

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Уфимский государственный нефтяной технический университет»

Кафедра «Математики»

Интегралы. Ряды

Учебно-методические указания
к лабораторным работам по дисциплине «Математика»

Уфа-2018

В учебно-методических указаниях даны рекомендации по выполнению лабораторных работ следующих тем: определенный интеграл, знакочередующиеся ряды лейбницевского типа, ряды Фурье. В пособии представлены: краткий теоретический материал, примеры с решениями, индивидуальные задания по вариантам, подробная инструкция для студентов, образец оформления лабораторных работ.

Пособие предназначено студентам, изучающим дисциплину «Математика», обучающихся по основным профессиональным образовательным программам уровня высшего образования бакалавриат, всех форм обучения для следующих направлений подготовки: 09.03.01 Информатика и вычислительная техника; 09.03.03 Прикладная информатика; 13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника; 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника; 15.03.01 Машиностроение; 15.03.02 Технологические машины и оборудование; 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств; 18.03.01 Химическая технология; 18.03.02 Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии; 19.03.01 Биотехнология; 20.03.01 Техносферная безопасность; 21.03.01 Нефтегазовое дело; 27.03.04 Управление в технических системах; 38.03.01 Экономика; 38.03.02 Менеджмент.

Составитель: Исламгулова Г.Ф., ст. преподаватель кафедры математики

Рецензенты: Абзалимов Р.Р., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики
Глебов С.Г., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1. Лабораторная работа «Приближенное вычисление определенных интегралов»	4
1.1. Формула прямоугольников	4
1.2. Формула трапеций	5
1.3. Формула парабол	7
1.4. Инструкция для студентов	8
1.5. Задание по вариантам для лабораторной работы «Приближенное вычисление определенных интегралов»	11
1.6. Образец выполнения лабораторной работы «Приближенное вычисление определенных интегралов»	12
2. Лабораторная работа «Вычисление суммы ряда Лейбница»	16
2.1. Краткий теоретический обзор	16
2.2. Примеры	16
2.3. Задание по вариантам для лабораторной работы «Вычисление суммы ряда Лейбница»	18
3. Лабораторная работа «Разложение непериодической функции в ряд Фурье»	19
3.1. Краткий теоретический обзор	19
3.2. Примеры.....	21
3.3. Задание по вариантам для лабораторной работы «Разложение непериодической функции в ряд Фурье»	26
Литература	27
Приложение. Образец оформления отчета по лабораторной работе	28

ВВЕДЕНИЕ

Лабораторные занятия, так же, как и лекционные, практические занятия и самостоятельная работа способствуют освоению студентами образовательной программы, формированию общекультурных, общеобразовательных и профессиональных компетенций за счет выполнения реальных практических задач. В настоящих методических указаниях приводится описание лабораторных работ, выполняемых студентами на кафедре математики. Каждая работа посвящена рассмотрению одного из разделов дисциплины «Математика». В различных приложениях математики, в большинстве случаев приближенные методы являются единственно возможными. Приближенные методы вычислений находят широкое применение при решении конкретных практических задач. Во всех лабораторных работах дан материал, призванный закрепить у студентов теоретические знания по представленной теме, приобрести практические умения, развить навыки выполнения математических вычислений, формирующие определенные учебные компетенции.

Описание лабораторных работ дано по следующей схеме: сначала даются основы теории, подробно разобраны примеры использования представленного метода, изложен порядок выполнения вычислений, даны индивидуальные задания не менее 30 вариантов для самостоятельного выполнения. Форма отчета по проделанной работе приведена в Приложении. Отчет по лабораторным исследованиям должен содержать следующее: название работы, ее цель, исходные данные, основные формулы, расчеты, таблицы, графики, анализ результатов и выводы. Лабораторная работа проводится в аудиторное время, оформление отчета и защита в установленные преподавателем сроки. Организация лабораторно практикума может предусматривать его выполнение малыми группами студентов, организующихся как при аудиторной работе, так и вне ее, т.е. при самостоятельной работе по анализу материала, обработке результатов, их оформлению. Это делает лабораторный практикум важнейшим фактором формирования общекультурных компетенций студентов: познавательных, творческих социально-личностных качеств, таких, например, как способность работать в коллективе и др. По результатам выполнения и защиты лабораторной работы формируется рейтинг студента, критерии оценивания изложены в балльно-рейтинговой системе, принятой на кафедре математики.

1. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА «ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ»

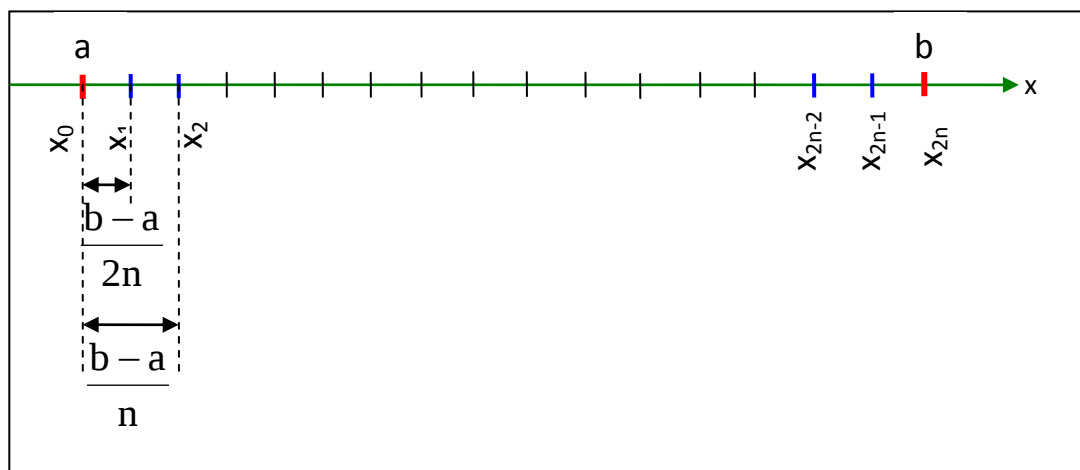
Приближенные вычисления определенных интегралов применяют в случаях:

- подынтегральная функция задана таблично;
- первообразная не выражается в элементарных функциях;
- выражение для первообразной очень сложное.

Идея: замена подынтегральной функции на функцию более простого вида.

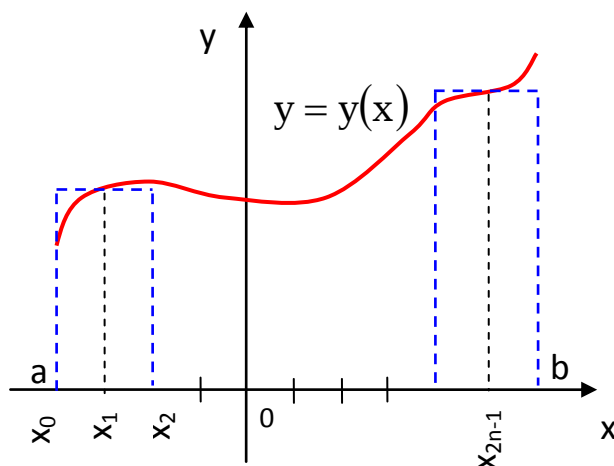
1.1. Формула прямоугольников

Вычислить $\int_a^b y(x) dx$. Разбиваем $[a; b]$ на $(2n)$ равных частей



$$x_1 = a + \frac{b-a}{2n}, \quad x_3 = x_1 + \frac{b-a}{n}, \quad x_5 = x_3 + \frac{b-a}{n} \text{ и т.д.}$$

Площадь криволинейной трапеции $\int_a^b y(x) dx$ заменяется суммой площадей прямоугольников

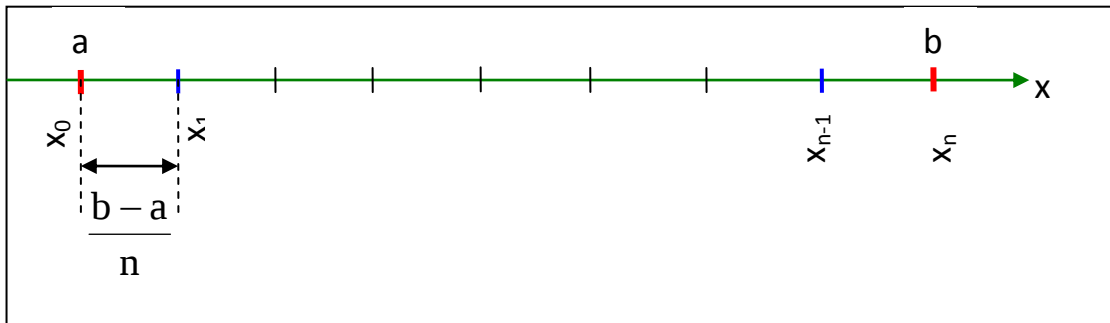


$$\begin{aligned} \int_a^b y(x) dx &\approx y(x_1) \cdot \frac{b-a}{n} + y(x_3) \cdot \frac{b-a}{n} + \dots + y(x_{2n-1}) \cdot \frac{b-a}{n} \approx \\ &\approx \frac{b-a}{n} (y(x_1) + y(x_3) + \dots + y(x_{2n-1})) \end{aligned}$$

Погрешность этой формулы $\Delta = \frac{(b-a)^2}{24n^2} M$, где M – наибольшее значение $y''(x)$ на $[a; b]$.

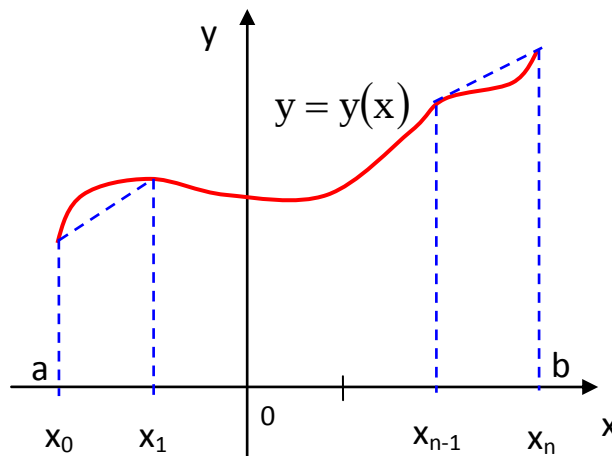
1.2. Формула трапеций

Вычислить $\int_a^b y(x) dx$. Разбиваем $[a; b]$ на (n) равных частей



$$x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \quad x_2 = x_1 + \frac{b-a}{n}, \quad x_3 = x_2 + \frac{b-a}{n}, \dots, \quad x_n = b.$$

Площадь криволинейной трапеции $\int_a^b y(x) dx$ заменяется суммой площадей трапеций



$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{1}{2}(y_0 + y_1)h + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)h + \dots + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)h$$

или после упрощения

$$\int_a^b y(x) dx \approx h \left(\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right),$$

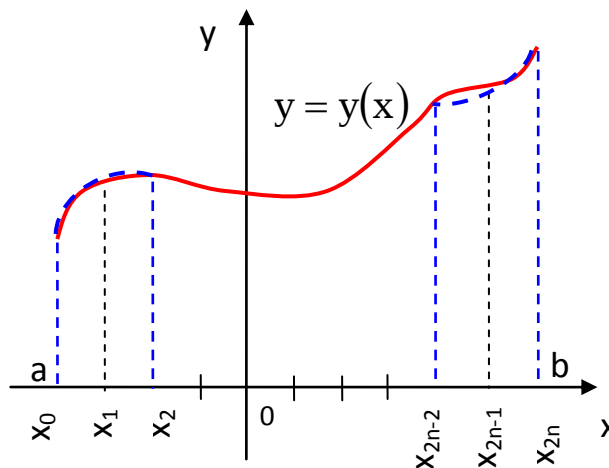
где $y_0 = y(a)$, $y_1 = y(x_1)$, $y_2 = y(x_2)$, ..., $y_n = y(b)$.

Погрешность этой формулы $\Delta = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M$, где M – наибольшее значение $y''(x)$ на $[a; b]$.

1.3. Формула парабол

Разбиваем $[a; b]$ на $(2n)$ равных частей. Длина каждой части $h = \frac{b-a}{2n}$.

Две соседние криволинейные трапеции заменяем одной параболической трапецией.



$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} ((y_0 + y_{2n}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}))$$

Здесь значения подынтегральной функции в четных точках имеют коэффициент «2», в нечетных «4», в граничных «1».

Погрешность формулы Симпсона $\Delta \leq \frac{(b-a)^5}{288n^4} M$, где M – наибольшее значение

$|y^{IV}(x)|$ на $[a; b]$.

1.4. Инструкция для студентов

Запись формул для различных значений «n».

Формула прямоугольников

$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y(x_1) + y(x_3) + \dots + y(x_{2n-1})), \text{ где}$$

$$x_1 = a + \frac{b-a}{2n}, \quad x_3 = x_1 + \frac{b-a}{n}, \quad x_5 = x_3 + \frac{b-a}{n} \quad \text{и т.д.}$$

При n=4

$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{b-a}{4} (y(x_1) + y(x_3) + y(x_5) + y(x_7)), \text{ где}$$

$$x_1 = a + \frac{b-a}{8}, \quad x_3 = x_1 + \frac{b-a}{4}, \quad x_5 = x_3 + \frac{b-a}{4}, \quad x_7 = x_5 + \frac{b-a}{4}.$$

При n=5

$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{b-a}{5} (y(x_1) + y(x_3) + y(x_5) + y(x_7) + y(x_9)), \text{ где}$$

$$x_1 = a + \frac{b-a}{10}, \quad x_3 = x_1 + \frac{b-a}{5}, \quad x_5 = x_3 + \frac{b-a}{5}, \quad x_7 = x_5 + \frac{b-a}{5},$$

$$x_9 = x_7 + \frac{b-a}{5}.$$

При n=6

$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{b-a}{6} (y(x_1) + y(x_3) + y(x_5) + y(x_7) + y(x_9) + y(x_{11})), \text{ где}$$

$$x_1 = a + \frac{b-a}{12}, \quad x_3 = x_1 + \frac{b-a}{6}, \quad x_5 = x_3 + \frac{b-a}{6}, \quad x_7 = x_5 + \frac{b-a}{6},$$

$$x_9 = x_7 + \frac{b-a}{6}, \quad x_{11} = x_9 + \frac{b-a}{6}.$$

Формула трапеций

$$\int_a^b y(x) dx \approx h \left(\frac{1}{2} (y_0 + y_n) + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right), \text{ где}$$

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad y_0 = y(a), \quad y_1 = y(x_1), \quad y_2 = y(x_2), \quad \dots, \quad y_n = y(b);$$

$$x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \quad x_2 = x_1 + \frac{b-a}{n}, \quad x_3 = x_2 + \frac{b-a}{n}, \quad \dots, \quad x_n = b.$$

При n=4

$$\int_a^b y(x) dx \approx h \left(\frac{1}{2} (y_0 + y_4) + y_1 + y_2 + y_3 \right), \text{ где } h = \frac{b-a}{4},$$

$$x_1 = a + \frac{b-a}{4}, \quad x_2 = x_1 + \frac{b-a}{4}, \quad x_3 = x_2 + \frac{b-a}{4}, \quad x_4 = b;$$

$$y_0 = y(a), \quad y_1 = y(x_1), \quad y_2 = y(x_2), \quad y_3 = y(x_3), \quad y_4 = y(b).$$

При n=5

$$\int_a^b y(x) dx \approx h \left(\frac{1}{2} (y_0 + y_5) + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \right), \text{ где } h = \frac{b-a}{5},$$

$$x_1 = a + \frac{b-a}{5}, \quad x_2 = x_1 + \frac{b-a}{5}, \quad x_3 = x_2 + \frac{b-a}{5}, \quad x_4 = x_3 + \frac{b-a}{5}, \quad x_5 = b;$$

$$y_0 = y(a), \quad y_1 = y(x_1), \quad y_2 = y(x_2), \quad y_3 = y(x_3), \quad y_4 = y(x_4), \quad y_5 = y(b).$$

При n=6

$$\int_a^b y(x) dx \approx h \left(\frac{1}{2} (y_0 + y_6) + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \right), \text{ где } h = \frac{b-a}{6},$$

$$x_1 = a + \frac{b-a}{6}, \quad x_2 = x_1 + \frac{b-a}{6}, \quad x_3 = x_2 + \frac{b-a}{6}, \quad x_4 = x_3 + \frac{b-a}{6},$$

$$x_5 = x_4 + \frac{b-a}{6}, \quad x_6 = b;$$

$$y_0 = y(a), \quad y_1 = y(x_1), \quad y_2 = y(x_2), \quad y_3 = y(x_3), \quad y_4 = y(x_4), \quad y_5 = y(x_5),$$

$$y_6 = y(b).$$

Формула парабол

$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} ((y_0 + y_{2n}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}))$$

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, x_3 = x_2 + h, \dots, x_{2n} = b, \text{ где } h = \frac{b-a}{2n};$$

$$y_0 = y(a), y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2), \dots, y_{2n} = y(b).$$

Внимание!

Все значения X_i и Y_i были уже подсчитаны ранее, когда применялись формула прямоугольников и формула трапеций.

При n=4

$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{b-a}{6 \cdot 4} ((y_0 + y_8) + 2(y_2 + y_4 + y_6) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7))$$

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, x_3 = x_2 + h, \dots, x_8 = b, \text{ где } h = \frac{b-a}{2 \cdot 4};$$

$$y_0 = y(a), y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2), \dots, y_8 = y(b).$$

При n=5

$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{b-a}{6 \cdot 5} ((y_0 + y_{10}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9))$$

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, x_3 = x_2 + h, \dots, x_{10} = b, \text{ где } h = \frac{b-a}{2 \cdot 5};$$

$$y_0 = y(a), y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2), \dots, y_{10} = y(b).$$

При n=6

$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{b-a}{6 \cdot 6} ((y_0 + y_{12}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9 + y_{11}))$$

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, x_3 = x_2 + h, \dots, x_{12} = b, \text{ где } h = \frac{b-a}{2 \cdot 6};$$

$$y_0 = y(a), y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2), \dots, y_{12} = y(b).$$

1.5.Задание по вариантам для лабораторной работы
«Приближенное вычисление определенных интегралов»

Вычислить «неберущийся» интеграл с точностью 0,001.

Номер варианта	Интеграл	Число разбиений	Номер варианта	Интеграл	Число разбиений
1	$\int_{-4}^6 \sqrt{x^4 + 6} dx$	n=5	19	$\int_0^1 \sqrt{\operatorname{tg} x} dx$	
2	$\int_2^7 \frac{dx}{\ln x}$	n=5	20	$\int_1^5 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$	n=4
3	$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2 x} dx$		21	$\int_0^{10} \operatorname{arctg} x dx$	
4	$\int_2^{10} \frac{\ln x}{x^2} dx$	n=4	22	$\int_1^2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$	
5	$\int_0^{\pi/2} \sqrt{2+\cos x} dx$		23	$\int_1^2 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$	
6	$\int_{\pi/14}^{3\pi/7} \frac{\operatorname{tg} x}{x} dx$	n=5	24	$\int_0^2 \sqrt{1+x^5} dx$	
7	$\int_{-1}^9 x^2 \cdot \sqrt{10+x^2} dx$	n=5	25	$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\sin^2 x} dx$	
8	$\int_0^{10} \frac{e^x}{x+5} dx$	n=5	26	$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{4}} dx$	
9	$\int_0^2 \sqrt{1+x^4} dx$		27	$\int_{-1}^5 \sqrt[3]{1+x^2} dx$	n=6
10	$\int_0^2 e^{-x^2} dx$		28	$\int_2^5 \frac{dx}{\ln^2 x}$	n=6

11	$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}} dx$	n=5	29	$\int_0^{\pi/2} \sqrt{3-\sin x} dx$	
12	$\int_0^3 \sqrt{x} \cdot e^x dx$	n=6	30	$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1+x}} dx$	
13	$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x} dx$		31	$\int_0^4 \sqrt{7+x^4} dx$	
14	$\int_1^3 \frac{e^x}{x} dx$		32	$\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1} dx$	
15	$\int_0^4 \sqrt[3]{2+x^2} dx$	n=4	33	$\int_1^{11} \ln^2 x dx$	
16	$\int_2^{10} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$	n=4	34	$\int_1^2 \frac{e^{x^2}}{x^2} dx$	
17	$\int_0^1 \sqrt{4+x^3} dx$		35	$\int_0^{0,5} e^{\sqrt{x}} dx$	
18	$\int_4^{10} \frac{x}{\sqrt{1+e^x}} dx$	n=6	36	$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$	

1.6.Образец выполнения лабораторной работы «Приближенное вычисление определенных интегралов»

Вычислить с точностью до 10^{-3} определенный интеграл тремя способами:

- по формуле прямоугольников,
- по формуле трапеций,
- по формуле парабол

Внимание студентов:

- Число разбиений отрезка $[a; b]$ это **целое** число, выбираете его сами.
Например,

$n=4,$	тогда $2n=8$
$n=5,$	тогда $2n=10$
$n=6,$	тогда $2n=12$

- Значения y_i вычисляете с точностью до 4 знака после запятой. Все вычисления также проводите с точностью до 4 знака после запятой. Конечный результат уже округляете до 3 знака после запятой.

Образец выполнения ЛР для случая $n=5$.

1. Вычислить определенный интеграл $\int_1^{11} \frac{e^x dx}{x^2}$ с точностью до 0,001.

Воспользуемся формулой прямоугольников

$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y(x_1) + y(x_3) + \dots + y(x_{2n-1}))$$

$$a = x_0 = 1, \quad b = x_{10} = 11.$$

Разобьем $[1; 11]$ на $2n = 10$ частей ($n = 5$), тогда $\frac{b-a}{n} = \frac{11-1}{5} = 2$

$$x_1 = x_0 + \frac{b-a}{2n} = 1 + 1 = 2, \quad y(x_1) = y(2) = \frac{e^2}{2^2} \approx 1,8473$$

$$x_3 = x_1 + \frac{b-a}{n} = 2 + 2 = 4, \quad y(x_3) = y(4) = \frac{e^4}{4^2} \approx 3,4124$$

$$x_5 = x_3 + \frac{b-a}{n} = 4 + 2 = 6, \quad y(x_5) = y(6) = \frac{e^6}{6^2} \approx 11,2063$$

$$x_7 = x_5 + \frac{b-a}{n} = 6 + 2 = 8, \quad y(x_7) = y(8) = \frac{e^8}{8^2} \approx 46,5775$$

$$x_9 = x_7 + \frac{b-a}{n} = 8 + 2 = 10, \quad y(x_9) = y(10) = \frac{e^{10}}{10^2} \approx 220,2645$$

Данные вычислений сводим в таблицу

x_i	$x_1=2$	$x_3=4$	$x_5=6$	$x_7=8$	$x_9=10$
y_i	1,8473	3,4124	11,2063	46,5775	220,2645

$$\begin{aligned}\int_1^{11} \frac{e^x dx}{x^2} &\approx \frac{b-a}{n} (y(x_1) + y(x_3) + y(x_5) + y(x_7) + y(x_9)) \approx \\ &\approx \frac{11-1}{5} (1,8473 + 3,4124 + 11,2063 + 46,5775 + 220,2645) \approx \\ &\approx 566,6155 \approx 566,616\end{aligned}$$

2. Вычислить определенный интеграл $\int_1^{11} \frac{e^x dx}{x^2}$ с точностью до 0,001.

Воспользуемся формулой трапеций

$$\int_a^b y(x) dx \approx h \left(\frac{1}{2} (y_0 + y_n) + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right),$$

где $h = \frac{b-a}{n}$, $y_0 = y(a)$, $y_1 = y(x_1)$, $y_2 = y(x_2)$, ..., $y_n = y(b)$,

$a = x_0 = 1$, $b = x_5 = 11$.

Разобьем $[1; 11]$ на $n = 5$ частей, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{11-1}{5} = 2$

$$x_0 = a = 1, \quad y_0 = y(a) = y(1) = \frac{e^1}{1^2} = 2,7183$$

$$x_1 = a + \frac{b-a}{n} = 1 + 2 = 3, \quad y_1 = y(x_1) = y(3) = \frac{e^3}{3^2} = 2,2317$$

$$x_2 = x_1 + \frac{b-a}{n} = 3 + 2 = 5, \quad y_2 = y(x_2) = y(5) = \frac{e^5}{5^2} = 5,9365$$

$$x_3 = x_2 + \frac{b-a}{n} = 5 + 2 = 7, \quad y_3 = y(x_3) = y(7) = \frac{e^7}{7^2} = 22,3803$$

$$x_4 = x_3 + \frac{b-a}{n} = 7 + 2 = 9, \quad y_4 = y(x_4) = y(9) = \frac{e^9}{9^2} = 100,0038$$

$$x_5 = x_4 + \frac{b-a}{n} = 9 + 2 = 11, \quad y_5 = y(x_5) = y(11) = \frac{e^{11}}{11^2} = 494,8276$$

x_i	$x_0=1$	$x_1=3$	$x_2=5$	$x_3=7$	$x_4=9$	$x_5=11$
y_i	2,7183	2,2317	5,9365	22,3803	100,0038	494,8276

$$\int_1^{11} \frac{e^x}{x^2} dx \approx h \left(\frac{1}{2}(y_0 + y_5) + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \right) \approx$$

$$\approx \frac{11-1}{5} \left(\frac{1}{2}(2,7183 + 494,8276) + 2,2317 + 5,9365 + 22,3803 + 100,0038 \right) \approx$$

$$\approx 758,6512 \approx 758,651$$

3. Вычислить определенный интеграл $\int_1^{11} \frac{e^x}{x^2} dx$ с точностью до 0,001.

Воспользуемся формулой парабол (Симпсона)

$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} ((y_0 + y_{2n}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}))$$

Разбиваем $[1; 11]$ на $2n = 10$ равных частей ($n = 5$) длиной $\frac{b-a}{2n} = 1$

Воспользуемся ранее вычисленными значениями, сведем их в таблицу

x_i	$x_0=1$	$x_1=2$	$x_2=3$	$x_3=4$	$x_4=5$
y_i	2,7183	1,8473	2,2317	3,4124	5,9365

$x_5=6$	$x_6=7$	$x_7=8$	$x_8=9$	$x_9=10$	$x_{10}=11$
11,2063	22,3803	46,5775	100,0038	220,2645	494,8276

$$\int_1^{11} \frac{e^x}{x^2} dx \approx \frac{b-a}{6n} ((y_0 + y_{10}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9))$$

$$\approx \frac{11-1}{6 \cdot 5} ((2,7183 + 494,8276) + 2(2,2317 + 5,9365 + 22,3803 + 100,0038) +$$

$$+ 4(1,8473 + 3,4124 + 11,2063 + 46,5775 + 220,2645)) \approx 630,6275 \approx 630,628.$$

Вывод:

Значение определенного интеграла $\int_1^{11} \frac{e^x}{x^2} dx$ с точностью до 0,001 равно

по формуле прямоугольников	566,616
по формуле трапеций	758,651
по формуле парабол	630,628

2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА «ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММЫ РЯДА ЛЕЙБНИЦА»

2.1. Краткий теоретический обзор

Теорема (Лейбница)

Если члены знакопеременного ряда $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ взятые по модулю, монотонно убывают и n

– ый член ряда при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю, то есть

$$1) |u_1| > |u_2| > \dots > |u_n| > \dots$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0,$$

то

a) ряд сходится,

b) сумма ряда имеет знак первого числа

c) сумма ряда по модулю не превосходит модуля первого числа, т.е. $\left| \sum_{i=1}^{\infty} u_i \right| \leq |u_1|$.

Знакопеременный ряд, удовлетворяющий условиям 1) и 2) называют рядом Лейбница или рядом лейбнического типа.

Замечание.

Теорема Лейбница позволяет оценить ошибку, которая получается, при замене его

суммы $S = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$ частичной суммой $S_n = \sum_{i=1}^n u_i$, т.е. $S \approx S_n$. При такой замене члены ряда,

начиная с $n+1$ номера, отбрасываются. Остаток ряда Лейбница

$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+3} + \dots$ представляет собой знакопеременный ряд,

удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница. Следовательно, сумма этого остатка не

превосходит по абсолютной величине первого числа u_{n+1} , то есть $|R_n| \leq |u_{n+1}|$. Таким

образом, пользуясь приближенным равенством $S \approx S_n$, допускается ошибка, которая меньше абсолютной величины первого отброшенного числа.

Из неравенства $|R_n| < |u_{n+1}| < \alpha$, где α – заданная точность, находим наименьший номер n ,

при котором значение суммы ряда Лейбница $S \approx S_n$ вычислено с заданной точностью α .

2.2. Примеры

Пример 1.

Вычислить сумму ряда $1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} + \dots$ с точностью $\alpha = 10^{-3}$.

Решение.

Данный ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница (члены ряда по модулю убывают и при $n \rightarrow \infty$ стремятся к нулю). Согласно замечанию теоремы Лейбница, ошибка

при замене суммы данного ряда S его частичной суммой $S_n = \sum_{i=1}^n u_i$ не превосходит модуля

первого из отброшенного числа $|u_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)^4}$. Чтобы достичь заданной точности,

достаточно положить $\frac{1}{(n+1)^4} \leq 10^{-3}$. Наименьшее значение n , удовлетворяющее данному

неравенству равно 5. Таким образом, для вычисления суммы исходного знакочередующегося ряда с точностью 0,001 достаточно взять сумму первых пяти слагаемых, то есть

$$S \approx S_5 = 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} \approx 0,9475.$$

Заметим, что $\frac{1}{5^4} = \frac{1}{625} = 0,0016 > 0,001$; $\left| -\frac{1}{6^4} \right| = \frac{1}{1296} \approx 0,0007 < 0,001$.

Ответ: сумма данного ряда с точностью 0,001 равна 0,9475.

Пример 2.

Найти приближенно сумму ряда $1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{6^3} + \frac{1}{8^3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^3} + \dots$ с точностью

$$\alpha = 10^{-2}.$$

Решение.

Данный ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница (члены ряда по модулю убывают и при $n \rightarrow \infty$ стремятся к нулю). Для того чтобы найти с точностью $\alpha = 10^{-2}$ сумму данного ряда, надо взять столько его членов, чтобы следующий член ряда был по модулю меньше 0,01. Тогда весь остаток ряда, начиная с этого члена, будет также меньше 0,01. Для

данного ряда $|u_1| = 1 > 0,01$, $|u_2| = \left| -\frac{1}{2^3} \right| = \frac{1}{8} > 0,01$, $|u_3| = \left| \frac{1}{4^3} \right| = \frac{1}{64} > 0,01$,

$|u_4| = \left| -\frac{1}{6^3} \right| = \frac{1}{216} < 0,01$, т.е. модуль четвертого слагаемого меньше заданной точности.

Поэтому с заданной точностью 0,01 сумма ряда равна

$$S \approx S_3 = 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{64} \approx 0,89.$$

2.3.Задание по вариантам для лабораторной работы
«Вычисление суммы ряда Лейбница»

Вычислить с заданной точностью α сумму знакочередующегося ряда:

вариант	Ряд	Точность	вариант	Ряд	Точность
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$	$\alpha = 0,01$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$	$\alpha = 0,001$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n)^3}$	$\alpha = 0,001$	17	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$	$\alpha = 0,01$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)}{2^n}$	$\alpha = 0,01$	18	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{3^n}$	$\alpha = 0,01$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{n^2 + 2n + 1}$	$\alpha = 0,01$	19	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^n}$	$\alpha = 0,001$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(3n)!}$	$\alpha = 0,01$	20	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n^2}{3^{n+1}}$	$\alpha = 0,001$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4^n \cdot n!}$	$\alpha = 0,001$	21	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(0,4)^{n+1}}{n+1}$	$\alpha = 0,01$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{(n+1)^3 n}$	$\alpha = 0,01$	22	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1} \cdot (n+1)}$	$\alpha = 0,01$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n^2}{2^n}$	$\alpha = 0,01$	23	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n(3n+1)}$	$\alpha = 0,001$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{n(n+2)(n+4)}$	$\alpha = 0,001$	24	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n^2}{(5n)!}$	$\alpha = 0,001$
10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2(n+4)}$	$\alpha = 0,01$	25	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{2^n(n^2+1)}$	$\alpha = 0,001$
11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^n}$	$\alpha = 0,001$	26	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2^n(n+5)}$	$\alpha = 0,001$
12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^n}$	$\alpha = 0,01$	27	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{(n+1)^3}$	$\alpha = 0,01$
13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+2)}{(4n)!(n^2+4)}$	$\alpha = 0,001$	28	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$	$\alpha = 0,01$

14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n^3(n+1)^4}$	$\alpha = 0,001$	29	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^3}{n(n+1)^n}$	$\alpha = 0,0001$
15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{2^n(n+1)}$	$\alpha = 0,001$	30	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n^2}{2^{n+1}}$	$\alpha = 0,001$

3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА «РАЗЛОЖЕНИЕ НЕПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В РЯД ФУРЬЕ»

3.1. Краткий теоретический обзор

Часто приходится иметь дело с непериодической функцией $f(x)$, заданной на отрезке $[a; b]$. Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле. Покажем, что данную функцию $f(x)$ в точках непрерывности можно представить в виде суммы ряда Фурье. Для этого рассмотрим произвольную периодическую функцию $f_1(x)$ с периодом $2\mu \geq |b - a|$, совпадающую с функцией $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Разложим функцию $f_1(x)$ в ряд Фурье. Сумма этого ряда во всех точках отрезка $[a; b]$ совпадает с заданной функцией $f(x)$, то есть функция $f(x)$ разложена в ряд Фурье на отрезке $[a; b]$.

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[0; \ell]$. Желая разложить ее в этом промежутке в ряд Фурье, доопределим функцию $f(x)$ для значений x на отрезке $[-\ell; 0]$. Это даст возможность получить различные тригонометрические ряды.

Если дополним определение функции $f(x)$ так, чтобы при $-\ell \leq x \leq 0$ выполнялось $f(x) = f(-x)$, то получится четная функция (см. рис.1). В этом случае говорят, что функция «продолжена четным образом». Эту функцию разлагают в ряд Фурье, который

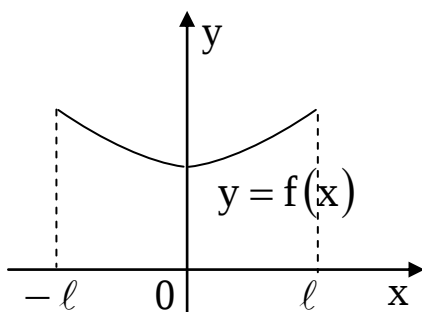


Рис. 1

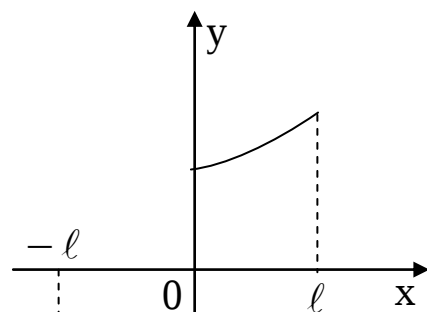


Рис. 2

содержит только косинусы.

Аналогично, если дополнить определение функции $f(x)$ условием $f(-x) = -f(x)$, $x \in [-\ell; 0]$ так, чтобы она оказалась нечетной (см. рис.2), то в ее разложении в ряд Фурье будут содержаться только члены с синусами. Таким образом, заданную на отрезке $[0; \ell]$ функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям теоремы Дирихле, можно разложить в ряд Фурье, как по косинусам, так и по синусам.

Приведем несколько случаев разложения функции в ряд Фурье.

1). Рассмотрим отрезок $[-\pi; \pi]$. Ряд Фурье 2π – периодической функции $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx), \text{ где}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

2). Рассмотрим отрезок $[-\ell; \ell]$. Ряд Фурье 2ℓ – периодической функции $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos \frac{\pi n x}{\ell} + b_n \cdot \sin \frac{\pi n x}{\ell} \right), \text{ где}$$

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell} \, dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

3). Рассмотрим отрезок $[a; b]$. Ряд Фурье $(b-a)$ – периодической функции $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos \frac{2\pi n x}{b-a} + b_n \cdot \sin \frac{2\pi n x}{b-a} \right), \text{ где}$$

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2\pi n x}{b-a} \, dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2\pi n x}{b-a} \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

4). Рассмотрим симметричный относительно нуля отрезок $[-\ell, \ell]$ и ряд Фурье для четной и нечетной функции.

а) Если $f(x)$ четная, т.е. $f(x) = f(-x)$, то $b_n = 0$ и ряд Фурье разложен по косинусам $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos \frac{\pi n x}{\ell}$, где $a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell} \, dx$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

б) Если $f(x)$ нечетная, т.е. $f(x) = -f(-x)$, то $a_n = 0$ и ряд Фурье разложен по синусам

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin \frac{\pi n x}{\ell}, \text{ где } b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

5). Рассмотрим отрезок $[0; \ell]$. Для функции $f(x)$ можно получить три разложения

- а) Ряд Фурье на отрезке $[a; b]$, где $a = 0$ и $b = \ell$.
- б) Продолжить функцию $f(x)$ на отрезок $[-\ell, 0]$ четным образом, тогда на отрезке $[-\ell; \ell]$ функция раскладывается в ряд Фурье по косинусам.
- в) Продолжить функцию $f(x)$ на отрезок $[-\ell, 0]$ нечетным образом, тогда на отрезке $[-\ell; \ell]$ функция раскладывается в ряд Фурье по синусам.

Полезно помнить: $\sin \pi n = 0$ и $\cos \pi n = (-1)^n$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

3.2.Примеры

Пример 1.

Требуется разложить функцию $f(x) = x^2$ на отрезке $[0; \pi]$ в ряд по синусам. Продолжим

эту функцию на $[-\pi, 0]$ нечетным образом, $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi \\ -x^2, & \text{если } -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$, тогда функция

раскладывается в ряд Фурье, который будет содержать только синусы

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin \frac{\pi n x}{a} \quad . \text{ Т.к. } a = \pi, \text{ то } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin n x$$

Найдем коэффициенты b_n

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx \, dx = \left| u = x^2, dv = \sin nx \, dx \right| \\ &= -\frac{2}{\pi} \cdot x^2 \cdot \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \cos nx \, dx = \left| u = x, dv = \cos nx \, dx \right| = \end{aligned}$$

$$= -\frac{2\pi \cdot (-1)^n}{n} + \frac{4}{n\pi} \left(\frac{x}{n} \cdot \sin nx \Big|_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin nx \, dx \right) = \left| \sin n\pi = 0, \cos n\pi = (-1)^n \right| =$$

$$= \frac{2\pi}{n} \cdot (-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3} \cdot ((-1)^n - 1)$$

Ответ: $x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3} \cdot ((-1)^n - 1) \right) \cdot \sin nx, \quad x \in [0; \pi].$

Пример 2.

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ на отрезке $[0, \pi]$ по синусам.

Решение. Продолжая эту функцию на отрезке нечетным образом, имеем

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n}.$$

Ответ: $x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \quad x \in [0, \pi]$ или

$$x = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right), \quad x \in [0, \pi].$$

Пример 3.

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ на отрезке $[0, \pi]$ по косинусам.

Решение. Продолжая эту функцию четным образом, получим $f(x) = |x|, \quad x \in (-\pi; \pi].$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \, dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx \, dx = -\frac{4}{\pi n^2},$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad x \in [0, \pi].$

Пример 4.

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ на отрезке $[0, \ell]$ по косинусам.

Решение. Продолжим эту функцию четным образом, получим $f(x) = |x|, \quad x \in (-\ell; \ell].$

$$a_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \, dx = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell x \, dx = \frac{2}{\ell} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^\ell = \ell,$$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, dx = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell x \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, dx = \frac{2\ell}{\pi^2 n^2} \cos \frac{n\pi x}{\ell} \Big|_0^\ell = \frac{2\ell}{\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1)$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{при четных } n \\ -\frac{4\ell}{\pi^2 n^2} & \text{при нечетных } n \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\ell}{2} - \frac{4\ell}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi x}{\ell}}{n^2}$, $n = 1, 3, 5, \dots$ $x \in [0, \ell]$ или

$$x = \frac{\ell}{2} - \frac{4\ell}{\pi^2} \left(\frac{\cos \frac{\pi x}{\ell}}{1} + \frac{\cos \frac{3\pi x}{\ell}}{3^2} + \frac{\cos \frac{5\pi x}{\ell}}{5^2} + \dots + \frac{\cos \frac{(2k+1)\pi x}{\ell}}{(2k+1)^2} + \dots \right), \quad x \in [0, \ell].$$

Пример 5.

Разложить функцию $f(x) = x - 1$ в ряд Фурье на $(-3; -1)$.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos \frac{2\pi n x}{b-a} + b_n \cdot \sin \frac{2\pi n x}{b-a} \right), \text{ где}$$

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2\pi n x}{b-a} dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2\pi n x}{b-a} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Здесь $b - a = -1 - (-3) = 2$, найдем коэффициенты a_0, a_n, b_n .

$$a_0 = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2\pi \cdot 0 \cdot x}{b-a} dx = \frac{2}{2} \int_{-3}^{-1} (x-1) \underbrace{\cos \frac{2\pi \cdot 0 \cdot x}{2}}_1 dx = \int_{-3}^{-1} (x-1) dx =$$

$$= \frac{(x-1)^2}{2} \Big|_{-3}^{-1} = \frac{(-1-1)^2}{2} - \frac{(-3-1)^2}{2} = 2 - 8 = -6$$

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2\pi n x}{b-a} dx = \frac{2}{2} \int_{-3}^{-1} (x-1) \cos \frac{2\pi n x}{2} dx = |uv - \int v du| =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x-1 & du = dx \\ dv = \cos \pi n x dx & v = \frac{1}{\pi n} \sin \pi n x \end{array} \right| = (x-1) \frac{1}{\pi n} \sin \pi n x \Big|_{-3}^{-1} - \int_{-3}^{-1} \frac{1}{\pi n} \sin \pi n x dx =$$

$$= 0 + \frac{1}{(\pi n)^2} \cos \pi n x \Big|_{-3}^{-1} = \frac{1}{(\pi n)^2} \left(\underbrace{\cos \pi n}_{-1} - \underbrace{\cos 3\pi n}_{-1} \right) = \frac{1}{(\pi n)^2} \cdot 0 = 0$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2\pi n x}{b-a} dx = \frac{2}{2} \int_{-3}^{-1} (x-1) \sin \frac{2\pi n x}{2} dx = \left| uv - \int v du \right| = \\
&= \left| \begin{array}{ll} u = x-1 & du = dx \\ dv = \sin \pi n x dx & v = \frac{-1}{\pi n} \cos \pi n x \end{array} \right| = (x-1) \frac{-1}{\pi n} \cos \pi n x \Big|_{-3}^{-1} - \int_{-3}^{-1} \frac{-1}{\pi n} \cos \pi n x dx = \\
&= (-2) \cdot \frac{-1}{\pi n} \cos \pi n - (-4) \frac{-1}{\pi n} \underbrace{\cos 3\pi n}_{\cos \pi n} + \frac{1}{(\pi n)^2} \underbrace{\sin \pi n x}_0 \Big|_{-3}^{-1} = \frac{-2}{\pi n} \cos \pi n = \frac{-2}{\pi n} (-1)^n
\end{aligned}$$

Имеем $a_0 = -6$, $a_n = 0$, $b_n = \frac{-2}{\pi n} (-1)^n$. Запишем ряд Фурье функции $f(x) = x - 1$

$$x - 1 = \frac{-6}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(0 \cdot \cos \frac{2\pi n x}{2} + \frac{-2}{\pi n} (-1)^n \cdot \sin \frac{2\pi n x}{2} \right) = -3 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \sin \pi n x$$

Ответ: $x - 1 = -3 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \sin \pi n x$ или

$$x - 1 = -3 + \frac{2}{\pi} (\sin \pi x - \sin 2\pi x + \sin 3\pi x - \sin 4\pi x + \dots)$$

Пример 6.

Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (2; 3) \\ 1, & x \in (3; 4) \end{cases}$ в ряд Фурье.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos \frac{2\pi n x}{b-a} + b_n \cdot \sin \frac{2\pi n x}{b-a} \right), \text{ где}$$

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2\pi n x}{b-a} dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2\pi n x}{b-a} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Здесь $b - a = 4 - 2 = 2$, тогда

$$a_0 = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2\pi n x}{b-a} dx = \frac{2}{2} \left(\int_2^3 \underbrace{0 \cdot \cos \frac{2\pi \cdot 0 \cdot x}{2}}_0 dx + \int_3^4 \underbrace{1 \cdot \cos \frac{2\pi \cdot 0 \cdot x}{2}}_1 dx \right) = \int_3^4 dx = 1$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2\pi n x}{b-a} dx = \frac{2}{2} \left(\int_2^3 \underbrace{0 \cdot \cos \frac{2\pi n x}{2}}_0 dx + \int_3^4 1 \cdot \cos \frac{2\pi n x}{2} dx \right) = \\
&= \int_3^4 \cos \pi n x dx = \frac{1}{\pi n} \sin \pi n x \Big|_3^4 = \frac{1}{\pi n} \left(\underbrace{\sin 4\pi n}_0 - \underbrace{\sin 3\pi n}_0 \right) = 0 \\
b_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2\pi n x}{b-a} dx = \frac{2}{2} \left(\int_2^3 0 \cdot \sin \frac{2\pi n x}{2} dx + \int_3^4 1 \cdot \sin \frac{2\pi n x}{2} dx \right) = \\
&= \int_3^4 \sin \pi n x dx = \frac{-1}{\pi n} \cos \pi n x \Big|_3^4 = \frac{-1}{\pi n} \left(\underbrace{\cos 4\pi n}_1 - \underbrace{\cos 3\pi n}_{(-1)^n} \right) = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n}
\end{aligned}$$

Имеем $a_0 = 1$, $a_n = 0$, $b_n = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n}$. Запишем ряд Фурье функции $f(x)$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos \frac{2\pi n x}{b-a} + b_n \cdot \sin \frac{2\pi n x}{b-a} \right) = \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(0 \cdot \cos \frac{2\pi n x}{2} + \frac{(-1)^n - 1}{\pi n} \cdot \sin \frac{2\pi n x}{2} \right) = \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n} \cdot \sin \pi n x = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n} \cdot \sin \pi n x = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left(-2 \sin \pi x - \frac{2}{3} \sin 3\pi x - \frac{2}{5} \sin 5\pi x - \dots \right) = \\
&= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\sin \pi x + \frac{1}{3} \sin 3\pi x + \frac{1}{5} \sin 5\pi x + \dots \right).
\end{aligned}$$

**3.3.Задание по вариантам для лабораторной работы
«Разложение непериодической функции в ряд Фурье»**

Разложить в ряд Фурье не периодическую функцию на отрезке $[a; b]$

вариант	Функция	отрезок	вариант	Функция	отрезок
1	$y = 3 - x$	$x \in [3; 5]$	16	$y = x + 1 $	$x \in [-3; 1]$
2	$y = 2x$	$x \in [5; 7]$	17	$y = x + 1$	$x \in [-1; 3]$
3	$y = 2x - 3,$	$x \in [1; 3]$	18	$y = 10 - x$	$x \in [5; 15]$
4	$y = 5x + 1,$	$x \in [4; 7]$	19	$y = x + 1 + 2$	$x \in [-2; 3]$
5	$y = 2(x - 1)$	$x \in [3; 5]$	20	$y = 2 x $	$x \in [-1; 2]$
6	$y = \frac{1}{2}x$	$x \in [3; 7]$	21	$y = \frac{1}{2}(2 - x)$	$x \in [1; 3]$
7	$y = \frac{1}{3}x$	$x \in [2; 8]$	22	$y = \begin{cases} 0, & 2 \leq x \leq 4, \\ 4, & 4 \leq x \leq 8; \end{cases}$	$x \in [2; 8]$
8	$y = 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$	$x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$	23	$y = \begin{cases} 0, & 2 \leq x \leq 3, \\ 3, & 3 \leq x < 5; \end{cases}$	$x \in [4\pi; 5\pi]$
9	$y = x$	$x \in [2; 5]$	24	$y = \begin{cases} -1, & 0 \leq x \leq 4 \\ 1, & 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$	$x \in [0; 8]$
10	$y = \begin{cases} 1, & x \in [2; 4], \\ 2, & x \in [4; 5]; \end{cases}$	$x \in [2; 5]$	25	$y = \begin{cases} -1, & 0 \leq x \leq 4 \\ 1, & 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$	$x \in [\pi; 2\pi]$
11	$y = \begin{cases} x, & 2 \leq x \leq 3 \\ 3, & 3 \leq x < 5 \end{cases}$	$x \in [2; 5]$	26	$y = \begin{cases} x, & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & 4 \leq x \leq 10 \end{cases}$	$x \in [2; 10]$
12	$y = \pi - x$	$x \in [-\pi; 2\pi]$	27	$y = x $	$x \in [\pi; 3\pi]$
13	$y = \begin{cases} x, & 2 \leq x \leq 4 \\ 4, & 4 \leq x \leq 7 \end{cases}$	$x \in [2; 7]$	28	$y = 1 + x $	$x \in [\pi; 2\pi]$
14	$y = 2(\pi - x)$	$x \in [3\pi; 5\pi]$	29	$y = 1 + x $	$x \in [\pi; 4\pi]$
15	$y = x $	$x \in [-2; 4]$	30	$y = x - 1$	$x \in [\pi; 4\pi]$

Литература

1. Бугров, Я. С. Высшая математика в 3 т. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление в 2 кн. Книга 2: учебник для академического бакалавриата / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — М. : Изд-во Юрайт, 2017. — 246 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс).
2. Вдовин, А.Ю. Высшая математика. Стандартные задачи с основами теории [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.Ю. Вдовин, Л.В. Михалева, В.М. Мухина. — Электрон. дан. — СПб.: Лань, 2009. — 192 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/>.
3. Крицков, Л.В. Высшая математика в вопросах и ответах: учебное пособие / Л.В. Крицков; Под ред. В.А. Ильин. - М.: Проспект, 2013. - 176 с.
4. Лунгу, К.Н. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч.1 / К.Н. Лунгу, Е.В. Макаров. - М.: Физматлит, 2014. - 216 с.
5. Лунгу, К.Н. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч. 2 / К.Н. Лунгу, Е.В. Макаров. - М.: Физматлит, 2013. - 384 с.
6. Лурье, И.Г. Высшая математика: практикум / И.Г. Лурье, Т.П. Фунтикова. - М.: Вузовский учебник, НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 160 с.
7. Шипачев, В.С. Высшая математика. Полный курс: учебник для бакалавров / В.С. Шипачев; Под ред. А.Н. Тихонов. - М.: Юрайт, 2013. - 607 с.
8. Шипачев, В. С. Высшая математика : учебник и практикум / В. С. Шипачев. — 8-е изд., перераб. и доп. — М. : Изд-во Юрайт, 2017. — 447 с. — (Серия : Бакалавр. Прикладной курс).

ПРИЛОЖЕНИЕ - ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ ОТЧЕТА ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Уфимский государственный нефтяной технический университет»

Кафедра математики

Лабораторная работа

Приближенное вычисление определенных интегралов

Работу выполнил:

ст. гр. **БМК-17**

Ишбулдина Алсу

Вариант **9**

Уфа 2018