**Мастер функций – шаг 1 из 2**";
- выберите в окне "**Категория**" категорию "**Математические**";
- в окне "**Функция**" выберите функцию **СУММПРОИЗВ**;
- в появившемся окне "**СУММПРОИЗВ**" в строку "**Массив 1**" введите выражение **B\$3:E\$3**, а в строку "**Массив 2**" – выражение **B6:E6** (рис. 1.3);
- после ввода ячеек в строки "**Массив 1**" и "**Массив 2**" в окне "**СУММПРОИЗВ**" появятся числовые значения введенных массивов (см. рис. 1.3), а в экранной форме в ячейке **F6** появится текущее значение, вычисленное по введенной формуле, то есть 0 (так как в момент ввода формулы значения переменных задачи нулевые).

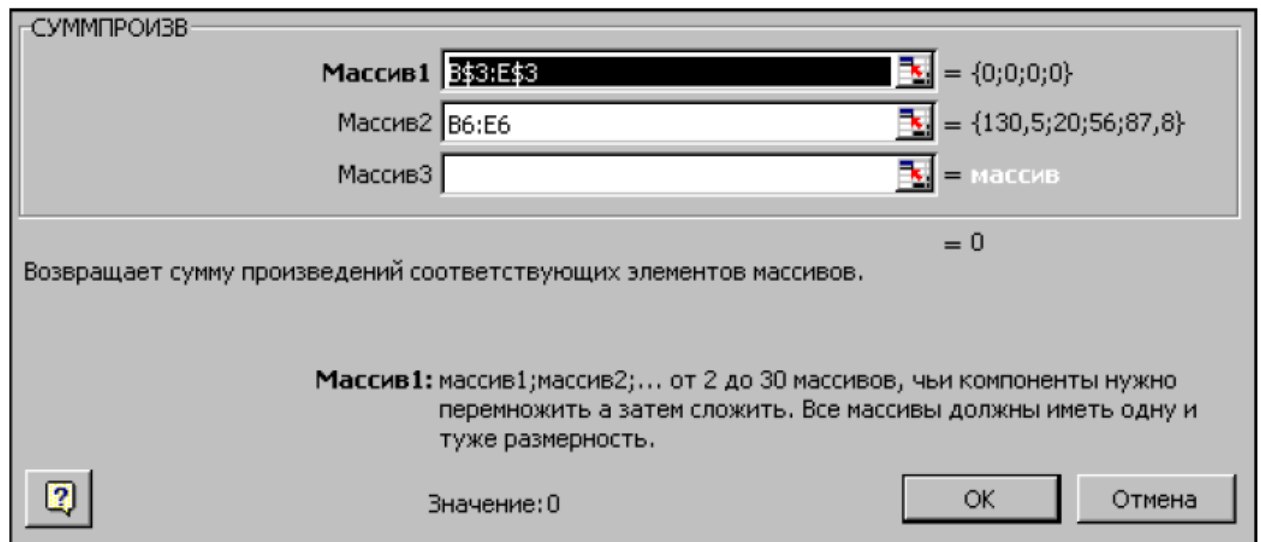


Рис. 1.3. Ввод формулы для расчета ЦФ в окно "**Мастер функций**"

Зависимости для левых частей ограничений

Левые части ограничений задачи (1.1) представляют собой сумму произведений каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (**B3, C3, D3, E3**), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов конкретного ограничения (**B10, C10, D10, E10** – 1-е ограничение; **B11, C11, D11, E11** – 2-е ограничение и **B12, C12, D12, E12** – 3-е ограничение). Формулы, соответствующие левым частям ограничений, представлены в табл. 1.1.

Формулы, описывающие ограничения модели (1.1)

Левая часть ограничения	Формула Excel
$-1,8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4$ или $B10 \cdot B3 + C10 \cdot C3 + D10 \cdot D3 + E10 \cdot E3$	<code>=СУММПРОИЗВ(BS3:ES3;B10:E10)</code>
$-6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4$ или $B11 \cdot B3 + C11 \cdot C3 + D11 \cdot D3 + E11 \cdot E3$	<code>=СУММПРОИЗВ(BS3:ES3;B11:E11)</code>
$4x_1 - 1,5x_2 + 10,4x_3 + 13x_4$ или $B12 \cdot B3 + C12 \cdot C3 + D12 \cdot D3 + E12 \cdot E3$	<code>=СУММПРОИЗВ(BS3:ES3;B12:E12)</code>

Как видно из табл. 1.1, формулы, задающие левые части ограничений задачи (1.1), отличаются друг от друга и от формулы (1.4) в целевой ячейке **F6** только номером строки во втором массиве. Этот номер определяется той строкой, в которой ограничение записано в экранной форме. Поэтому для задания зависимостей для левых частей ограничений достаточно скопировать формулу из целевой ячейки в ячейки левых частей ограничений. Для этого необходимо:

- поместить курсор в поле целевой ячейки **F6** и скопировать в буфер содержимое ячейки **F6** (клавишами "**Ctrl-Insert**");
- помещать курсор поочередно в поля левой части каждого из ограничений, то есть в **F10**, **F11** и **F12**, и вставлять в эти поля содержимое буфера (клавишами "**Shift-Insert**") (при этом номер ячеек во втором массиве формулы будет меняться на номер той строки, в которую была произведена вставка из буфера);
- на экране в полях **F10**, **F11** и **F12** появится 0 (нулевое значение) (см. рис. 1.2).

Проверка правильности введения формул

Для проверки правильности введенных формул производите поочередно двойное нажатие левой клавиши мыши на ячейки с формулами. При этом на экране рамкой будут выделяться ячейки, используемые в формуле (рис. 1.4 и 1.5).

Задание ЦФ

Дальнейшие действия производятся в окне "**Поиск решения**", которое вызывается из меню "**Сервис**" (рис. 1.6):

- поставьте курсор в поле "**Установить целевую ячейку**";
- введите адрес целевой ячейки **\$F\$6** или сделайте одно нажатие левой клавиши мыши на целевую ячейку в экранной форме — это будет равносильно вводу адреса с клавиатуры;

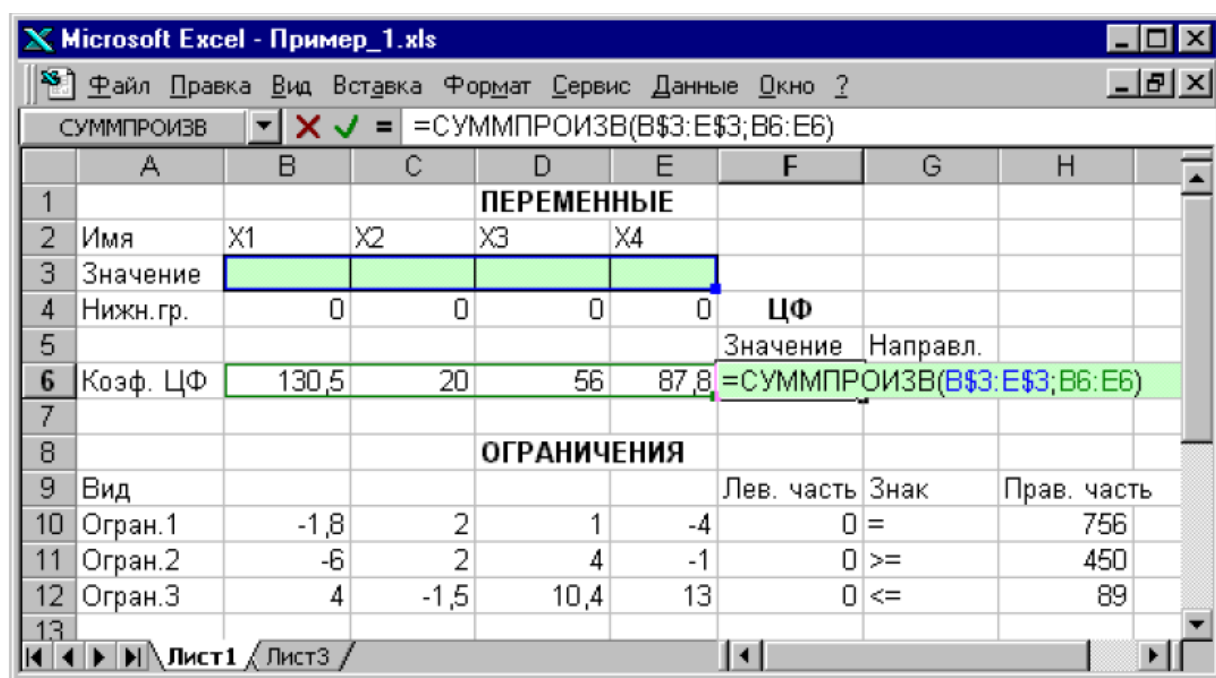


Рис. 1.4. Проверка правильности введения формулы в целевую ячейку F6

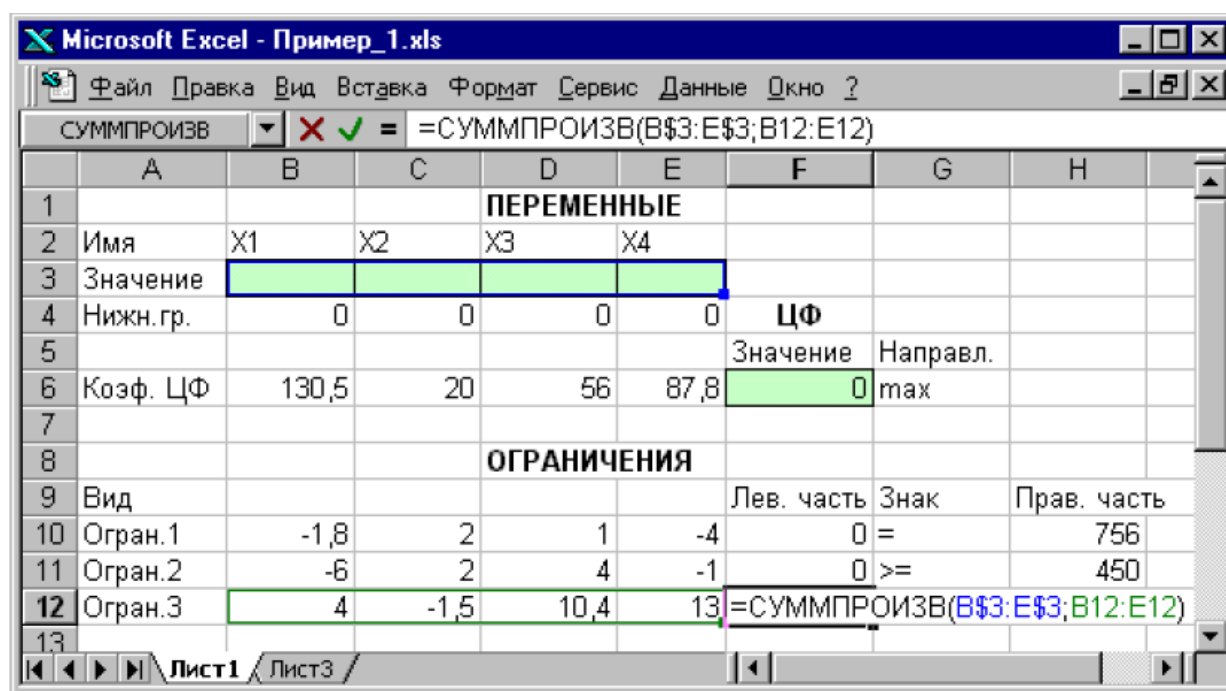


Рис. 1.5. Проверка правильности введения формулы в ячейку F12 для левой части ограничения 3

- введите направление оптимизации ЦФ, щелкнув один раз левой клавишей мыши по селекторной кнопке "максимальному значению".

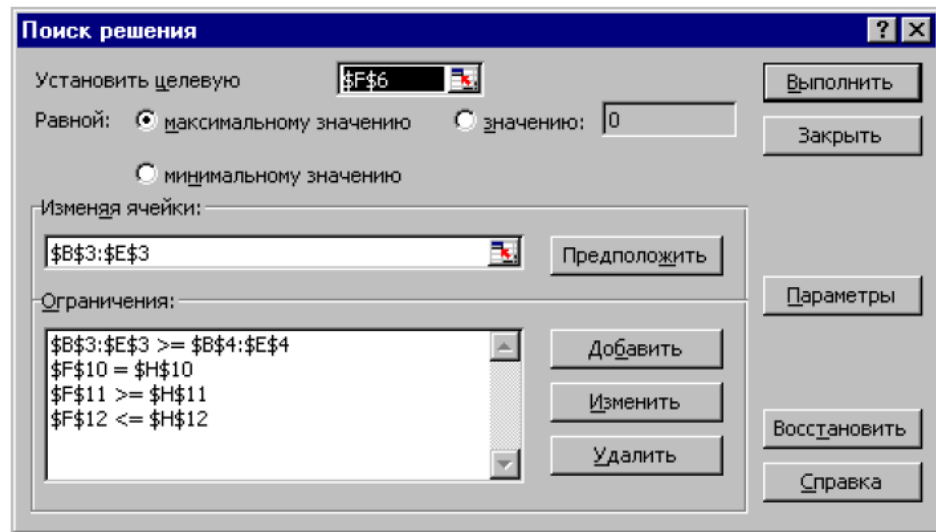


Рис. 1.6. Окно "Поиск решения" задачи (1.1)

Ввод ограничений и граничных условий

Задание ячеек переменных

В окно "Поиск решения" в поле "Изменяя ячейки" впишите адреса **SBS3:SES3**. Необходимые адреса можно вносить в поле "Изменяя ячейки" и автоматически путем выделения мышью соответствующих ячеек переменных непосредственно в экранной форме.

Задание граничных условий для допустимых значений переменных

В нашем случае на значения переменных накладывается только граничное условие неотрицательности, то есть их нижняя граница должна быть равна нулю (см. рис. 1.1).

- Нажмите кнопку "Добавить", после чего появится окно "Добавление ограничения" (рис. 1.7).
- В поле "Ссылка на ячейку" введите адреса ячеек переменных **SBS3:SES3**. Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью всех ячеек переменных непосредственно в экранной форме.
- В поле знака откройте список предлагаемых знаков и выберите $\geq$.
- В поле "Ограничение" введите адреса ячеек нижней границы значений переменных, то есть **SBS4:SES4**. Их также можно ввести путем выделения мышью непосредственно в экранной форме.

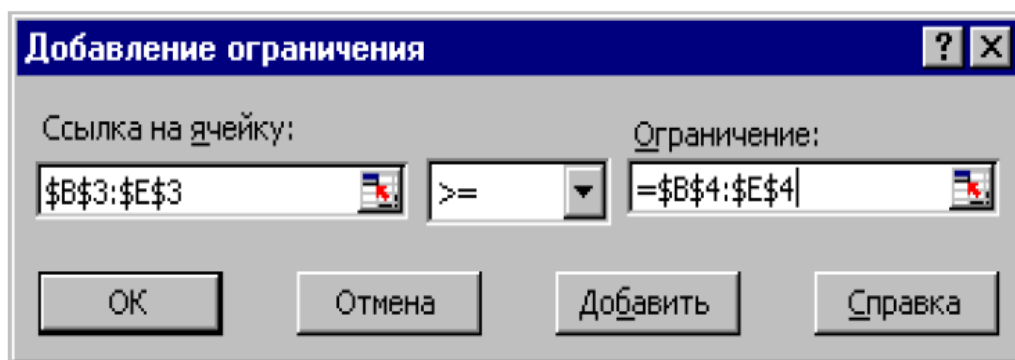


Рис. 1.7. Добавление условия неотрицательности переменных задачи (1.1)

Задание знаков ограничений $\leq$, $\geq$, $=$

- Нажмите кнопку "Добавить" в окне "Добавление ограничения".
- В поле "Ссылка на ячейку" введите адрес ячейки левой части конкретного ограничения, например **\$F\$10**. Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью нужной ячейки непосредственно в экранной форме.
- В соответствии с условием задачи (1.1) выбрать в поле знака необходимый знак, например $=$.
- В поле "Ограничение" введите адрес ячейки правой части рассматриваемого ограничения, например **\$H\$10**.
- Аналогично введите ограничения: **\$F\$11 $\geq$ \$H\$11**, **\$F\$12 $\leq$ \$H\$12**.
- Подтвердите ввод всех перечисленных выше условий нажатием кнопки **ОК**.

Окно "**Поиск решения**" после ввода всех необходимых данных задачи (1.1) представлено на рис. 1.6.

Если при вводе условия задачи возникает необходимость в изменении или удалении внесенных ограничений или граничных условий, то это делают, нажав кнопки "**Изменить**" или "**Удалить**" (см. рис. 1.6).

Решение задачи

Установка параметров решения задачи

Задача запускается на решение в окне "**Поиск решения**". Но предварительно для установления конкретных параметров решения задач оптимизации определенного класса необходимо нажать кнопку "**Параметры**" и заполнить некоторые поля окна "**Параметры поиска решения**" (рис. 1.8).

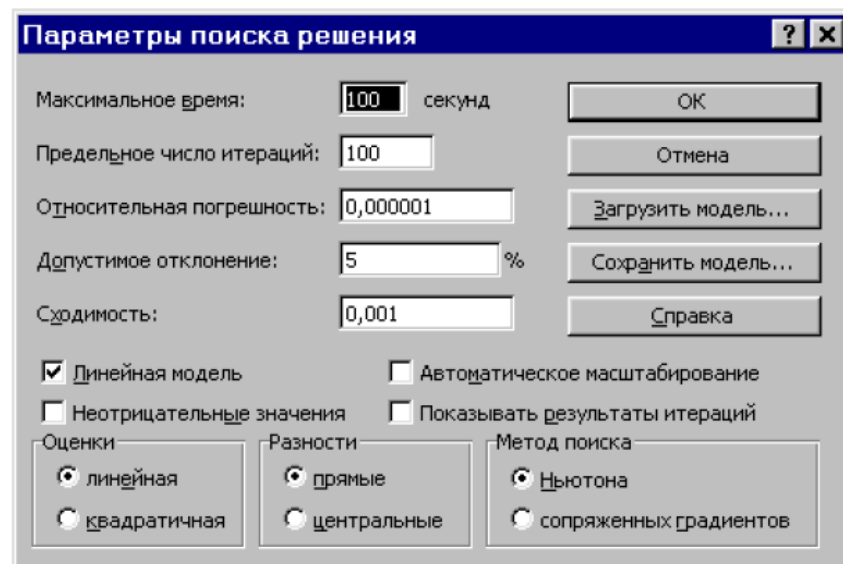


Рис. 1.8. Параметры поиска решения, подходящие для большинства задач ЛП

Параметр "**Максимальное время**" служит для назначения времени (в секундах), выделяемого на решение задачи. В поле можно ввести время, не превышающее 32 767 секунд (более 9 часов).

Параметр "**Относительная погрешность**" служит для задания точности, с которой определяется соответствие ячейки целевому значению или приближение к указанным границам. Поле должно содержать число из интервала от 0 до 1. Чем *меньше* количество десятичных знаков во введенном числе, тем *ниже* точность. Высокая точность увеличит время, которое требуется для того, чтобы сошелся процесс оптимизации.

Параметр "**Допустимое отклонение**" служит для задания допуска на отклонение от оптимального решения в целочисленных задачах. При указании большего допуска поиск решения заканчивается быстрее.

Параметр "**Сходимость**" применяется только при решении нелинейных задач.

Установка флажка "**Линейная модель**" обеспечивает ускорение поиска решения линейной задачи за счет применения симплекс-метода.

Подтвердите установленные параметры нажатием кнопки "ОК".

Запуск задачи на решение

Запуск задачи на решение производится из окна "**Поиск решения**" путем нажатия кнопки "**Выполнить**".

После запуска на решение задачи ЛП на экране появляется окно "Результаты поиска решения" с одним из сообщений, представленных на рис. 1.9, 1.10 и 1.11.

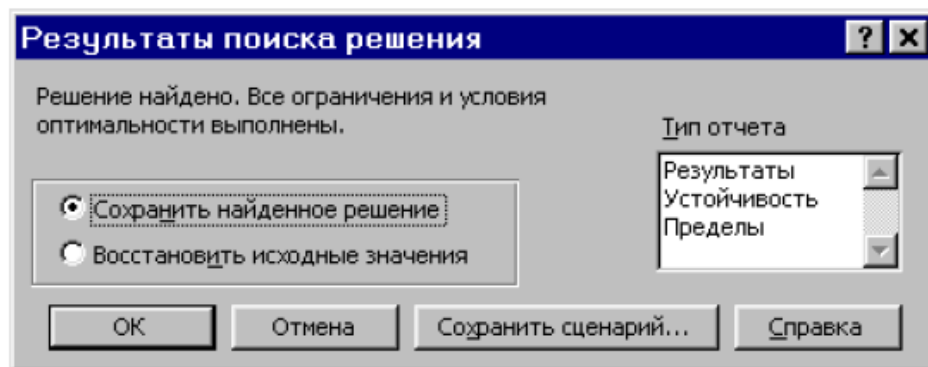


Рис. 1.9. Сообщение об успешном решении задачи

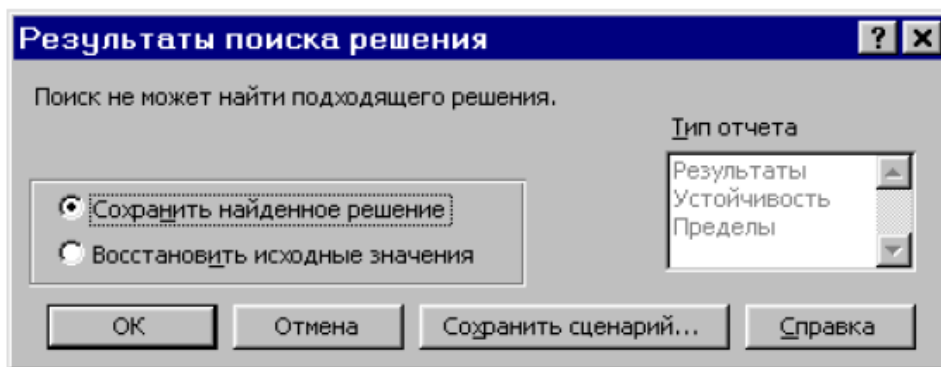


Рис. 1.10. Сообщение при несовместной системе ограничений задачи

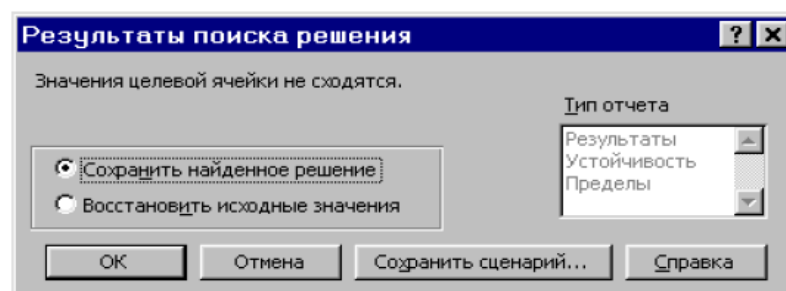


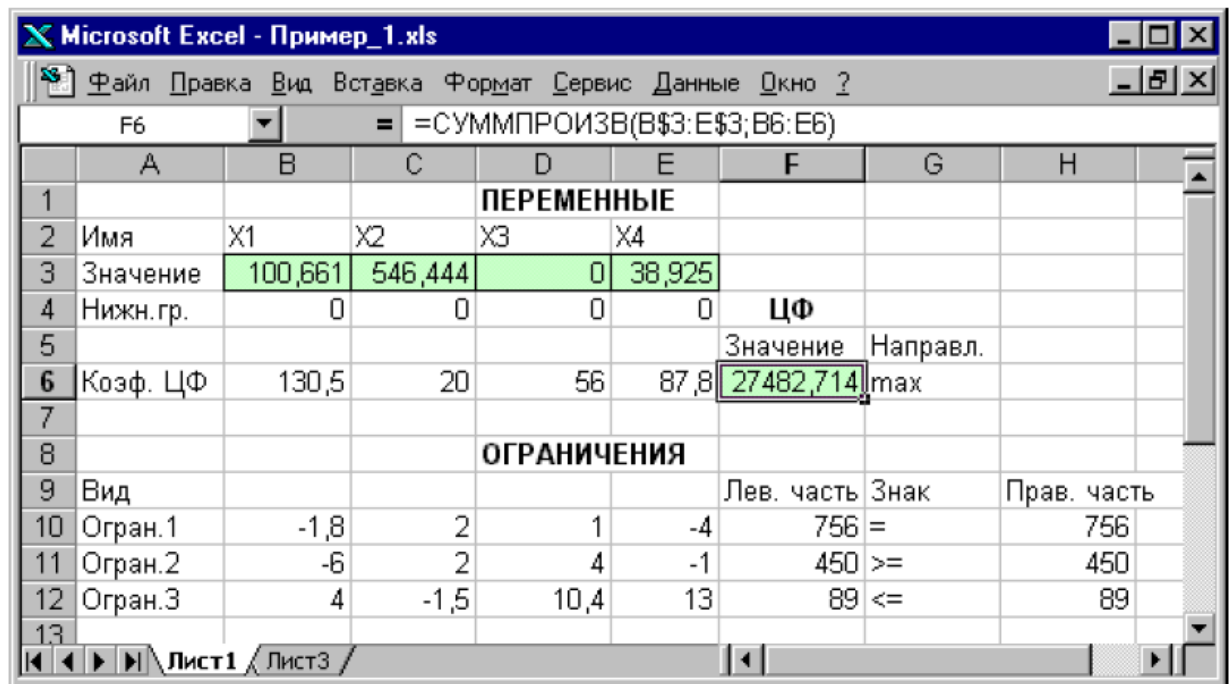
Рис. 1.11. Сообщение при неограниченности ЦФ в требуемом направлении

Иногда сообщения, представленные на рис. 1.10 и 1.11, свидетельствуют не о характере оптимального решения задачи, а о том, что при вводе условий задачи в Excel были допущены **ошибки**, не позволяющие Excel найти оптимальное решение, которое в действительности существует (см. ниже подразд. 1.3.5).

Если при заполнении полей окна "Поиск решения" были допущены ошибки, не позволяющие Excel применить симплекс-метод для решения задачи или довести ее решение до конца, то после запуска задачи на решение на экран

будет выдано соответствующее сообщение с указанием причины, по которой решение не найдено. Иногда слишком малое значение параметра **"Относительная погрешность"** не позволяет найти оптимальное решение. Для исправления этой ситуации увеличивайте погрешность поразрядно, например от 0,000001 до 0,00001 и т.д.

В окне **"Результаты поиска решения"** представлены названия трех типов отчетов: **"Результаты"**, **"Устойчивость"**, **"Пределы"**. Они необходимы при анализе полученного решения на чувствительность (см. ниже подразд. 3.3). Для получения же ответа (значений переменных, ЦФ и левых частей ограничений) прямо в экранной форме просто нажмите кнопку **"ОК"**. После этого в экранной форме появляется оптимальное решение задачи (рис. 1.12).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1				ПЕРЕМЕННЫЕ				
2	Имя	X1	X2	X3	X4			
3	Значение	100,661	546,444	0	38,925			
4	Нижн.гр.	0	0	0	0	ЦФ		
5						Значение	Направл.	
6	Козф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	27482,714	max	
7								
8				ОГРАНИЧЕНИЯ				
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4	756	=	756
11	Огран.2	-6	2	4	-1	450	>=	450
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13	89	<=	89
13								

Рис. 1.12. Экранная форма задачи (1.1) после получения решения

Целочисленное программирование

Допустим, что к условию задачи (1.1) добавилось требование целочисленности значений всех переменных. В этом случае описанный выше процесс ввода условия задачи необходимо *дополнить* следующими шагами.

- В экранной форме укажите, на какие переменные накладывается требование целочисленности (этот шаг делается для наглядности восприятия условия задачи) (рис. 1.13).

- В окне **"Поиск решения"** (меню **"Сервис"**→**"Поиск решения"**), нажмите кнопку **"Добавить"** и в появившемся окне **"Добавление ограничений"** введите ограничения следующим образом (рис. 1.14):

- в поле **"Ссылка на ячейку"** введите адреса ячеек переменных задачи, то есть **\$B\$3:\$E\$3**;

- в поле ввода знака ограничения установите **"целое"**;

- подтвердите ввод ограничения нажатием кнопки "ОК".

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	Имя	X1	X2	X3	X4			
3	Значение	100	546	0	39			
4	Нижн. гр.	0	0	0	0			
5	Целочисл.	целое	целое	целое	целое	Значение	Направл.	
6	Козф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	27394,2	max	
7								
8								
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4	756	=	756
11	Огран.2	-6	2	4	-1	453	>=	450
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13	88	<=	89
13								

Рис. 1.13. Решение задачи (1.1) при условии целочисленности ее переменных

Рис. 1.14. Ввод условия целочисленности переменных задачи (1.1)

На рис. 1.13 представлено решение задачи (1.1), к ограничениям которой добавлено условие целочисленности значений ее переменных.

Перечень вопросов к защите лабораторной работы

1. Каковы основные этапы решения задач ЛП в MS Excel?
2. Каков вид и способы задания формул для целевой ячейки и ячеек левых частей ограничений?
3. В чем смысл использования символа \$ в формулах MS Excel?
4. В чем различие использования в формулах MS Excel символов ";" и ":"?
5. Почему при вводе формул в ячейки ЦФ и левых частей ограничений в них отображаются нулевые значения?
6. Каким образом в MS Excel задается направление оптимизации ЦФ?

7. Какие ячейки экранной формы выполняют иллюстративную функцию, а какие необходимы для решения задачи?
8. Как наглядно отобразить в экранной форме ячейки, используемые в конкретной формуле, с целью проверки ее правильности?
9. Поясните общий порядок работы с окном "Поиск решения".
10. Каким образом можно изменять, добавлять, удалять ограничения в окне "Поиск решения"?
11. Какие сообщения выдаются в MS Excel в случаях: успешного решения задачи ЛП; несовместности системы ограничений задачи; неограниченности ЦФ?
12. Объясните смысл параметров, задаваемых в окне "Параметры поиска решения".
13. Каковы особенности решения в MS Excel целочисленных задач ЛП?
14. Каковы особенности решения в MS Excel двухиндексных задач ЛП?
15. Каковы особенности решения в MS Excel задач ЛП с булевыми переменными?

ЗАДАНИЕ

Предприятие может выпускать пять видов продукции И1, И2, И3, И4, И5. Для этого используется три вида ресурсов – сырье, трудовые и оборудование. Затраты на изготовление единицы каждого вида товара, объем потребляемых ресурсов и прибыль, получаемая предприятием на единицу продукции приведены в таблице:

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	40	25	30	20	30	3000
Рабочая сила, чел	22	14	18	25	22	400
Оборудование, станко/час	10	8	16	17	15	130
Прибыль на единицу товара, руб	1200	900	1500	1400	1900	

Требуется:

- 1) определить оптимальный план выпуска, максимизирующий прибыль;
- 2) насколько изменится оптимальное решение, если продукция будет измеряться в шт. (целочисленное).
- 3) насколько изменится оптимальное решение, если задана нижняя граница плана выпуска по каждому изделию (договорные обязательства)

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Вариант 1

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	34	37	37	31	44	4286
Рабочая сила, чел	18	17	22	19	23	354
Оборудование, станко/час	11	10	10	9	9	125
Прибыль на единицу товара, руб	1341	1102	967	1076	1415	

Вариант 2

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	21	40	27	45	22	4275
Рабочая сила, чел	21	18	25	15	19	484
Оборудование, станко/час	11	7	11	15	9	136
Прибыль на единицу товара, руб	1208	1023	1313	1183	944	

Вариант 3

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	32	44	50	26	39	3026
Рабочая сила, чел	21	18	17	23	15	392
Оборудование, станко/час	12	9	10	13	6	109
Прибыль на единицу товара, руб	1429	962	1120	1391	1359	

Вариант 4

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	43	42	33	37	25	2750
Рабочая сила, чел	16	23	19	24	20	379
Оборудование, станко/час	12	13	7	8	8	136
Прибыль на единицу товара, руб	1018	1348	1272	923	1015	

Вариант 5

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	28	31	41	25	26	2808
Рабочая сила, чел	17	19	16	15	24	393
Оборудование, станко/час	6	14	13	9	11	122
Прибыль на единицу товара, руб	1365	1313	1203	1485	1478	

Вариант 6

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	37	39	43	38	21	4307
Рабочая сила, чел	16	19	17	22	20	496
Оборудование, станко/час	7	13	14	11	7	101
Прибыль на единицу товара, руб	906	915	966	1105	1145	

Вариант 7

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	32	42	49	43	25	3127
Рабочая сила, чел	18	17	22	19	23	464
Оборудование, станко/час	7	11	15	15	13	100
Прибыль на единицу товара, руб	1330	1307	1365	1343	1384	

Вариант 8

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	39	48	27	23	23	3568
Рабочая сила, чел	17	22	18	25	17	444
Оборудование, станко/час	10	6	13	8	11	138
Прибыль на единицу товара, руб	1305	1248	1472	1380	1089	

Вариант 9

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	34	22	44	27	33	3775
Рабочая сила, чел	18	19	19	19	15	366
Оборудование, станко/час	9	14	13	10	6	141
Прибыль на единицу товара, руб	1050	937	978	1267	977	

Вариант 10

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	40	36	50	29	31	4464
Рабочая сила, чел	21	17	21	18	18	393
Оборудование, станко/час	13	10	13	6	14	126
Прибыль на единицу товара, руб	1249	969	1435	973	1022	

Вариант 11

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	40	45	20	45	35	3558
Рабочая сила, чел	25	17	16	24	20	455
Оборудование, станко/час	15	15	9	9	10	131
Прибыль на единицу товара, руб	915	1049	1195	1318	1180	

Вариант 12

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	21	25	34	36	44	2939
Рабочая сила, чел	17	25	17	25	20	428
Оборудование, станко/час	7	13	12	12	14	136
Прибыль на единицу товара, руб	1327	1094	1375	1499	1170	

Вариант 13

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	22	26	24	40	43	4030
Рабочая сила, чел	21	15	16	18	25	498
Оборудование, станко/час	11	14	7	7	6	136
Прибыль на единицу товара, руб	1495	1067	1430	1445	1212	

Вариант 14

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	37	40	29	25	21	3106
Рабочая сила, чел	24	25	21	15	16	380
Оборудование, станко/час	15	13	13	11	13	104
Прибыль на единицу товара, руб	986	1483	1057	1485	1383	

Вариант 15

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	29	25	48	46	39	3783
Рабочая сила, чел	17	18	25	16	25	498
Оборудование, станко/час	13	15	9	7	14	107
Прибыль на единицу товара, руб	1044	1166	1046	1099	1003	

Вариант 16

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	23	34	46	45	30	2913
Рабочая сила, чел	15	22	25	22	18	471
Оборудование, станко/час	7	12	8	9	11	113
Прибыль на единицу товара, руб	1051	919	968	1450	1212	

Вариант 17

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	29	29	48	38	28	3876
Рабочая сила, чел	15	20	17	17	23	407

Оборудование, станко/час	14	10	6	11	7	106
Прибыль на единицу товара, руб	1033	1322	1071	941	993	

Вариант 18

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	24	43	21	44	21	4217
Рабочая сила, чел	21	22	21	22	22	437
Оборудование, станко/час	12	8	7	14	12	135
Прибыль на единицу товара, руб	1299	1079	1400	1009	1096	

Вариант 19

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	40	28	35	45	32	4061
Рабочая сила, чел	20	23	19	19	16	469
Оборудование, станко/час	8	8	9	10	7	115
Прибыль на единицу товара, руб	933	1428	1326	1421	1363	

Вариант 20

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	45	35	49	46	36	3612
Рабочая сила, чел	17	15	20	19	18	491
Оборудование, станко/час	8	8	12	10	8	135
Прибыль на единицу товара, руб	1324	909	1049	1157	1415	

Вариант 21

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	44	23	36	49	27	3300
Рабочая сила, чел	17	19	23	22	22	384
Оборудование, станко/час	10	13	7	12	6	122
Прибыль на единицу товара, руб	1095	1494	1486	1176	1320	

Вариант 22

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	27	26	32	39	20	3761
Рабочая сила, чел	22	24	16	25	16	368
Оборудование, станко/час	11	13	14	8	14	100
Прибыль на единицу товара, руб	1474	1323	912	1274	902	

Вариант 23

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
--------	----	----	----	----	----	----------------

Сырье, кг	25	41	49	44	39	3041
Рабочая сила, чел	23	21	17	22	21	499
Оборудование, станко/час	6	9	7	6	13	102
Прибыль на единицу товара, руб	1126	1443	1223	1247	1076	

Вариант 24

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	35	21	21	45	28	3002
Рабочая сила, чел	15	21	20	25	24	434
Оборудование, станко/час	15	15	11	6	15	116
Прибыль на единицу товара, руб	1315	1215	955	1239	1017	

Вариант 25

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	22	20	41	43	44	4154
Рабочая сила, чел	19	21	17	19	21	436
Оборудование, станко/час	12	15	13	9	13	126
Прибыль на единицу товара, руб	972	1135	1174	923	1354	

Вариант 26

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	29	41	39	22	27	4174
Рабочая сила, чел	16	17	25	17	25	393
Оборудование, станко/час	9	10	15	15	13	127
Прибыль на единицу товара, руб	1271	1330	970	1288	1479	

Вариант 27

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	42	45	29	36	30	2650
Рабочая сила, чел	20	24	20	18	24	410
Оборудование, станко/час	14	7	10	14	10	105
Прибыль на единицу товара, руб	995	1268	1317	1086	1358	

Вариант 28

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	22	38	38	39	38	3977
Рабочая сила, чел	25	25	20	19	17	497
Оборудование, станко/час	10	11	14	15	13	122
Прибыль на единицу товара, руб	1260	1430	1119	948	941	

Вариант 29

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	37	23	25	30	47	2694
Рабочая сила, чел	18	16	25	24	23	396
Оборудование, станко/час	8	8	10	11	14	107
Прибыль на единицу товара, руб	1368	1397	1280	1387	1252	1372

Вариант 30

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	41	28	36	42	43	2963
Рабочая сила, чел	22	22	23	18	23	395
Оборудование, станко/час	7	10	10	12	11	107
Прибыль на единицу товара, руб	1340	1495	1151	1032	1242	

Вариант 31

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Объем ресурсов
Сырье, кг	44	23	36	49	27	3300
Рабочая сила, чел	17	19	23	22	22	384
Оборудование, станко/час	10	13	7	12	6	122
Прибыль на единицу товара, руб	1095	1494	1486	1176	1320	

3 Лабораторная работа 3

ОДНОИНДЕКСНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ. РЕШЕНИЕ В MS EXCEL

Цель работы: Приобретение навыков анализа чувствительности задач ЛП на основе различных типов отчетов, выдаваемых Microsoft Excel надстройки поиск решения.

Теоретическая часть

Задачи анализа оптимального решения на чувствительность. На практике многие экономические параметры (цены на продукцию и сырье, запасы сырья, спрос на рынке, заработная плата и т.д.) с течением времени меняют свои значения. Поэтому оптимальное решение задачи ЛП, полученное для конкретной экономической ситуации, после ее изменения может оказаться непригодным или неоптимальным. В связи с этим возникает задача анализа чувствительности задачи ЛП, а именно того, как возможные изменения параметров исходной модели повлияют на полученное ранее оптимальное решение.

Ограничения линейной модели классифицируются следующим образом (рис. 3.1). Связывающие ограничения проходят через оптимальную точку, например (1) и (2). Не связывающие ограничения не проходят через оптимальную точку, например (3), (4) и (5). Аналогично ресурс, представляемый связывающим ограничением, называют дефицитным, а ресурс, представляемый не связывающим ограничением, – недефицитным.

Ограничение называют избыточным в том случае, если его исключение не влияет на область допустимых решений и, следовательно, на оптимальное решение, например, (5). Выделяют следующие три задачи анализа на чувствительность.

1. Анализ сокращения или увеличения ресурсов:

1) на сколько можно увеличить (ограничения типа $\leq$) или уменьшить (ограничения типа $\geq$) запас дефицитного ресурса для улучшения оптимального значения ЦФ?

2) на сколько можно уменьшить (ограничения типа $\leq$) или увеличить (ограничения типа $\geq$) запас недефицитного ресурса при сохранении полученного оптимального значения ЦФ?

2. Увеличение (уменьшение) запаса какого из ресурсов наиболее выгодно?

3. Анализ изменения целевых коэффициентов: каков диапазон изменения коэффициентов ЦФ, при котором не меняется оптимальное решение?

Графический анализ оптимального решения на чувствительность

Область допустимых решений задачи на рис. 3.1 – многоугольник $OABCDE$. Если связывающее ограничение (дефицитный ресурс) (2) передвигать до точки F , то это приведет к расширению области допустимых решений до многоугольника $OABCFE$ и к получению нового оптимального решения в точке F . При этом ограничение (2) станет избыточным. Новое решение (F) лучше прежнего (C), поскольку для пересечения с точкой F линия ЦФ должна пройти по направлению вектора (выходящего из начала координат и показывающего направление максимизации ЦФ) дальше точки C (рис. 3.2).

Таким образом, чтобы графически определить максимальное изменение запаса дефицитного ресурса, улучшающее оптимальное решение, необходимо передвигать соответствующую прямую в направлении улучшения ЦФ до тех пор, пока это ограничение не станет избыточным.

Графический анализ максимально возможного изменения запаса недефицитного ресурса показан на рис. 3.3. Передвинем не связывающее ограничение (3) до пересечения с оптимальным решением в точке C .

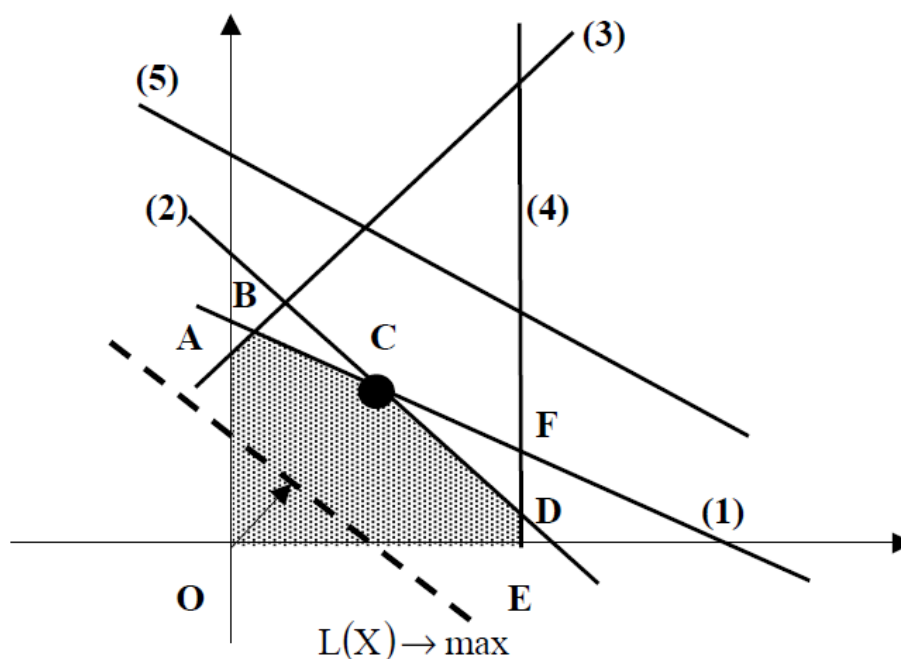


Рис. 3.1. Исходная задача ЛП для графического анализа чувствительности

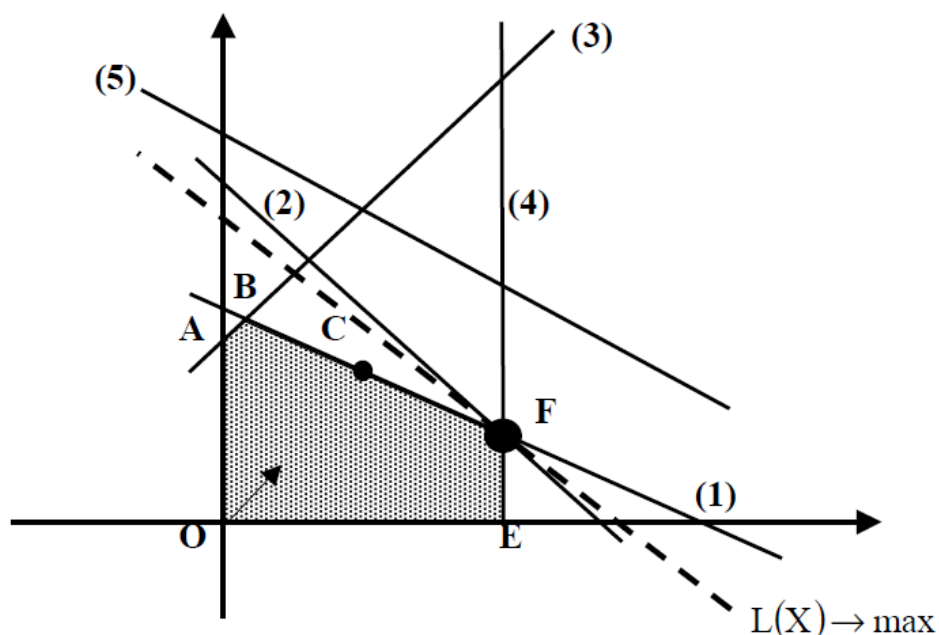


Рис. 3.2. Анализ максимального изменения запаса дефицитного ресурса (2) с целью улучшения оптимального решения $C \rightarrow F$

Это соответствует уменьшению запаса недефицитного ресурса (3), который в оптимальной точке C исходной задачи (см. рис. 3.1) расходовался не полностью. Областью допустимых решений станет многоугольник OGCDE.

Оптимальное решение останется прежним (точка C). Таким образом, чтобы графически определить максимальное изменение запаса недефицитного ресурса, не меняющее оптимального решения, необходимо передвигать соответствующую прямую до пересечения с оптимальной точкой.

Для того чтобы выяснить, запас какого из дефицитных ресурсов выгоднее увеличивать в первую очередь, необходимо определить, какую пользу (например, прибыль) принесет увеличение запасов каждого из них на единицу. Для этих целей вводится понятие ценности дополнительной единицы i -го ресурса (теневая цена):

$$y_i = \frac{\text{МАХ приращение оптимального значения } L(X)}{\text{МАХ допустимый прирост объема } i \text{ - го ресурса}}$$

То есть, сначала наращивается запас ресурса, имеющего максимальное значение y_i , затем — второе по величине и т.д.

Графический анализ изменения целевых коэффициентов (например, цен на производимую продукцию), не приводящих к изменению оптимального решения, проводится путем вращения линии ЦФ. При увеличении коэффициента ЦФ c_1 или уменьшении коэффициента c_2 целевая прямая на графике вращается вокруг оптимальной точки по часовой стрелке.

Если c_1 уменьшается или же увеличивается c_2 , то целевая прямая вращается вокруг оптимальной точки против часовой стрелки (рис. 3.4).

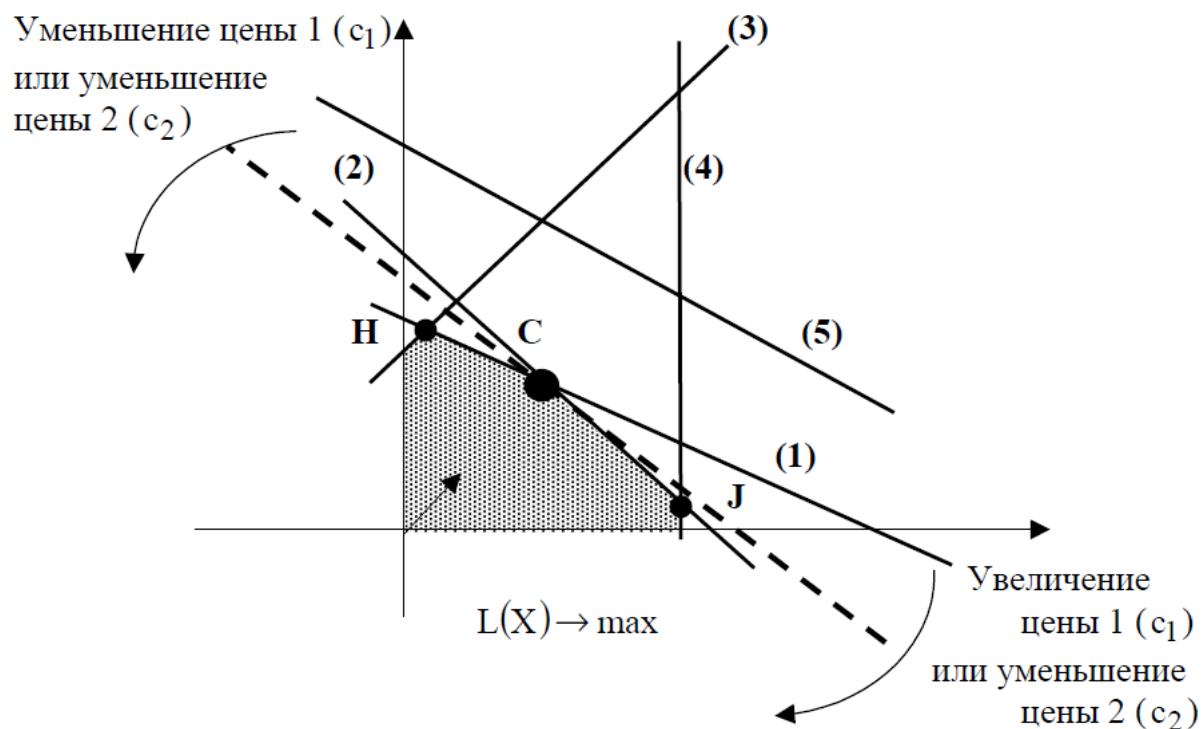


Рис. 3.4. Анализ изменения коэффициентов c_1 и c_2 ЦФ

Зафиксируем значение c_2 . Оптимальное решение в точке C не будет меняться при увеличении c_1 до тех пор, пока целевая прямая не совпадет с прямой (2). Аналогично оптимальное решение в точке C не будет меняться при уменьшении c_1 до тех пор, пока целевая прямая не совпадет с прямой (1). При таких поворотах точка C будет оставаться оптимальной до тех пор, пока наклон целевой прямой не выйдет за пределы, определяемые наклоном прямых ограничений (1) и (2). Если целевая прямая выйдет за пределы наклона (1) или (2), то оптимальной станет соответственно точка H или J .

Таким образом, нижний и верхний пределы изменения цены 1 определяются значениями коэффициента c_1 , при которых наклон целевой прямой совпадает соответственно с наклонами прямых ограничений (1) и (2).

Анализ оптимального решения на чувствительность в Excel

1. Для задачи, решенной в лабораторной работе № 3 (часть I), получите в Excel все типы отчетов по результатам поиска решения, необходимые для анализа чувствительности.

2. Проанализируйте задачу на чувствительность к изменениям параметров исходной модели.

3. Результаты анализа задачи на чувствительность внесите в общий отчет по лабораторной работе № 3.

Проведем анализ чувствительности задачи из лабораторной работы №2 (часть I).

	E4								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			ПЕРЕМЕННЫЕ						
2		X1	X2	X3	X4				
3	Значение	1	1	1	1				
4	Нижн граница	0	0	0	0				
5	Целоч	целое	целое	целое	целое	ЦФ	Направление		
6	Козф цел. Функции	130,5	20	56	87,8	294,3	max		
7									
8			ОГРАНИЧЕНИЯ						
9	Вид					Лев. часть	Знак	Пр. часть	
10	Огран 1	-1,8	2	1	-4	-2,8	"=	756	
11	Огран 2	-6	2	4	-1	-1	">="	450	
12	Огран 3	4	-1,5	10,4	13	25,9	"<="	89	
13									
14									
15									

Для этого необходимо после запуска в Excel задачи на решение в окне "Результаты поиска решения" выделить с помощью мыши два типа отчетов: "Результаты" и "Устойчивость" и "Пределы" (рис. 3.5).

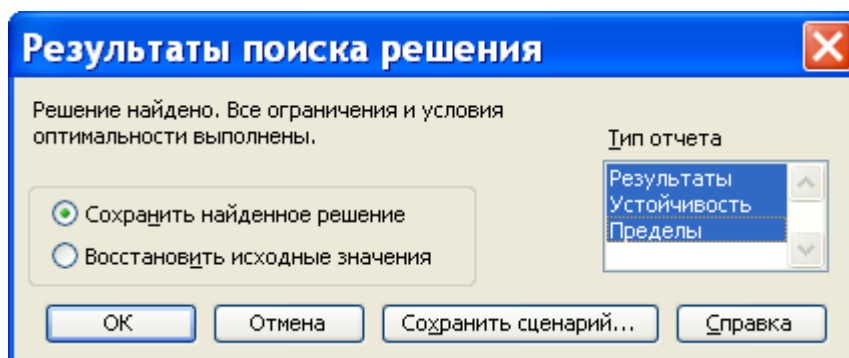


Рис. 3.5 Выделение типов отчетов требуемых для анализа чувствительности

Отчет по результатам состоит из трех таблиц (рис. 3.6):

- 1) таблица 1 содержит информацию о целевой функции (ЦФ);
- 2) таблица 2 содержит информацию о значениях переменных, полученных в результате решения задачи;
- 3) таблица 3 показывает результаты оптимального решения для ограничений и для граничных условий.

A1		Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам							
A	B	C	D	E	F	G	H	I	
1	Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам								
2	Рабочий лист: [ПР 3_4.xls]Лист1								
3	Отчет создан: 01.04.2013 10:22:20								
4									
5									
6	Целевая ячейка (Максимум)								
7	Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат					
8	\$F\$6	Козф цел. Функции ЦФ	294,3	27482,71351					
9									
10									
11	Изменяемые ячейки								
12	Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат					
13	\$B\$3	Значение X1	1	100,6606606					
14	\$C\$3	Значение X2	1	546,4444444					
15	\$D\$3	Значение X3	1	0					
16	\$E\$3	Значение X4	1	38,92492492					
17									
18									
19	Ограничения								
20	Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница			
21	\$F\$10	Огран 1 Лев. часть	755,9999999	\$F\$10=\$H\$10	не связан.	0			
22	\$F\$11	Огран 2 Лев. часть	450	\$F\$11>=\$H\$11	связанное	0			
23	\$F\$12	Огран 3 Лев. часть	89	\$F\$12<=\$H\$12	связанное	0			
24	\$B\$3	Значение X1	100,6606606	\$B\$3>=\$B\$4	не связан.	100,6606606			
25	\$C\$3	Значение X2	546,4444444	\$C\$3>=\$C\$4	не связан.	546,4444444			
26	\$D\$3	Значение X3	0	\$D\$3>=\$D\$4	связанное	0			
27	\$E\$3	Значение X4	38,92492492	\$E\$3>=\$E\$4	не связан.	38,92492492			
28									
29									
30									

Рис. 3.6 Лист отчета по результатам

В отчете для каждого ограничения приводятся:

- значение левой части ограничения;
- формула, определяющая ограничение;
- состояние ограничения (связанное или несвязанное);
- разница между правой и левой частями ограничения.

Если разница между правой и левой частями ограничения равна нулю, то ограничение считается связанным, в противном случае - несвязанным. В частности если ограничение моделирует использование некоторого вида ресурса, то экономический смысл разницы - остаток этого ресурса

Если ресурс используется полностью (то есть ресурс дефицитный), то в графе "Статус" ("Состояние") соответствующее ограничение указывается как "связанное"; при неполном использовании ресурса (то есть ресурс недефицитный) в этой графе указывается "не связан". В графе "Значение" приведены величины использованного ресурса.

Для граничных условий в графе "Разница" показана разность между значением переменной в найденном оптимальном решении и заданным для нее граничным условием.

Таблица 3 отчета по результатам дает информацию для анализа возможного изменения запасов недефицитных ресурсов при сохранении полученного оптимального значения ЦФ. Так, если на ресурс наложено ограничение типа $\geq$, то в графе "Разница" дается количество ресурса, на которое была превышена минимально необходимая норма.

Отчет по устойчивости состоит из двух таблиц (рис. 3.7).

Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости				
Рабочий лист: [ЛР 3_4.xls]Лист1				
Отчет создан: 01.04.2013 10:22:21				
Изменяемые ячейки				
Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. градиент	
\$B\$3	Значение X1	100,6606606	0	
\$C\$3	Значение X2	546,4444444	0	
\$D\$3	Значение X3	0	-104,4145901	
\$E\$3	Значение X4	38,92492492	0	
Ограничения				
Ячейка	Имя	Результ. значение	Лагранжа Множитель	
\$F\$10	Огран 1 Лев.часть	755,9999999	47,69819767	
\$F\$11	Огран 2 Лев.часть	450	-22,94954893	
\$F\$12	Огран 3 Лев.часть	89	19,66486498	

Рис. 3.7 Лист отчета по устойчивости

В отчете о чувствительности содержатся сведения, показывающие, как влияют на решение задачи изменения в величинах, входящих в формулы, используемые в задаче.

В EXCEL предусмотрено два вида отчета о чувствительности в зависимости от вида модели - линейная или нелинейная. Напомним, что вид модели определяется флажком "Линейная модель" в диалоговом окне "Параметры поиска решения".

Таблица 1 содержит информацию, относящуюся к переменным.

1. Результат решения задачи.
2. Нормир. градиент (или нормированная стоимость), которая показывает, насколько изменится значение ЦФ в случае принудительного включения единицы этой продукции в оптимальное решение.

Таблица 2 (см. рис. 3.7) содержит информацию, относящуюся к ограничениям.

1. Величина использованных ресурсов в колонке "Результ. значение".
2. Множитель Лагранжа показывает, на сколько изменится (в нашем случае увеличится) значение в целевой ячейке при увеличении запаса некоторого ресурса на одну единицу.

Отчет по пределам (рис 3.8) содержит (результатирующее) оптимальное значение целевой ячейки, а также результирующие (оптимальные) значения изменяемых ячеек с их нижними и верхними пределами и соответствующими целевыми результатами. Результаты показывают, на сколько можно уменьшить (устранить излишек) или увеличить (повысить минимально необходимое требование) ресурс, сохранив при этом оптимальное решение.

Нижний предел - это наименьшее значение, которое может иметь изменяемая ячейка при условии, что ограничения еще выполняются, а значения остальных изменяемых ячеек фиксированы (равны оптимальным).

Верхний предел - это наибольшее значение, которое может иметь изменяемая ячейка при условии, что ограничения еще выполняются, а значения остальных изменяемых ячеек фиксированы (равны оптимальным).

Целевой результат - это значение целевой ячейки, когда значение изменяемой ячейки равно ее нижнему или верхнему пределу.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по пределам										
1	Microsoft Excel 11.0 Отчет по пределам									
2	Рабочий лист: [ЛР 3_4.xls]Отчет по пределам 1									
3	Отчет создан: 01.04.2013 10:22:21									
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										
11										
12										
13										
14										
15										
16										
17										
18										
19										
20										
21										

Целевое		
Ячейка	Имя	Значение
\$F\$6	Козф цел. Функции ЦФ	27482,71351

Изменяемое			Нижний		Целевой		Верхний		Целевой	
Ячейка	Имя	Значение	предел	результат	предел	результат	предел	результат	предел	результат
\$B\$3	Значение X1	100,6606606	100,6606603	27482,71347	100,6606603	27482,71347	100,6606603	27482,71347	100,6606603	27482,71347
\$C\$3	Значение X2	546,4444444	546,4444444	27482,71351	546,4444444	27482,71351	546,4444444	27482,71351	546,4444444	27482,71351
\$D\$3	Значение X3	0	0	27482,71351	0	27482,71351	0	27482,71351	0	27482,71351
\$E\$3	Значение X4	38,92492492	38,92492476	27482,71349	38,92492476	27482,71349	38,92492476	27482,71349	38,92492476	27482,71349

Рис. 3.8 Лист отчета по пределам

Примерные вопросы для защиты работы

1. Что такое связывающие, несвязывающие, избыточные ограничения;

дефицитные и недефицитные ресурсы?

2. Каковы предпосылки и основные задачи анализа оптимального решения на чувствительность?

3. Как графически проводится анализ изменения запаса дефицитных ресурсов?

4*. Каким образом, опираясь на результаты графического анализа, можно численно рассчитать новый (улучшенный) запас дефицитного ресурса?

5. Как графически проводится анализ изменения запаса недефицитных ресурсов?

6*. Каким образом, опираясь на результаты графического анализа, можно численно рассчитать новый запас недефицитного ресурса?

7. Что такое ценность дополнительной единицы i -го ресурса?

8. Как проводится графический анализ изменения коэффициентов ЦФ?

9*. Как численно определить диапазон изменения коэффициентов ЦФ, не изменяющий оптимального решения?

10. Какую информацию о чувствительности оптимального решения задачи ЛП можно получить из отчета по результатам и отчета по устойчивости?

11. Проанализируйте на чувствительность задачу о производстве полок (согласно своему варианту)?

ЗАДАНИЕ

Провести анализ чувствительности оптимального решения для задачи из лабораторной работы 3 согласно вариантам.

4 Лабораторная работа 4

ДВУХИНДЕКСНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА. РЕШЕНИЕ В MS EXCEL

Цель работы: Приобретение навыков построения математических моделей стандартных транспортных задач ЛП и решения их в Microsoft Excel.

Теоретическая часть

Пусть имеется некоторый однородный продукт, сосредоточенный на m пунктах отправления (складах), так что на i -м складе находится a_i единиц этого продукта. Этот продукт необходимо доставить в n пунктов назначения (потребления), причем на j -й пункт необходимо доставить b_j единиц продукта. Запасы и потребности сбалансированы, то есть

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = A,$$

то есть наличие продукта равно потребности в нем.

Пусть стоимость перевозки единицы продукта из i -го склада в j -й пункт назначения равна c_{ij} . Пусть x_{ij} есть то количество продукта, которое перевозится из i -го склада в j -й пункт потребления.

Тогда общие транспортные расходы составят величину

$$\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}.$$

Из каждого склада весь продукт должен быть вывезен. Это значит, что должно быть выполнено условие

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i.$$

С другой стороны, потребности j -го пункта назначения должны быть полностью удовлетворены. Это означает, что

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j.$$

Желание минимизировать транспортные расходы приводит нас к следующей задаче:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} &\Rightarrow \min \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}, \\ x_{ij} \geq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

являющейся типичной задачей линейного программирования.

Определение 3.1. Транспортная задача называется открытой транспортной задачей, если условие баланса нарушаются; в случае выполнения условия баланса она называется сбалансированной транспортной задачей.

Приведение открытой транспортной задачи к сбалансированной
Превышение запасов над потребностями.

В этом случае вводится “фиктивный” $n + 1$ потребитель с потребностями равными абсолютной величине разности между общим количеством запасов и общим количеством требуемых единиц. Стоимость по доставке будет для $n + 1$ потребителя равна 0, т.к. поставки фактически нет.

Превышение потребностей над запасами.

Вводим “фиктивного” $m + 1$ производителя (склад) с потребностями равными абсолютной величине разности между общим количеством запасов и общим количеством требуемых единиц. Стоимость по доставке будет для $m + 1$ производителя равна 0, т.к. поставки фактически нет.

Пример. Оптимальная организация транспортных перевозок штучного товара со склада в магазин.

Таблица 1.2

Исходные данные транспортной задачи

Тарифы, руб./шт.	1-й магазин	2-й магазин	3-й магазин	Запасы, шт.
1-й склад	2	9	7	25
2-й склад	1	0	5	50
3-й склад	5	4	100	35
4-й склад	2	3	6	75
Потребности, шт.	45	90	50	

Целевая функция и ограничения данной задачи имеют вид

$$\begin{aligned}
 L(X) = & 2x_{11} + 9x_{12} + 7x_{13} + x_{21} + 5x_{23} + 5x_{31} + \\
 & + 4x_{32} + 100x_{33} + 2x_{41} + 3x_{42} + 6x_{43} \rightarrow \min; \\
 & \left\{ \begin{array}{l}
 x_{11} + x_{12} + x_{13} = 25, \\
 x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50, \\
 x_{31} + x_{32} + x_{33} = 35, \\
 x_{41} + x_{42} + x_{43} = 75, \\
 x_{11} + x_{21} + x_{31} = 45, \\
 x_{12} + x_{22} + x_{32} = 90, \\
 x_{13} + x_{23} + x_{33} = 50, \\
 \forall x_{ij} \geq 0, \forall x_{ij} - \text{целые } (i = \overline{1,4}; j = \overline{1,3}).
 \end{array} \right. \quad (1.5)
 \end{aligned}$$

Экранные формы, задание переменных, целевой функции, ограничений и граничных условий двухиндексной задачи (1.5) и ее решение представлены на рис. 1.15, 1.16, 1.17 и в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Формулы экранной формы задачи (1.5)

Объект математической модели	Выражение в Excel
Переменные задачи	C3:E6
Формула в целевой ячейке F15	=СУММПРОИЗВ(C3:E6;C12:E15)
Ограничения по строкам в ячейках F3, F4, F5, F6	=СУММ(C3:E3) =СУММ(C4:E4) =СУММ(C5:E5) =СУММ(C6:E6)
Ограничения по столбцам в ячейках C7, D7, E7	=СУММ(C3:C6) =СУММ(D3:D6) =СУММ(E3:E6)
Суммарные запасы и потребности в ячейках H8, G9	=СУММ(H3:H6) =СУММ(C9:E9)

Microsoft Excel - Пример_2.xls									
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно ?									
F15		=СУММПРОИЗВ(C3:E6;C12:E15)							
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		ПЕРЕМЕННЫЕ				ОГРАНИЧЕНИЯ			
2		целые	xi1	xi2	xi3	Лев. часть	Знак	Прав. часть	
3		x1j				0	=	25	
4		x2j				0	=	50	
5		x3j				0	=	35	
6		x4j				0	=	75	
7	ОГРАНИЧЕНИЯ	Лев. часть	0	0	0				
8		Знак	=	=	=			185	
9		Прав. часть	45	90	50		185	БАЛАНС	
10									
11		ТАРИФЫ	xi1	xi2	xi3				
12		x1j		2	9	7			
13		x2j		1	0	5			
14		x3j		5	4	100	ЦФ		
15		x4j		2	3	6	Значение	Направление	
16							0	min	

Рис. 1.15. Экранная форма двухиндексной задачи (1.5)
(курсор в целевой ячейке F15)

Поиск решения		?	X
Установить целевую	\$F\$15	Выполнить	
Равной:	☐ максимальному значению ☐ значению: 0	Заккрыть	
	☒ минимальному значению		
Изменяя ячейки:	\$C\$3:\$E\$6	Предположить	
Ограничения:	\$C\$3:\$E\$6 = целое \$C\$3:\$E\$6 >= 0 \$C\$7:\$E\$7 = \$C\$9:\$E\$9 \$F\$3:\$F\$6 = \$H\$3:\$H\$6	Добавить Изменить Удалить	
		Параметры	
		Восстановить	
		Справка	

Рис. 1.16. Ограничения и граничные условия задачи (1.5)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		ПЕРЕМЕННЫЕ				ОГРАНИЧЕНИЯ			
2		целые	x1	x2	x3	Лев. часть	Знак	Прав. часть	
3		x1j	25	0	0	25	=	25	
4		x2j	0	50	0	50	=	50	
5		x3j	0	35	0	35	=	35	
6		x4j	20	5	50	75	=	75	
7	ОГРАНИЧЕНИЯ	Лев. часть	45	90	50				
8		Знак	=	=	=				185
9		Прав. часть	45	90	50			185	БАЛАНС
10									
11		ТАРИФЫ	x1	x2	x3				
12		x1j	2	9	7				
13		x2j	1	0	5	ЦФ			
14		x3j	5	4	100	Значение	Направление		
15		x4j	2	3	6	545	min		
16									

Рис. 1.17. Экранная форма после получения решения задачи (1.5)
(курсор в целевой ячейке F15)

ЗАДАНИЕ

Пусть необходимо организовать оптимальные по транспортным расходам оборудования с трех складов в 12 промыслов. Ежемесячные запасы оборудования на складах равны 120, 270 и 300 единиц, а ежемесячные потребности нефтяных промыслов составляют 60, 90, 70, 100, 70, 100, 80, 110, 110, 130, 75 и 90 шт. соответственно.

Транспортные расходы (руб./ед) по доставке оборудования представлены в табл.. Между складом № X и промыслом № Y заключен договор о гарантированной поставке M единиц оборудования ежемесячно.

В связи с ремонтными работами временно невозможна перевозка из склада № X1 и промысла № Y1.

Найти оптимальный план перевозок, минимизирующий затраты.

Вариант 1

		Потребители- промысла											
	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		121	107	84	125	119	97	129	109	90	109	75	69
Склад 1	351	418	330	247	237	442	442	360	420	473	232	418	222
Склад 2	288	219	332	392	494	403	250	420	487	218	481	423	435
Склад 3	468	484	396	416	238	396	279	489	482	339	398	238	241

X= 1 Y= 12 M= 50 X1= 3 Y1= 6

Вариант 2

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		61	88	81	103	107	76	93	112	89	102	113	113
Склад 1	449	280	231	208	462	254	355	457	346	400	430	314	245
Склад 2	359	395	475	236	436	363	428	377	351	337	256	247	348
Склад 3	342	489	479	309	363	246	217	308	439	281	422	221	462

x=	1	y=	2	m=	70	x1=	1	y1=	9
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 3

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		121	130	125	71	96	110	89	63	74	117	65	92
Склад 1	332	453	220	491	317	472	408	447	219	320	441	415	500
Склад 2	248	467	393	389	309	254	249	352	215	341	347	225	232
Склад 3	440	270	269	313	462	232	329	377	238	392	302	304	458

x=	3	y=	12	m=	62	x1=	2	y1=	3
----	---	----	----	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 4

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		77	127	95	85	105	105	123	129	65	106	82	90
Склад 1	258	283	449	492	401	287	256	361	301	271	296	298	470
Склад 2	499	272	331	335	322	203	418	360	399	312	279	488	275
Склад 3	366	306	203	282	369	381	311	281	403	307	347	416	227

x=	3	y=	3	m=	54	x1=	1	y1=	1
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 5

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		108	81	127	95	123	102	94	92	74	122	61	78
Склад 1	437	254	295	497	202	234	377	425	220	249	439	441	406
Склад 2	417	340	200	277	452	219	207	417	437	265	229	398	466
Склад 3	273	296	484	493	313	321	352	326	209	357	447	297	491

x=	2	y=	4	m=	68	x1=	1	y1=	1
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 6

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		98	109	69	95	98	83	120	75	126	86	71	62
Склад 1	282	379	489	317	433	426	305	407	256	461	295	254	363
Склад 2	269	360	229	440	313	399	453	418	213	478	467	455	466

Склад 3	313	382	263	256	246	256	255	412	256	284	348	267	451
---------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

X=	2	Y=	3	M=	61	X1=	1	Y1=	9
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 7

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		83	111	94	93	110	117	90	91	124	101	129	98
Склад 1	439	423	257	448	245	462	334	238	307	366	373	382	462
Склад 2	494	437	495	290	330	268	306	486	336	427	244	307	346
Склад 3	378	256	401	460	272	363	334	371	298	314	277	352	345

X=	3	Y=	11	M=	51	X1=	2	Y1=	6
----	---	----	----	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 8

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		88	101	78	81	95	98	67	102	74	102	97	75
Склад 1	428	318	228	352	412	204	427	403	204	333	494	357	291
Склад 2	310	201	337	358	468	244	396	256	284	326	378	470	296
Склад 3	361	342	428	356	436	447	249	370	350	271	311	491	204

X=	2	Y=	4	M=	62	X1=	3	Y1=	9
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 9

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		67	86	116	88	63	76	74	117	128	101	69	105
Склад 1	394	478	430	259	421	489	328	311	317	338	406	386	286
Склад 2	211	406	488	387	319	430	433	496	422	479	438	234	269
Склад 3	386	359	461	443	425	218	397	423	360	246	403	442	319

X=	1	Y=	2	M=	60	X1=	2	Y1=	10
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	----

Вариант 10

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		81	105	108	69	67	127	113	93	62	70	85	77
Склад 1	455	313	220	405	464	474	380	231	371	342	338	288	259
Склад 2	306	429	339	401	222	394	447	203	415	253	324	457	244
Склад 3	362	434	270	447	325	335	373	262	500	327	492	297	357

X=	2	Y=	5	M=	69	X1=	3	Y1=	6
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 11

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
--	--------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----

<i>потребность</i>		127	109	99	124	91	76	121	67	129	130	120	68
Склад 1	228	238	266	273	476	300	435	285	240	252	393	323	336
Склад 2	345	270	439	472	257	328	385	266	207	204	417	300	477
Склад 3	224	343	394	422	346	239	268	481	317	299	399	493	263

x=	3	y=	12	M=	66	x1=	2	y1=	12
----	---	----	----	----	----	-----	---	-----	----

Вариант 12

Потребители- промысла

	<i>запасы</i>	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
<i>потребность</i>		67	100	129	76	103	79	73	127	90	76	105	105
Склад 1	368	242	396	283	377	405	349	459	324	409	432	495	367
Склад 2	374	275	391	236	488	415	344	300	498	345	413	318	389
Склад 3	340	269	291	457	326	248	349	464	398	271	251	219	362

x=	1	y=	5	M=	58	x1=	1	y1=	9
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 13

Потребители- промысла

	<i>запасы</i>	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
<i>потребность</i>		79	96	125	82	93	81	99	67	82	100	106	72
Склад 1	389	257	497	331	418	335	204	415	360	291	238	235	473
Склад 2	410	423	272	361	273	457	352	333	395	216	311	464	309
Склад 3	228	203	496	291	448	496	231	417	236	309	369	298	209

x=	2	y=	6	M=	66	x1=	3	y1=	7
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 14

Потребители- промысла

	<i>запасы</i>	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
<i>потребность</i>		78	102	123	99	119	121	81	122	121	106	75	104
Склад 1	407	451	347	391	350	462	333	467	261	410	256	204	397
Склад 2	272	396	438	202	438	451	480	306	465	400	368	256	207
Склад 3	298	473	452	290	496	456	245	381	432	276	334	330	358

x=	1	y=	7	M=	53	x1=	1	y1=	5
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 15

Потребители- промысла

	<i>запасы</i>	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
<i>потребность</i>		82	99	126	66	92	68	112	72	93	97	62	72
Склад 1	343	247	370	340	233	269	285	211	376	323	456	398	215
Склад 2	480	322	398	223	392	439	317	344	322	413	270	436	438
Склад 3	214	234	458	463	395	236	398	341	429	247	439	419	459

x=	2	y=	7	M=	60	x1=	2	y1=	10
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	----

Вариант 16

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		93	123	76	116	75	73	86	65	119	82	76	84
Склад 1	223	275	418	378	426	366	259	338	321	218	429	460	447
Склад 2	216	203	405	264	390	430	346	278	355	327	453	444	313
Склад 3	281	262	439	372	352	443	385	455	215	351	297	403	353

X=	1	Y=	3	M=	54	X1=	1	Y1=	5
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 17

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		119	68	109	104	107	76	125	71	108	94	78	69
Склад 1	433	323	319	476	360	486	414	338	488	342	400	365	297
Склад 2	312	267	334	430	319	487	275	281	477	288	284	249	381
Склад 3	215	235	443	378	244	476	328	426	232	241	246	314	389

X=	1	Y=	7	M=	65	X1=	2	Y1=	11
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	----

Вариант 18

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		63	96	100	92	62	65	69	103	61	66	130	102
Склад 1	206	449	347	350	296	490	493	396	481	306	344	337	345
Склад 2	223	476	339	404	315	212	337	396	297	263	312	386	391
Склад 3	353	392	388	473	459	453	286	269	452	402	325	266	408

X=	1	Y=	2	M=	65	X1=	1	Y1=	3
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 19

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		82	80	90	97	64	80	94	126	60	122	119	91
Склад 1	305	204	493	428	269	365	497	349	311	368	310	248	354
Склад 2	460	268	440	303	200	442	259	410	212	446	448	313	230
Склад 3	260	497	469	457	256	277	254	439	466	485	252	336	403

X=	2	Y=	1	M=	50	X1=	2	Y1=	3
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 20

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		118	105	128	66	89	99	118	126	68	105	91	101
Склад 1	415	405	243	411	265	497	381	384	445	402	401	481	457
Склад 2	463	370	233	205	327	259	405	269	481	479	381	206	487

Склад 3	388	208	479	326	436	396	451	292	275	314	242	257	426
---------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

X=	2	Y=	1	M=	50	X1=	1	Y1=	2
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 21

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		82	90	107	74	111	113	126	72	79	91	78	99
Склад 1	410	373	305	287	411	473	250	309	445	446	419	474	478
Склад 2	298	329	272	397	381	208	288	256	458	386	497	316	425
Склад 3	405	375	406	327	492	356	422	210	355	345	332	455	220

X=	3	Y=	6	M=	66	X1=	2	Y1=	6
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 22

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		96	126	69	81	103	91	112	78	95	112	75	61
Склад 1	382	304	418	386	279	230	297	471	203	450	447	469	365
Склад 2	426	239	305	322	416	341	433	389	488	322	482	233	289
Склад 3	330	375	226	479	369	427	435	312	350	214	405	424	419

X=	1	Y=	9	M=	60	X1=	2	Y1=	3
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 23

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		117	108	111	73	68	95	90	103	129	129	68	80
Склад 1	275	466	484	270	293	404	404	414	341	281	257	455	409
Склад 2	254	276	267	415	480	319	201	440	296	312	402	482	325
Склад 3	377	344	497	384	488	459	494	227	217	484	368	234	496

X=	1	Y=	8	M=	58	X1=	1	Y1=	8
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 24

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		73	80	96	119	85	85	102	106	129	100	122	125
Склад 1	428	386	453	492	352	334	363	462	316	201	462	313	349
Склад 2	486	394	276	205	430	301	341	307	430	437	442	239	323
Склад 3	391	273	242	438	406	299	320	468	413	212	462	454	358

X=	3	Y=	11	M=	59	X1=	3	Y1=	4
----	---	----	----	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 25

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
--	--------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----

<i>потребность</i>		98	69	82	89	81	100	62	95	111	66	128	128
Склад 1	364	231	242	328	421	398	302	213	418	466	229	292	209
Склад 2	228	227	464	432	221	455	225	315	330	389	245	358	318
Склад 3	231	324	454	238	475	303	299	314	493	401	452	371	453

x=	3	y=	10	M=	56	x1=	3	y1=	9
----	---	----	----	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 26

Потребители- промысла

	<i>запасы</i>	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
<i>потребность</i>		68	116	126	71	116	81	104	96	127	80	126	121
Склад 1	487	218	438	343	380	353	372	393	409	339	360	207	248
Склад 2	225	453	255	218	326	256	390	372	323	416	423	331	219
Склад 3	436	201	445	483	419	380	466	323	481	367	344	463	442

x=	3	y=	11	M=	59	x1=	3	y1=	11
----	---	----	----	----	----	-----	---	-----	----

Вариант 27

Потребители- промысла

	<i>запасы</i>	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
<i>потребность</i>		118	73	109	65	75	110	78	71	126	130	100	90
Склад 1	282	451	424	366	317	208	351	268	284	253	303	269	482
Склад 2	383	237	344	340	462	267	233	465	428	415	342	498	493
Склад 3	227	480	498	478	228	359	429	453	459	289	339	266	478

x=	2	y=	6	M=	51	x1=	2	y1=	2
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 28

Потребители- промысла

	<i>запасы</i>	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
<i>потребность</i>		105	64	126	115	65	129	76	125	110	108	106	99
Склад 1	207	450	359	218	231	275	363	457	492	410	376	351	268
Склад 2	382	267	276	257	448	348	439	282	223	400	354	389	455
Склад 3	259	492	361	281	465	262	364	462	286	454	364	235	473

x=	3	y=	1	M=	50	x1=	1	y1=	1
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 29

Потребители- промысла

	<i>запасы</i>	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
<i>потребность</i>		92	64	104	96	114	92	126	85	74	84	107	123
Склад 1	356	468	240	211	431	490	267	443	358	213	407	326	213
Склад 2	432	441	279	280	390	472	372	404	437	395	275	251	355
Склад 3	413	385	298	398	430	464	402	494	259	364	312	488	441

x=	2	y=	7	M=	69	x1=	1	y1=	4
----	---	----	---	----	----	-----	---	-----	---

Вариант 30

Потребители- промысла

	запасы	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12
потребность		101	98	61	103	125	123	99	89	64	93	103	111
Склад 1	200	482	273	223	228	213	487	202	477	212	472	420	209
Склад 2	337	272	477	446	277	208	204	389	201	494	298	377	490
Склад 3	286	417	323	281	212	219	202	243	434	393	359	433	266

X=	1	Y=	10	M=	68	X1=	1	Y1=	4
----	---	----	----	----	----	-----	---	-----	---

5 Лабораторная работа 5

ДВУХИНДЕКСНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ МОЩНОСТЕЙ. РЕШЕНИЕ В MS EXCEL

Цель работы: Приобретение навыков построения математических моделей распределение производственных мощностей и решения их в Microsoft Excel

Теоретическая часть

Задачи размещения – распределения. Они заключаются в определении числа новых объектов и координат их размещения, а также в распределении перевозок между новыми и существующими объектами. Примером является задача размещения оптовых баз, получающих товары от производственных предприятий, и распределения их между оптовыми и розничными торговыми предприятиями.

Математическая модель этой задачи записывается так:

$$\text{минимизировать} \quad \varphi = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n z_{ij} w_{ji} d(\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_i) + g(n), \quad (1)$$

$$\text{при условиях} \quad \sum_{j=1}^n z_{ji} = 1 \quad \forall i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

где φ – общие затраты на перевозки в единицу времени;

$g(n)$ – затраты на перевозки в единицу времени при установке n новых объектов;

w_{ji} – удельные затраты в единицу времени при взаимодействии j -го нового и i -го существующего объектов;

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-й новый объект функционально связан с } i\text{-м старым,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Задачи размещения – распределения с дискретным пространством решений. Такие задачи, как правило, приходится решать при размещении производства и складов. Задачи размещения предприятий обычно включают определение их количества, мест расположения и мощности заводов и складов, необходимых для снабжения потребителей продукцией. Эта задача формулируется так.

Пусть имеется m потребителей продукции с известными местами размещения. Заданы n возможных мест размещения предприятий. Известно: потребности i -го потребителя в продукции, $i = \overline{1, m}$; постоянные затраты, связанные с размещением предприятия в j -м месте, и переменная часть затрат, зависящая от его производственных мощностей; удельные транспортные затраты c_{ji} по перевозке единицы продукции из j -го пункта производства в i -й пункт потребления. Требуется определить такие

фактические места размещения предприятий, их производственные мощности, а также долю удовлетворения потребностей потребителей, при которых минимизируются суммарные затраты на размещения предприятий и поставки (перевозки) продукции соответствующим складам.

ЗАДАНИЕ

Требуется изготовить m видов продукции P_j в количестве a_j . Имеется n станков M_i с b_i минутами рабочего времени. Каждая единица продукции P_j может быть изготовлена по выбору на любом станке. Это требует c_{ij} минут и стоит p_{ij} рублей.

Найти наиболее экономичное распределение продукции по станкам – x_{ij} количество продукции P_j , произведенной на станке M_i .

Вариант 1

Продукция

Время для производства j -го изделия на i -ом станке

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		29	27	24	24	20	23
Станок 1	456	6	3	4	4	6	4
Станок 2	323	3	3	4	4	6	6
Станок 3	444	5	3	3	5	6	5

Стоимость выпуска j -го изделия на i -ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
Станок 1		55	50	62	62	52	64
Станок 2		67	53	54	65	56	53
Станок 3		69	60	70	65	68	61

Вариант 2

Продукция

Время для производства j -го изделия на i -ом станке

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		30	27	23	23	29	23
Станок 1	480	5	6	6	5	5	6
Станок 2	459	3	3	3	4	3	3
Станок 3	410	4	3	3	5	5	3

Стоимость выпуска j -го изделия на i -ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
Станок 1		56	70	58	60	66	60

Станок 2		52	58	53	60	52	52
Станок 3		61	64	50	65	58	51

Вариант 3

Продукция

Время для производства j -го изделия на i -ом станке

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		20	30	27	27	21	29
Станок 1	433	4	4	4	3	6	4
Станок 2	418	4	4	5	5	6	5
Станок 3	412	4	4	5	3	5	5

Стоимость выпуска j -го изделия на i -ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
Станок 1		52	58	60	51	69	51
Станок 2		66	68	64	68	62	53
Станок 3		68	50	54	60	67	57

Вариант 4

Продукция

Время для производства j -го изделия на i -ом станке

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		24	29	28	20	28	21
Станок 1	390	5	5	3	4	5	3
Станок 2	326	4	4	5	6	4	5
Станок 3	344	3	5	4	5	4	6

Стоимость выпуска j -го изделия на i -ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
Станок 1		66	70	68	64	55	51
Станок 2		59	65	58	54	63	50
Станок 3		51	62	54	67	56	67

Вариант 5

Продукция

Время для производства j -го изделия на i -ом станке

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		25	20	28	25	20	21
Станок 1	427	4	6	5	6	3	3
Станок 2	392	5	6	4	5	5	6
Станок 3	413	6	3	3	5	4	6

Стоимость выпуска j -го изделия на i -ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
Станок 1		54	69	57	64	51	56

Станок 2		62	54	61	65	70	58
Станок 3		56	50	51	53	56	66

Вариант 6

Продукция

Время для производства j -го изделия на i -ом станке

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		30	28	23	28	27	22
Станок 1	388	6	4	6	6	5	4
Станок 2	415	3	3	3	4	4	4
Станок 3	390	3	6	3	3	3	6

Стоимость выпуска j -го изделия на i -ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
Станок 1		63	52	56	55	59	65
Станок 2		50	50	70	70	55	57
Станок 3		60	70	52	65	55	60

Вариант 7

Продукция

Время для производства j -го изделия на i -ом станке

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		23	21	21	20	20	29
Станок 1	424	4	4	4	3	4	5
Станок 2	431	4	5	6	3	4	4
Станок 3	312	6	5	4	5	5	6

Стоимость выпуска j -го изделия на i -ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
Станок 1		55	58	67	54	63	53
Станок 2		50	65	54	55	67	70
Станок 3		63	70	52	55	64	53

Вариант 8

Продукция

Время для производства j -го изделия на i -ом станке

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		27	30	22	22	24	28
Станок 1	321	4	4	5	4	6	4
Станок 2	311	5	6	6	5	5	3
Станок 3	393	4	6	3	4	3	6

Стоимость выпуска j -го изделия на i -ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
Станок 1		61	60	54	54	65	70

Станок 2		65	68	52	58	56	65
Станок 3		61	52	67	69	70	50

Вариант 9

Продукция

Время для производства j -го изделия на i -ом станке

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		21	22	23	26	26	27
Станок 1	338	4	3	5	4	4	4
Станок 2	420	3	3	4	3	6	5
Станок 3	452	6	4	3	6	3	5

Стоимость выпуска j -го изделия на i -ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
Станок 1		55	59	58	69	53	51
Станок 2		55	61	51	51	67	67
Станок 3		70	53	62	55	63	57

Вариант 10

Продукция

Время для производства j -го изделия на i -ом станке

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		28	30	21	29	26	24
Станок 1	346	3	6	5	4	4	6
Станок 2	356	4	5	3	3	5	3
Станок 3	460	5	6	6	3	4	5

Стоимость выпуска j -го изделия на i -ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
Станок 1		55	61	60	63	58	61
Станок 2		58	67	65	63	58	63
Станок 3		53	53	68	55	70	53

Вариант 11

Продукция

Время для производства j -го изделия на i -ом станке

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		25	25	27	25	22	20
Станок 1	486	4	6	3	3	3	5
Станок 2	384	6	5	4	6	4	5
Станок 3	376	5	5	3	6	5	3

Стоимость выпуска j -го изделия на i -ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
Станок 1		67	61	51	56	62	59

Станок 2		53	50	58	57	70	66
Станок 3		54	65	54	69	55	64

Вариант 12

Продукция

Время для производства j -го изделия на i -ом станке

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		28	29	28	23	25	21
Станок 1	465	6	6	5	4	6	5
Станок 2	461	6	3	3	4	6	5
Станок 3	430	3	5	3	6	6	4

Стоимость выпуска j -го изделия на i -ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
Станок 1		55	68	55	64	63	63
Станок 2		68	54	60	55	70	57
Станок 3		69	62	52	65	64	65

Вариант 13

Продукция

Время для производства j -го изделия на i -ом станке

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		29	20	29	21	26	25
Станок 1	353	5	5	5	3	3	5
Станок 2	361	3	6	3	5	6	5
Станок 3	418	4	3	3	6	5	5

Стоимость выпуска j -го изделия на i -ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
Станок 1		61	63	69	56	65	67
Станок 2		66	68	62	52	67	51
Станок 3		58	61	55	66	70	68

Вариант 14

Продукция

Время для производства j -го изделия на i -ом станке

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		26	28	28	27	25	29
Станок 1	322	4	4	4	5	4	5
Станок 2	316	4	6	3	4	4	4
Станок 3	498	4	3	3	3	3	6

Стоимость выпуска j -го изделия на i -ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
Станок 1		62	62	63	66	50	59

Станок 2		58	56	54	68	54	54
Станок 3		68	58	54	66	62	66

Вариант 15

Продукция

Время для производства j -го изделия на i -ом станке

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		27	29	20	20	28	26
Станок 1	388	3	4	4	4	5	3
Станок 2	384	5	4	6	6	4	6
Станок 3	494	5	5	4	6	3	6

Стоимость выпуска j -го изделия на i -ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
Станок 1		57	62	66	55	59	60
Станок 2		55	52	57	61	65	63
Станок 3		55	64	69	57	58	51

Вариант 16

Продукция

Время для производства j -го изделия на i -ом станке

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		20	25	25	30	26	21
Станок 1	350	4	5	5	3	5	6
Станок 2	435	5	3	3	4	4	3
Станок 3	354	5	4	4	6	6	6

Стоимость выпуска j -го изделия на i -ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
Станок 1		69	51	50	51	61	65
Станок 2		54	63	53	60	67	61
Станок 3		63	68	68	61	52	56

Вариант 17

Продукция

Время для производства j -го изделия на i -ом станке

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		28	24	25	29	27	26
Станок 1	422	3	4	3	6	3	6
Станок 2	315	6	4	3	5	3	6
Станок 3	343	5	3	5	5	6	6

Стоимость выпуска j -го изделия на i -ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
Станок 1		67	64	58	57	68	64

Станок 2		52	70	60	58	55	67
Станок 3		60	62	64	51	63	51

Вариант 18

Продукция

Время для производства j -го изделия на i -ом станке

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		30	28	20	30	25	25
Станок 1	500	5	5	4	3	5	5
Станок 2	383	3	3	3	6	5	3
Станок 3	353	6	4	6	3	5	3

Стоимость выпуска j -го изделия на i -ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
Станок 1		57	56	59	58	65	70
Станок 2		57	56	63	70	50	54
Станок 3		66	64	52	56	59	56

Вариант 19

Продукция

Время для производства j -го изделия на i -ом станке

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		24	21	22	27	20	21
Станок 1	460	4	3	6	3	5	4
Станок 2	426	4	4	4	3	4	5
Станок 3	449	6	6	3	5	6	6

Стоимость выпуска j -го изделия на i -ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
Станок 1		67	66	57	58	58	60
Станок 2		55	54	61	66	70	57
Станок 3		59	57	66	55	62	66

Вариант 20

Продукция

Время для производства j -го изделия на i -ом станке

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		20	26	28	26	22	22
Станок 1	379	3	5	6	4	3	4
Станок 2	414	6	6	6	4	6	5
Станок 3	431	3	3	3	4	4	4

Стоимость выпуска j -го изделия на i -ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
Станок 1		66	56	67	69	64	50

Станок 2		54	66	57	54	69	58
Станок 3		52	63	56	65	65	58

Вариант 21**Продукция***Время для производства j-го изделия на i-ом станке*

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		30	25	26	21	27	26
Станок 1	304	6	5	6	3	5	6
Станок 2	402	3	3	5	6	5	3
Станок 3	457	6	4	4	5	4	5

Стоимость выпуска j-го изделия на i-ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
Станок 1		55	52	51	56	65	52
Станок 2		63	67	50	57	52	52
Станок 3		57	51	69	64	53	64

Вариант 22**Продукция***Время для производства j-го изделия на i-ом станке*

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		23	29	27	20	26	30
Станок 1	464	4	3	6	3	3	4
Станок 2	462	6	3	3	6	3	5
Станок 3	351	4	4	3	6	6	4

Стоимость выпуска j-го изделия на i-ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
Станок 1		52	51	63	60	56	65
Станок 2		63	56	69	62	58	61
Станок 3		52	59	68	59	60	65

Вариант 23**Продукция***Время для производства j-го изделия на i-ом станке*

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		24	27	21	27	25	30
Станок 1	379	5	5	4	4	5	4
Станок 2	428	3	4	3	4	5	3
Станок 3	322	6	4	3	6	3	3

Стоимость выпуска j-го изделия на i-ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
--	--	----	----	----	----	----	----

Станок 1		58	60	54	56	62	60
Станок 2		66	52	57	63	70	62
Станок 3		51	50	54	62	50	69

Вариант 24

Продукция

Время для производства j -го изделия на i -ом станке

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		21	24	21	25	29	29
Станок 1	357	5	3	4	4	3	5
Станок 2	471	4	4	6	6	5	4
Станок 3	333	6	6	4	3	3	3

Стоимость выпуска j -го изделия на i -ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
Станок 1		62	60	52	53	53	61
Станок 2		65	53	51	58	59	63
Станок 3		60	50	62	61	64	63

Вариант 25

Продукция

Время для производства j -го изделия на i -ом станке

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		26	20	30	28	25	21
Станок 1	355	6	3	6	4	6	3
Станок 2	496	3	5	6	3	5	3
Станок 3	413	5	6	5	4	6	6

Стоимость выпуска j -го изделия на i -ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
Станок 1		59	53	70	61	55	52
Станок 2		51	65	66	65	51	51
Станок 3		63	59	52	68	56	70

Вариант 26

Продукция

Время для производства j -го изделия на i -ом станке

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		20	29	22	28	30	21
Станок 1	403	5	6	5	3	4	5
Станок 2	384	6	4	3	3	3	5
Станок 3	476	6	4	3	5	6	4

Стоимость выпуска j -го изделия на i -ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
--	--	----	----	----	----	----	----

Станок 1		62	50	62	61	62	62
Станок 2		54	64	68	57	68	62
Станок 3		61	70	64	55	56	57

Вариант 27

Продукция

Время для производства j -го изделия на i -ом станке

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		26	23	28	22	23	28
Станок 1	464	4	6	5	4	3	5
Станок 2	396	4	4	3	6	5	5
Станок 3	480	6	3	5	5	6	3

Стоимость выпуска j -го изделия на i -ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
Станок 1		70	50	51	64	50	64
Станок 2		66	57	68	55	58	58
Станок 3		67	58	60	64	56	60

Вариант 28

Продукция

Время для производства j -го изделия на i -ом станке

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		24	21	30	25	20	21
Станок 1	370	6	3	3	3	6	4
Станок 2	426	4	6	5	6	6	3
Станок 3	472	4	5	4	3	3	6

Стоимость выпуска j -го изделия на i -ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
Станок 1		59	65	63	62	54	63
Станок 2		56	52	66	61	56	54
Станок 3		59	64	50	53	55	68

Вариант 29

Продукция

Время для производства j -го изделия на i -ом станке

	время работы в смену, мин	№1	№2	№3	№4	№5	№6
план выпуска, ед. в смену		22	23	22	23	22	23
Станок 1	351	5	5	3	4	3	5
Станок 2	403	5	5	6	5	6	3
Станок 3	489	5	6	4	6	3	6

Стоимость выпуска j -го изделия на i -ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
--	--	----	----	----	----	----	----

Станок 1		53	58	67	58	56	59
Станок 2		53	55	62	56	67	68
Станок 3		51	70	51	67	61	63

Вариант 30

Продукция

Время для производства j -го изделия на i-ом станке

	<i>время работы в смену, мин</i>	№1	№2	№3	№4	№5	№6
<i>план выпуска, ед. в смену</i>		21	24	27	24	26	28
Станок 1	383	4	6	3	6	6	3
Станок 2	355	5	4	6	3	5	6
Станок 3	384	6	5	6	5	6	6

Стоимость выпуска j-го изделия на i-ом станке, руб/ед

		№1	№2	№3	№4	№5	№6
Станок 1		61	68	59	63	67	64
Станок 2		53	60	58	55	53	55
Станок 3		60	59	54	67	69	57

6 Лабораторная работа 6

РЕШЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (ВЗЛП) С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ MS EXCEL.

Цель работы: Решения векторных задач линейного программирования (ВЗЛП) с использованием MS Excel различными методами. Сравнение и анализ результатов.

Краткая теория

1. Постановка задачи

Общей векторной задачей математического программирования (общей ВЗМП) называется задача, которая состоит в определении оптимального (по Парето) множества, в каждой точке которого X - значения векторной целевой функции удовлетворяют условиям:

$$extrF(X) = \left\{ \begin{array}{l} \max f_k(X), \forall k \in P = \overline{1, l_1} \\ \min f_k(X), \forall k \in Q = \overline{l_1 + 1, l_1 + l_2} \end{array} \right\}$$

при ограничениях

$$G(X) \{ \leq, =, \geq \} B$$

$$X \geq 0$$

где: $X = \{x_j, j = 1, 2, \dots, n\}$ - вектор искомого варианта решения (управления);

$G(X) = \{g_i(X), i = 1, 2, \dots, m\}$ - вектор функций-ограничений;

$B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ - вектор, определяющий уровень ограничений.

Будем считать, что $f_k(X)$ - вогнутые, а $g_i(X)$ - выпуклые функции относительно X так, что область допустимых решений S не является пустым множеством:

$$S = \{X \in R^n, X \geq 0, G(X) \{ \leq, =, \geq \} B\} \neq \emptyset \quad (2.4)$$

Очевидно, что вариант решения

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ представляет собой координаты n - мерного вещественного вектора на множестве S .

Оптимальность по Парето — такое состояние системы, при котором значение каждого частного показателя, характеризующего систему, не может быть улучшено без ухудшения других.

Таким образом, по словам самого Парето «Всякое изменение, которое никому не приносит убытков, а некоторым людям приносит пользу (по их собственной оценке), является улучшением». Значит, признаётся право на все изменения, которые не приносят никому дополнительного вреда.

Определение В векторной задаче математического программирования точка $X^0 \in S$ оптимальна по Парето, если она допустима и не существует другой точки X' , для которой $f_k(X') \geq f_k(X^0)$, $\forall k$ и хотя бы для одного критерия выполнялось строгое неравенство.

Множество состояний системы, оптимальных по Парето, называют «множеством Парето», «множеством альтернатив, оптимальных в смысле Парето», либо «множеством Парето-оптимальных альтернатив».

Множество точек, оптимальных по Парето, лежит между точками оптимума, полученных при решении ВЗМП отдельно по каждому критерию.

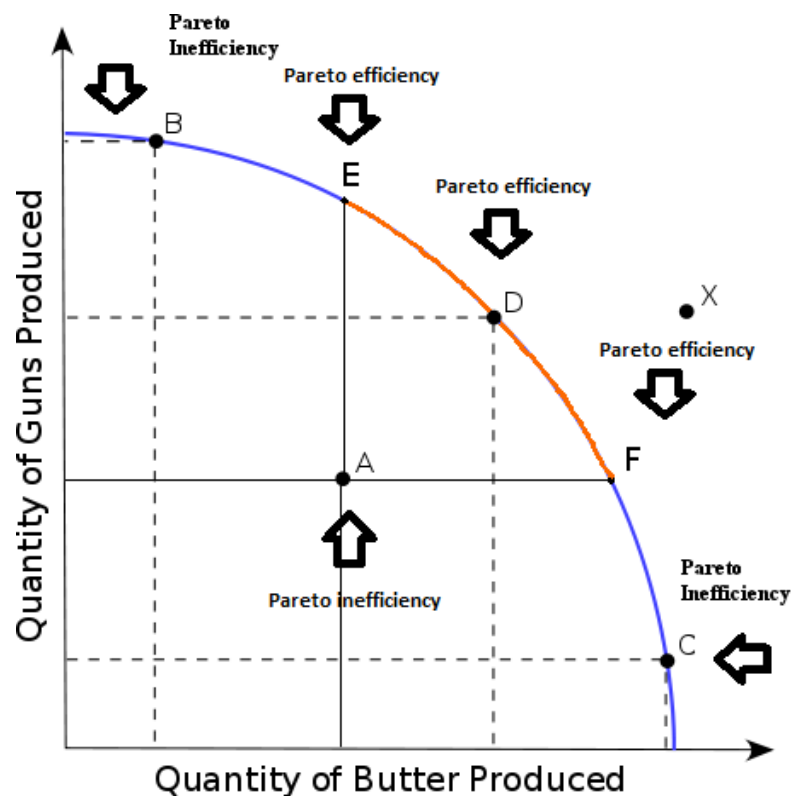


Рис. Пример кривой Парето. Два товара оружие и масло, оранжевый участок кривой эффективен по Парето (источник <http://ru.wikipedia.org>)

2. Метод главной компоненты

Заключается в том, что критерий качества связывается с одним из показателем, выбранных в роли основного (главного). На остальные

показатели накладываются ограничения. В этом случае по главному показателю реализуется критерий оптимальности, по остальным - пригодности. Например, если имеется вектор полезного эффекта в виде

$$F_k = \langle F_1, F_2, \dots, F_k \rangle,$$

где F_i ($i=1, 2, \dots, k$) - компоненты вектора, например, для оборудования: производительность, экологичность, надежность, себестоимость и т.д., то метод главной компоненты заключается в произвольном выборе одного из компонентов в качестве главного, по которому производится оптимизация и выбирается решение. При этом остальные компоненты переводятся в разряд ограничений.

Этот метод прост, нагляден и часто применяется в машиностроительной практике, однако принципиальным его недостатком является произвол в выборе главного критерия. Можно привести много примеров из истории науки и техники, когда произвольный и неверный выбор этого критерия приводит к трагическим последствиям или, по меньшей мере, к малоэффективным результатам.

3. Метод последовательных уступок

Применяется для задач, критерии которых неравнозначны.

Прежде чем решать поставленную задачу по методу уступок, необходимо:

- I. Расположить критерии по их значимости (наиболее важный считается первым);
- II. Отыскать оптимальное значение F_1^* целевой функции F_1 ;
- III. Сделать уступку по первому показателю эффективности, т.е. ухудшить величину F_1^* до значения $F_1^{**} = k_1 F_1^*$;
- IV. Ввести в задачу дополнительное ограничение $F_1 \geq F_1^{**}$;
- V. отыскать оптимальное значение F_2^* целевой функции F_2 ;
- VI. Сделать уступку по второму показателю эффективности, т.е. ухудшить величину F_2^* до значения $F_2^{**} = k_2 F_2^*$;
- VII. Ввести в задачу дополнительное ограничение $F_2 \geq F_2^{**}$;
- VIII. новую задачу с двумя дополнительными ограничениями решить по третьему показателю эффективности и т.д.;
- IX. Процесс решения задачи заканчивается, когда решение будет получено по всем показателям. Окончательный план и будет наиболее рациональным - получено оптимальное значение наименее важного критерия при условии гарантированных значений предшествующих показателей эффективности.

4. Метод комплексного критерия

Заключается в переходе от комплексного критерия к скалярному путем образования суммарного показателя. Чаще всего этот показатель реализуется в виде дроби, где в числителе стоят величины, которые необходимо максимизировать, а в знаменателе – те, которые надо сделать минимальными.

Например, (привлекательность) = (производительность) / (стоимость).

Целевые функции образуют единый показатель, в котором разным слагаемым приписаны разные веса, пронормированные на 1.

$$W = \sum \lambda_i \cdot F_i, \quad \sum \lambda_i = 1$$

где λ_i – коэффициент значимости i -го показателя качества.

Обычно λ_i определяются с помощью метода экспертных оценок или на основании хорошо апробированных статистических данных.

Этой моделью пользуются в задачах, в которых критерии имеют одну и ту же единицу измерения (как правило, стоимостную). Если критерии F_i не выражаются в одних и тех же единицах измерения, то их приводят к безразмерному виду.

5. Метод сведения к лямбда задаче

Шаг 1. Решить k задач (по общему числу критериев) скалярной оптимизации (известными методами математического программирования):

$$\begin{cases} \max f_k(X), \forall k \in P \cup Q \\ G(X) \{ \leq, =, \geq \} B \\ X \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \min f_k(X), \forall k \in P \cup Q \\ G(X) \{ \leq, =, \geq \} B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

и найти $f_k^{\max}$ и $f_k^{\min}$, $\forall k \in P \cup Q$.

Шаг 2. Выполнить единую нормализацию критериев $\forall k \in P \cup Q$:

$$\lambda_k(X) = \frac{f_k(X) - f_k^{\min}}{f_k^{\max} - f_k^{\min}} \quad \text{или} \quad \bar{\lambda}_k(X) = \frac{f_k^{\max} - f_k(X)}{f_k^{\max} - f_k^{\min}} \quad (2.7)$$

Шаг 3. Построить λ - или $\bar{\lambda}$ - задачу:

$$\begin{cases} \max \lambda \\ \lambda - \lambda_k(\bar{X}) \leq 0, \forall k \in P \\ \lambda - \bar{\lambda}_k(\bar{X}) \leq 0, \forall k \in Q \\ G(X) \{ \leq, =, \geq \} B \\ X \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \min \bar{\lambda} \\ \bar{\lambda} - \bar{\lambda}_k(\bar{X}) \geq 0, \forall k \in P \\ \bar{\lambda} - \lambda_k(\bar{X}) \geq 0, \forall k \in Q \\ G(X) \{ \leq, =, \geq \} B \\ X \geq 0 \end{cases}.$$

Шаг 4. Решить λ - или $\bar{\lambda}$ - задачу как скалярную задачу оптимизации и найти единственную точку X_{eq}^0 , оптимальную по Парето, в которой гарантируем результат:

$$\begin{cases} \lambda(X_{eq}^0) \leq \lambda_k(X_{eq}^0) \\ \lambda(X_{eq}^0) \leq \bar{\lambda}_k(X_{eq}^0) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \bar{\lambda}(X_{eq}^0) \geq \bar{\lambda}_k(X_{eq}^0) \\ \bar{\lambda}(X_{eq}^0) \geq \lambda_k(X_{eq}^0) \end{cases}.$$

6. Пример выполнения в Excel

$$F_1 = x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$F_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$F_1 = -x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 8$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 7$$

$$x_i \geq 0$$

Каждую промежуточную задачу (ЗЛП) решаем через Поиск решения на отдельном листе Excel

Лист1		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
3																
4			1. Метод: Лябда задача (Лист 1)													
5																
6	текущие	x1	x2	x3	x4											
7			0	2,02649	3,01325	1,98675										
8																
9	коэффициенты целевых функций						Значение целевой функции для текущих X									
10	f1	1	-4	3	1	"=	2,92053									
11	f2	1	1	1	1	"=	7,02649									
12	f3	-1	5	4	-3	"=	16,2252									
13	ограничения															
14		1	3	-2	4	8	"=	8								
15		1	2	-1	3	7	"=	7								
16																
17	Шаг 1															
18	Решение по каждому критерию в отдельности (max значение в допустимой области)															
19	x^	0	0	2	3											
20	f1'	9														
21	x^	0	6	5	0											
22	f2'	11														
23	x^	0	6	5	0											
24	f3'	50														
25	Шаг 2															
26	Нормализация критериев															
27	L1=f1/f1^ L2=f2/f2^ L3=f3/f3^															
28	Шаг 3															
29	целевая ячейка:				max L	0,3245	0,3245	0,63877	0,3245							
30	Дополнительные ограничения				L-L1<=0	2,1E-09										
31					L-L2<=0	-0,3143										
32					L-L3<=0	-3E-10										
33	Решение лябда задачи															
34	x^	0	2,02649	3,01325	1,98675	f1'	2,92	32,4% от максимума								
35						f2'	7,03	63,9% от максимума								
36						f3'	16,23	32,4% от максимума								

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
38			2. Метод главной компоненты (Лист 2)											
39														
40	f1 → max	f1 - главный критерий, для остальных установим ограничения не ниже заданных (с учетом max з												
41	Дополнительные ограничения													
42	f2 ≥		7			уменьшим ~ на 15% от f2 max								
43	f3 ≥		20			уменьшим ~ на 15% от f3 max								
44														
45	Решение главной компоненты													
46	x*	0,00	2,47	3,24	1,76	f1*	1,59							
47						f2*	7,47							
48						f3*	20,00							
49														
50	метод последовательных уступок (Лист 3)												Пусть приоритет критериев такой: f1, f2, f3	
51														
52	шаг 1													
53	f1 → max													
54	решение шага 1	0	0	2	3	f1*	9							
55														
56	шаг 2													
57	f2 → max													
58	Дополнительные ограничения													
59	f1 ≥	7												
60	решение шага 2	0	0,666667	2,333333	2,666667	f1*	7,00							
61						f2*	5,67							
62						f3*	4,67							
63	шаг 3													
64	f3 → max													
65	Дополнительные ограничения													
66	f1 ≥ 7	7												
67	f2 ≥ 5	5												
68	решение шага 3	0	0,666667	2,333333	2,666667	f1*	7,00							
69						f2*	5,67							
70						f3*	4,67							
71														

72														
73														
74			метод комплексного критерия (Лист 4)											
75														
76	alfa=	0,2	0,5	0,3	F = Σ α · f -> max	f >= 0								
77														
78	решение													
79	x*	0	3	3,5	1,5	f1*	0,00							
80						f2*	8,00							
81						f3*	24,50							
82														

Сравниваем итоговые результаты, полученные по 4 методам и принимаем решения о выборе приемлемого варианта

82														
83														
84					x1	x2	x3	x4	f1	f2	f3			
85	максимумы задачи по отдельным критериям								9	11	50			
86	метод: Лябда задача				0,00	2,03	3,01	1,99	2,92	7,03	16,23			
87	метод главной компоненты				0,00	2,47	3,24	1,76	1,59	7,47	20,00			
88	метод последовательных уступок				0,00	0,67	2,33	2,67	7,00	5,67	4,67			
89	метод комплексного критерия				0,00	2,03	3,01	1,99	0,00	8,00	24,50			
90														
91														
92														
93														
94														

Лицо, принимающее решение (ЛПР) выбирает приемлемый вариант !!!

ЗАДАНИЕ

Предприятие может выпускать пять видов продукции И1, И2, И3, И4, И5. Для этого используется три вида ресурсов, расход которых на производство единицы продукции и их запасы приведены в таблице 1:

Ресурс	И1	И2	И3	И4	И5	Запасы
B_1	4	5	3	2	3	3000
B_2	2	4	4	4	2	4500
B_3	3	1	0	1	1	1500

Все изделия обрабатываются на станках четырех типов. Норма времени на обработку одного изделия и фонд времени работы станков приведены в таблице 2:

Вид станков	И1	И2	И3	И4	И5	Фонд времени (ст./час)
токарные	2	3	5	4	5	5000
фрезерные	1	2	6	3	2	4000
сверлильные	3	4	4	1	4	4000
шлифовальные	1	1	2	2	1	2000

Оптовая цена и себестоимость единицы продукции соответствующего типа приведены в таблице 3:

	И1	И2	И3	И4	И5
Оптовая цена (ден.ед.)	10	9	12	14	9
Себестоимость(ден.ед.)	7	8	9	12	6

Объем каждого вида продукции должен быть не менее 100 и не более 500 единиц. Мерой эффективности производственной программы являются следующие показатели:

1. Прибыль предприятия – f_1 ;
2. Валовый объем выпуска продукции в стоимостном выражении – f_2 ;
3. Себестоимость продукции – f_3 ;
4. Уровень загрузки оборудования – f_4 .

Требуется

1. Решить задачу методом главной компоненты, выбрав в качестве главной компоненты прибыль, а на остальные наложить разумные по смыслу задачи

ограничения.

2. Решить задачу методом свертывания критериев, выбрав вектор весовых коэффициентов равным $(0,4; 0,2; 0,3; 0,1)$.
3. Решить задачу методом последовательных уступок, если уступку по каждому критерию полагать равной 10% от его оптимального значения.
4. Решить задачу методом сведения к лямбда задаче.
5. Сравнить итоговые результаты, полученные по 4 методам и принять решения о выборе приемлемого (оптимального) варианта.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Данные таблиц 1-3 из задания будут сгенерированы случайным образом при открытии файла «**Варианты заданий ЛР 7.xls**» для каждого студента персонально при вводе в ячейку A1 любого значения.

7 Лабораторная работа 7

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ РЕСУРСОВ В
СТОХАСТИЧЕСКОМ ВАРИАНТЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ MS EXCEL

Цель работы: Решение задач линейного программирования в стохастической постановке с использованием MS Excel.

Краткая теория

Стохастическая задача линейного программирования возникает, когда ПАРАМЕТРЫ ограничений (условий) задачи, либо параметры целевой функции, либо и те и другие являются случайными величинами (содержат случайные компоненты).

1. Постановка задачи

Стохастическая постановка целевой функции может быть двух видов: *М-постановка* и *Р-постановка*.

При *М-постановке* случайная величина заменяется ее математическим ожиданием и задача сводится к оптимизации детерминированной целевой функции:

$$\max(\min) \quad L = \sum_j \bar{c}_j x_j, \quad 1.2$$

где c_j — математическое ожидание случайной величины c_j .

При *Р-постановке* целевая функция будет иметь вид:
при максимизации целевой функции:

$$\max L = P \left[\sum_j c_j x_j \geq r \right] \quad 1.3$$

обозначает максимизацию вероятности того, что случайная величина $\sum c_j x_j$ будет не меньше некоторого значения r ;

при минимизации целевой функции:

$$\max L = P \left[\sum_j c_j x_j \leq r \right] \quad 1.4$$

обозначает максимизацию вероятности того, что случайная величина $\sum c_j x_j$ будет не больше некоторого значения r .

Наиболее распространены СТП-постановки в вероятностных ограничениях вида:

$$\begin{aligned} P\left[\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i\right] &= \begin{cases} \geq a_i, (a) \\ \leq a_i, (б) \end{cases} \\ P\left[\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i\right] &= \begin{cases} \geq a_i, (в) \\ \leq a_i, (г) \end{cases} \end{aligned} \quad 1.5$$

где a_{ij} , b_i — случайные величины; a_i — заданные уровни вероятности.

Так, ограничение (а) означает, что вероятность соблюдения неравенства

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad 1.6$$

должна быть не меньше, чем a_i . Аналогичный смысл и других ограничений. Для случая, когда вероятностные ограничения представлены в виде типа (а), задачу СТП можно записать при М-постановке:

$$\begin{aligned} \max(\min) \quad L &= \sum_j \bar{c}_j x_j, \\ P\left[\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i\right] &\geq a_i (i = 1, \dots, m), \\ d_j \leq x_j \leq D_j &(j = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad 1.7$$

При Р-постановке, в случае максимизации целевой функции

$$\begin{aligned} \max(\min) \quad L &= P\left[\sum_{j=1}^n c_j x_j \geq r\right], \\ \left\{ \begin{aligned} P\left[\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i\right] &\geq a_i (i = 1, \dots, m), \\ d_j \leq x_j \leq D_j &(j = 1, \dots, n). \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad 1.8$$

в случае минимизации целевой функции

$$\begin{aligned} \max \quad L &= P\left[\sum_j c_j x_j \leq r\right], \\ \left\{ \begin{aligned} P\left[\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i\right] &\geq a_i (i = 1, \dots, m) \\ d_j \leq x_j \leq D_j &(j = 1, \dots, n). \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad 1.9$$

где c_j , a_{ij} , b_i — случайные величины.

Для остальных случаев ограничений (б, в, г) постановка задач стохастического программирования аналогична.

Задачи (1.7), (1.8), (1.9) непосредственно решены быть не могут. Одним из возможных методов их решения может быть представление их в виде детерминированного эквивалента.

Для решения задачи стохастического программирования в Р-постановке и с вероятностными ограничениями переходят к детерминированному эквиваленту.

Для целевой функции детерминированный эквивалент имеет вид:
при минимизации целевой функции

$$\min L = \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j - r}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2 x_j^2}}, \quad 2.1$$

при максимизации целевой функции

$$\max L = \frac{r - \sum_{j=1}^n c_j x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2 x_j^2}}, \quad 2.2$$

где σ_j^2 — дисперсия случайной величины c_j . Решение таких задач затруднительно, поэтому далее рассматриваем целевая функция только в М-постановке. Детерминированный эквивалент вероятностного ограничения типа (а)

$$P\left[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i\right] \geq \alpha_i \quad 2.3$$

может быть сведен к виду:

$$\sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j + t_{\alpha_i} \sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2 x_j^2} + \theta_i^2 \leq \bar{b}_i, \quad 2.4$$

где $\bar{a}_{ij}$, $\bar{b}_i$ — математические ожидания; σ_{ij}^2 , θ_i^2 — дисперсии случайных величин a_{ij} , b_i ; $t_{\alpha} = \Phi^{*-1}(\alpha_i)$ — обратная функция нормального распределения при функции распределения:

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-t^2/2} dt, \quad 2.5$$

где α_i - заданный уровень вероятности (табл. 1).

α_i	0,5	0,6	0,7	0,77	0,84	0,89	0,93	0,96	0,98	0,987	0,994
t_α	0,0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2,0	2,25	2,5

Обычно решают задачи при $\alpha_i > 0,5$. Если же $\alpha_i < 0,5$; то $t_{1-\alpha} = -t_\alpha$. Так, для $\alpha = 0,4$; $t_{0,4} = t_{1-0,6} = -t_{0,6} = 0,25$.

Детерминированный эквивалент задачи СТП в М-постановке имеет вид

$$\begin{aligned} \max(\min) \quad & L = \sum_{j=1}^n \bar{c}_j x_j, \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j + t_{\alpha_i} \sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2} \leq \bar{b}_i, (i = 1, \dots, m), \\ d_j \leq x_j \leq D_j (j = 1, \dots, n). \end{array} \right. \end{aligned} \quad 2.6$$

Из (2.6) следует, что для решения задачи стохастического программирования в М-постановке необходимы исходные данные, приведенные в предыдущей таблице.

Каждое j -е ограничение в детерминированном эквиваленте (2.6) отличается от аналогичного ограничения задачи линейного программирования следующим:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad 2.7$$

от детерминированных значений a_{ij} , b_i выполнен переход к математическим ожиданиям случайных величин a_{ij} , b_i ;

Появился дополнительный член (ζ)

$$\zeta_i = t_{\alpha_i} \sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2},$$

который учитывает все вероятностные факторы: закон распределения с помощью t_α ; заданный уровень вероятности α_i ; дисперсии случайных величин a_{ij} равные σ_{ij}^2 ; дисперсии случайных величин b_i равные θ_i^2 .

2. Решение задач СТП

Детерминированный эквивалент задачи стохастического программирования в М-постановке имеет вид:

$$\begin{aligned} \max(\min) \quad L &= \sum_{j=1}^n c_j x_j, \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j + t_{ai} T_i \leq \bar{b}_i, (i = 1, \dots, m), \\ T_i^2 - \left(\sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta^2 i \right) \\ d_j \leq x_j \leq D_j (j = 1, \dots, n) \\ \underline{T}_i \leq T_i \leq \bar{T}_i (i = 1, \dots, m), \end{array} \right. \end{aligned} \quad 3.2$$

где

$$\underline{T}_i = \sqrt{\sum_j \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta^2 i},$$

$$\bar{T}_i = \sqrt{\sum_j \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta^2 i},$$

Эта задача является сепарабельной задачей нелинейного программирования и может быть решена с помощью стандартных программных средств.

Функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется сепарабельной, если она может быть представлена в виде суммы функций, каждая из которых является функцией одной переменной

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_j f_i(x_i)$$

Если целевая функция и функции в системе ограничений задачи нелинейного программирования сепарабельные, то приближенное решение может быть найдено методом кусочно-линейной аппроксимации.

3. Пример выполнения в Excel

Задача Рассмотрим задачу распределения двух видов ресурсов для выпуска двух наименований изделий.

Решение. Ее модель:

$$\begin{aligned} \max \quad L &= c_1 x_1 + c_2 x_2, \\ \left\{ \begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_2, \\ d_1 \leq x_1 \leq D_1, \\ d_2 \leq x_2 \leq D_2, \end{array} \right. \end{aligned}$$

где a_{ij} , b_i , c_j — случайные.

При М-постановке модель запишется:

$$\begin{aligned} \max L &= M[c_1 x_1 + c_2 x_2], \\ \begin{cases} P(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1) \geq a_1, \\ P(a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_2) \geq a_2, \\ d_1 \leq x_1 \leq D_1, \\ d_2 \leq x_2 \leq D_2, \end{cases} \end{aligned}$$

где a_1, a_2 — заданные уровни вероятности соблюдения каждого ограничения.

Для того чтобы решить задачу в М-постановке, необходимо перейти к ее детерминированному эквиваленту:

$$\begin{aligned} \max L &= \bar{c}_1 \bar{x}_1 + \bar{c}_2 \bar{x}_2, \\ \begin{cases} \bar{a}_{11} x_1 + \bar{a}_{12} x_2 \leq \bar{b}_1 - t_{a_1} \sqrt{\sigma_{11}^2 x_1^2 + \sigma_{12}^2 x_2^2 + \theta_1^2}, \\ \bar{a}_{21} x_1 + \bar{a}_{22} x_2 \leq \bar{b}_2 - t_{a_2} \sqrt{\sigma_{21}^2 x_1^2 + \sigma_{22}^2 x_2^2 + \theta_2^2}, \\ d_1 \leq x_1 \leq D_1, d_2 \leq x_2 \leq D_2, \end{cases} \end{aligned}$$

Исходные данные, необходимые для решения этой задачи, сведены в таблицах 2 и 3.

Таблица 2

Величина	C	d	D
x_1	5	2	6
x_2	8	3	9

Таблица 3

Ограничения	Случайные величины					
	a_{i1}		a_{i2}		b_i	
	$\bar{a}_{i1}$	σ_{i1}	$\bar{a}_{i2}$	σ_{i2}	$\bar{b}_i$	θ_i
1	10	2	15	3	100	9
2	20	6	14	4	150	12

Если задать уровни вероятности $a_{1,2} = 0,6$, для которых $t_a = 0,25$, то получим после подстановки исходных данных детерминированный эквивалент:

$$\begin{aligned} \max L &= 5 x_1 + 8 x_2, \\ \begin{cases} 10 x_1 + 15 x_2 \leq 100 - 0,25 \sqrt{4 x_1^2 + 9 x_2^2 + 81}, \\ 20 x_1 + 14 x_2 \leq 150 - 0,25 \sqrt{36 x_1^2 + 16 x_2^2 + 120}, \\ 2 \leq x_1 \leq 6; 3 \leq x_2 \leq 9, \end{cases} \end{aligned}$$

Результаты решения этой задачи для детерминированного случая $\zeta_i = 0$ и при $a_i = 0,6$ (табл. 4), где

$$\zeta_i = t_{a_i} \sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2},$$

Таблица 4

Величина	$\zeta_i = 0$	$a_i = 0,6$	Величина	$\zeta_i = 0$	$a_i = 0,6$
x_1	2	2	ζ_1	0	4,4
x_2	5,3	5,04	ζ_2	0	5,8
L	52,4	50,3	γ_1	0	4,4
β	0	4	γ_2	0	5,1

Таблица 5

Величина	α_i					
	0,5	0,6	0,77	0,89	0,96	0,987
x_1	2	2	2	3,71	3,07	2,165
x_2	5,3	5,04	4,51	3	3	3
L	52,4	50,3	46,1	42,6	39,3	34,8
Процент уменьшения	0	4	12	18,7	25	33,6
L						
γ_1	0	4,4	12,3	17,9	24,3	33,3
γ_2	0	5,1	14,8	16,5	23,2	26

, ..., 0,987 значение $x_2 = \text{const}$, в то время как x_1 сначала скачком растет, а затем постепенно уменьшается. Несмотря на то, что при $\alpha = 0,89$ значения $x_{1,2}$ резко изменяются, целевая функция во всем интервале изменения α , уменьшается плавно. Таково влияние заданного уровня вероятности соблюдения ограничений α на результат решения задачи.

Для большей реальности и выполнимости планов. Рассмотрим теперь, как повлияют на результат решения задачи величины, определяющие ее вероятностный характер. К таким величинам относят заданный уровень вероятности a_i , и дисперсий σ_{ij}^2 и θ_i^2 . Начнем с анализа влияния a_i (табл. 5).

Из анализа решения этой задачи можно сделать следующие выводы: для обеспечения гарантированного (с вероятностью $\alpha = 0,6$) выполнения плана необходимо иметь дополнительно около 5% каждого вида ресурса. При отсутствии дополнительного ресурса целевой функции может уменьшиться на величину ($\beta = 4\%$ вследствие возможного сокращения выпуска продукции x_2 от 5,3 до 5,04).

Этот пример подтверждает тот факт, что в реальных условиях для гарантированного выполнения плана необходимы дополнительные ресурсы в размере ζ_i противном случае возможно уменьшение выпуска продукции.

При этом можно сделать выводы:

1) в целях повышения заданного уровня вероятности выполнения плана a_i требуется увеличить дополнительные ресурсы γ_i . Так, для выполнения плана с вероятностью, близкой к 1 ($\alpha = 0,987$), необходим дополнительный ресурс в размере $\gamma_i = 26, \dots, 33\%$ от величины используемого без учета вероятностных характеристик;

2) отсутствие такого увеличения может привести к ухудшению целевой функции на величину $\beta = 33,6\%$;

3) возрастание α отражается на номенклатуре продукции. При этом в интервале $\alpha = 0,5, \dots, 0,77$ значение x_1 сохраняется неизменным, а x_2 — уменьшается. При дальнейшем увеличении $\alpha = 0,89$ элементы модели должны постоянно уточняться по фактическим реализациям случайных величин.

ЗАДАНИЕ

Задача об оптимальном использовании ресурсов.

Предприятие выпускает 4 вида продукции используя при этом 5 видов ресурсов.

Запасы каждого вида ресурса b_i , затраты каждого вида ресурса на изготовление продукции - a_{ij} и прибыль от реализации продукции c_j – случайные величины (зависят от поставщиков сырья, рыночных условий, потребителей продукции и других случайных, неопределенных и слабо контролируемых факторов). Поэтому для затрат и запасов ресурсов заданы статистические оценки – среднее за год значение запаса каждого ресурса $\bar{a}_{ij}, \bar{b}_i$ и соответствующие оценки среднеквадратического отклонения - σ_{ij}, θ_i , а для оценки прибыли среднегодовая прибыль от реализации j -ой продукции $\bar{c}_j$.

Предприятие определило (для минимизации своих убытков) вероятность соблюдения выполнения ограничений по каждому ресурсу должна быть не меньше, чем $\alpha_i=0,8$.

Данные для $\bar{a}_{ij}, \bar{b}_i, \theta_i, \bar{c}_j$ заданы в таблице (по вариантам).

Требуется

1. составить план выпуска продукции, максимизирующий прибыль.
2. рассчитать планы, при условии увеличения вероятности соблюдения выполнения ограничений по каждому ресурсу (уменьшения риска) до значений 0,9 и 0,95.

Таблица 3.4

	Вид продукции				Случайные величины	
	1	2	3	4	Среднее значение запасов ресурсов	
Вид ресурса	Средние затраты i -го ресурса на выпуск j -го продукта $\bar{a}_{ij}$ и σ_{ij}				$\bar{b}_i$	θ_i
1	$\bar{a}_{11}$	σ_{11}	...	...	$\bar{b}_1$	θ_1
2	...	...			...	...
3						
4						
5						
Среднее значение прибыли от реализации						
$\bar{c}_j$						

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Данные таблиц 1-3 из задания будут сгенерированы случайным образом при открытии файла «**Варианты заданий ЛР 8.xls**» для каждого студента персонально при вводе в ячейку A1 любого значения.

8 Отчетность, оформление лабораторной работы

По результатам выполнения ЛР студент подготавливает отчет, который должен содержать **Текстовую часть** и **Приложение**.

Текстовая часть включает:

- *постановку задачи*
- *математическую модель*
- *метод решения*
- *ответ (решение задачи)*
- *экономическую интерпретацию решения*, раскрывающую экономический смысл применительно к изучаемой задаче
- *выводы*

Приложение к отчету должно включать:

- *таблицу исходных данных*
- *результативные таблицы* (промежуточные вычисления);
- *рисунки* (при наличии).

Подготовка отчета производится студентом ***вне рамок времени, отведенного на выполнение ЛР.***

Отчет сдается для проверки преподавателю, проводившему ЛР. Защита проверенного отчета состоит в обосновании студентом выводов, сделанных им на основе результатов выполненных компьютерных расчетов.

Результаты защиты отчета учитываются преподавателем при получении студентом зачета. Учебным планом предусмотрен один общий зачет по всем выполненным лабораторным работам.

Государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Уфимский государственный нефтяной технический университет

Кафедра «Математика»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

по дисциплине «Методы оптимальных решений»

Тема «Нахождение допустимой области решений задач
математического программирования с применением MS Excel»

Вариант №3

Выполнил: студент группы БЭП-11-01
Иванова Д.В.

Проверил: д. ф.-м. н., профессор
Мухаметзянов И. З.

Уфа
2012