

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«Уфимский государственный нефтяной технический университет»

Кафедра «Математики»

## **Интегральное исчисление. Ряд Лейбница. Ряды Фурье**

Учебно-методические указания  
к лабораторным работам по дисциплине «Математика»

Уфа-2018

В учебно-методических указаниях даны рекомендации по выполнению лабораторных работ следующих тем: приближенное вычисление определенных интегралов, нахождение суммы знакочередующегося ряда, разложение функции в тригонометрический ряд Фурье. В пособии представлены: краткий теоретический обзор, примеры с разобранными решениями, задания для лабораторных работ, образец выполнения и оформления работы.

Пособие предназначено студентам, изучающим дисциплину «Математика», обучающихся по основным профессиональным образовательным программам уровня высшего образования специалитет, всех форм обучения для следующих направлений подготовки: 20.05.01 Пожарная безопасность; 21.05.02 Прикладная геология; 21.05.03 Технологии геологической разведки; 21.05.06 Нефтегазовая техника и технологии; 38.05.01 Экономическая безопасность.

Составитель: Исламгулова Г.Ф., ст. преподаватель кафедры математики

Рецензенты: Абзалимов Р.Р., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики  
Глебов С.Г., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Введение .....                                                                                            | 3  |
| 1. Лабораторная работа «Приближенное вычисление определенных интегралов» .....                            | 4  |
| 1.1. Формула прямоугольников .....                                                                        | 4  |
| 1.2. Формула трапеций .....                                                                               | 5  |
| 1.3. Формула парабол .....                                                                                | 6  |
| 1.4. Инструкция для студентов .....                                                                       | 7  |
| 1.5. Задание по вариантам для лабораторной работы «Приближенное вычисление определенных интегралов» ..... | 10 |
| 1.6. Образец выполнения лабораторной работы «Приближенное вычисление определенных интегралов» .....       | 11 |
| 2. Лабораторная работа «Вычисление суммы ряда Лейбница» .....                                             | 15 |
| 2.1. Краткий теоретический обзор .....                                                                    | 15 |
| 2.2. Примеры .....                                                                                        | 16 |
| 2.3. Задание по вариантам для лабораторной работы «Вычисление суммы ряда Лейбница» .....                  | 17 |
| 3. Лабораторная работа «Разложение неперiodической функции в ряд Фурье» .....                             | 19 |
| 3.1. Краткий теоретический обзор .....                                                                    | 19 |
| 3.2. Примеры.....                                                                                         | 21 |
| 3.3. Задание по вариантам для лабораторной работы «Разложение неперiodической функции в ряд Фурье» .....  | 26 |
| Литература .....                                                                                          | 27 |
| Приложение. Образец оформления отчета по лабораторной работе .....                                        | 28 |

## ВВЕДЕНИЕ

Лабораторные занятия, так же, как и лекционные, практические занятия и самостоятельная работа способствуют освоению студентами образовательной программы, формированию общекультурных, общеобразовательных и профессиональных компетенций за счет выполнения реальных практических задач. В настоящих методических указаниях приводится описание лабораторных работ, выполняемых студентами на кафедре математики. Каждая работа посвящена рассмотрению одного из разделов дисциплины «Математика». В различных приложениях математики, в большинстве случаев приближенные методы являются единственно возможными. Приближенные методы вычислений находят широкое применение при решении конкретных практических задач. Во всех лабораторных работах дан материал, призванный закрепить у студентов теоретические знания по представленной теме, приобрести практические умения, развить навыки выполнения математических вычислений, формирующие определенные учебные компетенции.

Описание лабораторных работ дано по следующей схеме: сначала даются основы теории, подробно разобраны примеры использования представленного метода, изложен порядок выполнения вычислений, даны индивидуальные задания не менее 30 вариантов для самостоятельного выполнения. Форма отчета по проделанной работе приведена в Приложении. Отчет по лабораторным исследованиям должен содержать следующее: название работы, ее цель, исходные данные, основные формулы, расчеты, таблицы, графики, анализ результатов и выводы. Лабораторная работа проводится в аудиторное время, оформление отчета и защита в установленные преподавателем сроки. Организация лабораторно практикума может предусматривать его выполнение малыми группами студентов, организуемых как при аудиторной работе, так и вне ее, т.е. при самостоятельной работе по анализу материала, обработке результатов, их оформлению. Это делает лабораторный практикум важнейшим фактором формирования общекультурных компетенций студентов: познавательных, творческих социально-личностных качеств, таких, например, как способность работать в коллективе и др. По результатам выполнения и защиты лабораторной работы формируется рейтинг студента, критерии оценивания изложены в балльно -рейтинговой системе, принятой на кафедре математики.

# 1. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

## «ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ»

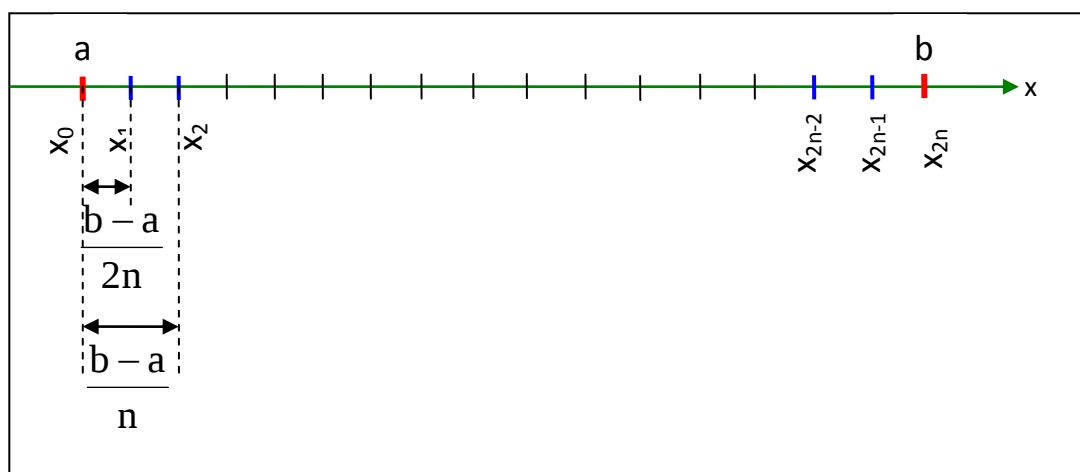
Приближенные вычисления определенных интегралов применяют в случаях:

- подынтегральная функция задана таблично;
- первообразная не выражается в элементарных функциях;
- выражение для первообразной очень сложное.

Идея: замена подынтегральной функции на функцию более простого вида.

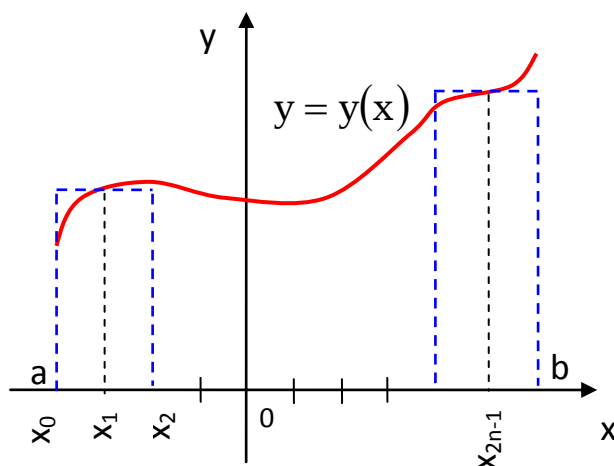
### 1.1. Формула прямоугольников

Вычислить  $\int_a^b y(x) dx$ . Разбиваем  $[a; b]$  на  $(2n)$  равных частей



$$x_1 = a + \frac{b-a}{2n}, \quad x_3 = x_1 + \frac{b-a}{n}, \quad x_5 = x_3 + \frac{b-a}{n} \text{ и т.д.}$$

Площадь криволинейной трапеции  $\int_a^b y(x) dx$  заменяется суммой площадей прямоугольников



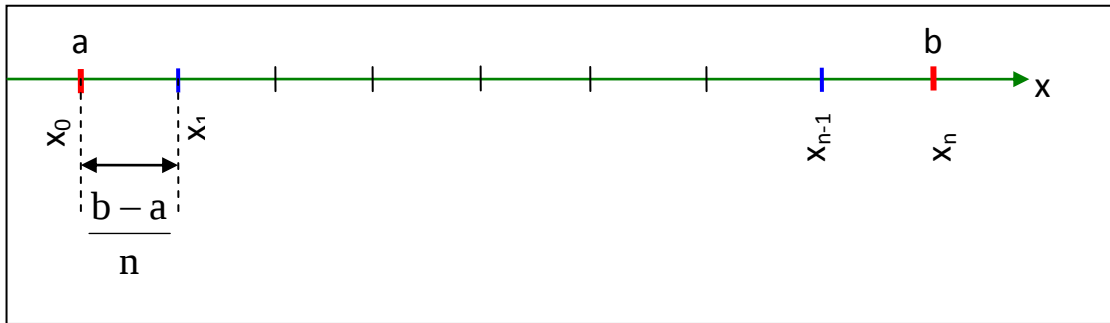
$$\int_a^b y(x) dx \approx y(x_1) \cdot \frac{b-a}{n} + y(x_3) \cdot \frac{b-a}{n} + \dots + y(x_{2n-1}) \cdot \frac{b-a}{n} \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{n} (y(x_1) + y(x_3) + \dots + y(x_{2n-1}))$$

Погрешность этой формулы  $\Delta = \frac{(b-a)^2}{24n^2} M$ , где  $M$  – наибольшее значение  $y''(x)$  на  $[a; b]$ .

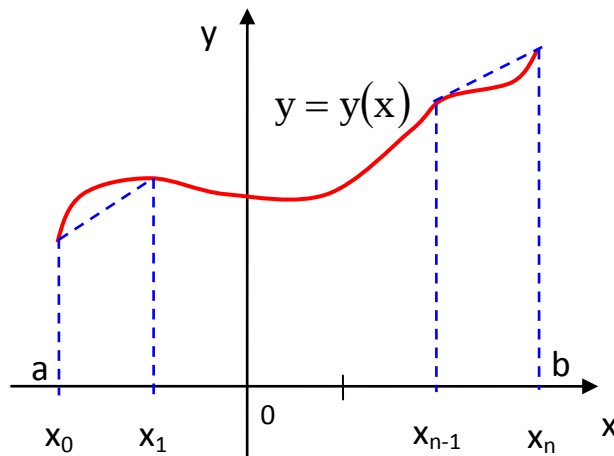
## 1.2. Формула трапеций

Вычислить  $\int_a^b y(x) dx$ . Разбиваем  $[a; b]$  на  $(n)$  равных частей



$$x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \quad x_2 = x_1 + \frac{b-a}{n}, \quad x_3 = x_2 + \frac{b-a}{n}, \dots, \quad x_n = b.$$

Площадь криволинейной трапеции  $\int_a^b y(x) dx$  заменяется суммой площадей трапеций



$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{1}{2}(y_0 + y_1)h + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)h + \dots + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)h$$

или после упрощения

$$\int_a^b y(x) dx \approx h \left( \frac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right),$$

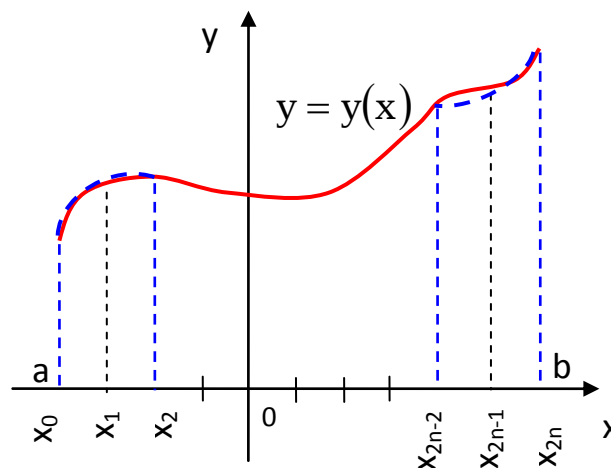
где  $y_0 = y(a)$ ,  $y_1 = y(x_1)$ ,  $y_2 = y(x_2)$ , ...,  $y_n = y(b)$ .

Погрешность этой формулы  $\Delta = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M$ , где  $M$  – наибольшее значение  $y''(x)$  на  $[a; b]$ .

### 1.3. Формула парабол

Разбиваем  $[a; b]$  на  $(2n)$  равных частей. Длина каждой части  $h = \frac{b-a}{2n}$ .

Две соседние криволинейные трапеции заменяем одной параболической трапецией.



$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} ((y_0 + y_{2n}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}))$$

Здесь значения подынтегральной функции в четных точках имеют коэффициент «2», в нечетных «4», в граничных «1».

Погрешность формулы Симпсона  $\Delta \leq \frac{(b-a)^5}{288n^4} M$ , где  $M$  – наибольшее значение

$|y^{IV}(x)|$  на  $[a; b]$ .

### 1.4. Инструкция для студентов

Запись формул для различных значений «n».

#### Формула прямоугольников

$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y(x_1) + y(x_3) + \dots + y(x_{2n-1})), \text{ где}$$

$$x_1 = a + \frac{b-a}{2n}, \quad x_3 = x_1 + \frac{b-a}{n}, \quad x_5 = x_3 + \frac{b-a}{n} \quad \text{и т.д.}$$

При n=4

$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{b-a}{4} (y(x_1) + y(x_3) + y(x_5) + y(x_7)), \text{ где}$$

$$x_1 = a + \frac{b-a}{8}, \quad x_3 = x_1 + \frac{b-a}{4}, \quad x_5 = x_3 + \frac{b-a}{4}, \quad x_7 = x_5 + \frac{b-a}{4}.$$

При n=5

$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{b-a}{5} (y(x_1) + y(x_3) + y(x_5) + y(x_7) + y(x_9)), \text{ где}$$

$$x_1 = a + \frac{b-a}{10}, \quad x_3 = x_1 + \frac{b-a}{5}, \quad x_5 = x_3 + \frac{b-a}{5}, \quad x_7 = x_5 + \frac{b-a}{5},$$

$$x_9 = x_7 + \frac{b-a}{5}.$$

При n=6

$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{b-a}{6} (y(x_1) + y(x_3) + y(x_5) + y(x_7) + y(x_9) + y(x_{11})), \text{ где}$$

$$x_1 = a + \frac{b-a}{12}, \quad x_3 = x_1 + \frac{b-a}{6}, \quad x_5 = x_3 + \frac{b-a}{6}, \quad x_7 = x_5 + \frac{b-a}{6},$$

$$x_9 = x_7 + \frac{b-a}{6}, \quad x_{11} = x_9 + \frac{b-a}{6}.$$

Формула трапеций

$$\int_a^b y(x) dx \approx h \left( \frac{1}{2} (y_0 + y_n) + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right), \text{ где}$$

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad y_0 = y(a), \quad y_1 = y(x_1), \quad y_2 = y(x_2), \quad \dots, \quad y_n = y(b);$$

$$x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \quad x_2 = x_1 + \frac{b-a}{n}, \quad x_3 = x_2 + \frac{b-a}{n}, \quad \dots, \quad x_n = b.$$

При n=4

$$\int_a^b y(x) dx \approx h \left( \frac{1}{2} (y_0 + y_4) + y_1 + y_2 + y_3 \right), \text{ где } h = \frac{b-a}{4},$$

$$x_1 = a + \frac{b-a}{4}, \quad x_2 = x_1 + \frac{b-a}{4}, \quad x_3 = x_2 + \frac{b-a}{4}, \quad x_4 = b;$$

$$y_0 = y(a), \quad y_1 = y(x_1), \quad y_2 = y(x_2), \quad y_3 = y(x_3), \quad y_4 = y(b).$$

При n=5

$$\int_a^b y(x) dx \approx h \left( \frac{1}{2} (y_0 + y_5) + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \right), \text{ где } h = \frac{b-a}{5},$$

$$x_1 = a + \frac{b-a}{5}, \quad x_2 = x_1 + \frac{b-a}{5}, \quad x_3 = x_2 + \frac{b-a}{5}, \quad x_4 = x_3 + \frac{b-a}{5}, \quad x_5 = b;$$

$$y_0 = y(a), \quad y_1 = y(x_1), \quad y_2 = y(x_2), \quad y_3 = y(x_3), \quad y_4 = y(x_4), \quad y_5 = y(b).$$

При n=6

$$\int_a^b y(x) dx \approx h \left( \frac{1}{2} (y_0 + y_6) + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \right), \text{ где } h = \frac{b-a}{6},$$

$$x_1 = a + \frac{b-a}{6}, \quad x_2 = x_1 + \frac{b-a}{6}, \quad x_3 = x_2 + \frac{b-a}{6}, \quad x_4 = x_3 + \frac{b-a}{6},$$

$$x_5 = x_4 + \frac{b-a}{6}, \quad x_6 = b;$$

$$y_0 = y(a), \quad y_1 = y(x_1), \quad y_2 = y(x_2), \quad y_3 = y(x_3), \quad y_4 = y(x_4), \quad y_5 = y(x_5),$$

$$y_6 = y(b).$$

Формула парабол

$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} ((y_0 + y_{2n}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}))$$

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, x_3 = x_2 + h, \dots, x_{2n} = b, \text{ где } h = \frac{b-a}{2n};$$

$$y_0 = y(a), y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2), \dots, y_{2n} = y(b).$$

**Внимание!**

Все значения  $X_i$  и  $Y_i$  были уже подсчитаны ранее, когда применялись формула прямоугольников и формула трапеций.

При n=4

$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{b-a}{6 \cdot 4} ((y_0 + y_8) + 2(y_2 + y_4 + y_6) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7))$$

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, x_3 = x_2 + h, \dots, x_8 = b, \text{ где } h = \frac{b-a}{2 \cdot 4};$$

$$y_0 = y(a), y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2), \dots, y_8 = y(b).$$

При n=5

$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{b-a}{6 \cdot 5} ((y_0 + y_{10}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9))$$

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, x_3 = x_2 + h, \dots, x_{10} = b, \text{ где } h = \frac{b-a}{2 \cdot 5};$$

$$y_0 = y(a), y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2), \dots, y_{10} = y(b).$$

При n=6

$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{b-a}{6 \cdot 6} ((y_0 + y_{12}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9 + y_{11}))$$

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, x_3 = x_2 + h, \dots, x_{12} = b, \text{ где } h = \frac{b-a}{2 \cdot 6};$$

$$y_0 = y(a), y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2), \dots, y_{12} = y(b).$$

**1.5.Задание по вариантам для лабораторной работы**  
**«Приближенное вычисление определенных интегралов»**

Вычислить «неберущийся» интеграл с точностью 0,001.

| Номер<br>варианта | Интеграл                                                  | Число<br>разбиений | Номер<br>варианта | Интеграл                                       | Число<br>разбиений |
|-------------------|-----------------------------------------------------------|--------------------|-------------------|------------------------------------------------|--------------------|
| 1                 | $\int_{-4}^6 \sqrt{x^4 + 6} dx$                           | n=5                | 19                | $\int_0^1 \sqrt{\operatorname{tg} x} dx$       |                    |
| 2                 | $\int_2^7 \frac{dx}{\ln x}$                               | n=5                | 20                | $\int_1^5 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$         | n=4                |
| 3                 | $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2 x} dx$                     |                    | 21                | $\int_0^{10} \operatorname{arctg} x dx$        |                    |
| 4                 | $\int_2^{10} \frac{\ln x}{x^2} dx$                        | n=4                | 22                | $\int_1^2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$          |                    |
| 5                 | $\int_0^{\pi/2} \sqrt{2+\cos x} dx$                       |                    | 23                | $\int_1^2 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$ |                    |
| 6                 | $\int_{\pi/14}^{3\pi/7} \frac{\operatorname{tg} x}{x} dx$ | n=5                | 24                | $\int_0^2 \sqrt{1+x^5} dx$                     |                    |
| 7                 | $\int_{-1}^9 x^2 \cdot \sqrt{10+x^2} dx$                  | n=5                | 25                | $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\sin^2 x} dx$          |                    |
| 8                 | $\int_0^{10} \frac{e^x}{x+5} dx$                          | n=5                | 26                | $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{4}} dx$               |                    |
| 9                 | $\int_0^2 \sqrt{1+x^4} dx$                                |                    | 27                | $\int_{-1}^5 \sqrt[3]{1+x^2} dx$               | n=6                |
| 10                | $\int_0^2 e^{-x^2} dx$                                    |                    | 28                | $\int_2^5 \frac{dx}{\ln^2 x}$                  | n=6                |

|    |                                                 |     |    |                                               |  |
|----|-------------------------------------------------|-----|----|-----------------------------------------------|--|
| 11 | $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ | n=5 | 29 | $\int_0^{\pi/2} \sqrt{3-\sin x} dx$           |  |
| 12 | $\int_0^3 \sqrt{x} \cdot e^x dx$                | n=6 | 30 | $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1+x}} dx$ |  |
| 13 | $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x} dx$               |     | 31 | $\int_0^4 \sqrt{7+x^4} dx$                    |  |
| 14 | $\int_1^3 \frac{e^x}{x} dx$                     |     | 32 | $\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1} dx$               |  |
| 15 | $\int_0^4 \sqrt[3]{2+x^2} dx$                   | n=4 | 33 | $\int_1^{11} \ln^2 x dx$                      |  |
| 16 | $\int_2^{10} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$           | n=4 | 34 | $\int_1^2 \frac{e^{x^2}}{x^2} dx$             |  |
| 17 | $\int_0^1 \sqrt{4+x^3} dx$                      |     | 35 | $\int_0^{0,5} e^{\sqrt{x}} dx$                |  |
| 18 | $\int_4^{10} \frac{x}{\sqrt{1+e^x}} dx$         | n=6 | 36 | $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$                   |  |

### 1.6.Образец выполнения лабораторной работы «Приближенное вычисление определенных интегралов»

Вычислить с точностью до  $10^{-3}$  определенный интеграл тремя способами:

- по формуле прямоугольников,
- по формуле трапеций,
- по формуле парабол

Внимание студентов:

- Число разбиений отрезка  $[a;b]$  это **целое** число, выбираете его сами.  
Например,

|        |               |
|--------|---------------|
| $n=4,$ | тогда $2n=8$  |
| $n=5,$ | тогда $2n=10$ |
| $n=6,$ | тогда $2n=12$ |

- Значения  $y_i$  вычисляете с точностью до 4 знака после запятой. Все вычисления также проводите с точностью до 4 знака после запятой. Конечный результат уже округляете до 3 знака после запятой.

### Образец выполнения ЛР для случая $n=5$ .

1. Вычислить определенный интеграл  $\int_1^{11} \frac{e^x dx}{x^2}$  с точностью до 0,001.

Воспользуемся формулой прямоугольников

$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y(x_1) + y(x_3) + \dots + y(x_{2n-1}))$$

$$a = x_0 = 1, \quad b = x_{10} = 11.$$

Разобьем  $[1; 11]$  на  $2n = 10$  частей ( $n = 5$ ), тогда  $\frac{b-a}{n} = \frac{11-1}{5} = 2$

$$x_1 = x_0 + \frac{b-a}{2n} = 1 + 1 = 2, \quad y(x_1) = y(2) = \frac{e^2}{2^2} \approx 1,8473$$

$$x_3 = x_1 + \frac{b-a}{n} = 2 + 2 = 4, \quad y(x_3) = y(4) = \frac{e^4}{4^2} \approx 3,4124$$

$$x_5 = x_3 + \frac{b-a}{n} = 4 + 2 = 6, \quad y(x_5) = y(6) = \frac{e^6}{6^2} \approx 11,2063$$

$$x_7 = x_5 + \frac{b-a}{n} = 6 + 2 = 8, \quad y(x_7) = y(8) = \frac{e^8}{8^2} \approx 46,5775$$

$$x_9 = x_7 + \frac{b-a}{n} = 8 + 2 = 10, \quad y(x_9) = y(10) = \frac{e^{10}}{10^2} \approx 220,2645$$

Данные вычислений сводим в таблицу

| $x_i$ | $x_1=2$ | $x_3=4$ | $x_5=6$ | $x_7=8$ | $x_9=10$ |
|-------|---------|---------|---------|---------|----------|
| $y_i$ | 1,8473  | 3,4124  | 11,2063 | 46,5775 | 220,2645 |

$$\begin{aligned}\int_1^{11} \frac{e^x dx}{x^2} &\approx \frac{b-a}{n} (y(x_1) + y(x_3) + y(x_5) + y(x_7) + y(x_9)) \approx \\ &\approx \frac{11-1}{5} (1,8473 + 3,4124 + 11,2063 + 46,5775 + 220,2645) \approx \\ &\approx 566,6155 \approx 566,616\end{aligned}$$

2. Вычислить определенный интеграл  $\int_1^{11} \frac{e^x dx}{x^2}$  с точностью до 0,001.

Воспользуемся формулой трапеций

$$\int_a^b y(x) dx \approx h \left( \frac{1}{2} (y_0 + y_n) + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right),$$

где  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $y_0 = y(a)$ ,  $y_1 = y(x_1)$ ,  $y_2 = y(x_2)$ , ...,  $y_n = y(b)$ ,

$a = x_0 = 1$ ,  $b = x_5 = 11$ .

Разобьем  $[1; 11]$  на  $n = 5$  частей,  $h = \frac{b-a}{n} = \frac{11-1}{5} = 2$

$$x_0 = a = 1, \quad y_0 = y(a) = y(1) = \frac{e^1}{1^2} = 2,7183$$

$$x_1 = a + \frac{b-a}{n} = 1 + 2 = 3, \quad y_1 = y(x_1) = y(3) = \frac{e^3}{3^2} = 2,2317$$

$$x_2 = x_1 + \frac{b-a}{n} = 3 + 2 = 5, \quad y_2 = y(x_2) = y(5) = \frac{e^5}{5^2} = 5,9365$$

$$x_3 = x_2 + \frac{b-a}{n} = 5 + 2 = 7, \quad y_3 = y(x_3) = y(7) = \frac{e^7}{7^2} = 22,3803$$

$$x_4 = x_3 + \frac{b-a}{n} = 7 + 2 = 9, \quad y_4 = y(x_4) = y(9) = \frac{e^9}{9^2} = 100,0038$$

$$x_5 = x_4 + \frac{b-a}{n} = 9 + 2 = 11, \quad y_5 = y(x_5) = y(11) = \frac{e^{11}}{11^2} = 494,8276$$

|       |         |         |         |         |          |          |
|-------|---------|---------|---------|---------|----------|----------|
| $x_i$ | $x_0=1$ | $x_1=3$ | $x_2=5$ | $x_3=7$ | $x_4=9$  | $x_5=11$ |
| $y_i$ | 2,7183  | 2,2317  | 5,9365  | 22,3803 | 100,0038 | 494,8276 |

$$\int_1^{11} \frac{e^x}{x^2} dx \approx h \left( \frac{1}{2}(y_0 + y_5) + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \right) \approx$$

$$\approx \frac{11-1}{5} \left( \frac{1}{2}(2,7183 + 494,8276) + 2,2317 + 5,9365 + 22,3803 + 100,0038 \right) \approx$$

$$\approx 758,6512 \approx 758,651$$

3. Вычислить определенный интеграл  $\int_1^{11} \frac{e^x}{x^2} dx$  с точностью до 0,001.

Воспользуемся формулой парабол (Симпсона)

$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} ((y_0 + y_{2n}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}))$$

Разбиваем  $[1; 11]$  на  $2n = 10$  равных частей ( $n = 5$ ) длиной  $\frac{b-a}{2n} = 1$

Воспользуемся ранее вычисленными значениями, сведем их в таблицу

|       |         |         |         |         |         |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $x_i$ | $x_0=1$ | $x_1=2$ | $x_2=3$ | $x_3=4$ | $x_4=5$ |
| $y_i$ | 2,7183  | 1,8473  | 2,2317  | 3,4124  | 5,9365  |

|         |         |         |          |          |             |
|---------|---------|---------|----------|----------|-------------|
| $x_5=6$ | $x_6=7$ | $x_7=8$ | $x_8=9$  | $x_9=10$ | $x_{10}=11$ |
| 11,2063 | 22,3803 | 46,5775 | 100,0038 | 220,2645 | 494,8276    |

$$\int_1^{11} \frac{e^x}{x^2} dx \approx \frac{b-a}{6n} ((y_0 + y_{10}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9))$$

$$\approx \frac{11-1}{6 \cdot 5} ((2,7183 + 494,8276) + 2(2,2317 + 5,9365 + 22,3803 + 100,0038) +$$

$$+ 4(1,8473 + 3,4124 + 11,2063 + 46,5775 + 220,2645)) \approx 630,6275 \approx 630,628.$$

Вывод:

Значение определенного интеграла  $\int_1^{11} \frac{e^x}{x^2} dx$  с точностью до 0,001 равно

|                            |         |
|----------------------------|---------|
| по формуле прямоугольников | 566,616 |
| по формуле трапеций        | 758,651 |
| по формуле парабол         | 630,628 |

## 2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА «ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММЫ РЯДА ЛЕЙБНИЦА»

### 2.1. Краткий теоретический обзор

Теорема (Лейбница)

Если члены знакопеременного ряда  $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$  взятые по модулю, монотонно убывают и  $n$

– ый член ряда при  $n \rightarrow \infty$  стремится к нулю, то есть

$$1) |u_1| > |u_2| > \dots > |u_n| > \dots$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0,$$

то

a) ряд сходится,

b) сумма ряда имеет знак первого числа

c) сумма ряда по модулю не превосходит модуля первого числа, т.е.  $\left| \sum_{i=1}^{\infty} u_i \right| \leq |u_1|$ .

Знакопеременный ряд, удовлетворяющий условиям 1) и 2) называют рядом Лейбница или рядом лейбницевского типа.

*Замечание.*

Теорема Лейбница позволяет оценить ошибку, которая получается, при замене его

суммы  $S = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$  частичной суммой  $S_n = \sum_{i=1}^n u_i$ , т.е.  $S \approx S_n$ . При такой замене члены ряда,

начиная с  $n+1$  номера, отбрасываются. Остаток ряда Лейбница

$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+3} + \dots$  представляет собой знакопеременный ряд,

удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница. Следовательно, сумма этого остатка не

превосходит по абсолютной величине первого числа  $u_{n+1}$ , то есть  $|R_n| \leq |u_{n+1}|$ . Таким

образом, пользуясь приближенным равенством  $S \approx S_n$ , допускается ошибка, которая меньше

абсолютной величины первого отброшенного числа.

Из неравенства  $|R_n| < |u_{n+1}| < \alpha$ , где  $\alpha$  – заданная точность, находим наименьший номер  $n$ ,

при котором значение суммы ряда Лейбница  $S \approx S_n$  вычислено с заданной точностью  $\alpha$ .

## 2.2.Примеры

### Пример 1.

Вычислить сумму ряда  $1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} + \dots$  с точностью  $\alpha = 10^{-3}$ .

*Решение.*

Данный ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница (члены ряда по модулю убывают и при  $n \rightarrow \infty$  стремятся к нулю). Согласно замечанию теоремы Лейбница, ошибка

при замене суммы данного ряда  $S$  его частичной суммой  $S_n = \sum_{i=1}^n u_i$  не превосходит модуля

первого из отброшенного числа  $|u_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)^4}$ . Чтобы достичь заданной точности,

достаточно положить  $\frac{1}{(n+1)^4} \leq 10^{-3}$ . Наименьшее значение  $n$ , удовлетворяющее данному

неравенству равно 5. Таким образом, для вычисления суммы исходного знакочередующегося ряда с точностью 0,001 достаточно взять сумму первых пяти слагаемых, то есть

$$S \approx S_5 = 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} \approx 0,9475.$$

Заметим, что  $\frac{1}{5^4} = \frac{1}{625} = 0,0016 > 0,001$ ;  $\left| -\frac{1}{6^4} \right| = \frac{1}{1296} \approx 0,0007 < 0,001$ .

Ответ: сумма данного ряда с точностью 0,001 равна 0,9475.

### Пример 2.

Найти приближенно сумму ряда  $1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{6^3} + \frac{1}{8^3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^3} + \dots$  с точностью

$$\alpha = 10^{-2}.$$

*Решение.*

Данный ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница (члены ряда по модулю убывают и при  $n \rightarrow \infty$  стремятся к нулю). Для того чтобы найти с точностью  $\alpha = 10^{-2}$  сумму данного ряда, надо взять столько его членов, чтобы следующий член ряда был по модулю меньше 0,01. Тогда весь остаток ряда, начиная с этого члена, будет также меньше 0,01. Для

данного ряда  $|u_1| = 1 > 0,01$ ,  $|u_2| = \left| -\frac{1}{2^3} \right| = \frac{1}{8} > 0,01$ ,  $|u_3| = \left| \frac{1}{4^3} \right| = \frac{1}{64} > 0,01$ ,

$|u_4| = \left| -\frac{1}{6^3} \right| = \frac{1}{216} < 0,01$ , т.е. модуль четвертого слагаемого меньше заданной точности.

Поэтому с заданной точностью 0,01 сумма ряда равна

$$S \approx S_3 = 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{64} \approx 0,89.$$

### 2.3.Задание по вариантам для лабораторной работы «Вычисление суммы ряда Лейбница»

Вычислить с заданной точностью  $\alpha$  сумму знакочередующегося ряда:

| вариант | Ряд                                                       | Точность         | вариант | Ряд                                                          | Точность         |
|---------|-----------------------------------------------------------|------------------|---------|--------------------------------------------------------------|------------------|
| 1       | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$              | $\alpha = 0,01$  | 16      | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$                  | $\alpha = 0,001$ |
| 2       | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n)^3}$           | $\alpha = 0,001$ | 17      | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$              | $\alpha = 0,01$  |
| 3       | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)}{2^n}$  | $\alpha = 0,01$  | 18      | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{3^n}$            | $\alpha = 0,01$  |
| 4       | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{n^2 + 2n + 1}$    | $\alpha = 0,01$  | 19      | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^n}$             | $\alpha = 0,001$ |
| 5       | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(3n)!}$            | $\alpha = 0,01$  | 20      | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n^2}{3^{n+1}}$   | $\alpha = 0,001$ |
| 6       | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4^n \cdot n!}$     | $\alpha = 0,001$ | 21      | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(0,4)^{n+1}}{n+1}$      | $\alpha = 0,01$  |
| 7       | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{(n+1)^3 n}$  | $\alpha = 0,01$  | 22      | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1} \cdot (n+1)}$ | $\alpha = 0,01$  |
| 8       | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n^2}{2^n}$    | $\alpha = 0,01$  | 23      | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n(3n+1)}$           | $\alpha = 0,001$ |
| 9       | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{n(n+2)(n+4)}$ | $\alpha = 0,001$ | 24      | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n^2}{(5n)!}$     | $\alpha = 0,001$ |
| 10      | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2(n+4)}$         | $\alpha = 0,01$  | 25      | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{2^n(n^2+1)}$     | $\alpha = 0,001$ |
| 11      | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^n}$           | $\alpha = 0,001$ | 26      | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2^n(n+5)}$       | $\alpha = 0,001$ |

|    |                                                             |                  |  |    |                                                            |                   |
|----|-------------------------------------------------------------|------------------|--|----|------------------------------------------------------------|-------------------|
| 12 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^n}$           | $\alpha = 0,01$  |  | 27 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{(n+1)^3}$   | $\alpha = 0,01$   |
| 13 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+2)}{(4n)! (n^2+4)}$ | $\alpha = 0,001$ |  | 28 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$                | $\alpha = 0,01$   |
| 14 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n^3(n+1)^4}$    | $\alpha = 0,001$ |  | 29 | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^3}{n(n+1)^n}$              | $\alpha = 0,0001$ |
| 15 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{2^n(n+1)}$           | $\alpha = 0,001$ |  | 30 | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n^2}{2^{n+1}}$ | $\alpha = 0,001$  |

### 3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА «РАЗЛОЖЕНИЕ НЕПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В РЯД ФУРЬЕ»

#### 3.1.Краткий теоретический обзор

Часто приходится иметь дело с непериодической функцией  $f(x)$ , заданной на отрезке  $[a; b]$ . Пусть  $f(x)$  удовлетворяет условиям теоремы Дирихле. Покажем, что данную функцию  $f(x)$  в точках непрерывности можно представить в виде суммы ряда Фурье. Для этого рассмотрим произвольную периодическую функцию  $f_1(x)$  с периодом  $2\mu \geq |b - a|$ , совпадающую с функцией  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ . Разложим функцию  $f_1(x)$  в ряд Фурье. Сумма этого ряда во всех точках отрезка  $[a; b]$  совпадает с заданной функцией  $f(x)$ , то есть функция  $f(x)$  разложена в ряд Фурье на отрезке  $[a; b]$ .

Пусть функция  $f(x)$  задана на отрезке  $[0; \ell]$ . Желая разложить ее в этом промежутке в ряд Фурье, доопределим функцию  $f(x)$  для значений  $x$  на отрезке  $[-\ell; 0]$ . Это даст возможность получить различные тригонометрические ряды.

Если дополним определение функции  $f(x)$  так, чтобы при  $-\ell \leq x \leq 0$  выполнялось  $f(x) = f(-x)$ , то получится четная функция (см. рис.1). В этом случае говорят, что функция «продолжена четным образом». Эту функцию разлагают в ряд Фурье, который содержит только косинусы.

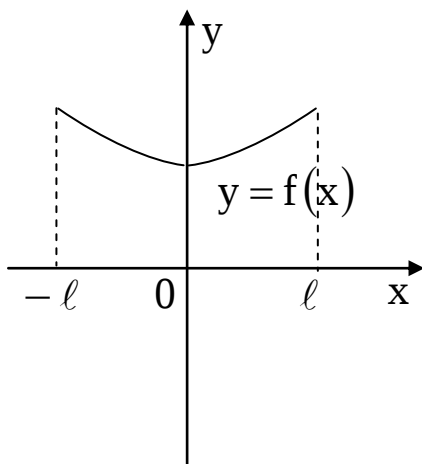


Рис. 1

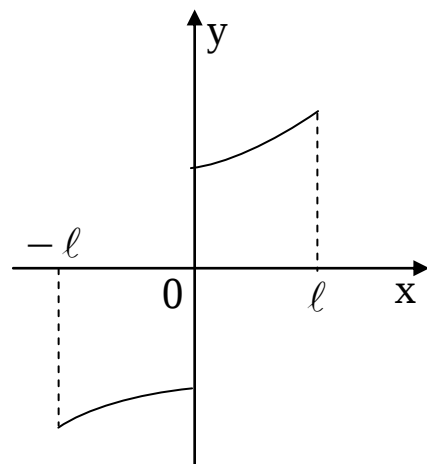


Рис. 2

Аналогично, если дополнить определение функции  $f(x)$  условием  $f(-x) = -f(x)$ ,  $x \in [-\ell; 0]$  так, чтобы она оказалась нечетной (см. рис.2), то в ее разложении в ряд Фурье будут содержаться только члены с синусами. Таким образом, заданную

на отрезке  $[0; \ell]$  функцию  $f(x)$ , удовлетворяющую условиям теоремы Дирихле, можно разложить в ряд Фурье, как по косинусам, так и по синусам.

Приведем несколько случаев разложения функции в ряд Фурье.

1). Рассмотрим отрезок  $[-\pi; \pi]$ . Ряд Фурье  $2\pi$  – периодической функции  $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx), \text{ где}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

2). Рассмотрим отрезок  $[-\ell; \ell]$ . Ряд Фурье  $2\ell$  – периодической функции  $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos \frac{\pi n x}{\ell} + b_n \cdot \sin \frac{\pi n x}{\ell} \right), \text{ где}$$

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell} \, dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

3). Рассмотрим отрезок  $[a; b]$ . Ряд Фурье  $(b-a)$  – периодической функции  $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos \frac{2\pi n x}{b-a} + b_n \cdot \sin \frac{2\pi n x}{b-a} \right), \text{ где}$$

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2\pi n x}{b-a} \, dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2\pi n x}{b-a} \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

4). Рассмотрим симметричный относительно нуля отрезок  $[-\ell, \ell]$  и ряд Фурье для четной и нечетной функции.

а) Если  $f(x)$  четная, т.е.  $f(x) = f(-x)$ , то  $b_n = 0$  и ряд Фурье разложен по косинусам  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos \frac{\pi n x}{\ell}$ , где  $a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell} \, dx$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

б) Если  $f(x)$  нечетная, т.е.  $f(x) = -f(-x)$ , то  $a_n = 0$  и ряд Фурье разложен по синусам  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin \frac{\pi n x}{\ell}$ , где  $b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} \, dx$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

5). Рассмотрим отрезок  $[0; \ell]$ . Для функции  $f(x)$  можно получить три разложения

- а) Ряд Фурье на отрезке  $[a; b]$ , где  $a = 0$  и  $b = \ell$ .
- б) Продолжить функцию  $f(x)$  на отрезок  $[-\ell, 0]$  четным образом, тогда на отрезке  $[-\ell; \ell]$  функция раскладывается в ряд Фурье по косинусам.
- в) Продолжить функцию  $f(x)$  на отрезок  $[-\ell, 0]$  нечетным образом, тогда на отрезке  $[-\ell; \ell]$  функция раскладывается в ряд Фурье по синусам.

Полезно помнить:  $\sin \pi n = 0$  и  $\cos \pi n = (-1)^n$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

### 3.2.Примеры

#### Пример 1.

Требуется разложить функцию  $f(x) = x^2$  на отрезке  $[0; \pi]$  в ряд по синусам. Продолжим эту

функцию на  $[-\pi, 0]$  нечетным образом,  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi \\ -x^2, & \text{если } -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$ , тогда функция

раскладывается в ряд Фурье, который будет содержать только синусы

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin \frac{\pi n x}{a} \quad . \text{Т.к. } a = \pi, \text{ то } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin n x$$

Найдем коэффициенты  $b_n$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx \, dx = \left| u = x^2, dv = \sin nx \, dx \right| \\ &= -\frac{2}{\pi} \cdot x^2 \cdot \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \cos nx \, dx = \left| u = x, dv = \cos nx \, dx \right| = \\ &= -\frac{2\pi \cdot (-1)^n}{n} + \frac{4}{n\pi} \left( \frac{x}{n} \cdot \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \right) = \left| \sin n\pi = 0, \cos n\pi = (-1)^n \right| = \\ &= \frac{2\pi}{n} \cdot (-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3} \cdot ((-1)^n - 1) \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2\pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3} \cdot ((-1)^n - 1) \right) \cdot \sin nx, \quad x \in [0; \pi].$$

#### Пример 2.

Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x) = x$  на отрезке  $[0, \pi]$  по синусам.

*Решение.* Продолжая эту функцию на отрезке нечетным образом, имеем

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n}.$$

Ответ:  $x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \quad x \in [0, \pi]$  или

$$x = 2 \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right), \quad x \in [0, \pi].$$

### Пример 3.

Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x) = x$  на отрезке  $[0, \pi]$  по косинусам.

*Решение.* Продолжая эту функцию четным образом, получим  $f(x) = |x|, \quad x \in (-\pi; \pi]$ .

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = -\frac{4}{\pi n^2},$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad x \in [0, \pi].$

### Пример 4.

Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x) = x$  на отрезке  $[0, \ell]$  по косинусам.

*Решение.* Продолжим эту функцию четным образом, получим  $f(x) = |x|, \quad x \in (-\ell; \ell]$ .

$$a_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \, dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x \, dx = \frac{2}{\ell} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\ell} = \ell,$$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, dx = \frac{2\ell}{\pi^2 n^2} \cos \frac{n\pi x}{\ell} \Big|_0^{\ell} = \frac{2\ell}{\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1)$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{при четных } n \\ -\frac{4\ell}{\pi^2 n^2} & \text{при нечетных } n \end{cases}$$

Ответ:  $x = \frac{\ell}{2} - \frac{4\ell}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi x}{\ell}}{n^2}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad x \in [0, \ell] \text{ или}$

$$x = \frac{\ell}{2} - \frac{4\ell}{\pi^2} \left( \frac{\cos \frac{\pi x}{\ell}}{1} + \frac{\cos \frac{3\pi x}{\ell}}{3^2} + \frac{\cos \frac{5\pi x}{\ell}}{5^2} + \dots + \frac{\cos \frac{(2k+1)\pi x}{\ell}}{(2k+1)^2} + \dots \right), \quad x \in [0, \ell].$$

**Пример 5.**

Разложить функцию  $f(x) = x - 1$  в ряд Фурье на  $(-3; -1)$ .

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos \frac{2\pi n x}{b-a} + b_n \cdot \sin \frac{2\pi n x}{b-a} \right), \text{ где}$$

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2\pi n x}{b-a} dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2\pi n x}{b-a} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Здесь  $b - a = -1 - (-3) = 2$ , найдем коэффициенты  $a_0, a_n, b_n$ .

$$a_0 = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2\pi \cdot 0 \cdot x}{b-a} dx = \frac{2}{2} \int_{-3}^{-1} (x-1) \underbrace{\cos \frac{2\pi \cdot 0 \cdot x}{2}}_1 dx = \int_{-3}^{-1} (x-1) dx =$$

$$= \frac{(x-1)^2}{2} \Big|_{-3}^{-1} = \frac{(-1-1)^2}{2} - \frac{(-3-1)^2}{2} = 2 - 8 = -6$$

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2\pi n x}{b-a} dx = \frac{2}{2} \int_{-3}^{-1} (x-1) \cos \frac{2\pi n x}{2} dx = |uv - \int v du| =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x-1 & du = dx \\ dv = \cos \pi n x dx & v = \frac{1}{\pi n} \sin \pi n x \end{array} \right| = (x-1) \frac{1}{\pi n} \sin \pi n x \Big|_{-3}^{-1} - \int_{-3}^{-1} \frac{1}{\pi n} \sin \pi n x dx =$$

$$= 0 + \frac{1}{(\pi n)^2} \cos \pi n x \Big|_{-3}^{-1} = \frac{1}{(\pi n)^2} \left( \underbrace{\cos \pi n}_{-1} - \underbrace{\cos 3\pi n}_{-1} \right) = \frac{1}{(\pi n)^2} \cdot 0 = 0$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2\pi n x}{b-a} dx = \frac{2}{2} \int_{-3}^{-1} (x-1) \sin \frac{2\pi n x}{2} dx = \left| uv - \int v du \right| = \\
 &= \left| \begin{array}{ll} u = x-1 & du = dx \\ dv = \sin \pi n x dx & v = \frac{-1}{\pi n} \cos \pi n x \end{array} \right| = (x-1) \frac{-1}{\pi n} \cos \pi n x \Big|_{-3}^{-1} - \int_{-3}^{-1} \frac{-1}{\pi n} \cos \pi n x dx = \\
 &= (-2) \cdot \frac{-1}{\pi n} \cos \pi n - (-4) \frac{-1}{\pi n} \underbrace{\cos 3\pi n}_{\cos \pi n} + \frac{1}{(\pi n)^2} \underbrace{\sin \pi n x}_0 \Big|_{-3}^{-1} = \frac{-2}{\pi n} \cos \pi n = \frac{-2}{\pi n} (-1)^n
 \end{aligned}$$

Имеем  $a_0 = -6$ ,  $a_n = 0$ ,  $b_n = \frac{-2}{\pi n} (-1)^n$ . Запишем ряд Фурье функции  $f(x) = x - 1$

$$x - 1 = \frac{-6}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( 0 \cdot \cos \frac{2\pi n x}{2} + \frac{-2}{\pi n} (-1)^n \cdot \sin \frac{2\pi n x}{2} \right) = -3 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \sin \pi n x$$

Ответ:  $x - 1 = -3 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \sin \pi n x$  или

$$x - 1 = -3 + \frac{2}{\pi} (\sin \pi x - \sin 2\pi x + \sin 3\pi x - \sin 4\pi x + \dots)$$

### Пример 6.

Разложить функцию  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (2; 3) \\ 1, & x \in (3; 4) \end{cases}$  в ряд Фурье.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos \frac{2\pi n x}{b-a} + b_n \cdot \sin \frac{2\pi n x}{b-a} \right), \text{ где}$$

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2\pi n x}{b-a} dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2\pi n x}{b-a} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Здесь  $b - a = 4 - 2 = 2$ , тогда

$$a_0 = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2\pi n x}{b-a} dx = \frac{2}{2} \left( \int_2^3 \underbrace{0 \cdot \cos \frac{2\pi \cdot 0 \cdot x}{2}}_0 dx + \int_3^4 \underbrace{1 \cdot \cos \frac{2\pi \cdot 0 \cdot x}{2}}_1 dx \right) = \int_3^4 dx = 1$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2\pi n x}{b-a} dx = \frac{2}{2} \left( \int_2^3 \underbrace{0 \cdot \cos \frac{2\pi n x}{2}}_0 dx + \int_3^4 1 \cdot \cos \frac{2\pi n x}{2} dx \right) = \\
&= \int_3^4 \cos \pi n x dx = \frac{1}{\pi n} \sin \pi n x \Big|_3^4 = \frac{1}{\pi n} \left( \underbrace{\sin 4\pi n}_0 - \underbrace{\sin 3\pi n}_0 \right) = 0 \\
b_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2\pi n x}{b-a} dx = \frac{2}{2} \left( \int_2^3 0 \cdot \sin \frac{2\pi n x}{2} dx + \int_3^4 1 \cdot \sin \frac{2\pi n x}{2} dx \right) = \\
&= \int_3^4 \sin \pi n x dx = \frac{-1}{\pi n} \cos \pi n x \Big|_3^4 = \frac{-1}{\pi n} \left( \underbrace{\cos 4\pi n}_1 - \underbrace{\cos 3\pi n}_{(-1)^n} \right) = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n}
\end{aligned}$$

Имеем  $a_0 = 1$ ,  $a_n = 0$ ,  $b_n = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n}$ . Запишем ряд Фурье функции  $f(x)$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos \frac{2\pi n x}{b-a} + b_n \cdot \sin \frac{2\pi n x}{b-a} \right) = \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( 0 \cdot \cos \frac{2\pi n x}{2} + \frac{(-1)^n - 1}{\pi n} \cdot \sin \frac{2\pi n x}{2} \right) = \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n} \cdot \sin \pi n x = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n} \cdot \sin \pi n x = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left( -2 \sin \pi x - \frac{2}{3} \sin 3\pi x - \frac{2}{5} \sin 5\pi x - \dots \right) = \\
&= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left( \sin \pi x + \frac{1}{3} \sin 3\pi x + \frac{1}{5} \sin 5\pi x + \dots \right).
\end{aligned}$$

### 3.3.Задание по вариантам для лабораторной работы «Разложение непериодической функции в ряд Фурье»

Разложить в ряд Фурье не периодическую функцию на отрезке  $[a; b]$

| вариант | Функция                                                                      | отрезок                                           | вариант | Функция                                                                        | отрезок              |
|---------|------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|---------|--------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| 1       | $y = 3 - x$                                                                  | $x \in [3; 5]$                                    | 16      | $y =  x + 1 $                                                                  | $x \in [-3; 1]$      |
| 2       | $y = 2x$                                                                     | $x \in [5; 7]$                                    | 17      | $y =  x  + 1$                                                                  | $x \in [-1; 3]$      |
| 3       | $y = 2x - 3,$                                                                | $x \in [1; 3]$                                    | 18      | $y = 10 - x$                                                                   | $x \in [5; 15]$      |
| 4       | $y = 5x + 1,$                                                                | $x \in [4; 7]$                                    | 19      | $y =  x + 1  + 2$                                                              | $x \in [-2; 3]$      |
| 5       | $y = 2(x - 1)$                                                               | $x \in [3; 5]$                                    | 20      | $y = 2 x $                                                                     | $x \in [-1; 2]$      |
| 6       | $y = \frac{1}{2}x$                                                           | $x \in [3; 7]$                                    | 21      | $y = \frac{1}{2}(2 - x)$                                                       | $x \in [1; 3]$       |
| 7       | $y = \frac{1}{3}x$                                                           | $x \in [2; 8]$                                    | 22      | $y = \begin{cases} 0, & 2 \leq x \leq 4, \\ 4, & 4 \leq x \leq 8; \end{cases}$ | $x \in [2; 8]$       |
| 8       | $y = 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$                                        | $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ | 23      | $y = \begin{cases} 0, & 2 \leq x \leq 3, \\ 3, & 3 \leq x < 5; \end{cases}$    | $x \in [4\pi; 5\pi]$ |
| 9       | $y = x$                                                                      | $x \in [2; 5]$                                    | 24      | $y = \begin{cases} -1, & 0 \leq x \leq 4 \\ 1, & 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$  | $x \in [0; 8]$       |
| 10      | $y = \begin{cases} 1, & x \in [2; 4], \\ 2, & x \in [4; 5]; \end{cases}$     | $x \in [2; 5]$                                    | 25      | $y = \begin{cases} -1, & 0 \leq x \leq 4 \\ 1, & 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$  | $x \in [\pi; 2\pi]$  |
| 11      | $y = \begin{cases} x, & 2 \leq x \leq 3 \\ 3, & 3 \leq x < 5 \end{cases}$    | $x \in [2; 5]$                                    | 26      | $y = \begin{cases} x, & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & 4 \leq x \leq 10 \end{cases}$  | $x \in [2; 10]$      |
| 12      | $y = \pi - x$                                                                | $x \in [-\pi; 2\pi]$                              | 27      | $y =  x $                                                                      | $x \in [\pi; 3\pi]$  |
| 13      | $y = \begin{cases} x, & 2 \leq x \leq 4 \\ 4, & 4 \leq x \leq 7 \end{cases}$ | $x \in [2; 7]$                                    | 28      | $y =  1 + x $                                                                  | $x \in [\pi; 2\pi]$  |
| 14      | $y = 2(\pi - x)$                                                             | $x \in [3\pi; 5\pi]$                              | 29      | $y = 1 +  x $                                                                  | $x \in [\pi; 4\pi]$  |
| 15      | $y =  x $                                                                    | $x \in [-2; 4]$                                   | 30      | $y = x - 1$                                                                    | $x \in [\pi; 4\pi]$  |

### Литература

1. Бугров, Я. С. Высшая математика в 3 т. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление в 2 кн. Книга 2: учебник для академического бакалавриата / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — М. : Изд-во Юрайт, 2017. — 246 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс).
2. Вдовин, А.Ю. Высшая математика. Стандартные задачи с основами теории [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.Ю. Вдовин, Л.В. Михалева, В.М. Мухина. — Электрон. дан. — СПб.: Лань, 2009. — 192 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/>.
3. Крицков, Л.В. Высшая математика в вопросах и ответах: учебное пособие / Л.В. Крицков; Под ред. В.А. Ильин. - М.: Проспект, 2013. - 176 с.
4. Лунгу, К.Н. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч.1 / К.Н. Лунгу, Е.В. Макаров. - М.: Физматлит, 2014. - 216 с.
5. Лунгу, К.Н. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч. 2 / К.Н. Лунгу, Е.В. Макаров. - М.: Физматлит, 2013. - 384 с.
6. Лурье, И.Г. Высшая математика: практикум / И.Г. Лурье, Т.П. Фунтикова. - М.: Вузовский учебник, НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 160 с.
7. Шипачев, В.С. Высшая математика. Полный курс: учебник для бакалавров / В.С. Шипачев; Под ред. А.Н. Тихонов. - М.: Юрайт, 2013. - 607 с.
8. Шипачев, В. С. Высшая математика : учебник и практикум / В. С. Шипачев. — 8-е изд., перераб. и доп. — М. : Изд-во Юрайт, 2017. — 447 с. — (Серия : Бакалавр. Прикладной курс).

**ПРИЛОЖЕНИЕ - ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ ОТЧЕТА ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ**

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Уфимский государственный нефтяной технический университет»

Кафедра математики

Лабораторная работа

**Приближенное вычисление определенных интегралов**

Работу выполнил:

ст. гр. **БМК-17**

**Ишбулдина Алсу**

Вариант **9**

Уфа 2018