

**Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЯНОЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Кафедра МАТЕМАТИКИ

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
и контрольные работы для студентов - заочников
(I семестр)**

Издание третье, переработанное и дополненное

Уфа 2011

В учебно-методическом пособии дан (без доказательств) теоретический материал (понятия, определения, формулы, формулировки теорем, пояснения трудноусвояемых понятий), необходимый студенту для выполнения контрольных работ. Приведены решения типовых задач. По существу - это практикум по решению задач по программе 1-го семестра ОЗО. Рекомендуется студентам 1-го курса заочного факультета. Будут полезны и для студентов 1-го курса очных факультетов.

Составитель Якупов В.М., доц.

Акмадиева Т.Р., ст. преподаватель

Захарова М.А., ст. преподаватель

Шварева Е.Н., преподаватель

Якубова Д.Ф., ст. преподаватель

Рецензент Сахарова Л.А., доц., канд. техн. наук

Глава I. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§ 1. Свойства определителей 2-го и 3-го порядков

Учебники: Ефимов Н.В., Приложение, §§ 1-6.

Беклемишев Д.В., гл. V, §§ 1-5.

Ильин В.А., Позняк Э.Г., гл. 1, Дополнение.

Приняты обозначения:

I. $\in$ – символ принадлежности. Так, например, если A – точечное множество, x – точка, то $x \in A$ означает, что x есть элемент множества A .

II. $\subset$ – символ части. Например, запись $A \subset B$ следует читать так: подмножество A есть часть множества B , если A и B – точечные множества.

III. $\Rightarrow$ – следует, следствие. Так, запись $A \Rightarrow B$ означает, что из утверждения (предложения) A следует утверждение (предложение) B .

IV. $\Leftrightarrow$: необходимо и достаточно; тогда и только тогда. $A \Leftrightarrow B$: из A следует B и из $B \Rightarrow A$; утверждение A справедливо тогда и только тогда (необходимо и достаточно), когда справедливо утверждение B .

V. $\mapsto$
 $\rightarrow$ символ соответствия. Так, например, если A и B множества, то

$A \rightarrow B$ означает, что каждому элементу из A ставится в соответствие некоторый элемент множества B .

VI. $\forall$ – квантор всеобщности, для любого, всех. Так, например, символ $\forall x \in X$ следует понимать так: для произвольного элемента множества X ; для всех элементов множества X ; для любого элемента множества X .

VII. $\exists$ – квантор существования (существует).

VIII. $\mathbf{R}$ – множество действительных чисел.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Числовой матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где a_{ij} – элементы матрицы A , $a_{ij} \in \mathbf{R}$, первый индекс $i = \overline{1, m}$ указывает на номер строки, а второй – $j = \overline{1, n}$ на номер столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij} .

В другой записи (1) имеет вид

$$A = (a_{ij}), \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Если $m = n$, то матрица (1) называется **квадратной** – n -го **порядка**.

Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера **называются равными**, если равны их одноименные элементы: $a_{ij} = b_{ij}$; $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$, то есть эта одна и та же матрица, но обозначенная разными буквами.

2. Рассмотрим квадратную матрицу 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Определителем 2-го порядка*, соответствующим квадратной матрице (3), называется число, обозначаемое $|A|$ ($A \mapsto |A|$) и определяющееся по следующему правилу:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (4)$$

Например, $\begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 3/4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - \frac{3}{8} = \frac{37}{8}.$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Определителем 3-го порядка*, соответствующим квадратной матрице A третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

называется число, обозначаемое $|A|$ ($A \mapsto |A|$) и определяющееся по следующему правилу:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{21}a_{12}a_{33}). \quad (6)$$

Правило (6) носит название *правила Саррюса*, или еще правила треугольников. Приведенная ниже схема объясняет правило Саррюса (6).

+

-

(7)

Обратим внимание читателя на то, что в случае «+» основания треугольников параллельны левой главной диагонали, на которой расположены элементы a_{11}, a_{22}, a_{33} , и параллельны правой главной диагонали с элементами a_{13}, a_{22}, a_{31} в случае «-».

§ 2. Алгебраические дополнения и миноры

Возьмем для определенности определитель третьего порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (1)$$

и рассмотрим, например, его элемент a_{31} . Мысленно зачеркнем третью строку и первый столбец, на пересечении которых находится этот элемент. Тем самым из оставшихся элементов (1) образуем число

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad (2)$$

которое называется *алгебраическим дополнением* элемента a_{31} . Определитель

$$M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad (3)$$

называется минором элемента a_{31} . Таким образом, $A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31}$. И таким же образом определяем алгебраическое дополнение A_{ij} для каждого элемента a_{ij} квадратной матрицы A , не забывая умножить минор M_{ij} на $(-1)^{i+j}$ ($i + j$ – сумма номера строки и номера столбца элемента a_{ij}).

Теорема 1. Определитель равен сумме произведений элементов какого-нибудь его столбца (или какой-нибудь ее строки) на их соответствующие алгебраические дополнения. Например (см. 1), $\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$;

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}.$$

Теорема 2. Сумма произведений элементов какого-нибудь столбца (или какой-нибудь строки) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца (или другой строки) равна нулю.

§ 3. Алгебраические операции над матрицами

1. Если

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}) \quad (1)$$

есть матрицы одинакового размера, то по определению

$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij}). \quad (2)$$

Для $\forall \lambda \in R$ и $\forall A$

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}), \quad (3)$$

то есть, чтобы умножить матрицу на число, надо каждый элемент матрицы умножить на это число. Имеют место следующие свойства:

1⁰. $A + B = B + A$ – коммутативное свойство;

$A + (B + C) = (A + B) + C$ – ассоциативное свойство.

2⁰. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ – распределительное свойство относительно числового множителя; $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ – распределительное свойство относительно множителя - матрицы.

3⁰. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ – ассоциативное свойство относительно числового множителя.

2. Умножение матриц. Эту операцию поясним сначала на примере. AB выполнимо $\Leftrightarrow$, когда A имеет размерность $(m \times p)$, B имеет размерность $p \times n$ (число столбцов 1-го множителя = числу строк 2-го множителя). Тогда AB имеет размерность $(m \times n)$. Каждая строка 1-го множителя порождает соответствующую строку произведения, будучи умноженной на каждый столбец второго множителя “скалярно”. Например,

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 5; & 5 \cdot 0 + 4 \cdot 4 + 0 \cdot 6 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 6 \cdot 5; & 1 \cdot 0 - 1 \cdot 4 + 6 \cdot 6 \\ 4 \cdot 1 + 7 \cdot 0 + 8 \cdot 5; & 4 \cdot 0 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ 31 & 32 \\ 44 & 76 \end{pmatrix}$$

Для произвольных матриц A и B , для которых имеет место $AB = C = (C_{ij})$, получаем

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, p}. \quad (4)$$

Для произведения матриц справедливы следующие свойства:

1⁰. $AB \neq BA$;

2⁰. $A(BC) = (AB)C$ – ассоциативное свойство;

3⁰. $A(B + C) = AB + AC$; $(A + B)C = AC + BC$ – распределительные свойства.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Квадратная матрица A называется **невыврожденной (вырожденной)**, если ее определитель $|A| \neq 0$ ($|A| = 0$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Матрица B называется **обратной** к матрице A , если $AB = BA = E$, где E – единичная квадратная матрица, т.е. по левой главной диагонали стоят единицы, а остальные ее элементы равны нулю.

Например, единичная квадратная матрица третьего порядка

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$A - (m \times n)$; $B - (n \times p)$; $AB - (m \times p)$; BA имеет смысл при $p = m$; $BA - n \times n \Rightarrow m = n = p$. Таким образом, обе части матрицы в последнем определении должны быть квадратными одного и того же порядка.

Обратную матрицу обозначают единым символом A^{-1} . Этот символ не означает $1/A$, так как такая операция не определена. Согласно теоремам 1 и 2 из § 2 имеем

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{21}/|A| & A_{31}/|A| \\ A_{12}/|A| & A_{22}/|A| & A_{32}/|A| \\ A_{13}/|A| & A_{23}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Теорема. Квадратная матрица A имеет обратную $\Leftrightarrow$, когда она не вырождена. Обратная матрица определяется однозначно.

§ 4. Матричный метод решения системы линейных алгебраических уравнений. Формулы Крамера

1. Рассмотрим для определенности систему из трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = d_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = d_3 \end{cases} \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Решением (1) называется упорядоченная система $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ из трех чисел, удовлетворяющая требованию: если в (1) вместо x_1, x_2 и x_3 подставить соответственно α_1, α_2 и α_3 , то получим три верных равенства (три тождества).

Терминология здесь такая:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (2)$$

- матрица системы (1).

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

- расширенная матрица (1).

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}; \quad |A| \equiv \Delta. \quad (4)$$

Система (1) может быть записана в матричном виде так:

$$AX = D \quad (5)$$

X — неизвестная столбцовая матрица (см. (4)). При этом видно, что по расши-

ренной матрице В системы (1) последняя восстанавливается однозначно. В дальнейшем (§5) расширенную матрицу будем записывать так:

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} & \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} & \mathbf{d}_3 \end{array} \right), \quad (3^*)$$

то есть отделяя столбец свободных членов вертикальной чертой.

Введем вспомогательные определители

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} \mathbf{d}_1 & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{d}_2 & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{d}_3 & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} \end{vmatrix} = \mathbf{d}_1 \mathbf{A}_{11} + \mathbf{d}_2 \mathbf{A}_{21} + \mathbf{d}_3 \mathbf{A}_{31}; \quad (6)$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{d}_1 & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{d}_2 & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{d}_3 & \mathbf{a}_{33} \end{vmatrix} = \mathbf{d}_1 \mathbf{A}_{12} + \mathbf{d}_2 \mathbf{A}_{22} + \mathbf{d}_3 \mathbf{A}_{32}; \quad (7)$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{d}_3 \end{vmatrix} = \mathbf{d}_1 \mathbf{A}_{13} + \mathbf{d}_2 \mathbf{A}_{23} + \mathbf{d}_3 \mathbf{A}_{33}. \quad (8)$$

Чтобы проверить равенства (6) - (8) достаточно воспользоваться теоремой 1 § 2. Предполагая невырожденной матрицу А ($|A| \neq 0$), можно показать, что решение системы (1) $\Leftrightarrow$ (5) в матричной форме дается равенством

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{D}, \quad (9)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{31} \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{32} \\ \mathbf{A}_{13} & \mathbf{A}_{23} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} \mathbf{d}_1 + \mathbf{A}_{21} \mathbf{d}_2 + \mathbf{A}_{31} \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{A}_{12} \mathbf{d}_1 + \mathbf{A}_{22} \mathbf{d}_2 + \mathbf{A}_{32} \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{A}_{13} \mathbf{d}_1 + \mathbf{A}_{23} \mathbf{d}_2 + \mathbf{A}_{33} \mathbf{d}_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

Используя понятие равенства двух матриц (с.2), получим

$$x_1 = \frac{\mathbf{A}_{11} \mathbf{d}_1 + \mathbf{A}_{21} \mathbf{d}_2 + \mathbf{A}_{31} \mathbf{d}_3}{\Delta} = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}. \quad (10)$$

$$x_2 = \frac{\mathbf{A}_{12} \mathbf{d}_1 + \mathbf{A}_{22} \mathbf{d}_2 + \mathbf{A}_{32} \mathbf{d}_3}{\Delta} = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}. \quad (11)$$

$$x_3 = \frac{\mathbf{A}_{13} \mathbf{d}_1 + \mathbf{A}_{23} \mathbf{d}_2 + \mathbf{A}_{33} \mathbf{d}_3}{\Delta} = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}. \quad (12)$$

Формулы (10-12) называются *формулами Крамера*.

Теорема. Если матрица (2) системы (1) не вырождена, то система (1) допускает решение, оно единственно и определяется по формуле (9).

§ 5. Метод Гаусса решения системы алгебраических линейных уравнений (метод исключения)

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие преобразования:

1⁰. Перестановка местами произвольных 2-х строк (столбцов).

2⁰. Умножение строки (столбца) матрицы на отличное от нуля число.

3⁰. Прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), предварительно умноженных на одно и то же число.

Элементарным преобразованиям подвергаются (в случае алгебраических линейных систем) только строки расширенной матрицы B , что позволяет преобразовать исходную линейную систему уравнений в равносильную. С помощью элементарных преобразований строк можно привести матрицу B к виду, когда ниже левой главной диагонали все элементы равны нулю.

Далее условимся в следующем:

$\alpha(p)$ означает, что каждый элемент p -й строки (строки с номером p) умножается на число α ;

$\alpha(p) + \beta(q)$ – к элементам строки q , предварительно умноженным на число β , прибавляются одноименные элементы строки p , предварительно умноженные на число α . Тем самым изменяются элементы строки с номером q , а строка с номером p остается без изменения.

$(p) \leftrightarrow (q)$ – строки с номерами p и q меняются местами.

Этот метод поясним на простом примере.

Пример 1.

$$\begin{cases} x_2 - x_1 + x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 7x_4 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow B = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & -10 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{c} (1) + (2) \\ -1(1) \\ 2(1) + (3) \\ (-1) + (4) \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 4 & -8 & -12 \end{array} \right) \rightarrow [(2) \leftrightarrow (3)].$$

| мы добились того, что в первом столбце все элементы равны нулю, кроме $a_{11} = 1$. Аналогичные преобразования проводим с остальными строками матрицы, начиная со второй, но так, чтобы $a_{22} = 1$, а остальные элементы столбца становились равными нулю. |

$$\begin{aligned}
&\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & -8 & -12 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{l} (2)+(1) \\ -3(2)+(3); \\ -3(2)+(4); \\ \frac{1}{2}(3) \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & -8 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{l} (3)+(2); \\ 2(3)+(1); \\ -7(3)+(4); \\ -1(4). \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 39 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{l} (4)+(1); \\ (4)+(2); \\ (4)+(3). \end{array} \right) \rightarrow \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 48 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 39 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что рассматриваемая система совместна и $x_1 = 48$, $x_2 = 40$, $x_3 = 45$, $x_4 = 39$.

Ответ: $\{45, 40, 45, 39\}$.

Проверка. $40 - 48 + 45 - 39 = -2$; $48 + 80 - 90 - 39 = -1$;

$96 - 40 - 135 + 78 = 56 - 57 = -1$; $48 + 80 + 135 - 273 = 263 - 273 = -10$.

Все четыре равенства - верные равенства.

Замечание. В расширенной матрице, по которой однозначно восстанавливается алгебраическая линейная система, надо, в первую очередь, сделать такие элементарные преобразования:

1⁰. Если $a_{11} \neq 1$, то на первую строку поместить ту строку, первый элемент которой равняется единице.

2⁰. Если нет строки с первым элементом, равным единице, то можно попытаться с помощью элементарных преобразований строк получить такую строку. Например, если $a_{11} \neq 0$; 1, то первую строку поделить на a_{11} .

ПРИМЕР 2. Сразу выписываем расширенную матрицу, т.к. по ней система уравнений восстанавливается.

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 2 & 1 & 16 \\ 1 & 7 & 1 & 1 & 23 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 10 \\ 4 & -3 & 4 & 6 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{меняем местами} \\ \text{строки : } (1) \leftrightarrow (2) \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 1 & 1 & 23 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 16 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 10 \\ 4 & -3 & 4 & 6 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left| \begin{array}{c} -3(1) + (2) \\ -2(1) + (3) \\ -2(3) + (4) \end{array} \right| \rightarrow \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 1 & 1 & 23 \\ 0 & -17 & -1 & -2 & -53 \\ 0 & -13 & 1 & 3 & -36 \\ 0 & -5 & -2 & -4 & -19 \end{array} \right) \rightarrow \left| \begin{array}{c} -(3) + (2) \\ -(4) + (3) \end{array} \right| \rightarrow \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 1 & 1 & 23 \\ 0 & -4 & -2 & -5 & -17 \\ 0 & -8 & 3 & 7 & -17 \\ 0 & -5 & -2 & -4 & -19 \end{array} \right) \rightarrow \left| -\frac{1}{4}(2) \right| \rightarrow \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 1 & 1 & 23 \\ 0 & 1 & 1/2 & 5/4 & 17/4 \\ 0 & -8 & 3 & 7 & -17 \\ 0 & -5 & -2 & -4 & -19 \end{array} \right) \rightarrow \left| \begin{array}{c} 8(2) + (3) \\ 5(2) + (4) \end{array} \right| \rightarrow \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 1 & 1 & 23 \\ 0 & 1 & 1/2 & 5/4 & 17/4 \\ 0 & 0 & 7 & 17 & 17 \\ 0 & 0 & 1/2 & 9/4 & 9/4 \end{array} \right) \rightarrow \left| \begin{array}{c} (3) \leftrightarrow (4) \\ 2(3) \end{array} \right| \rightarrow \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 1 & 1 & 23 \\ 0 & 1 & 1/2 & 5/4 & 17/4 \\ 0 & 0 & 1 & 9/2 & 9/2 \\ 0 & 0 & 7 & 17 & 17 \end{array} \right) \rightarrow \left| -7(3) + (4) \right| \rightarrow \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 1 & 1 & 23 \\ 0 & 1 & 1/2 & 5/4 & 17/4 \\ 0 & 0 & 1 & 9/2 & 9/2 \\ 0 & 0 & 0 & -29/2 & -29/2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 1 & 7 & 23 \\ 0 & 1 & 1/2 & 5/4 & 17/4 \\ 0 & 0 & 1 & 9/2 & 9/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \left| \begin{array}{l} -\frac{9}{2}(4) + (3) \\ -\frac{5}{4}(4) + (2) \\ -(4) + (1) \end{array} \right| \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 1 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{2}(3) + (2) \\ -1(3) + (1) \end{array} \right| \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow |-7(2) + (1)| \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что преобразованная система уравнений имеет следую-

щий вид: $\begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = 3; \\ x_3 = 0; \\ x_4 = 1, \end{cases}$, что сразу дает решение исследуемой системы.

Ответ: $\{1,3,0,1\}$.

Проверку предлагаем сделать читателю.

ПРИМЕР 3. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array} \right) \rightarrow |-1(1) + (3)| \rightarrow$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{l} -5(2) + (3) \\ 7(2) + (4) \end{array} \right) \rightarrow \\ &\quad \left. \begin{array}{l} \text{При этом меняются только} \\ \text{элементы строк (3) и (4), а строка (2)} \\ \text{остается без изменения} \end{array} \right| \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \end{aligned}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left| \begin{array}{l} (3) + (2) \\ -3(3) + (1) \end{array} \right| \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left| \begin{array}{l} 2(2) + (1) \\ \end{array} \right| \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \end{array} \right)$$

Отсюда следует, что преобразованная система, равносильная исходной,

имеет следующий вид:
$$\begin{cases} x_1 = -8, \\ x_2 - x_4 = 3, \\ x_3 - 2x_4 = 6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -8, \\ x_2 - x_4 = 3, \\ x_3 = 2x_4 + 6, \end{cases}$$

где x_4 можно придавать произвольное значение. В силу этого система допускает бесконечное множество решений.

Ответ: $\{-8, x_4 + 3; 2x_4 + 6; x_4\}$, $x_4 \in \mathbb{R}$.

Проверка. Напомним, что исходная система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

Имеем
$$\begin{cases} -8 - 2x_4 - 6 + 6x_4 + 18 - 4x_4 = 4, \\ x_4 + 3 - 2x_4 - 6 + x_4 = -3, \\ -8 + 3x_4 + 9 - 3x_4 = 1, \\ -7x_4 - 21 + 6x_4 + 18 + x_4 = -3. \end{cases}$$

Таким образом, получаем четыре верных равенства. В чем и следовало убедиться.

ПРИМЕР 4.

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left| \begin{array}{l} -2(1) + (2) \\ (2) \leftrightarrow (1) \end{array} \right| \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left| \begin{array}{l} -3(1) + 2 \\ -5(1) + 3 \end{array} \right| \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -1 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left| \begin{array}{l} -1(2) + (3) \end{array} \right| \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Последняя строка полученной матрицы указывает на несовместность исходной линейной системы, так как $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$, $0 \neq -1$.

Глава II. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебники: Ефимов Н.В., гл. 7 - 10.

Беклемишев Д.В., гл. I, §§ 1-3.

Ильин В.А., Позняк Э.Г., гл. 2.

§ 1. Действия над векторами

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Отрезок АВ называется *направленным*, если его концы занумерованы, т.е. известно, который из концов 1-й (начало) и который 2-й (конец). Направленный отрезок называется *вектором*.

Запись $\overrightarrow{AB}$ означает: т. А — начало направленного отрезка (1-й), а т. В — конец направленного отрезка (2-й). (Рис. 1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются равными: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow$ если они сонаправлены $\left(\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \right)$ и их длины равны $(|\vec{a}| = |\vec{b}|)$.

(Рис. 1).

Замечание. Напомним, что запись $\vec{p} \uparrow \uparrow \vec{q}$ ($\vec{p} \uparrow \downarrow \vec{q}$) означает сонаправленность (противоположную направленность) векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$.

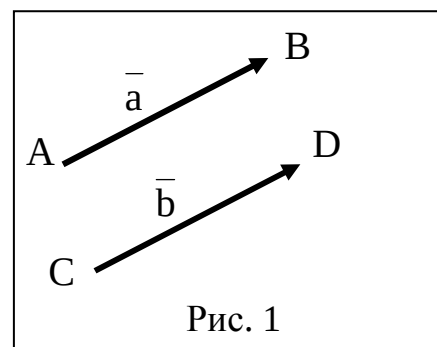


Рис. 1

Напомним, что сумма $\vec{a} + \vec{b}$ двух векторов определяется по правилу параллелограмма (треугольника), при этом операция “+” удовлетворяет условиям:

1°. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ — коммутативность суммы.

2°. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ — ассоциативность суммы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ , $\lambda \in \mathbb{R}$, называется вектор, обозначаемый одним из символов $\lambda \vec{a}$, $\vec{a} \lambda$ и определяющийся по следующему правилу:

1°. $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$ – чтобы получить длину вектора $\lambda \vec{a}$, надо умножить длину $|\vec{a}|$ вектора $\vec{a}$ на модуль скалярного множителя.

2°. $\lambda \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{a} \Leftrightarrow$ когда $\lambda > 0$; $\lambda \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{a} \Leftrightarrow$ когда $\lambda < 0$.

Операция произведения вектора на число удовлетворяет условиям:

3°. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, \forall \vec{a}$.

4°. $\lambda \left(\mu \vec{a} \right) = (\lambda \mu) \vec{a}$ – ассоциативность произведения.

5°. $(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$ – распределительное свойство по отношению к числовому множителю.

6°. $\lambda \left(\vec{a} + \vec{b} \right) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$ – распределительное свойство по отношению к векторному множителю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Если концы направленного отрезка (вектора) совпадают, то такой вектор называется нулевым.

Итак, $\vec{AA} = \vec{0}$ – нулевой вектор, где A – произвольная точка.

7°. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

2. Напомним, что разность $\vec{a} - \vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется как вектор, который в сумме с вычитаемым вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$:

$\vec{b} + \left(\vec{a} - \vec{b} \right) = \vec{a}$. (Рис. 2).

Вектор $\vec{x}$ называется **противоположным** вектору $\vec{a}$, если $\vec{x} + \vec{a} = \vec{0}$. Этот вектор обозначается единым символом $-\vec{a}$. Можно показать, что $-\vec{a} = (-1) \vec{a}$.

Отметим, что $\lambda \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \vec{x} = \vec{0} \end{cases}$.

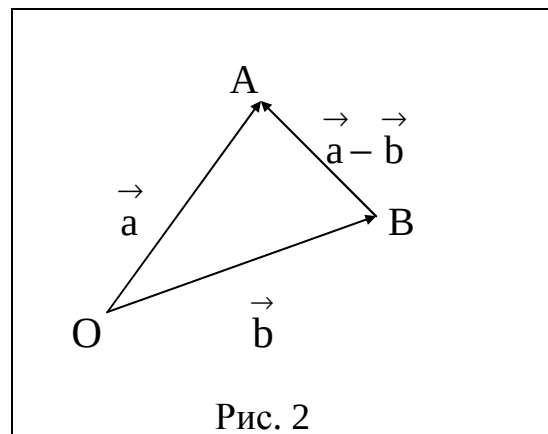


Рис. 2

§ 2. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов

1. Рассмотрим систему векторов (направленных отрезков)

$$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_k\}. \quad (1)$$

Вектор

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k, \quad (2)$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, k}$, называется *линейной комбинацией векторов системы* (1) (с постоянными коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$).

Нас интересует случай, когда линейная комбинация

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0} \quad (3)$$

при условии, что система векторов (1) задана, а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ — неизвестные числа. Согласно (§1, п.2), если $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_k = 0$, то (3) всегда имеет место. В этом случае будем говорить о *тривиальной* комбинации векторов системы (1). Если же (3) имеет место, но хотя бы одно из чисел λ_i отлично от нуля, то комбинация (3) называется *нетривиальной* линейной комбинацией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Система векторов (1) называется *линейно-независимой*, если из условия (3) следует

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_k = 0, \quad (4)$$

то есть (3) возможно только при тривиальной комбинации. В противном случае, т.е. когда (3) имеет место при нетривиальной линейной комбинации, система векторов (1) называется *линейно-зависимой*, другими словами из (3) не следует (4): среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ есть хотя бы одно, отличное от нуля:

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_k^2 \neq 0. \quad (5)$$

Теорема 1. Система (1) линейно-зависима $\Leftrightarrow$ когда некоторый вектор системы есть линейная комбинация остальных векторов этой системы.

Следствие. Система (1) линейно-независима $\Leftrightarrow$ когда ни один вектор этой системы не есть линейная комбинация остальных векторов этой системы.

Теорема 2. Если некоторая подсистема векторов из (1) линейно-зависима, то и система (1) — линейно-зависима.

Следствие. Если (1) содержит нулевой вектор, то она есть линейно-зависимая система векторов.

Теорема 3. Если система векторов линейно-независима, то и $\forall$ ее подсистема линейно-независима.

§ 3. Векторный базис. Координаты вектора

1. **ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если после приведения их к общему началу они лежат на одной прямой (рис. 1).

В противном случае $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *неколлинеарными*, то есть после

приведения к общему началу они не лежат на одной прямой (рис. 2).

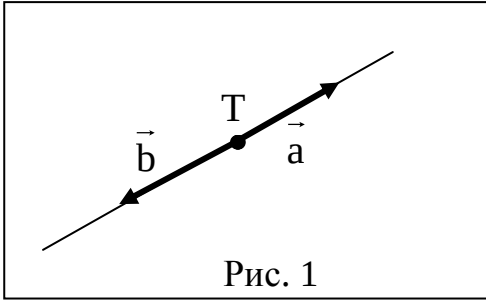


Рис. 1

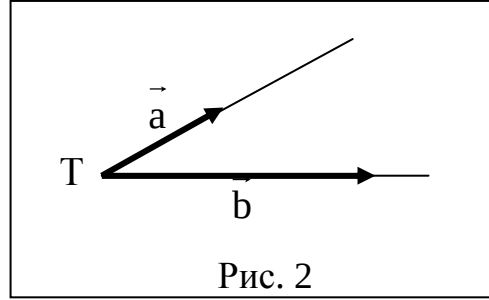


Рис. 2

Ортом называется вектор единичной длины. Ортом $\vec{a}_0$ вектора $\vec{a}$ называется орт, сонаправленный с вектором $\vec{a}$: $\{\vec{a}_0 \uparrow \vec{a}, |\vec{a}_0| = 1\}$. При этом

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}. \quad (1)$$

Последнее равенство проверяется непосредственно: $\vec{a}_0 \uparrow \vec{a}$, так как $1/|\vec{a}| > 0$, а $|\vec{a}_0| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \right| = \frac{1}{|\vec{a}|} |\vec{a}| = 1$. В чем и следовало убедиться.

2. Теорема 1. Два направленных отрезка $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны $\Leftrightarrow$ когда $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, (2)

то есть, когда один из векторов получается из другого умножением на число.

В силу этого, согласно теореме 1 (§ 2), имеем: система $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ из двух направленных отрезков линейно-зависима $\Leftrightarrow$ когда $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. В этом состоит геометрический смысл линейной зависимости системы из двух направленных отрезков $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Система из двух направленных отрезков линейно-независима $\Leftrightarrow$ когда $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Последнее выражает геометрический смысл линейной независимости системы из двух направленных отрезков.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Векторным базисом на плоскости называется упорядоченная система $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ из двух линейно-независимых векторов. (Рис. 3).

Теорема 2. Произвольный вектор $\vec{x}$ на плоскости есть линейная комбинация базисных векторов:

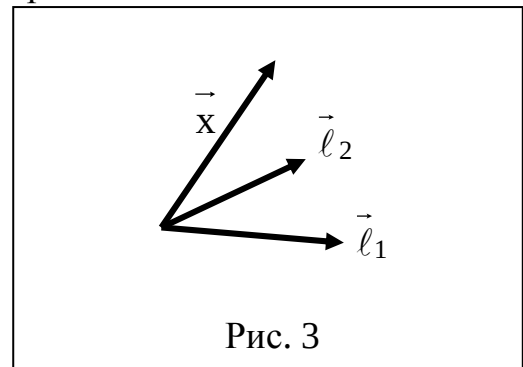


Рис. 3

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2. \quad (3)$$

Координатами вектора $\vec{X}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ называются коэффициенты x_1, x_2 в разложении (3) вектора $\vec{X}$ по базисным векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. При выбранном базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ координаты вектора определяются однозначно.

Множество векторов на плоскости называется двумерным векторным пространством и обозначается V_2 (по числу базисных векторов в векторном базисе).

3. Три вектора в пространстве называются **некомпланарными (компланарными)**, если после приведения их к общему началу они не лежат (лежат) в одной плоскости.

Теорема 3. Система $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ из трех векторов компланарна $\Leftrightarrow$ когда она линейно-зависима.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Векторным базисом в пространстве называется упорядоченная система $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ из трех линейно-независимых векторов.

Теорема 4. Произвольный вектор $\vec{X}$ в пространстве есть линейная комбинация базисных векторов:

$$\vec{X} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3. \quad (4)$$

Координатами вектора $\vec{X}$ в базисе, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ называются коэффициенты x_1, x_2, x_3 в разложении (4) вектора $\vec{X}$ по базисным векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. При выбранном базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ координаты вектора определяются однозначно.

Теорема 5. Чтобы получить координаты вектора $\lambda \vec{X}$, надо каждую координату $\vec{X}$ умножить на число λ .

Например, если выбран базис, $\vec{X}\{x_1, x_2, x_3\}$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, то $\lambda \vec{X}\{\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3\}$.

Теорема 6. Координаты алгебраической суммы двух векторов равны алгебраической сумме соответствующих координат слагаемых векторов.

Например, если $\vec{X}\{x_1, x_2, x_3\}$, $\vec{Y}\{y_1, y_2, y_3\}$, то $(\vec{X} \pm \vec{Y})\{x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, x_3 \pm y_3\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. **Ортонормированным базисом** в V_3 (множество векторов в пространстве) называется векторный базис $e = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, для которого выполнены условия

а) $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$, то есть если все три базисных вектора являются ортами (векторами единичной длины);

б) $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, \vec{e}_3$; $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$, то есть базисные

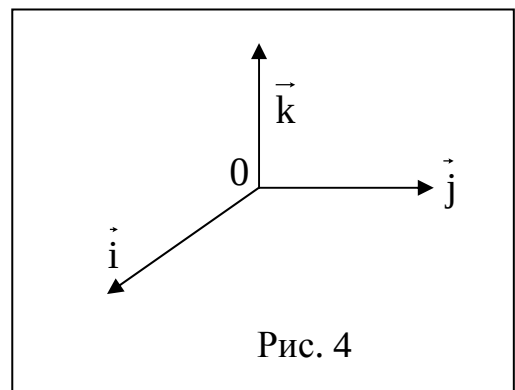


Рис. 4

векторы попарно ортогональны (перпендикулярны). Ортонормированный базис имеет стандартное обозначение $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, где $\vec{i} = \vec{e}_1$, $\vec{j} = \vec{e}_2$, $\vec{k} = \vec{e}_3$. (см. рис. 4).

§4. Прямоугольная декартова система координат (ПДСК). Деление направленного отрезка в заданном отношении

1.ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

Координатами т. M в ПДСК называются координаты ее радиуса- вектора $\vec{OM}$ относительно ортонормированного базиса $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ (см. рис. 1), т.е. $M(x, y, z) \Leftrightarrow$

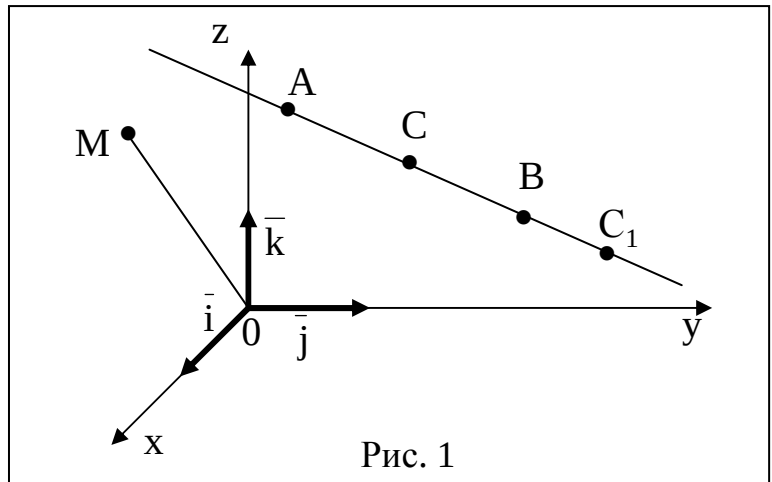


Рис. 1

$$\vec{OM}\{x, y, z\}_{\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Говорят, что $C \in (AB)$ ($A \neq B$) делит направленный отрезок $\vec{AB}$ в отношении λ , если

$$\vec{AC} = \lambda \vec{CB}. \quad (2)$$

При этом, если $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$), то точка C делит $\vec{AB}$ внутренним (внешним) образом, т.е. C – внутренняя (внешняя) точка отрезка AB (см. рис.1).

Если $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ и $C(c_1, c_2, c_3)$, то координаты делящей точки C связаны с координатами точек A и B так:

$$c_1 = \frac{a_1 + \lambda b_1}{1 + \lambda}; c_2 = \frac{a_2 + \lambda b_2}{1 + \lambda}; c_3 = \frac{a_3 + \lambda b_3}{1 + \lambda}. \quad (3)$$

Тем самым решаются две основные задачи:

- I) по заданному отношению λ и координатам точек A и B определяются координаты делящей точки C .
- II) по координатам точек A, B и C , лежащих на одной прямой, определяется отношение λ , в котором точка C делит направленный отрезок $\vec{AB}$.

Заметим, что середина отрезка AB соответствует $\lambda = 1$. В силу этого (3) $\Leftrightarrow$

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}; c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}; c_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}. \quad (4)$$

ПРИМЕР 1. Найти координаты центра тяжести треугольника с вершинами $A(2;3;4)$, $B(3;10;2)$, $C(4;-1;3)$.

Решение. Точка O пересечения медиан треугольника ABC (см. рис. 2) - центр тяжести $\triangle ABC$.

$\vec{AO} = 2\vec{OD}$, $\lambda = 2$. $D(7/2;0;5/2)$ согласно (4). В силу

$$\text{формулы (3) имеем } x_0 = \frac{2 + 2 \cdot \frac{7}{2}}{3} = 3; \quad y_0 = \frac{3}{3} = 1;$$

$$z_0 = \frac{4 + 2 \cdot \frac{5}{2}}{3} = 3.$$

Ответ: $O(3;1;3)$.

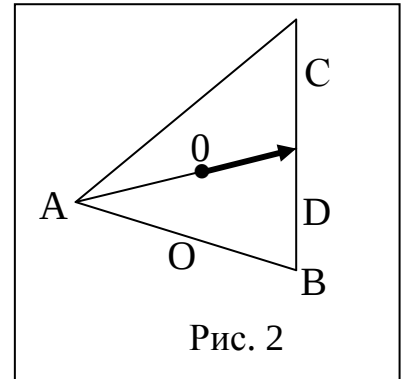


Рис. 2

§ 5. Проекция вектора (направленного отрезка) на ось

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Направляющим вектором* прямой ℓ называется вектор $\vec{\ell}$, который лежит на параллельной прямой либо на ней самой. (см. рис.1), то есть, если отложить этот вектор от точки прямой ℓ , то $\vec{\ell}$ будет лежать на ℓ .

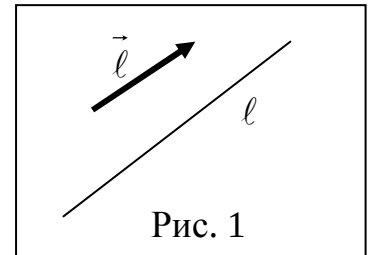


Рис. 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Прямая ℓ называется *осью*, если на ней задано положительное направление.

Обычно направление на оси задается ортом $\vec{\ell}_0$ направляющего вектора этой прямой. Так, например, движение снизу вверх на ℓ определяет положительное направление (см. рис. 1). Направление, противоположное положительному, называется *отрицательным*.

Пусть $A_1(B_1)$ - ортогональная (перпендикулярная) проекция т. A (т. B) на ось ℓ (см. рис. 2), т.е. $A_1(B_1)$ - основание перпендикуляра, опущенного из $A(B)$ на ℓ . Тем самым получается вектор $\vec{A_1B_1}$, который называется *векторной проекцией* вектора

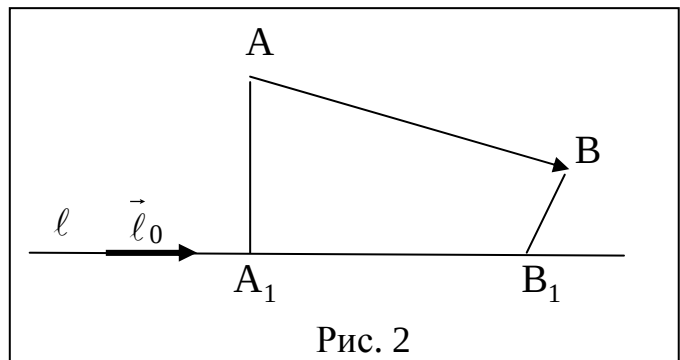


Рис. 2

$\vec{a} = \vec{AB}$ на ось ℓ и это записывается так:

$$\overrightarrow{\text{пр}_\ell \vec{a}}. \quad (1)$$

Так как $\vec{A_1B_1}$ и $\vec{\ell}_0$ коллинеарны, то согласно теореме 1 из §3 и (1)

$$\overrightarrow{\text{пр}_\ell \vec{a}} = \vec{A_1B_1} = \lambda \vec{\ell}_0, \quad (2)$$

где λ – числовой коэффициент пропорциональности, называемый скалярной проекцией вектора $\vec{a}$ на ось ℓ и обозначаемый $\text{пр}_\ell \vec{a}$. Таким образом,

$$\overrightarrow{\text{пр}_\ell \vec{a}} = (\text{пр}_\ell \vec{a}) \vec{\ell}_0. \quad (3)$$

Согласно (3) геометрический смысл скалярной проекции заключается в следующем: это есть величина вектора $\vec{A_1B_1}$, то есть длина $|\vec{A_1B_1}|$, если $\vec{A_1B_1} \uparrow\uparrow \vec{\ell}_0$ и взятая со знаком минус $|\vec{A_1B_1}|$, если $\vec{A_1B_1} \uparrow\downarrow \vec{\ell}_0$. Следовательно, скалярная проекция

$$\text{пр}_\ell \vec{a} = \pm |\overrightarrow{\text{пр}_\ell \vec{a}}|. \quad (4)$$

Теорема 1. Равные векторы имеют равные проекции.

Теорема 2. Один и тот же вектор имеет равные проекции на сонаправленные оси.

Теорема 3.

$$\text{пр}_\ell \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi, \quad (5)$$

где φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) – величина угла, образованного вектором $\vec{a}$ с осью ℓ (с вектором $\vec{\ell}_0$) (см. рис.3).

1°. $\text{пр}_\ell (\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_\ell \vec{a} + \text{пр}_\ell \vec{b}$ – проекция суммы векторов равняется сумме проекций слагаемых векторов.

2°. $\text{пр}_\ell \lambda \vec{a} = \lambda \text{пр}_\ell \vec{a}$ – числовой множитель можно выносить за знак проекции.

Замечание. В дальнейшем нам будет встречаться термин: проекция $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{\ell}$ ($\text{пр}_\ell \vec{a}$) $\Leftrightarrow$ проекция на ось, для которой $\vec{\ell}$ – направляющий вектор и он же определяет положительное направление оси ℓ .

В дальнейшем, если не оговорено противное, векторный базис предлагается ортонормированным.

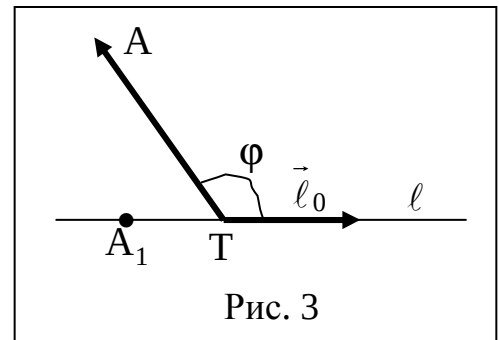


Рис. 3

§ 6. Скалярное произведение двух векторов и его свойства

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число (скалярная величина), обозначаемое одним из символов

$(\vec{a}, \vec{b})$, $\vec{a}\vec{b}$, $(\vec{a}\vec{b})$ и определяющееся по правилу

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi. \quad (1)$$

Другими словами, скалярное произведение равно произведению длин векторов на косинус угла между ними.

Свойства: 1⁰. $\vec{a}\vec{b} = |\vec{b}|\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$.

2⁰. $\vec{a}\vec{b} > 0 \Leftrightarrow \varphi$ – острый угол: $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$.

$\vec{a}\vec{b} < 0 \Leftrightarrow \varphi$ – тупой угол: $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$.

3⁰. Если $\vec{a}, \vec{b} \neq 0$, то

$$\vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}. \quad (2)$$

4⁰. $\vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \left[\varphi = \frac{\pi}{2}; \text{ либо хотя бы один из векторов - нулевой.} \right]$

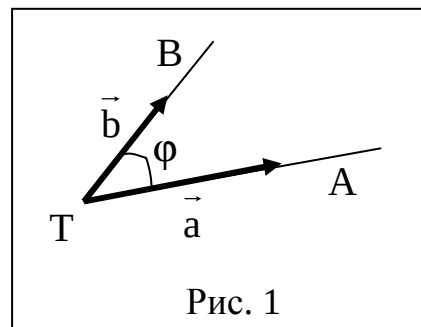


Рис. 1

Теорема 1. Если $\vec{a}\{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b}\{b_1, b_2, b_3\}$, то скалярное произведение равно сумме произведений одноименных координат множителей

$$\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \quad (3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ ($\vec{a}^2$) называется скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на себя.

Из (1) следует $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, т.е. скалярный квадрат вектора равняется квадрату его длины. Отсюда, согласно (1) и (3),

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \quad (4)$$

5⁰. $\left(\vec{a}, \vec{b} \right) = \left(\vec{b}, \vec{a} \right)$ – коммутативность скалярного произведения.

6⁰. $\left(\lambda \vec{a}, \vec{b} \right) = \left(\vec{a}, \lambda \vec{b} \right) = \lambda \left(\vec{a}, \vec{b} \right)$ – числовой множитель можно выно-

сать за знак скалярного произведения.

Следствие. $\left(\lambda \vec{a}, \mu \vec{b} \right) = \lambda \mu \left(\vec{a}, \vec{b} \right)$.

7⁰. $\left(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \right) = \left(\vec{a}, \vec{c} \right) + \left(\vec{b}, \vec{c} \right)$ – распределительное свойство по отношению к первому множителю;

$$\left(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \right) = \left(\vec{a}, \vec{b} \right) + \left(\vec{a}, \vec{c} \right) - \text{распределительное свойство по отношению ко второму множителю.}$$

2. Приложения скалярного произведения, в первую очередь, определяются формулами (см. рис.2):

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}, \quad (5)$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

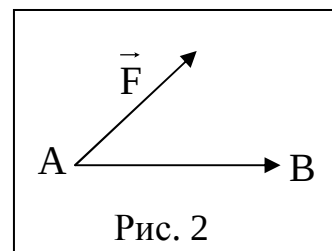


Рис. 2

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|} = (\vec{a}, \vec{b}_0). \quad (6)$$

Работа силы $\vec{F}$ по перемещению единичной массы из т. А в т. В по прямолинейному отрезку АВ равна $\vec{F} \overline{AB}$.

Направляющие косинусы вектора (см. рис. 3): $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$, где

$$\alpha = \vec{a} \wedge \vec{i}; \beta = \vec{a} \wedge \vec{j}; \gamma = \vec{a} \wedge \vec{k}; \quad (7)$$

$$\vec{a}\{a_1, a_2, a_3\}: \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

$$\vec{i}\{1,0,0\}, \vec{j}\{0,1,0\}, \vec{k}\{0,0,1\}.$$

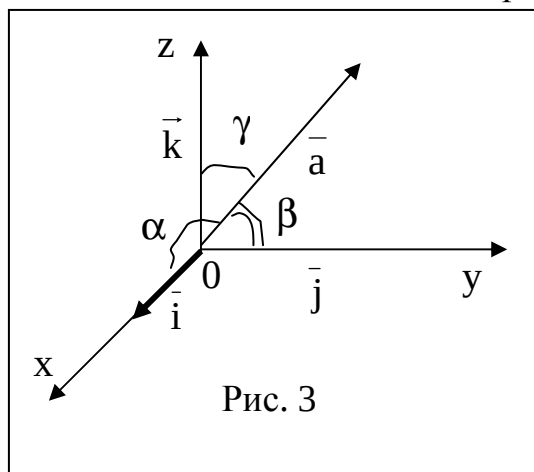


Рис. 3

При этом

$$\begin{cases} a_1 = \vec{a}\vec{i} = \text{пр}_{\vec{i}} \vec{a} = \text{пр}_x \vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha \\ a_2 = \vec{a}\vec{j} = \text{пр}_{\vec{j}} \vec{a} = \text{пр}_y \vec{a} = |\vec{a}| \cos \beta \\ a_3 = \vec{a}\vec{k} = \text{пр}_{\vec{k}} \vec{a} = \text{пр}_z \vec{a} = |\vec{a}| \cos \gamma \end{cases} \quad (8)$$

Последние три равенства определяют геометрический смысл координат вектора в ортонормированном базисе: проекции вектора на оси координат, положительное направление которых определяются базисными векторами. Отсюда

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|}; \cos \beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|}; \cos \gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}. \quad (9)$$

Орт вектора $\vec{a}$ вектор

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \left\{ \frac{a_1}{|\vec{a}|}, \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \frac{a_3}{|\vec{a}|} \right\} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}. \quad (10)$$

Другими словами, направляющие косинусы вектора - это координаты

орта этого вектора. В силу этого и (3)

$$\vec{a}_0^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (11)$$

ПРИМЕР 1. Найти вектор $\vec{X}$, образующий со всеми тремя базисными ортами равные острые углы, если $|\vec{X}| = 2\sqrt{3}$.

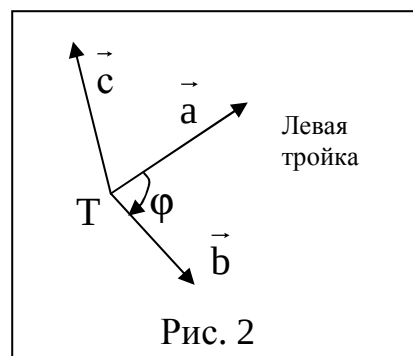
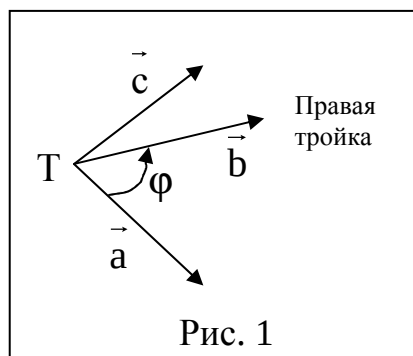
1. Решение. Согласно условию и (10) имеем $\alpha = \beta = \gamma$, $\cos^2 \alpha = \frac{1}{3}$,

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Согласно (8) } x_1 = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2 = x_2 = x_3.$$

Ответ: $\vec{X}\{2;2;2\}$.

§ 7. Векторное произведение двух векторов и его свойства

1. **ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Упорядоченная тройка некопланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, приведенная к общему началу, называется **правой** при условии, что если смотреть с конца третьего вектора $\vec{c}$, то кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ должен происходить против часовой стрелки (см. рис. 1). В противном случае упорядоченная тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется **левой** (см. рис. 2).



(Упомянутый кратчайший поворот от первого вектора ко второму должен происходить против часовой стрелки на угол $0 \leq \varphi \leq \pi$).

Замечание. Если три вектора упорядочены (занумерованы), то запись $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ означает: $\vec{a}$ – первый вектор, $\vec{b}$ – второй вектор, $\vec{c}$ – третий вектор. Если же мы пишем $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$, то $\vec{c}$ – первый вектор, $\vec{a}$ – второй вектор, $\vec{b}$ – третий вектор.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Векторным произведением упорядоченной пары векторов $\vec{a}, \vec{b}$ называется третий вектор, обозначаемый одним из символов $[\vec{a}\vec{b}]$, $[\vec{a}, \vec{b}]$, $\vec{a} \times \vec{b}$ и определяющийся из трех нижеследующих условий:

1°. $|\vec{a}, \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin \varphi$; 2°. $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}, \vec{b}$; 3°. Тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]$ образует правую тройку, если $[\vec{a}, \vec{b}] \neq \vec{0}$.

Замечание. $1^0 \Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a}$.

Для ненулевых неколлинеарных векторов и только в этом случае $[\vec{a}, \vec{b}] \neq \vec{0}$. Геометрический смысл 1^0 состоит в том, что $[\vec{a}, \vec{b}]$ равен площади параллелограмма ТАВС (см. рис. 3), построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах после приведения их к общему началу Т.

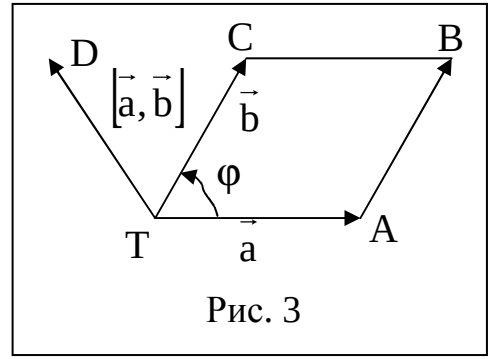


Рис. 3

Условие 2^0 означает, что векторное произведение перпендикулярно к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Требование 3^0 говорит о том, что если смотреть с конца вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$, то кратчайший поворот на угол φ ($0 < \varphi < \pi$) от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ должен происходить против часовой стрелки.

2. Свойства:

1^0) $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$, т.е. векторное произведение антикоммутативно.

2^0) $[\lambda \vec{a}, \vec{b}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}]$; $[\vec{a}, \mu \vec{b}] = \mu [\vec{a}, \vec{b}]$, т.е. числовой множитель можно выносить (вносить) за (под) знак векторного произведения.

Следствие. $[\lambda \vec{a}, \mu \vec{b}] = \lambda \mu [\vec{a}, \vec{b}]$.

3^0 Распределительное свойство: $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$;

$$[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}].$$

Если $\vec{a} \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} \{b_1, b_2, b_3\}$ в правом ортонормированном базисе, то координаты $[\vec{a}, \vec{b}]$ определяются с помощью символического определителя третьего порядка:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix};$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}. \quad (1)$$

Задача 1. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если он перпендикулярен к векторам $\vec{a}_1 \{2, -3, 1\}$ и $\vec{a}_2 \{1, -2, 3\}$, а также удовлетворяет условию $\vec{x}(\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.

Решение. Из условия задачи имеем $\vec{x} = \lambda [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$, $\vec{x}(\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) =$
 $= \lambda [\vec{a}_1, \vec{a}_2](\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$;

$$\lambda = \frac{10}{[\vec{a}_1, \vec{a}_2](\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k})}; \quad \vec{x} = \frac{10[\vec{a}_1, \vec{a}_2]}{[\vec{a}_1, \vec{a}_2](\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k})}.$$

Теперь остается воспользоваться формулой (1) и довести задачу до конца, а именно

$$[\vec{a}_1, \vec{a}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -7\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}$$

$$[\vec{a}_1, \vec{a}_2](\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = -7 - 10 + 7 = -10.$$

$$\text{В силу этого } \vec{x} = -[\vec{a}_1, \vec{a}_2] \{7, 5, 1\}.$$

$$\text{Ответ: } \vec{x} \{7, 5, 1\}.$$

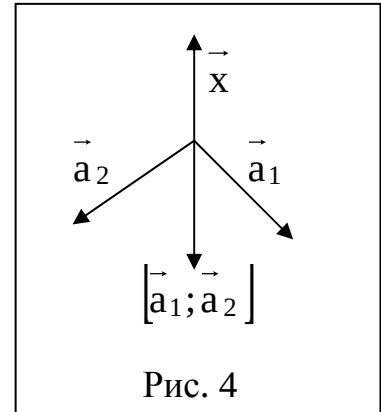


Рис. 4

§ 8. Смешанное произведение трех векторов и его свойства

1. Рассмотрим упорядоченную тройку векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Смешанным произведением* тройки векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число (скалярная величина), равное $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$.

Геометрический смысл знака смешанного произведения: если ϑ — объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ как на сторонах, то

$$[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = \vartheta, \text{ если } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ образуют правую тройку;}$$

— ϑ , если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют левую тройку.

Теорема. $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow$ когда векторы компланарны, т.е. после приведения к общему началу лежат в одной плоскости.

2. При циклической перестановке векторов смешанное произведение не меняется:

$$[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = \vec{a}[\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}]\vec{b}. \text{ В силу этого принято обозначение } [\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c}, \text{ показывающее, что результат не за-}$$

висит от того, как расставить квадратные скобки в правой части.

В координатах множимых векторов смешанное произведение определяется так:

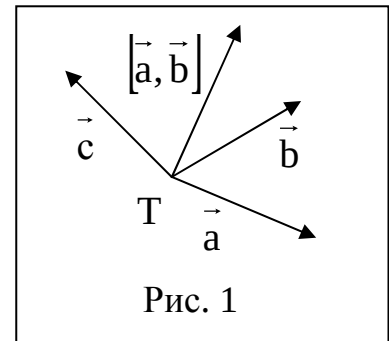


Рис. 1

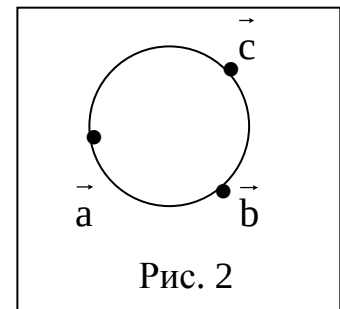


Рис. 2

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{c}_3 \end{vmatrix}, \quad (1)$$

где $\vec{a}\{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b}\{b_1, b_2, b_3\}$, $\vec{c}\{c_1, c_2, c_3\}$.

ПРИМЕР 1. Найти длину высоты параллелепипеда $ABCD A'B'C'D'$, опущенной из вершины A' на основание $ABCD$. $A(1,2,-3)$, $B(2,4,0)$, $D(2,3,0)$, $A'(5,3,1)$.

Решение. $\vartheta = |\overline{AB} \overline{AD} \overline{AA'}| =$
 $= S \cdot h$, $h = A'E$, E – основание перпендикуляра, опущенного из т. A' на плоскость $ABCD$.

$$S_{ABCD} = S = |\overline{AB} \overline{AD}|. \text{ Тогда}$$

$$h = \frac{|\overline{AB} \overline{AD} \overline{AA'}|}{|\overline{AB} \overline{AD}|}. \overline{AB}\{1,2,3\}, \overline{AD}\{1,1,3\}, \overline{AA'}\{4,1,4\}.$$

$$[\overline{AB}, \overline{AD}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - \vec{k};$$

$$[\overline{AB}, \overline{AD}]\{3,0,-1\}; \overline{AB} \overline{AD} \overline{AA'} = 12 - 4 = 8; h = \frac{8}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: $8/\sqrt{10}$.

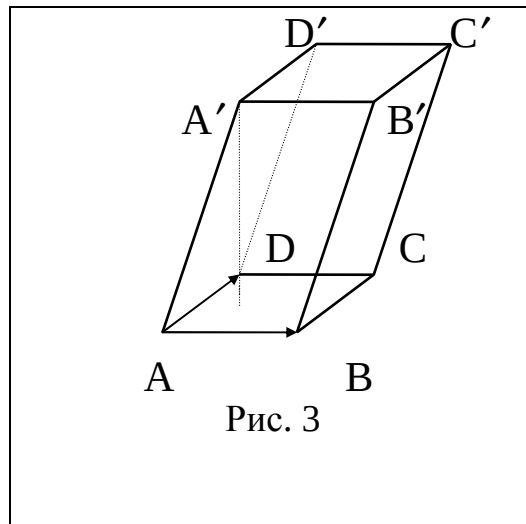


Рис. 3

ГЛАВА III. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Учебники: Ефимов Н.В., гл. 1-7, § 11-13.

Беклемишев Д.В., гл. II, III.

§ 1. Прямая на плоскости

1. Различные виды уравнений прямой. Геометрический смысл коэффициентов.

1) $a : Ax + By + C = 0$ – общее уравнение прямой.

$\vec{N}\{A, B\}$ – нормальный вектор прямой, т.е. направляющий вектор прямой, перпендикулярный к заданной прямой;

$\vec{a}\{-B, A\}$ – направляющий вектор прямой, т.е. вектор, параллельный прямой либо лежащий на этой прямой;

$C = 0 \Leftrightarrow$ когда прямая проходит через начало координат;

$C \neq 0 \Leftrightarrow$ когда прямая не проходит через начало координат (см. рис. 3), x, y – координаты произвольной (текущей) точки прямой.

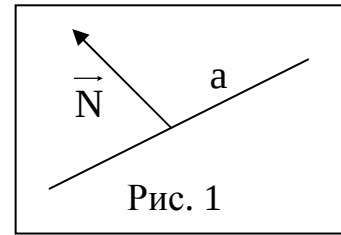


Рис. 1

2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ – уравнение прямой, проходящей через т. $M_0(x_0, y_0)$, перпендикулярно вектору $\vec{N}\{A, B\}$, т.е. $\vec{N}$ – нормальный вектор прямой (см. рис. 2).

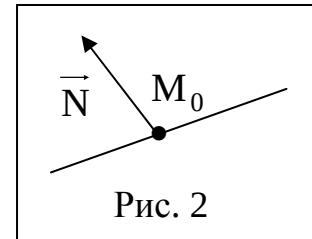


Рис. 2

Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y = kx + b$, $k = \tan \alpha$, α – угол наклона прямой с осью x .

$b = \text{вел. } \vec{OQ}$, $Q(0, b)$ – точка пересечения прямой с осью y (см. рис. 3).

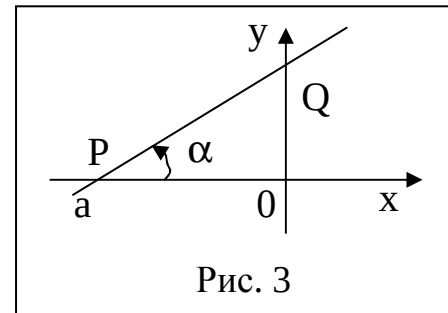


Рис. 3

3) Параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}$$

(x, y) – координаты текущей (произвольной) точки прямой; (x_0, y_0) – координаты начальной точки прямой. Начальной точкой считается фиксированная точка прямой; $\vec{a}\{m, n\}$ – направляющий вектор прямой, t – параметр, $t \in \mathbb{R}$.

4) Каноническое уравнение прямой: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$. Уравнение прямой,

проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

5) Уравнение прямой в отрезках $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

$P(a, 0)$, $Q(0, b)$ – точки пересечения прямой с осями координат (см. рис. 4), при этом

$a = \text{вел. } \overline{OP}$, $b = \text{вел. } \overline{OQ}$. В этом состоит геометрический смысл параметров a и b уравнения прямой в отрезках.

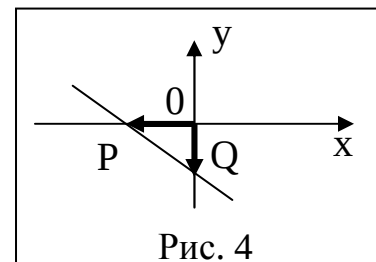


Рис. 4

2. Расстояние от точки до прямой определяется по формуле

$$P(M^*, a) = \frac{|Ax^* + By^* + C|}{|\vec{N}|}, |\vec{N}| = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad (1)$$

где $M^*(x^*, y^*)$, прямая задана общим уравнением (см. рис. 5).

Следовательно, надо взять левую часть $Ax + By + C$ общего уравнения прямой и вместо x и y подставить соответственно x^* и y^* – координаты т. M^* . Далее, остается модуль полученной суммы поделить на модуль $|\vec{N}|$.

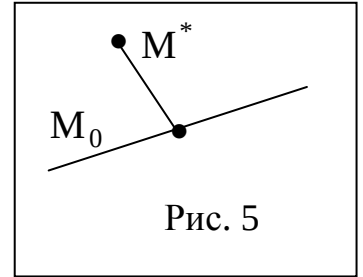


Рис. 5

3. Взаимное расположение 2-х прямых на плоскости
 $a_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0; a_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$ (2)

I) $a_1 \cap a_2 \Leftrightarrow \vec{N}_2 \neq \vec{N}_1 \Leftrightarrow$

$$\frac{A_2}{A_1} \neq \frac{B_2}{B_1}. \quad (3)$$

II) $a_1 \parallel a_2 \Leftrightarrow \vec{N}_2 = \lambda \vec{N}_1 \Leftrightarrow$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} \neq \frac{C_2}{C_1}. \quad (4)$$

III) $a_1 \equiv a_2$: условие совпадения двух прямых:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1}. \quad (5)$$

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Углом между двумя прямыми (см. рис.6) называется $\angle$ из 2-х смежных углов, образованных этими прямыми.

Формула

$$\cos \varphi = \frac{|\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle|}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|} = \frac{|\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle|}{|\vec{a}_1| |\vec{a}_2|} \quad (6)$$

определяет острый угол между двумя прямыми a_1 и a_2 . Обычно выбирают острый угол.

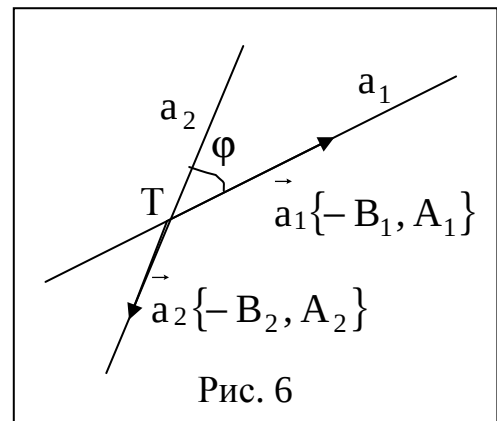


Рис. 6

$$(6) \Rightarrow a_1 \perp a_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Leftrightarrow$$

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \quad (7)$$

Задача 1. Составить уравнения сторон и диагонали ромба, если известны уравнения двух его сторон $x + 2y = 4$ и $x + 2y = 0$ и уравнение одной из диагоналей $y = x + 2$.

Решение. $a_1 : x + 2y = 4$; $c : y = x + 2$
 $a_2 : x + 2y = 0$.

Согласно (4) $a_1 \parallel a_2$, схематический чертеж дан на рис. 7. Согласно этому чертежу

$$P = c \cap a_2 : \begin{cases} y = x + 2 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ x = -4/3 \end{cases}$$

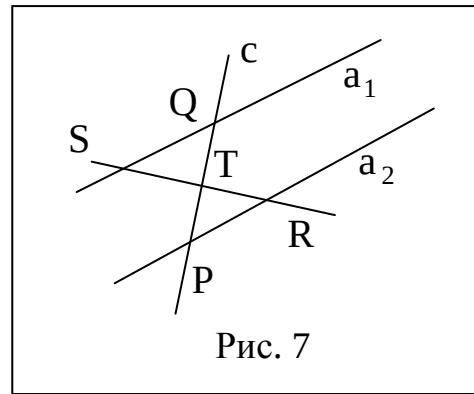


Рис. 7

$$P(-4/3, 2/3); Q = c \cap a_1 : \begin{cases} y = x + 2 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}, Q(0, 2) \text{ Середина отрезка } PQ$$

точка $T(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$. Теперь вспомним, что диагонали ромба $\perp$ под прямым углом:

$(SR) \perp c$. Направляющий вектор $\vec{c} \{1; 1\}$ прямой c — нормальный вектор прямой (SR) . В силу этого имеем

$$(SR) : 1\left(x + \frac{2}{3}\right) + 1\left(y - \frac{4}{3}\right) = 0; \quad 3x + 3y - 2 = 0.$$

$$S : \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 2y \\ 12 - 6y + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - \frac{20}{3} = -\frac{8}{3} \\ y = \frac{10}{3} \end{cases}, S\left(-\frac{8}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

$$R : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ y = -2/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4/3 \\ y = -2/3 \end{cases}, R\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right), \overline{SP}\left\{\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}\right\}.$$

$$(SP) : \frac{x + \frac{8}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{y - \frac{10}{3}}{-\frac{8}{3}}, \quad \frac{3x + 8}{4} = \frac{3y - 10}{-8}; \quad 3x + 8 = -\frac{3y - 10}{2};$$

$$6x + 3y + 6 = 0; \quad 2x + y + 2 = 0.$$

$$(QR) : \frac{x - \frac{4}{3}}{-1} = \frac{y + \frac{2}{3}}{2}; \quad 2x - \frac{8}{3} + y + \frac{2}{3} = 0; \quad 2x + y - 2 = 0.$$

Ответ: $(SR) : 3x + 3y - 2 = 0$; $(SP) : 2x + y + 2 = 0$; $(QR) : 2x + y - 2 = 0$.

§ 2. Плоскость

1. Различные виды уравнений плоскости. Геометрический смысл коэффициентов.

1) $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$ — общее уравнение плоскости.

$\vec{N}\{A, B, C\}$ – нормальный вектор плоскости, т.е. направляющий вектор прямой, которая перпендикулярна плоскости (см. рис. 1).

$D = 0 \Leftrightarrow$ когда плоскость проходит через начало координат;

$D \neq 0 \Leftrightarrow$ когда плоскость не проходит через начало координат.

2)

$\alpha : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ – уравнение плоскости, проходящей через т. $M_0(x_0, y_0, z_0) \perp \vec{N}\{A, B, C\}$.

3) $\alpha : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ – уравнение плоскости в отрезках; $P(a, 0, 0)$, $Q(0, b, 0)$, $R(0, 0, c)$ – точки пересечения плоскости с координатными осями x, y, z , при этом $a = \text{вел. } \overline{OP}$, $b = \text{вел. } \overline{OQ}$, $c = \text{вел. } \overline{OR}$.

2. Расстояние от точки до плоскости определяется формулой (см. рис. 3)

$$p(M^*, \alpha) = \frac{|Ax^* + By^* + Cz^* + D|}{|\vec{N}|}, \quad (1)$$

где $M^*(x^*, y^*, z^*)$,

$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$. Таким образом, чтобы получить расстояние от точки до плоскости надо в левую часть $Ax + By + Cz + D$ общего уравнения плоскости вместо x, y, z подставить координаты x^*, y^*, z^* т. M^* . И модуль этой величины поделить на $|\vec{N}|$.

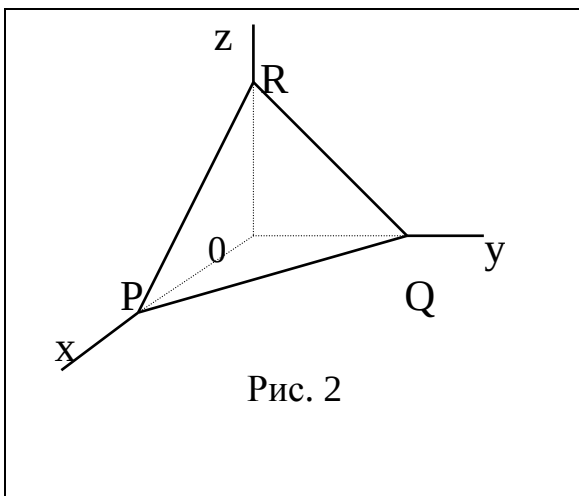


Рис. 2

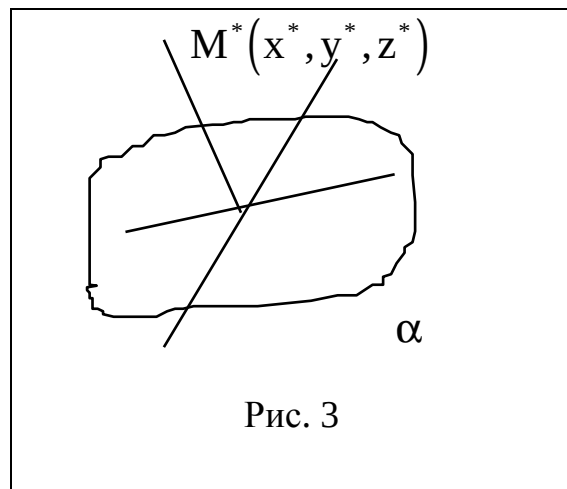


Рис. 3

3. Взаимное расположение 2-х плоскостей.

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \quad \alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (2)$$

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{I)} \quad \vec{N}_2\{A_2, B_2, C_2\} \neq \lambda \vec{N}_1\{A_1, B_1, C_1\} \Leftrightarrow [\vec{N}_1, \vec{N}_2] \neq \vec{0}. \quad (4)$$

(4) – *условие пересечения двух плоскостей*, а система (3) определяет так называемое *общие уравнения прямой*.

$$\begin{aligned} \text{II)} \quad \vec{N}_2 = \lambda \vec{N}_1 &\Leftrightarrow [\vec{N}_1, \vec{N}_2] = \vec{0} \Leftrightarrow \\ \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} &\neq \frac{D_1}{D_2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Система (3) не совместна. Другими словами, плоскости α_1 и α_2 не имеют общих точек, и, следовательно, параллельны. Таким образом, (5) есть *условие параллельности двух плоскостей*, заданных общими уравнениями.

$$\text{III)} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \quad (6)$$

Одно уравнение системы (3) есть следствие другого. А это означает, что плоскости совпадают ($\alpha_1 \equiv \alpha_2$). Таким образом, (6) – *условие совпадения плоскостей*.

4. Угол между двумя плоскостями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Углом между двумя плоскостями называется φ из двух смежных углов, образованных этими плоскостями.

$$a = \alpha_1 \cap \alpha_2.$$

$$\varphi = \theta, \pi - \theta, \quad (7)$$

где θ – линейный угол двугранного угла, образованный лучами ℓ_1, ℓ_2 , S – вершина линейного угла, $S \in a$.

Если $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ поместить в точку S , то $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \ell_1, \ell_2 \subset$ плоскости, проходящей через $S \perp a$, при этом $\vec{N}_1 \perp \ell_1$, $\vec{N}_2 \perp \ell_2$. Таким образом, углы, образованные $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, ℓ_1 и ℓ_2 , есть углы с перпендикулярными сторонами. В силу этого $\vec{N}_1 \wedge \vec{N}_2 = \theta, \pi - \theta$. Тогда

$$\cos \varphi = \pm \frac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|}. \quad (8)$$

Если же мы хотим выбрать острый угол, то вместо (8) имеем

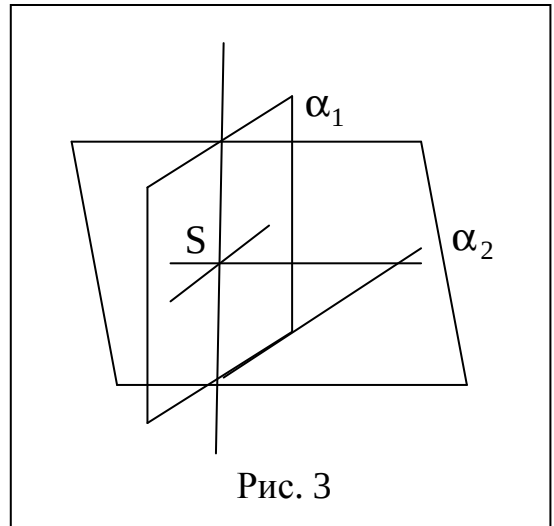


Рис. 3

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{N}_1 \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|}. \quad (9)$$

$$(8) \Rightarrow \alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \vec{N}_2 = A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

Для параллельных либо совпадающих плоскостей по определению $\varphi = 0$, либо π , что вполне согласовывается с формулой (8).

§ 3. Прямая в пространстве

1. Различные виды уравнений прямой. Геометрический смысл коэффициентов.

$$1) \quad \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} - \text{ канонические}$$

уравнения прямой (см. рис.1);

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ – начальная (фиксированная, данная) точка прямой;

$\vec{a}\{m, n, p\}$ – направляющий вектор прямой;

$M(x, y, z)$ – текущая (произвольная) точка прямой.

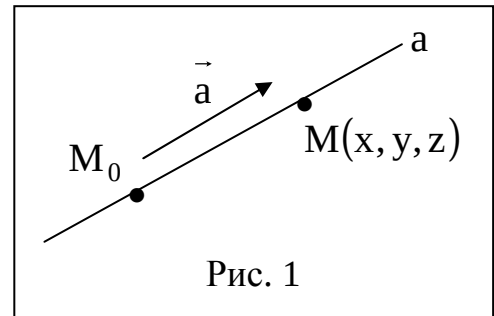


Рис. 1

2) Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

$$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2): \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

3) Общие уравнения прямой (см. §2, п.3 формула (3)):

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где прямая рассматривается как линия пересечения двух плоскостей. Направляющий вектор такой прямой $\vec{N} = [\vec{N}_1, \vec{N}_2]$. За координаты точки можно взять $\forall$ решение системы (1). Обычно в (1) полагают $x = 0$ и находят две другие координаты y и z начальной точки. Вместо $x = 0$ берут также $y = 0$ либо $z = 0$.

Рассматривая (1) как систему двух линейных уравнений с тремя неизвестными, можно ее разрешить относительно одной из переменных и тем самым получить сразу параметрические уравнения прямой. Роль параметра играет переменная, через которую линейно выражаются два других.

$$4) \text{ Параметрические уравнения прямой: } \begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, t - \text{ параметр.}$$

метр.

2. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.

Прямые a_1 и a_2 заданы каноническими уравнениями:

$$a_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p}; \quad a_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p}.$$

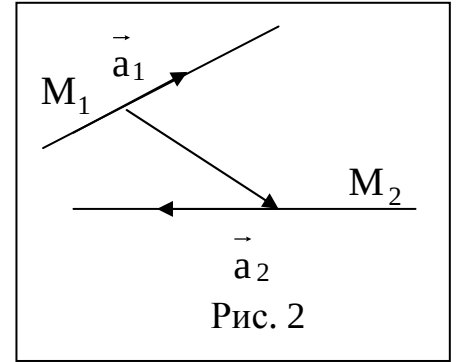
Теорема. a_1 и a_2 принадлежат одной плоскости $\Leftrightarrow$ когда

$$\overline{M_1 M_2} \vec{a}_1 \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (2)$$

т.е. когда три вектора $\overline{M_1 M_2}, \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$,

$\vec{a}_1 \{m_1, n_1, p_1\}, \vec{a}_2 \{m_2, n_2, p_2\}$ компланарны
(см. рис.2).

Следствие. Прямые $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не лежат в одной плоскости (скрещивающиеся прямые) $\Leftrightarrow$ когда условие (2) нарушается, то есть векторы $\overline{M_1 M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2$ не компланарны:



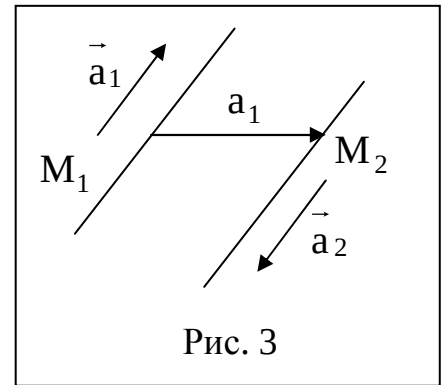
$$\overline{M_1 M_2} \vec{a}_1 \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3)$$

$a_1 \parallel a_2$ (см. рис. 3)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}_2 = \lambda \vec{a}_1 \\ \overline{M_1 M_2} \neq \mu \vec{a}_1 \end{cases} \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m_2}{m_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{p_2}{p_1} \\ \overline{M_1 M_2} \neq \mu \vec{a}_1 \end{cases} \quad (5)$$

$$a_1 \equiv a_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}_2 = \lambda \vec{a}_1 \\ \overline{M_1 M_2} = \mu \vec{a}_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\begin{cases} \frac{m_2}{m_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{p_2}{p_1} \\ \frac{x_2 - x_1}{m_1} = \frac{y_2 - y_1}{n_1} = \frac{z_2 - z_1}{p_1} \end{cases}. \quad (6)$$

3. Кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми. Напомним, что упомянутое расстояние равно длине общего перпендикуляра этих прямых. Для определенности прямые a_1 и a_2 зададим каноническими уравнениями (см. п.2), тогда искомое расстояние (см. рис. 4)

$$h = \frac{|\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \vec{a}_1 \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1 \vec{a}_2|}, \quad (7)$$

где $M_1(M_2)$ – начальная точка прямой $a_1(a_2)$, $\vec{a}_1(\vec{a}_2)$ – направляющий вектор прямой $a_1(a_2)$.

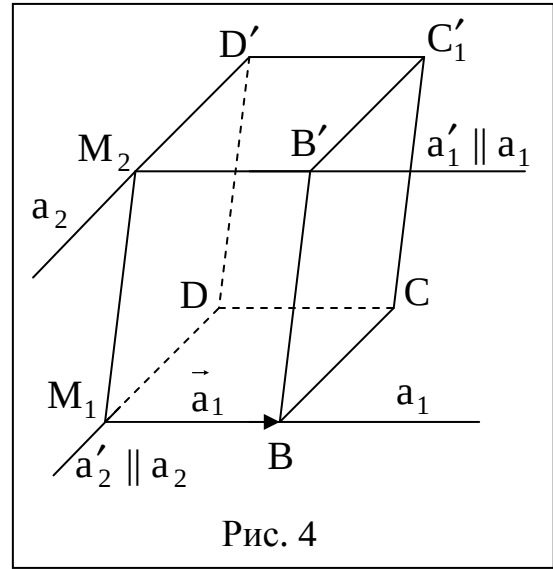


Рис. 4

4. Угол между двумя прямыми в пространстве.

Пусть две прямые a_1 и a_2 заданы своими каноническими уравнениями (см. п.2). Зафиксируем некоторую точку S , и через нее проведем прямые

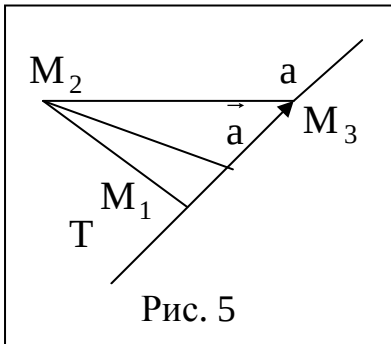


Рис. 5

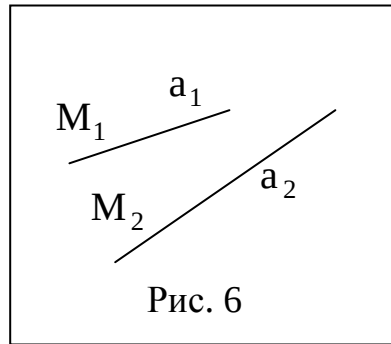


Рис. 6

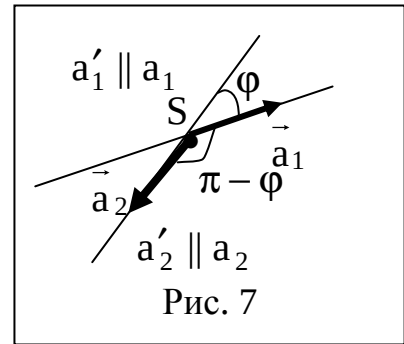


Рис. 7

$a'_1 \parallel a_1$ и $a'_2 \parallel a_2$ (см. рис. 7). За угол между прямыми a_1 и a_2 принимается угол между a'_1 и a'_2 : $\varphi = a_1 \wedge a_2 = a'_1 \wedge a'_2$. И дело, таким образом, сводится к плоскому случаю. В силу этого согласно (6) §1 (гл. III)

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{a}_1 \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1| |\vec{a}_2|}. \quad (8)$$

Последнее позволяет определить острый угол $\left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$ между двумя пространственными прямыми.

$$(8) \Rightarrow a_1 \perp a_2 \Leftrightarrow \vec{a}_1 \vec{a}_2 = 0. \quad (9)$$

5. Расстояние от точки до прямой.

$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), \vec{a}\{m, n, p\}$ (см. рис. 5)

$$\begin{aligned}
& \Delta M_2 M_1 M_3, \quad \overline{M_1 M_3} = \vec{a} \\
& S_{M_2 M_1 M_3} = \frac{1}{2} \left| [\overline{M_1 M_2}, \vec{a}] \right| = \frac{h |\vec{a}|}{2}. \\
& \mathbf{h} = \frac{[\overline{M_1 M_2}, \vec{a}]}{|\vec{a}|}.
\end{aligned} \tag{10}$$

II) Способ. Через т. M_2 проводим плоскость $\alpha \perp$ прямой a . Находим координаты т. $T = \alpha \cap a$. Длина отрезка $M_2 T$ дает искомое расстояние.

§4. Плоскость и прямая в пространстве

$$1. \alpha: Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

$$a: \begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
a \cap \alpha \Leftrightarrow \text{когда совместна система: } & \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \begin{cases} A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = \\ = (Am + Bn + Cp) + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \\ x = x_0 + mt, y = y_0 + nt, z = z_0 + pt \end{cases} \tag{3}
\end{aligned}$$

Теперь положим (см. рис. 1)

$$Am + Bn + Cp = \vec{N} \vec{a} \tag{4}$$

и тогда вместо первого уравнения (3) имеем

$$(\vec{N} \vec{a})t = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D). \tag{5}$$

$$\alpha) \vec{N} \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{N} \perp \vec{a}.$$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \Leftrightarrow M_0 \notin \alpha. \tag{6}$$

$a \cap \alpha = \emptyset \Leftrightarrow$ прямая и плоскость параллельны ($\alpha \parallel a$), т.е. (6) - условие параллельности прямой и плоскости

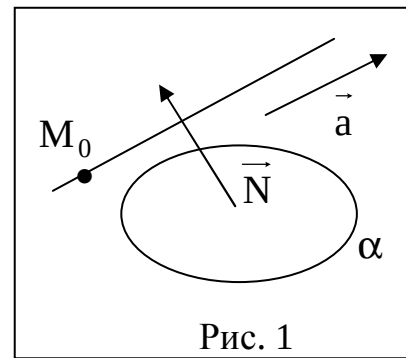


Рис. 1

$\beta) \vec{N} \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{N} \perp \vec{a}, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \Leftrightarrow M_0 \in \alpha$, система (3) удовлетворяется при $\forall t$: $a \subset \alpha$, т.е. прямая принадлежит плоскости.

$\gamma) \vec{N} \vec{a} \neq 0 \Leftrightarrow \vec{N}$ не $\perp \vec{a} \Leftrightarrow a$ не параллельна α и не $\subset \alpha$. Из (5) неизвестный параметр $t = t_0$ находится однозначно, прямая и плоскость пересекаются. Вставляя t_0 в (2), получим координаты точки пересечения.

2. Угол между прямой и плоскостью.

ℓ' – ортогональная (перпендикулярная) проекция ℓ на $\alpha: \ell' = \text{pr}_\alpha \ell$. Тогда по определению угол $\ell \wedge \alpha$ есть угол $\ell \wedge \ell'$.

$$\sin \varphi = \pm \cos \theta = \pm \frac{\vec{a} \vec{N}}{|\vec{a}| |\vec{N}|}. \quad (7)$$

Отсюда $\Rightarrow \ell \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{N} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \vec{N} = 0. \quad (8)$$

$$\ell \perp \alpha \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{N}] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{N} = \lambda \vec{a}. \quad (9)$$

Задача. Даны две плоскости: $3x + y - z + 1 = 0$ и $5x + 3y + z + 2 = 0$.

Установить, являются ли они пересекающимися, параллельными или совпадающими. Если плоскости пересекаются, составить канонические уравнения линии пересечения.

Решение. I-й способ. $\vec{N}_1 \{3, 1, -1\}, \vec{N}_2 \{5, 3, 1\}; \frac{3}{5} \neq \frac{1}{5} \neq -1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \vec{N}_2 \neq \lambda \vec{N}_1. \Leftrightarrow \text{плоскости пересекаются. Согласно п.1 (§3)}$$

$$\vec{a} = [\vec{N}_1, \vec{N}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\vec{i} - 8\vec{j} + 4\vec{k} \Leftrightarrow \vec{a}_1 \{1, -2, 1\} \uparrow \vec{a}, \vec{a} - \text{направляющий вектор прямой.}$$

Положим $z = 0$, тогда $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ 5x + 3y = -2, \end{cases} \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 4;$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1; \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -1; x = -\frac{1}{4}; y = -\frac{1}{4}.$$

$M_0 \left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}; 0 \right)$ – начальная точка линии пересечения рассматриваемых плоскостей.

Согласно п.1 (§3) канонические уравнения имеют вид:

$$\frac{x + \frac{1}{4}}{1} = \frac{y + \frac{1}{4}}{-2} = \frac{z}{1}.$$

II-й способ. $\begin{cases} 3x + y = z - 1 \\ 5x + 3y = -(z + 2) \end{cases}, \Delta = 4; \Delta_x = \begin{vmatrix} z-1 & 1 \\ -(z+2) & 3 \end{vmatrix} =$

$$= 3z - 3 + z + 2 = 4z - 1. \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & z-1 \\ 5 & -(z+2) \end{vmatrix} = -3z - 6 - 5z + 5 = -8z - 1.$$

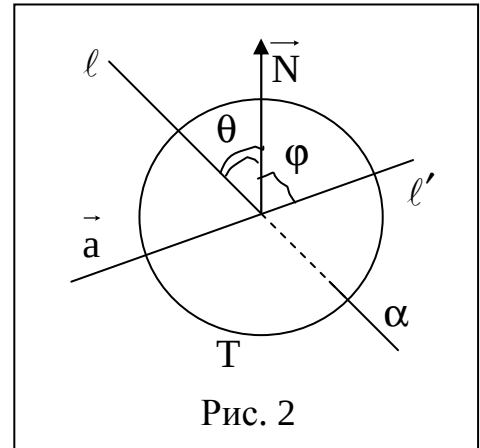


Рис. 2

Отсюда приходим (п.4, §3) к параметрическим уравнениям прямой

$$\begin{cases} x = z - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} + t \\ y = -\frac{1}{4} - 2t \\ z = t \end{cases}, \quad M_0\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}; 0\right), \quad \vec{a}\{1, -2, 1\}.$$

Ответ: $x + \frac{1}{4} = \frac{y + \frac{1}{4}}{-2} = z.$

Оба способа приводят к одному и тому же результату, как и должно быть.

§5. Кривые второго порядка

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Кривой второго порядка* называется линия ω , уравнение которой в некоторой прямоугольной декартовой системе координат есть алгебраическое уравнение второго порядка относительно двух переменных x и y :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (1)$$

Мы рассматриваем случай, когда $B = 0$, т.е. (1) не содержит члена с произведением переменных:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (2)$$

Отметим, уравнение (1) за счет подходящего поворота системы координат всегда можно привести к виду (2). В случае (2) к каноническому виду приходим за счет параллельного переноса системы координат.

Канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы имеют следующий вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4)$$

$$y^2 = 2px. \quad (5)$$

ПРИМЕР 1. Привести уравнение кривой второго порядка

$\omega: \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2 - x + \frac{2}{3}y - 1 = 0$ к каноническому виду и построить ее.

Напомним способ выделения полного квадрата из квадратного трехчлена (двучлена):

$$ax^2 + bx + c = a \left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} x + \frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right] =$$

$$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right].$$

I) $\frac{1}{4}x^2 - x = \frac{1}{4}(x^2 - 4x) =$ выделяем полный квадрат из квадратного двучлена $= \frac{1}{4}[(x-2)^2 - 4] = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 1;$

II) $-\frac{1}{9}y^2 + \frac{2}{3}y = -\frac{1}{9}(y^2 - 6y) = -\frac{1}{9}[(y-3)^2 - 9] = -\frac{1}{9}(y-3)^2 + 1$

$$\frac{1}{4}(x-2)^2 - 1 - \frac{1}{9}(y-3)^2 + 1 - 1 =$$

$$= \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{9} = -1$$

$$\frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1. \text{ Полагая } \begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y - 2 \end{cases} \text{ со-}$$

вершим параллельный перенос системы координат в точку $O'(2,2)$. В новой системе $(x'o'y')$ уравнение кривой α есть $\frac{y'^2}{9} - \frac{x'^2}{4} = 1$ — каноническое уравнение гиперболы с действительной осью y' .

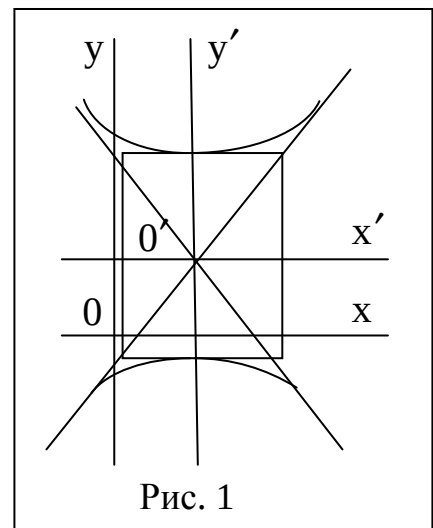


Рис. 1

ПРИМЕР 2. $\omega: 2x^2 - 4x + 2y - 3 = 0$.

Привести к каноническому виду и построить кривую.

$$2x^2 - 4x + 2y - 3 = 2(x^2 - 2x) + 2\left(y - \frac{3}{2}\right) =$$

$$= 2 \left[(x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right) \right] =$$

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - \frac{3}{2} \end{cases} \quad \omega: x'^2 + y' = 0,$$

$y' = -x'^2$ — парабола.

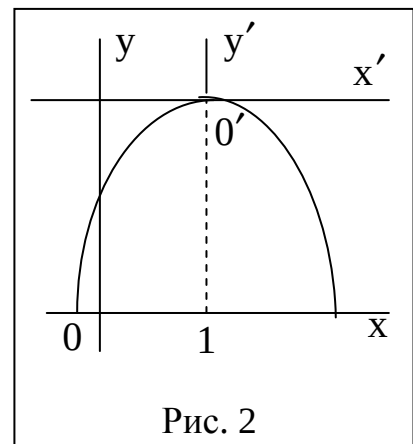


Рис. 2

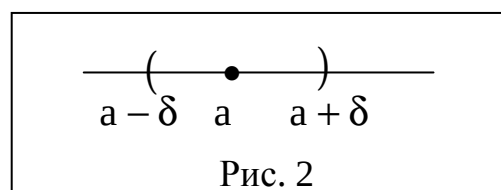
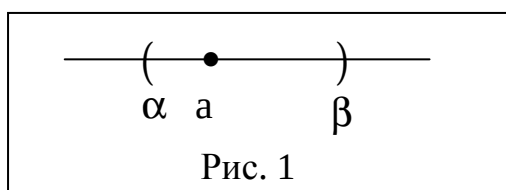
Глава IV. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебники: Пискунов Н.С., гл. I-II,
Бугров Я.С., Никольский С.М., гл. I-III.

§1. Предел переменной величины. Предел функции

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Окрестностью* т.а (a — число) называется произвольный интервал (α, β) ($\alpha < x < \beta$), содержащий эту точку: $\alpha < a < \beta$ (см. рис.1).

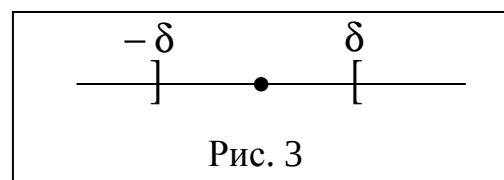
δ — окрестностью т.а (a — число) называется симметричный интервал $(a - \delta, a + \delta)$ с центром в точке a (см. рис.2).



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Говорят, что число a есть предел переменной величины X и это записывают так: $X \rightarrow a$ либо $\lim X = a$, если какую бы окрестность (α, β) этой точки не взяли, найдется хотя бы одно значение $x \in (\alpha, \beta)$ и которое отлично от a .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Говорят, что переменная X есть *бесконечно малая величина*, если $X \rightarrow 0 \Leftrightarrow \lim X = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Говорят, что переменная X *бесконечно большая величина* и это обозначается так: $X \rightarrow \infty \Leftrightarrow \lim X = \infty$, если $\forall \delta > 0$, в частности, сколь угодно большого, $\exists$ значение X , удовлетворяющее требованию: $|X| > \delta \Leftrightarrow X \in (-\infty, -\delta) \cup (\delta, \infty)$, то есть значения $X \notin [-\delta, \delta]$. (см. рис. 3).



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Говорят, что $X \rightarrow +\infty$ ($X \rightarrow -\infty$), если $\forall \delta > 0$, в частности, сколь угодно большого, $\exists$ значение переменной X , удовлетворяющее требованию: $X > \delta$ ($X < -\delta$).

Множество $(\delta, +\infty)$ в дальнейшем будем называть δ — окрестностью $+\infty$. Аналогично, при $\delta > 0$, множество $(-\infty, -\delta)$ будем называть δ — окрестностью $-\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Говорят, что $X \rightarrow a - 0$ (a — левосторонний предел, предел слева), если какое бы $\delta > 0$ не взяли, в частности, сколь угодно малое, $\exists$ значение $X \in (a - \delta, a)$.

Аналогично определяется правосторонний (предел справа) предел:

$x \rightarrow a + 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \rightarrow a \\ x > a \end{cases} \Leftrightarrow$ какое бы $\delta > 0$ не взять, в частности, сколь угодно малое, $\exists$ значение $x \in (a, a + \delta)$.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Говорят, что число A есть предел функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$ и это записывают так: $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow a$ либо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, если для $\forall \varepsilon > 0$, в частности,

сколь угодно малого, $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что как только $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$,

(1)

то для таких x имеет место

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad (2)$$

то есть как только значение независимой переменной x попадает в δ – окрестность точки a ($x \neq a$), то соответствующее значение $f(x)$ попадает в ε – окрестность точки A (см. рис. 4).

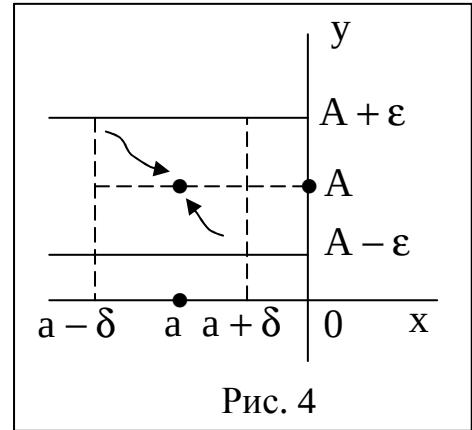


Рис. 4

В развернутом виде (1) и (2) имеют вид

$$a - \delta < x < a + \delta, \quad x \neq a. \quad (3)$$

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon. \quad (4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Функция $\alpha = \alpha(x)$ называется *бесконечно малой функцией* (БМФ) при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$.

Теорема 1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow$ если $\alpha(x) = f(x) - A$ есть БМФ при $x \rightarrow a$, т.е. $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - A] = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Говорят, что $f(x)$ ограничена на числовом (точечном) множестве ω , если $\exists M > 0$ и для $\forall x \in \omega$ выполняется требование $|f(x)| \leq M$.

Теорема 2. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, A – число и $A \neq 0$, то $\frac{1}{f(x)}$ ограничена в некоторой окрестности т. a ($x \neq 0$).

3. Односторонние пределы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$ (левосторонний предел функции, предел функции слева) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, в частности, сколь угодно малого, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что как только $x \in (a - \delta, a)$, то для таких x выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Аналогично определяется правосторонний предел функции (предел справа) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) : \forall \varepsilon > 0$, в частности, сколь угодно малого, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ та-

кое, что как только $x \in (a, a + \delta)$, то для таких x выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Левосторонний и правосторонний пределы функции принято называть **односторонними пределами**, которые соответственно обозначаются $f(a - 0)$ и $f(a + 0)$.

Теорема 3. Предел функции $y = f(x) \exists \Leftrightarrow$ когда совместно выполняются три условия:

1⁰. $\exists f(a - 0)$ – левосторонний предел;

2⁰. $\exists f(a + 0)$ – правосторонний предел;

3⁰. $f(a - 0) = f(a + 0)$, т.е. односторонние пределы равны.

4. Бесконечно большая функция (ББФ).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Говорят, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $f(x) \rightarrow \infty$ при

$x \rightarrow a$, $f(x)$ – ББФ при $x \rightarrow a$, если для $\forall M > 0$, в частности, сколь угодно большого, $\exists \delta = \delta(M)$, что как только $0 < |x - a| < \delta(M)$, то для таких x имеет место

$$|f(x)| > M. \quad (5)$$

Геометрическая интерпретация определения 11 дана на рис. 5.

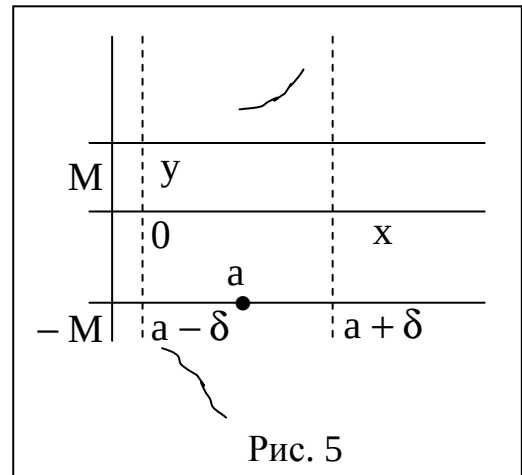


Рис. 5

§2. Свойства бесконечно малых функций (БМФ)

Теорема 1. Алгебраическая сумма двух БМФ есть снова БМФ, т.е. если

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0, \quad (1)$$

$$\text{то } \lim_{x \rightarrow a} [\alpha(x) \pm \beta(x)] = 0. \quad (2)$$

Следствие. Теорема 1 верна для $\forall$ конечного числа БМФ.

Теорема 2. Произведение БМФ на ограниченную функцию есть БМФ, т.е. если $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$ и $f(x)$ – ограниченная функция, то $\alpha(x)f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$.

Следствие 1. Произведение БМФ на БМФ есть БМФ.

Произведение БМФ на постоянную есть БМФ, то есть, если $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$, то $C \alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$.

Следствие 2. Произведение БМФ на $f(x)$, имеющей конечный предел при $x \rightarrow a$, есть БМФ.

Замечание. Мы намеренно сейчас не рассматриваем предел отношения двух БМФ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Это приводит к так называемой неопределенности вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Последнее означает следующее: наперед нельзя сказать, чему равен $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$. Все зависит от структуры дроби $\alpha(x)/\beta(x)$.

§3. Основные теоремы о пределах функций

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x \rightarrow a$, то справедливы

Теорема 1. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, т.е. предел алгебраической суммы $\exists$ и равен алгебраической сумме пределов слагаемых.

Следствие. Теорема 1 верна для $\forall$ конечного числа слагаемых.

Теорема 2. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Следствие 1. $\lim_{x \rightarrow a} C f(x) = C \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $C = \text{const}$, т.е. постоянный множитель можно выносить за знак предела.

Следствие 2. Теорема 2 верна для конечного числа множителей, каждый из которых имеет конечный предел.

Теорема 3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$, если $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$.

2. Замечательные пределы и их следствия

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ – первый замечательный предел;

I. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ – второй замечательный предел,

где e – основание натурального логарифма; $n \in \mathbb{N}$.

Следствия замечательных пределов.

$$1^0. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1;$$

$$2^0. \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e;$$

$$3^0. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e; \quad 4^0. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$$

$$5^0. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a;$$

$$6^0. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a.$$

3. При нахождении пределов показательных-степенных функций $u(x)^{\vartheta(x)}$ в случае $\begin{cases} u(x) \rightarrow 1 \\ \vartheta(x) \rightarrow \infty \end{cases}$ при $x \rightarrow a$ мы имеем дело с неопределенностью вида $\{1^\infty\}$, которая раскрывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} u(x)^{\vartheta(x)} &= \{1^\infty\} \equiv \lim_{x \rightarrow a} [1 + (u(x) - 1)]^{\vartheta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} [1 + \alpha(x)]^{\frac{\vartheta(x) \cdot \alpha(x)}{\alpha(x)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[1 + \alpha(x) \right]^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) \vartheta(x)}. \end{aligned}$$

Следовательно, остается найти $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) \vartheta(x) = \{0 \cdot \infty\}$. Таким образом, $\{1^\infty\} \Rightarrow \{0 \cdot \infty\}$.

$$\begin{aligned} \text{ПРИМЕР 2. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^{x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{x^2} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{x^2} = \{1^\infty\} = |x^2 = \alpha| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} = e. \end{aligned}$$

Здесь использовалось следствие 2⁰ второго замечательного предела.

4. Предел сложной функции. Справедлива

Теорема 4. Если $\exists \lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ и $\lim_{u \rightarrow b} F(u) = A$, то предел сложной функции $f(x) = F[u(x)]$ при $x \rightarrow a$ $\exists$ и равен A :

$$\lim_{x \rightarrow a} F[u(x)] = A.$$

§4. Неопределенности вида $\left\{ \frac{0}{0} \right\}, \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}, \{0 \cdot \infty\}, \{0^0\}, \{1^\infty\}, \{\infty^0\}$

К указанным неопределенностям приходим в следующих случаях:

$$1. \left\{ \frac{0}{0} \right\} \text{ (см. Замечание §2); } 2. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}, \text{ если } f(x) \text{ и } g(x) - \text{ББФ}$$

при $x \rightarrow a$, a — число либо один из символов ∞ ; $-\infty$; $+\infty$.

$$3. \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = \{\infty - \infty\}, \text{ если } f(x) \text{ и } g(x) - \text{ББФ.}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) f(x) = \{0 \cdot \infty\}, \text{ если } \alpha(x) - \text{БМФ; } f(x) - \text{ББФ.}$$

5. $\lim_{x \rightarrow a} u(x)^{\vartheta(x)} = \{0^0\}$, если $u(x) > 0$ и $\vartheta(x)$ – БМФ.

6. $\{1^\infty\}$ – см. п.3 §3; 7. $\lim_{x \rightarrow a} u(x)^{\vartheta(x)} = \{\infty^0\}$, $u(x)$ – ББФ; $\vartheta(x)$ – БМФ.

Способы раскрытия некоторых из указанных неопределенностей мы покажем на примерах.

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{\left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(\cos x)x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x} = \sqrt{2} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}{4 \left(\frac{\pi}{4} - x \right)} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}{x - \frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\begin{aligned} 3. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1 - \sqrt{x}} - \frac{3}{1 - \sqrt[3]{x}} \right) &= \{\infty - \infty\} = \left| \begin{array}{l} x = t^6 \\ t = \sqrt[6]{x} \end{array} \right| = \\ &= 3 \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - t^3} - \frac{1}{1 - t^2} \right) = 3 \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1 - t^2 - 1 + t^3}{(1 - t^3)(1 - t^2)} = 3 \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2(t - 1)}{(1 - t^3)(1 - t^2)} = \\ &= 3 \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2}{(1 - t^3)(1 + t)} = \infty. \end{aligned}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x + 1}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right)}{\sqrt{x} \left(\sqrt{2 + \frac{1}{x}} \right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\begin{aligned} 5. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x \right) &= \{\infty - \infty\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = 0. \end{aligned}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \beta x + \cos \alpha x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \beta x}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{\beta x}{2}}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \left[\beta^2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{\beta x}{2}}{\frac{\beta x}{2}} \right)^2 - \alpha^2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{\alpha x}{2}}{\frac{\alpha x}{2}} \right)^2 \right] = \\
&= \frac{1}{2} (\beta^2 - \alpha^2).
\end{aligned}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos kx - 1}{x^2} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{kx}{2}}{x^2} = - \frac{k^2}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{kx}{2}}{\frac{kx}{2}} \right)^2 = - \frac{k^2}{2}.$$

§5. Непрерывные функции и их свойства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в т. x_0 , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right). \quad (1)$$

Другими словами, $\exists$ предел $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, и он равен значению функции в т. x_0 ; $x_0 \in$ области определения $D(f)$. Согласно теореме 4 §1 (1)

$$\Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0) \quad (2)$$

(1) $\Rightarrow$ x_0 — внутренняя точка $D(f)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной слева* (справа), если выполняется требование

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) \quad (f(x_0 + 0) = f(x_0)) \quad (3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Функция называется *непрерывной на интервале* (a, b) , если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция называется *непрерывной на сегменте* $[a, b]$, если она непрерывна на интервале (a, b) и непрерывна в т. a справа: $f(a + 0) = f(a)$ и в т. b слева: $f(b - 0) = f(b)$.

2. Точки разрыва функции и их классификация.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из условий (2) нарушается.

Так, например, если $x_0 \notin D(f)$, то эта точка наверняка точка разрыва.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода* функции $y = f(x)$, если односторонние пределы функции конечны (числа).

Точка разрыва первого рода называется *устранимой точкой разрыва*, если

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0). \quad (4)$$

Это связано с тем, что функцию в т. x_0 доопределяют, полагая

$$f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0). \quad (5)$$

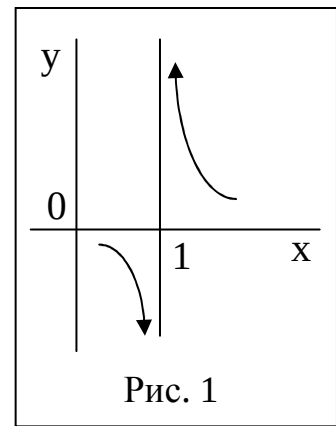
Функция $y = f(x)$ после доопределения (5) становится непрерывной в т. x_0 (см. (3)).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Точка разрыва x_0 функции $y = f(x)$ называется *точкой разрыва второго рода*, если она не является точкой разрыва первого рода. Это будет тогда и только тогда, когда хотя бы один из односторонних пределов не $\exists$ либо равен $\infty(-\infty, +\infty)$.

ПРИМЕР 1. Каков характер точки разрыва функции $y = \frac{1}{1 - e^{1-x}}$ в т. $x = 1$.

Решение. При $x = 1$ знаменатель равен 0, $1 \notin D(y)$.

$$\begin{aligned} 1. f(1-0) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{1 - e^{1-x}} = \left| \begin{array}{l} x-1=t \\ t > 0 \end{array} \right| = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{1}{1 - e^t} = -\infty, \text{ т.к. } \alpha(t) = 1 - e^t \rightarrow 0 \text{ и } \alpha(t) < 0. \end{aligned}$$



Уже отсюда делаем вывод, что $x = 1$ — точка разрыва второго рода. (см. рис. 1)

$$2. f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{1 - e^{1-x}} = \left| \begin{array}{l} x-1=t \\ t > 0 \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{1}{1 - e^{-t}} = +\infty, \text{ т.к.}$$

$$\alpha(t) = 1 - e^{-t} \rightarrow 0 \text{ и } \alpha(t) > 0.$$

Ответ: $x = 1$ — точка разрыва второго рода.

ПРИМЕР 2. Функция $y = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$ не определена при $x = 1$. Каким должно быть значение $f(1)$, чтобы доопределенная этим значением функция стала непрерывной при $x = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } 1^0. f(1-0) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \\ &= \left| \begin{array}{l} x-1=-t \\ t > 0 \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{2-t}{(1-t)^2 + 2-t} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$2^0. \quad f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x+1}{x^2+x+1} = \left| \begin{array}{l} x-1=t \\ t>0 \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{2+t}{(1+t)^2+2+t} = \frac{2}{3}.$$

Имеем $f(1-0) = f(1+0) = \frac{2}{3}$. Отсюда и согласно (5) надо положить $f(1) = \frac{2}{3}$.

Ответ: $f(1) = \frac{2}{3}$.

ПРИМЕР 3. Убедиться, что функция $y = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ имеет в точке $x = 0$ раз-

рыв первого рода. Построить схематично график этой функции в окрестности точки $x = 0$.

Решение. $x = 0 \notin D(y)$.

$$1^0. f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{x} \rightarrow -\infty \\ x < 0 \end{array} \right| = 1.$$

$$2^0. f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \\ \frac{1}{2^x} \rightarrow +\infty \end{array} \right| = 0.$$

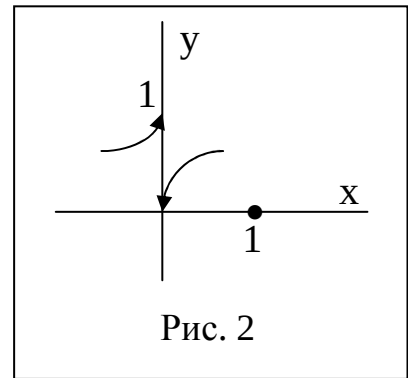


Рис. 2

Односторонние пределы $\exists$ и конечны, но $f(0-0) \neq f(0+0)$ (см. рис. 2). $x = 0$ – точка разрыва первого рода.

ПРИМЕР 4. Функция $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-1}$ не определена при $x = 1$. Каким должно быть значение $f(1)$, чтобы доопределенная этим значением функция стала непрерывной при $x = 1$.

Решение. $1^0. f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2-1}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} =$
 $= \left| \begin{array}{l} x-1=-h \\ h>0 \end{array} \right| = \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{2-h}{(1-h)^2+(1-h)+1} = \frac{2}{3}.$

$2^0. f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2-1}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{2}{3}$. Отсюда видно, что надо положить $f(1) = f(1-0) = f(1+0) = \frac{2}{3}$.

Ответ: $f(1) = \frac{2}{3}$.

§6. Свойства функций, непрерывных на отрезке

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в т. x_0 , то справедливы

Теорема 1. Алгебраическая сумма двух непрерывных (в точке) функций есть непрерывная (в точке) функция.

Следствие. Теорема 1 верна для $\forall$ конечного числа слагаемых непрерывных функций.

Теорема 2. Произведение двух непрерывных функций есть непрерывная функция.

Следствие. Теорема 2 верна для $\forall$ конечного числа множителей.

Теорема 3. Частное двух непрерывных функций есть непрерывная функция, если значение знаменателя в т. x_0 отлично от нуля.

2. Свойства функций, непрерывных на отрезке. (см., например, Бугров Я.С., Никольский С.М. Гл. 3, §3.5)

Теорема 4. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на нем, т.е. $\exists$ константа $M > 0$ такая, что $\forall x \in [a, b]$ имеет место неравенство $|f(x)| \leq M$.

Теорема 5. (Вейерштрасса). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она достигает хотя бы раз своего наибольшего и наименьшего значений на $[a, b]$, т.е. $\exists$ точки $\alpha, \beta \in [a, b]$ такие, что $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta) \quad \forall x \in [a, b]$. Другими словами, $f(\alpha)$ – наименьшее значение $f(x)$ на $[a, b]$, $f(\beta)$ – наибольшее значение $f(x)$ на $[a, b]$.

Теорема 6. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и числа $f(a)$ и $f(b)$ не равны нулю и имеют разные знаки, то на интервале (a, b) имеется по крайней мере одна точка c такая, что $f(c) = 0$.

Следствие 1. Непрерывная на $[a, b]$ функция принимает все промежуточные значения между ее значениями на концах отрезка $[a, b]$.

Следствие 2. Непрерывная на $[a, b]$ функция принимает все промежуточные значения между ее наименьшим и наибольшим значениями на $[a, b]$.

Глава V. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебники: Пискунов Н.С., гл. III-V.

Бугров Я.С., Никольский С.Н., гл. IV.

§1. Производная функции и ее свойства

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Производной функции $y = f(x)$ в т. x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = f'(x_0), \quad (1)$$

где приращение функции в т. x_0 равно

$$\Delta y(x_0) = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad (2)$$

а приращение аргумента x в т. x_0 —

$$\Delta x_0 = x - x_0. \quad (3)$$

Геометрический смысл $f'(x_0)$ заключается в следующем: $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в т. $M_0(x_0, f(x_0))$. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в $M_0(x_0, f(x_0))$ имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Нормалью* к линии ℓ в т. $M_0 \in \ell$ называется прямая, проходящая через т. $M_0 \perp$ к касательной.

Отсюда следует (см. условие перпендикулярности двух прямых: Гл. III, §1, п.4, формула (7)), что ее уравнение имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad (4')$$

где $M(x, y)$ — текущая точка нормали, $M_0(x_0, y_0)$ — точка касания $\in \ell$ (см. рис.1).

2. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ допускают производную в т. x (дифференцируемы в т. x), то справедливы следующие основные правила (теоремы).

$$1^0. (C)' = 0, C - \text{константа}; \quad 2^0. [f(x) \pm \varphi(x)]' = f'(x) \pm \varphi'(x);$$

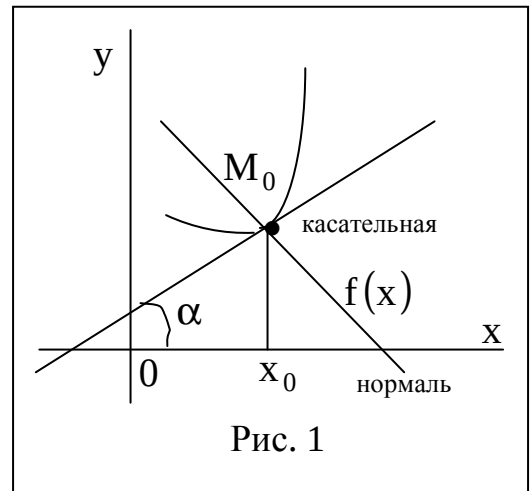


Рис. 1

3⁰. $[f(x)\varphi(x)]' = f'(x)\varphi(x) + f(x)\varphi'(x)$; $(Cf(x))' = Cf(x)$, т.е. постоянный множитель можно выносить за знак производной.

$$4^0. \left[\frac{f(x)}{\varphi(x)} \right]' = \frac{f'(x)\varphi(x) - \varphi'(x)f(x)}{\varphi^2(x)}.$$

3. Производная сложной функции определяется формулой

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = f'_u[u(x)]u'_x(x), \quad (5)$$

где $y(x) = f[u(x)]$, $u = u(x)$ — промежуточная переменная.

Таблица производных

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	9. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
1. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$	
2. $(a^x)' = a^x \ln a;$	10. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$
$(e^x)' = e^x$	
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$	11. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$
3. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	
4. $(\sin x)' = \cos x;$	12. $(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{ch} x;$
5. $(\cos x)' = -\sin x;$	13. $(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{sh} x;$
6. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$	14. $(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$
7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$	15. $(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$
8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$	

Используя (5), можно вывести таблицу производных для сложных функций. Студент обязан выучить наизусть таблицу производных.

Таблица производных сложных функций

- I)** $\left[u(x)^\alpha\right]'_x = \alpha u^{\alpha-1}(x)u'(x)$
 $\sqrt{u(x)}'_x = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}; \left[\frac{1}{u(x)}\right]'_x = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}.$
- II)** $\left(a^{u(x)}\right)'_x = a^{u(x)}(\ln a)u'(x); \left(e^{u(x)}\right)' = e^{u(x)} \cdot u'(x).$
- III)** $\left[\log_a u(x)\right]'_x = \frac{u'(x)}{u(x)\ln a}; \left[\ln u(x)\right]' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$
- IV)** $\left[\sin u(x)\right]'_x = [\cos u(x)]u'(x).$
- V)** $\left[\cos u(x)\right]'_x = -[\sin u(x)]u'(x).$
- VI)** $\left[\operatorname{tg} u(x)\right]'_x = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}.$
- VII)** $\left[\operatorname{ctg} u(x)\right]'_x = -\frac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}.$
- VIII)** $\left[\arcsin u(x)\right]'_x = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}.$
- IX)** $\left[\arccos u(x)\right]'_x = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}.$
- X)** $\left[\operatorname{arctg} u(x)\right]'_x = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}.$
- XI)** $\left[\operatorname{arcctg} u(x)\right]'_x = -\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}.$
- XII)** $\left[\operatorname{sh} u(x)\right]'_x = [\operatorname{ch} u(x)]u'(x).$
- XIII)** $\left[\operatorname{ch} u(x)\right]'_x = [\operatorname{sh} u(x)]u'(x).$
- XIV)** $\left[\operatorname{th} u(x)\right]'_x = \frac{u'(x)}{\operatorname{ch} u(x)}.$
- XV)** $\left[\operatorname{cth} u(x)\right]'_x = -\frac{u'(x)}{\operatorname{sh}^2 u(x)}.$

$$\begin{aligned}
 \text{ПРИМЕР 1. } y' &= \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)' = \frac{\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)'}{1 + \frac{1-x}{1+x}} = \left| u(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right| = \\
 &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x} \right)'_x}{1 + \frac{1-x}{1+x}} = \left| u(x) = \frac{1-x}{1+x} \right| = \frac{(1+x)}{4 + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \times \\
 &\times \frac{(1-x)'(1+x) - (1+x)'(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-1-x-1+x}{4(1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = -\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{2(1+x)}.
 \end{aligned}$$

4. Логарифмическая производная. При дифференцировании показательно-степенных функций $y = u(x)^{\vartheta(x)}$ ($u(x) > 0$) поступают следующим образом. Сначала предыдущее равенство почленно логарифмируют и после этого почленно дифференцируют, а именно:

$$(\ln y)' = [\vartheta(x) \ln u(x)]' = \vartheta'(x) \ln u(x) - \frac{u'(x)}{u(x)} \vartheta(x),$$

$$\frac{y'(x)}{y} = \vartheta'(x) \ln u(x) + \frac{u'(x)}{u(x)} \vartheta(x). \text{ Отсюда}$$

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= u(x)^{\vartheta(x)} \left[\vartheta'(x) \ln u(x) + \frac{u'(x)}{u(x)} \vartheta(x) \right] = \\
 &= u(x)^{\vartheta(x)} [\ln u(x)] \vartheta'(x) + \vartheta(x) u(x)^{\vartheta(x)-1} u''.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Очевидно, что первое слагаемое суммы (6) получается в результате дифференцирования $y = u(x)^{\vartheta(x)}$ как показательной функции (см. формулу II из таблицы производных), а второе слагаемое - как результат дифференцирования степенной функции (см. формулу I из той же таблицы).

ПРИМЕР 2. Найти производную функции $y = x^{\arcsin x}$.

Решение. $(\ln y)' = [(\arcsin x) \ln x]' = \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{x};$

$$y' = \left(x^{\arcsin x} \right)' = x^{\arcsin x} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{x} \right).$$

§2. Производная функции, заданной неявно

1. Как найти производную функции, заданной неявно, мы покажем на конкретных примерах. При этом используются стандартные правила дифференцирования явно заданных функций.

ПРИМЕР 1. $\sin(y - x^2) - \ln(y - x^2) + 2\sqrt{y - x^2} - 3 = 0$. Найти y'_x .

Решение. Дифференцируя почленно данное уравнение и учитывая, что $y = y(x)$ (функция $y(x)$ задана неявно), получим

$$\left[\cos(y - x^2) \right] (y - x^2)' - \frac{(y - x^2)'}{y - x^2} + 2 \frac{(y - x^2)'}{2\sqrt{y - x^2}} = 0,$$

$$(y - x^2)' \left[\cos(y - x^2) - \frac{1}{y - x^2} + \frac{1}{\sqrt{y - x^2}} \right] = 0, \quad y' - 2x = 0, y' = 2x.$$

Ответ: $y' = 2x$.

2. Производная функции, заданной параметрически.

Если функция $y = f(x)$ задана параметрически: $\{x = \varphi(t), y = \psi(t)\}$, то

$$y''_x = f'(x) = \frac{y'_t}{x''_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \quad (1)$$

ПРИМЕР 1. Найти $y'_x = \frac{dy}{dx}$, если $x = e^{-t \sin t}$, $y = e^t \cos t$.

Решение. Согласно (1)

$$y'_x = \frac{(e^t \cos t)'}{(e^{-t \sin t})'} = \frac{e^t \cos t - e^t \sin t}{-e^{-t \sin t} \sin t + e^{-t \sin t} \cos t} = e^{2t}.$$

Ответ: $y'_x = e^{2t}$.

§3. Приложения производной в геометрии и механике

ПРИМЕР 1. Составить уравнение касательной и нормали к цепной линии

$$y = \operatorname{ch} \frac{x}{2} \text{ в т. } x = 2 \ln 2.$$

Решение. $y' = \frac{1}{2} \operatorname{sh} \left(\frac{x}{2} \right); \quad y'(2 \ln 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{4} = \frac{3}{8};$

$$y(2 \ln 2) = \frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4};$$

$$y - \frac{5}{4} = \frac{3}{8}(x - 2 \ln 2) - \text{уравнение касательной};$$

$$y - \frac{5}{4} = -\frac{8}{3}(x - 2 \ln 2) - \text{уравнение нормали}.$$

$$\text{Ответ: } 3x - 8y + 10 - 6 \ln 2 = 0; \quad 32x + 12y - 15 - 64 \ln 2 = 0.$$

ПРИМЕР 2. По кубической параболе $y = x^3$ движется точка так, что ее ордината изменяется в зависимости от времени t по закону $y = at^3$. Какова скорость изменения абсциссы в зависимости от времени?

Решение. $y'_t = 3x^2 x'_t, \quad x'_t = \frac{y'_t}{3x^2} = \frac{3at^2}{3x^2} = \frac{3at^2}{a^{\frac{2}{3}}t^2} = \sqrt[3]{a}$ – постоянна и не

зависит от t .

$$\text{Ответ: } x'_t = \sqrt[3]{a}.$$

§4. Приращение и дифференциал функции

1. **ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Если в точке x_0 приращение $\Delta y(x_0) = \Delta f(x_0)$ функции $y = f(x)$ представимо в виде суммы

$$\Delta y(x_0) = A \Delta x_0 + \alpha \tag{1}$$

двух слагаемых: $I = A \Delta x_0$ – линейно относительно приращения Δx_0 аргумента x . ($A = A(x_0)$); $II = \alpha$ – бесконечно малая величина (БМВ) при $\Delta x_0 \rightarrow 0$

более высокого порядка малости, чем Δx_0 , т.е. $\lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\Delta x_0} = 0$, то $f(x)$ называется

дифференцируемой в т. x_0 . При этом линейная часть приращения $A(x_0) \Delta x_0$ называется **дифференциалом функции**

$y = f(x)$ в т. x_0 , соответствующим приращению Δx_0 аргумента x .

Дифференциал обозначается одним из символов $df(x_0), dy(x_0)$. Итак, по определению

$$df(x_0) = dy(x_0) = A(x_0) \Delta x_0. \tag{2}$$

Теорема 1. Функция $y = f(x)$ дифференцируема в т. x_0 (см.(1)) $\Leftrightarrow$ когда $\exists$ конечная производная $f'(x_0)$ в т. x_0 . Следовательно, согласно (2), дифференциал функции вычисляется по формуле

$$df(x_0) = f'(x_0) \Delta x. \tag{3}$$

Если $y = x$, то в

$$dy(x_0) = d(x_0) = \Delta x_0, \tag{4}$$

т.е. полное приращение функции $y = x$ совпадает с его дифференциалом. В силу этого вместо (3) можно написать

$$dy(x_0) = df(x_0) = f'(x_0) dx_0. \tag{5}$$

Точка $x_0 \in D(y)$ – произвольная точка. В силу этого в формулах (3), (5) нижний индекс (нолик) можно отбросить и тогда будем иметь

$$df(x) = f'(x)\Delta x = f'(x)dx. \quad (6)$$

2. Приложения дифференциала в приближенных вычислениях.

Согласно (6) приращение дифференцируемой в т.х функции $y = f(x)$ можно представить в виде

$$\Delta y(x) = \Delta f(x) = df(x) + \alpha(x, \Delta x) = f'(x)\Delta x + \alpha(x, \Delta x). \quad (7)$$

При достаточно малых Δx вместо (7) можно написать

$$\Delta y(x) \approx f'(x)\Delta x. \quad (8)$$

Последняя формула может быть использована в приближенных вычислениях, если ее записать так:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \quad (9)$$

ПРИМЕР 1. Найти приближенное значение $\sqrt[4]{15,8}$.

Решение. $\sqrt[4]{15,8} = \sqrt[4]{16 - 0,2}$. Рассмотрим $y = \sqrt[4]{x}$. Согласно (9)

$$\sqrt[4]{x + \Delta x} \approx \sqrt[4]{x} + \left(\sqrt[4]{x}\right)' \Delta x = \sqrt[4]{x} + \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} \Delta x. \text{ В нашем случае } x = 16, \Delta x = -0,2:$$

$$\sqrt[4]{16 + (-0,2)} \approx \sqrt[4]{16} + \frac{1}{4} (16)^{-\frac{3}{4}} (-0,2) = 2 - \frac{0,2}{32} = 2 - \frac{1}{160} = 2 - 0,006 = 1,994.$$

Ответ: 1,994.

ПРИМЕР 2. Найти приближенное значение $\ln \operatorname{tg} 47^{\circ} 15'$.

Решение. $\ln \operatorname{tg}(x + \Delta x) \approx \ln \operatorname{tg} x + \frac{\Delta x}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x}$. $\operatorname{tg} 47^{\circ} 15' =$

$= \operatorname{tg}(45^{\circ} + 2^{\circ} 15')$. Градусы надо перевести в радианы, т.к. производные от тригонометрических функций найдены при условии, что их аргументы измеряются в радианах. Таким образом $\left(1^{\circ} = \frac{\pi}{180^{\circ}} \text{ радиан}\right)$.

$$45^{\circ} + 2^{\circ} 15' = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{90} + 15 \frac{\pi}{4 \cdot 180} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{90} \left(1 + \frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{80}, x = \frac{\pi}{4}, \Delta x = \frac{\pi}{80}.$$

$$\ln \operatorname{tg} 47^{\circ} 15' \approx \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \frac{\frac{\pi}{80}}{80 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cos^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{80} \cdot 4 = \frac{\pi}{20} = 0,16$$

Ответ: 0,16.

§5. Правило Лопиталья - Бернулли раскрытия неопределенностей

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и дифференцируемы в окрестности т.а, за исключением, быть может, самой т.а, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$;

$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$, $\varphi(x)$ и $\varphi'(x) \neq 0$ в этой окрестности. Тогда, если $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то

$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ и справедливо утверждение

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \quad (1)$$

Теорема 2. Если ББФ (при $x \rightarrow a$) $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и дифференцируемы в окрестности т.а, $\varphi(x)$ и $\varphi'(x) \neq 0$ в этой окрестности и $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, при этом

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \quad (2)$$

Сформулированные теоремы называются **правилом Лопиталья - Бернулли** раскрытия неопределенностей вида $\left\{ \frac{0}{0} \right\}, \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$.

Раскрытие неопределенностей вида $\{0 \cdot \infty\}, \{\infty - \infty\}, \{1^\infty\}, \{0^0\}$ и т.д. алгебраическими преобразованиями и логарифмированием приводятся к

раскрытию двух основных типов: $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ и $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$.

ПРИМЕР 1. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x}$.

Решение. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = \{1^\infty\} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln(e^x + 1)} = \left| \begin{matrix} u^\vartheta = e^{\vartheta \ln u} \\ u > 0 \end{matrix} \right| =$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + 1)}{x}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + 1)}{x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\ln(e^x + 1)]'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\sqrt{e}$.

ПРИМЕР 2. Найти $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x$.

Решение. $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \{0^0\} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x} = e^0 = 1.$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \{0 \cdot \infty\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0.$$

Ответ: 1.

§6. Исследование функции и построение ее графика

1. Достаточное условие монотонности функции

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ $((a, b))$ и дифференцируема на (a, b) и $f'(x)$ сохраняет знак на (a, b) , то $f(x)$ строго монотонна на $[a, b]$ $((a, b))$: если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то $f(x)$ строго возрастающая (убывающая) функция. При этом, в частности, $f(a) < f(x)$, $x \in (a, b]$ ($f(a) > f(x)$, $x \in (a, b]$).

Следствие. Если $y = f(x)$ непрерывна на (a, b) , где не исключаются случаи $a = -\infty$ и $b = +\infty$, и т.с $\in (a, b)$ – единственная критическая точка $f(x)$ ($f'(c) = 0$ либо не $\exists$) и на (a, c) и (c, b) $f'(x)$ сохраняет знаки и эти знаки противоположны, то локальный экстремум функции $f(x)$ в т.с является ее глобальным экстремумом на (a, b) , а именно:

- 1) $f(c)$ – наибольшее значение $f(x)$ на (a, b) , если $f(c)$ – локальный максимум (относительный максимум, максимум);
- 2) $f(c)$ – наименьшее значение $f(x)$ на (a, b) , если $f(c)$ – локальный минимум (относительный минимум, минимум).

ПРИМЕР 1. Найти наибольший объем конуса, образующая которого равна ℓ .

Решение. I способ: $r = OA$ – радиус основания конуса; $h = SO$ – высота конуса.

$$r^2 + h^2 = \ell^2; \vartheta = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (\ell^2 - h^2) h;$$

$0 < h < \ell$. Таким образом, требуется найти наибольшее значение функции ϑ , где аргумент

$$h \in (0, \ell). \vartheta'_h = \frac{1}{8} \pi (-2h^2 + \ell^2 - h^2) =$$

$$= \frac{1}{3} \pi (\ell^2 - 3h^2) \text{ – квадратный двучлен относительно } h.$$

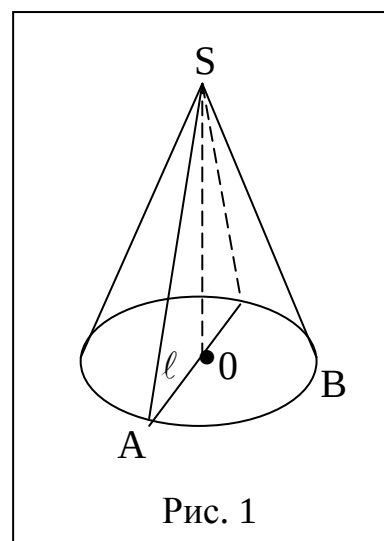


Рис. 1

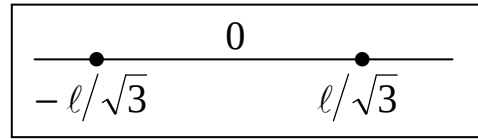
$h = \frac{\ell}{\sqrt{3}}$ – стационарная точка.

$\vartheta'_h > 0$ на $\left(0, \frac{\ell}{\sqrt{3}}\right)$ и $\vartheta'_h < 0$ на $\left(\frac{\ell}{\sqrt{3}}, \ell\right)$. Согласно следствию, $h = \frac{\ell}{\sqrt{3}}$ – точка

глобального максимума.

Вычисляем

$$\vartheta\left(\frac{\ell}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3} \left(\ell^2 - \frac{\ell^2}{3} \right) \cdot \frac{\ell}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi\ell^3}{9\sqrt{3}}.$$



Ответ: $\frac{2\ell^3}{9\sqrt{3}}$.

II способ. Рассмотрим функцию $f(h) = \frac{1}{3}\pi(\ell^2 - h^2)h$ на $[0, \ell]$. На $(0, \ell)$ $f(h) = \vartheta$. Найдем наибольшее значение $f(h)$ на $[0, \ell]$. Имеем

$$f(0) = f(\ell) = 0, \quad f\left(\frac{\ell}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\pi \left(\ell^2 - \frac{\ell^2}{3} \right) \frac{\ell}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi\ell^3}{9\sqrt{3}}, \text{ т.к.}$$

$f'(h) = \frac{\pi}{3}(\ell^2 - 3h^2) = 0$, $h = \frac{\ell}{\sqrt{3}}$. Наибольшее значение равно $\frac{2\pi\ell^3}{9\sqrt{3}}$. Если теперь учесть, что стационарная (критическая) точка – внутренняя точка $[0, \ell]$ и

она единственная, то в этой точке $f\left(\frac{\ell}{\sqrt{3}}\right) > f(x) \quad \forall x \in [0, \ell], x \neq \frac{\ell}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\ell}{\sqrt{3}}\right) > f(x) \quad \forall x \in (0, \ell), x \neq \frac{\ell}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{2\pi\ell^3}{9\sqrt{3}}$.

ПРИМЕР 2. Исследовать функцию $y = x^x$ и построить ее график.

1. Область определения $D(y): x > 0$,

т.к. функция показательно-степенная. График функции находится по правую сторону от оси OY . Рассмотрим поведение функции в граничных точках $D(y)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x = \{0^0\} = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{x \ln x} = e^0 = 1.$$

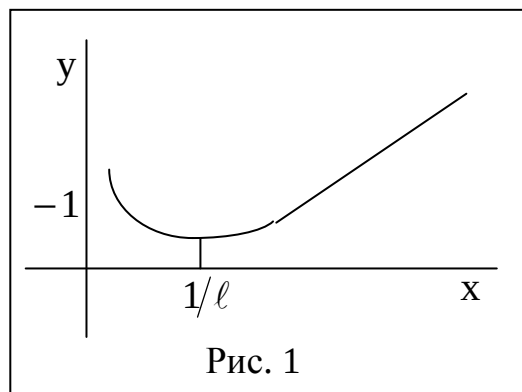


Рис. 1

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} x \ln x = \{0 \cdot \infty\} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = - \lim_{x \rightarrow 0+0} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^x = +\infty.$$

2. Области знакопостоянства функции. Точки пересечения с осями координат. $x > 0$ – график функции лежит над осью OX .

3. Промежутки монотонности и экстремумы функции.

Согласно (6) (§1; п.4)

$$y' = x^x \ln x + x \cdot x^{x-1} = x^x (\ln x + 1); \quad y' = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0; \quad x = \frac{1}{e}. \text{ Таким}$$

образом, $D(y)$ разбивается т. $\frac{1}{e}$ на два промежутка: $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ и $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$;

$\frac{1}{e^2} \in \left(0, \frac{1}{e}\right); y'\left(\frac{1}{e^2}\right) < 0$. Следовательно, на $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ функция строго убывающая.

$e^2 \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right), y'(e^2) > 0$. На $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ функция строго возрастающая. Отсюда

сразу следует, что $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ определяет относительный минимум и наименьшее значение функции на $D(y)$.

4. Области вогнутости, выпуклости, точки перегиба.

$$y'' = (x^x)' (\ln x + 1) + x^{x-1} = x^x (\ln x + 1)^2 + x^{x-1} = x^x \left[(\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x} \right] > 0 \quad \text{для}$$

$x > 0$. Значит, график исследуемой функции всюду вогнут.

5. Асимптоты функции. Вертикальных асимптот нет, т.к. нет точек бесконечного разрыва функции. Переходим к отысканию наклонных асимптот.

Имеем $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x}{x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{x-1} = +\infty$. Таким образом, нет и наклонных асимптот. График исследуемой функции начерчен на рис. 1.

Глава VI. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебники: Пискунов Н.С., гл. VIII;

Бугров Я.С., Никольский С.М., гл. 8.

§1. Области определения функций и их изображения

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. δ – *окрестностью* т. M на плоскости (в пространстве) называется открытый круг (открытый шар) с центром в т. M и радиуса δ .

В прямоугольной декартовой системе координат указанные окрестности определяются соответственно условиями: $(x - a)^2 + (y - b)^2 < \delta^2$, где $M(a, b)$
 $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 < \delta^2$, где $M(a, b, c)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Точка $M \in T$ называется *внутренней точкой* множества T , если $\exists \delta$ – окрестность т. M , принадлежащая T .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Множество T на плоскости (в пространстве) называется открытым, если $\forall$ т. $M \in T \exists$ ее δ – окрестность, входящая в множество T , то есть все точки T должны быть внутренними.

Множество T называется *связным*, если $\forall$ две точки этого множества можно соединить непрерывной линией, состоящей из точек множества T . Связное открытое множество называется *областью*.

2. ПРИМЕР 1. Найти область определения функции $z = \ln(-x - y)$ и изобразить ее.

Решение. $-x - y > 0$, $x + y < 0$. Рассматриваем прямую $x + y = 0$, $y = -x$ $y < -x$.

Ответ: Множество точек плоскости, находящихся ниже прямой $y = -x$ (прямая, содержащая биссектрисы 2-го и 4-го координатных углов).

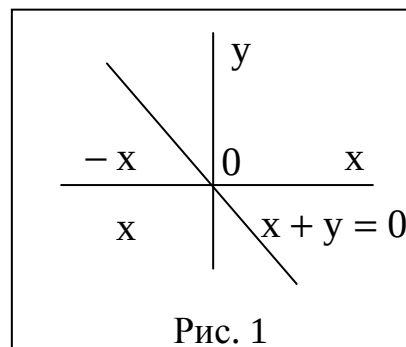


Рис. 1

ПРИМЕР 2. Найти область определения функции $f(r, \varphi) = r\sqrt{\cos 2\varphi}$ и изобразить ее.

Решение. $\cos 2\varphi \geq 0$. Период функции равен π . $-\frac{\pi}{2} \leq 2(\varphi + k\pi) \leq \frac{\pi}{2}$,

$$-\frac{\pi}{4} - k\pi \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} - k\pi. \quad \text{В силу этого}$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq \varphi + k\pi \leq \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: Множество точек, ограниченное прямыми $y = x$ и $y = -x$ и содержащее ось OX .

ПРИМЕР 3. Найти область определения функции $z = \arcsin[2y + (1 + x^2) - 1]$ и изобразить ее.

Решение.

$$-1 \leq 2y(1 + x^2) - 1 < 1, 0 \leq 2y(1 + x^2) \leq 2,$$

$$0 \leq y \leq \frac{1}{1 + x^2}.$$

Ответ: Множество точек, ограниченное линиями $y = 0$ и $y = \frac{1}{1 + x^2}$. (Рис. 3).

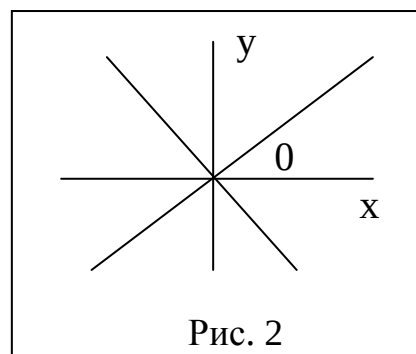


Рис. 2

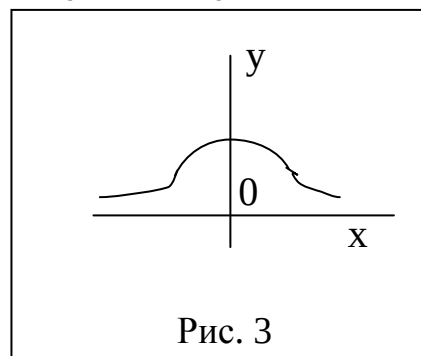


Рис. 3

§2. Частные производные и дифференциалы функций многих переменных. Касательная плоскость и нормаль поверхности

1. **ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Если для функции

$$z = f(x, y) \quad (1)$$

точки $M(x, y)$ и $M^*(x + \Delta x, y + \Delta y) \in D(z)$ – область определения функции (1), то

$$\Delta z(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (2)$$

- полное приращение функции (1) в т. $M(x, y)$, которое соответствует приращению $\Delta x, \Delta y$ независимых переменных x, y ;

$$\Delta_x z(x, y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y); \Delta_y z(x, y) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (3)$$

- частные приращения соответственно по независимым переменным x и y ;

$$z'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (4)$$

- частная производная функции (1) по x ;

$$z'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z(x, y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (5)$$

- частная производная функции (1) по y . Вместо $z'_x(x, y)$ употребляются обозначения $f'_x(x, y), \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$. То же самое вместо z'_y : $f'_y(x, y), \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$. Из (4), (5) следует, чтобы найти частную производную $z'_x(z'_y)$, надо дифференцировать функцию $f(x, y)$ по x , считая $y(x)$ постоянной.

Например, для $z = \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2} + \arcsin \frac{x+y}{x-y}$,

$$\begin{aligned} z'_x &= \frac{1}{2\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2}} \cdot \left[1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2\right]'_x + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x+y}{xy}\right)'_x = \\ &= \frac{-2\left(\frac{x+y}{xy}\right)\left(\frac{x+y}{xy}\right)'_x}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x+y}{xy}\right)'_x = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2}} \left(1 - \frac{x+y}{xy}\right) \left(\frac{x+y}{xy}\right)'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2}} \left(1 - \frac{x+y}{xy}\right) \times$$

$$\times \frac{xy - (x+y)y}{(xy)^2} = - \frac{1 - \frac{x+y}{xy}}{x^2 \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2}}.$$

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция (1) называется *дифференцируемой* в т. $M_0(x_0, y_0)$, если ее полное приращение (в т. M_0) представимо в виде

$$\begin{aligned} \Delta z(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0) - f(x_0, y_0) = \\ &= A(x_0, y_0) \Delta x_0 + B(x_0, y_0) \Delta y_0 + o(\Delta \rho), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\Delta \rho = \sqrt{(\Delta x_0)^2 + (\Delta y_0)^2}; \quad \lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \frac{o(\Delta \rho)}{\Delta \rho} = 0, \quad (7)$$

то есть в виде двух слагаемых:

$$I = A(x_0, y_0) \Delta x + B(x_0, y_0) \Delta y_0; \quad II = o(\Delta \rho), \quad (8)$$

где первое слагаемое I линейно относительно приращений $\Delta x_0, \Delta y_0$ независимых переменных x и y в т. M_0 , а второе слагаемое II - БМ величина более высокого порядка малости, чем $\Delta \rho$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если функция (1) дифференцируема в т. $M_0(x_0, y_0)$, то I слагаемое - главная часть полного приращения и функции - называется дифференциалом (полным дифференциалом) функции (1) в т. $M_0(x_0, y_0)$ и обозначается одним из символов $dz(x_0, y_0)$, $df(x_0, y_0)$.

Итак, по определению,

$$dz(x_0, y_0) = A(x_0, y_0) \Delta x_0 + B(x_0, y_0) \Delta y_0. \quad (9)$$

Справедливы равенства

$$\begin{aligned} A(x_0, y_0) &= f'_x(x_0, y_0) = f'_x(M_0); \\ B(x_0, y_0) &= f'_y(x_0, y_0) = f'_y(M_0). \end{aligned} \quad (10)$$

Из (9), (10) следует

$$\begin{aligned} dz(x_0, y_0) &= df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \Delta x_0 + f'_y(x_0, y_0) \Delta y_0 = \\ &= f'_x(M_0) \Delta x_0 + f'_y(M_0) \Delta y_0 \end{aligned} \quad (11)$$

При достаточно малом $\Delta \rho$ слагаемым II в (6) можно пренебречь. Это дает формулу приближенного вычисления значения функции $z = f(x, y)$ в т. $M(x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0)$:

$$f(x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x_0 + f'_y(x_0, y_0)\Delta y_0 \quad (12)$$

ПРИМЕР 1. Вычислить приближенно $\lg(\sqrt{3,99} + 2,03^3)$.

Решение. $z = \lg(\sqrt{x} + y^3)$, $z'_x = \frac{1}{(\sqrt{x} + y^3)2\sqrt{x} \ln 10}$;

$$z'_y = \frac{3y^2}{(\sqrt{x} + y^3)\ln 10}; \quad x_0 = 4; y_0 = 2; \Delta x_0 = -0,01; \Delta y = 0,03.$$

$$\lg[\sqrt{x + \Delta x} + (y + \Delta y)^3] \approx \lg(\sqrt{x} + y^3) + \frac{1}{\ln 10} \times \\ \times \left[\frac{\Delta x}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + y^3)} + \frac{3y^2 \Delta y}{(\sqrt{x} + y^3)} \right].$$

Для нашего случая имеем

$$\lg(\sqrt{3,99} + 2,03^3) \approx \lg 10 + \frac{1}{\ln 10} \left(\frac{-0,01}{40} + \frac{12 \cdot 0,03}{10} \right) = \\ = 1 + \frac{1}{40 \ln 10} (-0,01 + 1,44) = 1 + \frac{1,43}{40 \ln 10} \approx 1,0155.$$

Ответ: 1,0155.

ПРИМЕР 2. Найти дифференциал функции $u = x^{y^z}$.

Решение. Находим частные производные

$$(\ln u)'_x = (y^z \ln x)'_x = \frac{y^z}{x}; \quad u'_x = x^{y^z-1} y^z;$$

$$(\ln u)'_y = \frac{u'_y}{u} = (y^z \ln x)'_y = (\ln x)(y^z)'_y = zy^{z-1} \ln x.$$

$$u'_y = x^{y^z} zy^{z-1} \ln x = y^z x^{y^z} \ln x;$$

$$(\ln u)'_z = (y^z \ln x)'_z; \quad \frac{u'_z}{u} = (\ln x)y^z \ln y; \quad u'_z = x^{y^z} (\ln x)y^z \ln y.$$

Согласно (3) имеем

$$du(x, y, z) = x^{y-1} y^z dx + y^z x^{y^z} \ln x dy + x^{y^z} (\ln x) y^z \ln y dz.$$

$$\text{Ответ: } x^{y-1} y^z dx + y^z x^{y^z} \ln x dy + x^{y^z} (\ln x) y^z \ln y dz.$$

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Касательной плоскостью α поверхности ω : $F(x, y, z) = 0$ в т. $M_0 \in \omega$ называется плоскость, в которой содержатся все касательные к линиям $\subset \omega$ и проходящим через т. M_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Нормалью к ω в т. $M_0 \in \omega$, называется прямая, проходящая через т. $M_0 \perp$ касательной плоскости α .

Если поверхность ω задана общим уравнением

$$\omega: F(x, y, z) = 0 \quad (13)$$

и $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \omega: F(x_0, y_0, z_0) = 0$, то уравнение касательной плоскости α имеет вид

$$\alpha: F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0, \quad (14)$$

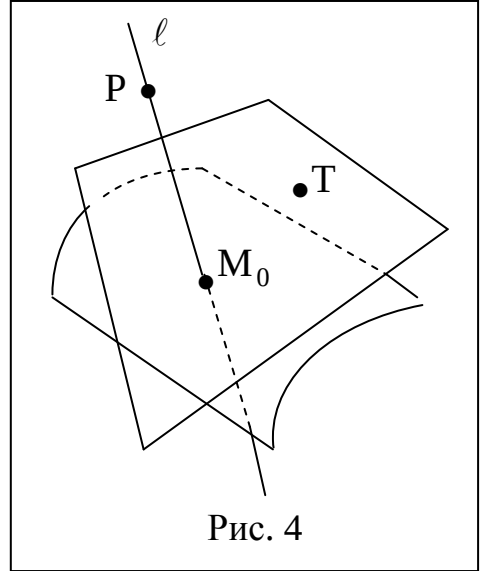
где x, y, z — координаты текущей точки $T(x, y, z)$ касательной плоскости;

x_0, y_0, z_0 — координаты точки касания $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (см. рис. 3).

Уравнение нормали к ω в т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ есть

$$\ell: \frac{x - x_0}{F''_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F''_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F''_z(M_0)}, \quad (15)$$

где $P(x, y, z)$ — текущая точка нормали ℓ (см. рис. 4).



ПРИМЕР 3. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $\omega: 4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z$ в т. $M_0(2, 3, 6)$.

Решение. $M_0 \in \omega: 4 + \sqrt{4 + 9 + 36} = 2 + 3 + 6; 11 = 11.$

$$\omega: 4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - x - y - z = 0$$

$$\Rightarrow (\text{см. 13}) F(x, y, z) = 4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - x - y - z;$$

$$F'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - 1; F'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - 1; F'_z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - 1.$$

$$F'_x(M_0) = \frac{2}{7} - 1 = -\frac{5}{7}; F'_y(M_0) = \frac{3}{7} - 1 = -\frac{4}{7}; F'_z(M_0) = -\frac{1}{7}.$$

Согласно (14) и (15) имеем

$$\alpha: 5(x - 2) + 4(y - 3) + (z - 6) = 0; \ell: \frac{x - 2}{5} = \frac{y - 3}{4} = \frac{z - 6}{1}.$$

Ответ: $5(x-2)+4(y-3)+(z-6)=0$; $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{4}=z-6$.

§3. Производная функции, заданной неявно. Экстремум функций двух переменных

1. Если функция z от двух независимых переменных x и y задана неявно:

$$\omega: F(x, y, z) = 0, \quad (1)$$

то ее первые частные производные

$$z'_x(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}; \quad z'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \quad (2)$$

К формулам (2) можно прийти, дифференцируя почленно (1) частным образом по x и по y и учитывая зависимость $z = z(x, y)$.

ПРИМЕР 1. $z = x + \arctg \frac{y}{z-x}$, $z'_x = ?$, $z'_y = ?$.

Решение.

I способ. $z - x - \arctg \frac{y}{z-x} = 0$. Согласно (1) и (2)

$$F = z - x - \arctg \frac{y}{z-x}; \quad F'_x = -1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{z-x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{z-x}\right)'_x =$$

$$= -\left[1 + \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{z-x}\right)^2} \frac{y}{(z-x)^2}\right] = -\left[1 + \frac{y}{(z-x)^2 + y^2}\right];$$

$$F'_y = -\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{z-x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{z-x}\right)'_y = -\frac{z-x}{(z-x)^2 + y^2};$$

$$F'_z = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{z-x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{z-x}\right)'_z = 1 + \frac{(z-x)^2}{(z-x)^2 + y^2} \frac{y}{(z-x)^2} =$$

$$= 1 + \frac{y}{(z-x)^2 + y^2}.$$

$$z'_x = 1; \quad z'_y = \frac{z-x}{(z-x)^2 + y^2} \cdot \frac{(z-x)^2 + y^2}{(z-x)^2 + y^2 + y} = \frac{z-x}{(z-x)^2 + y^2 + y}.$$

Ответ: $-1; \frac{z-x}{(z-x)^2 + y^{2+y}}.$

II способ. Согласно замечанию $z'_x = 1 + \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{z-x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{z-x}\right)'_x =$

$$= 1 + \frac{y}{1 + \left(\frac{y}{z-x}\right)^2} \cdot \frac{(z'_x - 1)}{(z-x)^2} = 1 + \frac{y(z'_x - 1)}{(z-x)^2 + y^2}; \quad z'_x \left[1 - \frac{y}{(z-x)^2 + y^2} \right] =$$

$$= 1 - \frac{y}{(z-x)^2 + y^2}; \quad z'_x = 1.$$

Аналогично, $z'_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{z-x}\right)^2} \left(\frac{y}{z-x}\right)'_y = \frac{(z-x) - y(z'_y)}{(z-x)^2 + y^2}.$

$$z'_y \left[1 + \frac{y}{(z-x)^2 + y^2} \right] = \frac{z-x}{(z-x)^2 + y^2}; \quad z'_y = \frac{z-x}{(z-x)^2 + y^2 + y}.$$

Получаем тот же результат.

2. Напомним, что δ – окрестностью т. $M_0(x_0, y_0)$ называется открытый круг с центром в т. M_0 и радиуса δ :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2. \quad (3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Говорят, что функция $z = f(x, y)$ достигает локального максимума (локального минимума) в т. $M_0(x_0, y_0)$, если $\exists \delta$ – окрестность т. M_0 , что для всех ее точек $M(x, y)$ имеет место

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad (f(x_0, y_0) \leq f(x, y))$$

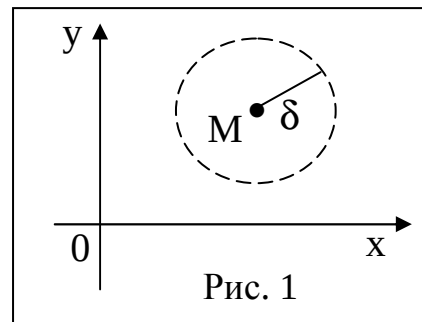


Рис. 1

Локальный минимум и локальный максимум функции принято называть *локальными экстремумами*.

Теорема 1. (Необходимое условие локального экстремума). Если функция $z = f(x, y)$ достигает локального экстремума в т. $M_0(x_0, y_0)$ и в этой точке $\exists$ частные производные, то

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

В случае (4) т. $M_0(x_0, y_0)$ называется стационарной точкой функции $z = f(x, y)$.

Теорема 2. (Достаточное условие локального экстремума). При выполнении условия (4)

$$A = f''_{xx}(M_0), \quad B = f''_{xy}(M_0), \quad C = f''_{yy}(M_0). \quad (5)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}, \quad (6)$$

если $\Delta > 0$, то функция $z = f(x, y)$ имеет в точке M_0 локальный экстремум, а именно: локальный максимум при $A < 0$ (или $C < 0$) и локальный минимум при $A > 0$ (или $C > 0$); если $\Delta < 0$, то в т. M_0 локального экстремума нет; если же $\Delta = 0$, то вопрос остается открытым.

ПРИМЕР 2. Найти экстремум функции $z = -x^2 + 3x - xy - y^2 + 6y$.

Решение. $z'_x = -2x + 3 - y$; $z'_y = -x - 2y + 6$

$z''_{xx} = -2; z''_{xy} = -1; z''_{yy} = -2$. Составляем систему (4): $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0; \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 9; \quad x_0 = 0; y_0 = 3; \quad M_0(0,3).$$

$$A - 2 < 0; B = -1; C = -2 < 0; \Delta = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 > 0.$$

Ответ: $M_0(0,3)$ – точка локального максимума.

3. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции в ограниченной замкнутой области D , надо:

- 1) найти стационарные точки $\in D$ и значения функции в этих точках;
- 2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе ∂D области D ;
- 3) из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

ПРИМЕР 3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = \cos x \cdot \cos y \cdot \cos(x + y)$ в замкнутой области $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$.

Решение. $z'_x = -\sin x \cdot \cos y \cdot \cos(x + y) - \cos x \cdot \cos y \cdot \sin(x + y),$
 $z'_y = -\cos x \cdot \sin y \cdot \cos(x + y) - \cos x \cdot \cos y \cdot \sin(x + y);$

$$\begin{cases} \cos y \cdot \sin(2x + y) = 0 \\ \cos x \cdot \sin(x + 2y) = 0 \end{cases}$$

$$I) \begin{cases} \cos y = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ y = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ согласно условию задачи.}$$

$$z\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

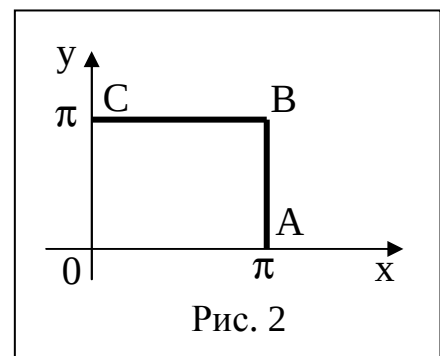


Рис. 2

$$\text{II)} \begin{cases} \sin(2x+y)=0 \\ \sin(x+2y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0, \pi \\ x+2y=0, \pi \end{cases} \quad M_1(0,0); \quad M_2\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$$

$$z(0,0)=1; \quad z\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4} \quad \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{8}.$$

$$\text{III)} \begin{cases} \cos y=0 \\ \sin(x+2y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{\pi}{2} \\ x+2y=0, \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{\pi}{2} \\ x=0 \end{cases} \quad z\left(0, \frac{\pi}{2}\right)=0.$$

$$\text{IV)} \begin{cases} \sin(2x+y) \\ \cos x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad z\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)=0$$

$$\text{OA}: \begin{cases} y=0 \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad z = \cos^2 x; \quad z(0,0)=1; \quad z = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 0, \text{ так как}$$

$$z'_x = -2 \sin x \cdot \cos x = 0; \quad x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi; \quad z(0,0) = z\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = z(\pi, 0) = 0$$

$$\text{AB}: \begin{cases} x=\pi \\ 0 \leq y \leq \pi, \end{cases} \quad z = -\cos y \cos(\pi+y) = \cos^2 y; \quad z(\pi, 0) = 1;$$

$$z(\pi, \pi) = 1; \quad y = \frac{\pi}{2}; \quad z\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$\text{BC}: \begin{cases} y=\pi \\ 0 \leq x \leq \pi, \end{cases} \quad z = \cos^2 x. \text{ Этот случай уже рассматривался.}$$

$$\text{OC}: \begin{cases} x=0 \\ 0 \leq y \leq \pi, \end{cases} \quad z = \cos^2 y. \text{ Этот случай уже рассматривался. Получили три}$$

различных значения $z: -\frac{1}{8}, 0, 1$.

Ответ: $-\frac{1}{8}$ — наименьшее значение, которое достигается во внутренней

точке $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$; 1 — наибольшее значение, которое достигается в граничных точках $(0,0), (\pi, \pi), (0, \pi), (\pi, 0)$.

ОС: $\begin{cases} x = 0 \\ 0 \leq y \leq \pi, \end{cases} z = \cos^2 y$. Этот случай уже рассматривался. Получили три различных значения $z: -\frac{1}{8}, 0, 1$.

Ответ: $-\frac{1}{8}$ – наименьшее значение, которое достигается во внутренней точке $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$; 1 – наибольшее значение, которое достигается в граничных точках $(0,0), (\pi, \pi), (0, \pi), (\pi, 0)$.

§4. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ **КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1**

Элементы линейной алгебры. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

I. Исследовать и решить системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса:

- | | |
|--|--|
| 1. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$ |
| 2. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$ |
| 3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + 73x_2 + x_3 + 3x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$ |
| 4. $\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 + x_5 = 7, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$ |
| 5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$ |

$$\begin{aligned}
6. \quad & \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 9x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 0 \end{cases} & \begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 1 \end{cases} \\
7. \quad & \begin{cases} 12x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases} & \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8. \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 - x_5 = 0 \end{cases} & \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases} \\
9. \quad & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 7x_5 = 0 \end{cases} & \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \\
10. \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases} & \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
11. \quad & \begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases} & \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12. \quad & \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases} & \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_5 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases} \\
13. \quad & \begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0, \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = 0 \end{cases} & \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 4x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
14. \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 6x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases} & \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 1, \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$15. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 1 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_5 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -3, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -7 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 + 34x_3 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 + x_5 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_5 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_5 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 1 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 1 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 6x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 4x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 4x_4 = 5 \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$34. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 7x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$35. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$36. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$37. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$38. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$39. \begin{cases} 8x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 12x_1 - 7x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

$$40. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_2 + 10x_3 + 5x_4 = 0, \\ -2x_1 + 7x_2 + 12x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

$$41. \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 11x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$$

$$42. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ -4x_1 - 2x_2 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$43. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 7x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -6, \\ -2x_1 + 7x_2 + 9x_3 - 11x_4 = -18, \\ -3x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 11x_4 = -16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1, \\ 6x_2 + 12x_3 - 6x_4 = -6, \\ -2x_1 - 6x_2 - 10x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 5, \\ 10x_1 + 2x_2 + 11x_3 + 7x_4 = -20, \\ -15x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 11x_4 = -13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 9, \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 = -16, \\ -15x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 7x_4 = -17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_5 = -3, \\ 2x_1 + 2x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 4, \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 7x_5 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_5 + 3x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases}$$

$$44. \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$45. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$$46. \begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$47. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$48. \begin{cases} -3x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$49. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

$$50. \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 9x_1 + 7x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$51. \begin{cases} 4x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 - 5x_5 = 0, \\ 8x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$52. \begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 12x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 15x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 6x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -18x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 1, \\ -6x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 2, \\ 12x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ 14x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 - x_5 = 2, \\ -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 3, \\ 6x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 4, \\ 12x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 21x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 3, \\ 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 14x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 3, \\ 12x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15x_1 - 12x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 - 10x_3 + x_4 + 5x_5 = 3, \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ 9x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 3 \end{cases}$$

$$53. \begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 10x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \\ -12x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 4, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$

$$54. \begin{cases} 15x_1 - 10x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 10x_3 + 12x_4 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ 10x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 1 \end{cases}$$

$$55. \begin{cases} 6x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 - 4x_5 = 0, \\ 12x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 2, \\ 12x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$

$$56. \begin{cases} 9x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 - x_5 = 0, \\ -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 6x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 1, \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 4 \end{cases}$$

$$57. \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 14x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 3, \\ -4x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 4, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 5 \end{cases}$$

$$58. \begin{cases} -10x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ -15x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 - 5x_5 = 4, \\ 8x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$59. \begin{cases} 8x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0, \\ 16x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 4, \\ 9x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 5 \end{cases}$$

$$60. \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 + x_5 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 = 4 \end{cases}$$

$$61. \begin{cases} 9x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 18x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 5, \\ -4x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ 12x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

$$62. \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 14x_1 - 6x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 4, \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 2 \end{cases}$$

$$63. \begin{cases} 10x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0, \\ 20x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$64. \begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ -4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 12x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$65. \begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$66. \begin{cases} 6x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$67. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$68. \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ -8x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ 12x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$69. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 9x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

$$70. \begin{cases} -21x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ 7x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 14x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$71. \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 12x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$72. \begin{cases} -3x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 2, \\ 20x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 5, \\ 14x_1 - 6x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 6, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 5x_5 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 1, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 + x_5 = 6, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 1, \\ 18x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 5, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 6, \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 7, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 3, \\ 16x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 5 \end{cases}$$

$$73. \begin{cases} 5x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 15x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 7, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 + x_5 = 5, \\ -15x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 6 \end{cases}$$

$$74. \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + x_3 = 17, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 8 \end{cases}$$

$$75. \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ -5x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ -4x_1 + 14x_2 - 8x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 10x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_4 = 3, \\ -x_1 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$$

$$76. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 10, \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8, \\ 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -1 \end{cases}$$

$$77. \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 - 11x_2 - 8x_3 + 6x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 5x_1 - 8x_2 + 4x_3 - 12x_4 = 4, \\ 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 12x_4 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 3 \end{cases}$$

$$78. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 4x_3 = -1, \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$$

$$79. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

$$80. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

$$81. \begin{cases} -x_1 - \sqrt{3}x_2 = 0, \\ \sqrt{3}x_1 - 3x_2 = 0, \\ -\sqrt{2}x_1 + \sqrt{6}x_2 = 0 \\ 2x_1 - \sqrt{12}x_2 = 0 \end{cases}$$

$$82. \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ -\sqrt{8}x_1 + \sqrt{2}x_2 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$83. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$84. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

$$85. \begin{cases} -x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0, \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0, \\ -x_3 + x_5 = 0, \\ -x_4 + x_6 = 0 \end{cases}$$

$$86. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0, \\ -3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 24x_4 = -1, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 3 \\ 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ 8x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 2, \\ 12x_1 - 7x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - x_4 = 8, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 24x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 13, \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 21 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -8 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -3, \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_4 = -3, \\ x_1 - 4x_3 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$

$$87. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$88. \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$$

$$89. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

$$90. \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$$

$$91. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

$$92. \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ -\sqrt{3}x_1 - \sqrt{12}x_2 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

$$93. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$94. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -1, \\ -4x_1 + 13x_3 + x_4 = -10, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - 7x_3 + 2x_4 = -5 \\ 11x_1 + 20x_3 - 9x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -2, \\ -5x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 12x_4 = -4, \\ 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 12x_4 = -1 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 7, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_4 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 5, \\ -3x_1 + 14x_2 - 6x_3 + x_4 - 2x_5 = 6, \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 5x_5 = 4 \end{cases}$$

$$95. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 2, \\ 3x_1 + 20x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 4 \end{cases}$$

$$96. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 10x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 7, \\ x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 - x_5 = 5, \\ -x_1 + 2x_2 - 15x_3 - x_4 + 2x_5 = 6 \end{cases}$$

$$97. \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5, \\ 8x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 3 \end{cases}$$

$$98. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_2 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$99. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 11x_4 = -20, \\ -15x_1 - 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 13, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 5 \end{cases}$$

$$100. \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -3, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -7 \end{cases}$$

II. Скалярное произведение векторов

Вычислить скалярное произведение векторов

1. $\vec{a}\{2; 3; -1\}; \vec{b}\{7; 9; 0\}$	2. $\vec{a}\{-1; 0; 3\}; \vec{b}\{2; -1; 4\}$
3. $\vec{a}\{1; 0; 6\}; \vec{b}\{-2; 3; 4\}$	4. $\vec{a}\{2; 2; 4\}; \vec{b}\{1; -1; 2\}$
5. $\vec{a}\{-1; 1; 3\}; \vec{b}\{7; 1; 9\}$	6. $\vec{a}\{0; 3; 1\}; \vec{b}\{2; -4; 1\}$
7. $\vec{a}\{-1; 1; 1\}; \vec{b}\{2; -1; 3\}$	8. $\vec{a}\{3; 1; -1\}; \vec{b}\{0; -1; 1\}$
9. $\vec{a}\{1; 2; -1\}; \vec{b}\{3; -1; 4\}$	10. $\vec{a}\{1; 4; 1\}; \vec{b}\{2; 1; -1\}$
11. $\vec{a}\{2; 3; 1\}; \vec{b}\{1; -2; 3\}$	12. $\vec{a}\{0; 1; -1\}; \vec{b}\{2; 3; -1\}$
13. $\vec{a}\{5; 1; 2\}; \vec{b}\{-1; 2; 1\}$	14. $\vec{a}\{2; 2; -1\}; \vec{b}\{-1; 1; 1\}$
15. $\vec{a}\{3; 1; 2\}; \vec{b}\{4; 0; 1\}$	16. $\vec{a}\{7; 1; -1\}; \vec{b}\{2; 1; -1\}$
17. $\vec{a}\{-3; 2; 2\}; \vec{b}\{-1; 1; 3\}$	18. $\vec{a}\{4; 4; -1\}; \vec{b}\{2; 2; 2\}$
19. $\vec{a}\{3; 3; -4\}; \vec{b}\{2; 1; 1\}$	20. $\vec{a}\{5; 1; 5\}; \vec{b}\{3; 2; -1\}$

При каком значении параметра вектора ортогональны

21. $\vec{a}\{2; m; 1\}; \vec{b}\{4; -1; 7\}$	22. $\vec{a}\{1; 1; m\}; \vec{b}\{-2; 1; 1\}$
23. $\vec{a}\{m; -1; 2\}; \vec{b}\{3; 1; 1\}$	24. $\vec{a}\{m; 2; 0\}; \vec{b}\{1; -1; 3\}$
25. $\vec{a}\{2; m; -1\}; \vec{b}\{1; 2; 1\}$	26. $\vec{a}\{-1; 1; m\}; \vec{b}\{4; -4; 1\}$
27. $\vec{a}\{m; 2; 1\}; \vec{b}\{3; 1; -1\}$	28. $\vec{a}\{-1; 1; m\}; \vec{b}\{2; 3; 1\}$
29. $\vec{a}\{1; 1; m\}; \vec{b}\{-2; -2; 4\}$	30. $\vec{a}\{-3; -3; m\}; \vec{b}\{1; 2; -1\}$
31. $\vec{a}\{0; 1; m\}; \vec{b}\{4; 1; 1\}$	32. $\vec{a}\{-1; 1; 2\}; \vec{b}\{m; -3; 1\}$
33. $\vec{a}\{2; 2; -3\}; \vec{b}\{1; m; 1\}$	34. $\vec{a}\{1; 3; 1\}; \vec{b}\{-1; 4; m\}$
35. $\vec{a}\{1; -1; 5\}; \vec{b}\{5; 4; m\}$	36. $\vec{a}\{3; 1; -1\}; \vec{b}\{-1; 1; m\}$
37. $\vec{a}\{1; -1; 1\}; \vec{b}\{1; m; 2\}$	38. $\vec{a}\{8; 9; 1\}; \vec{b}\{m; 2; -1\}$
39. $\vec{a}\{1; -2; 1\}; \vec{b}\{3; m; 1\}$	40. $\vec{a}\{2; 1; -1\}; \vec{b}\{4; 1; m\}$

Найти скалярное произведение векторов, если

41. $ \vec{a} = 2; \vec{b} = 1; \cos \alpha = 60^\circ$	42. $ \vec{a} = 3; \vec{b} = 4; \cos \alpha = 135^\circ$
43. $ \vec{a} = 4; \vec{b} = 1; \cos \alpha = 120^\circ$	44. $ \vec{a} = 1; \vec{b} = 2; \cos \alpha = 30^\circ$
45. $ \vec{a} = 2; \vec{b} = 1; \cos \alpha = 60^\circ$	46. $ \vec{a} = 4; \vec{b} = 3; \cos \alpha = 60^\circ$
47. $ \vec{a} = 2; \vec{b} = 6; \cos \alpha = 150^\circ$	48. $ \vec{a} = 3; \vec{b} = 4; \cos \alpha = 120^\circ$
49. $ \vec{a} = 2; \vec{b} = 2; \cos \alpha = 150^\circ$	50. $ \vec{a} = 2; \vec{b} = 6; \cos \alpha = 135^\circ$
51. $ \vec{a} = 5; \vec{b} = 3; \cos \alpha = 30^\circ$	52. $ \vec{a} = 2; \vec{b} = 7; \cos \alpha = 45^\circ$
53. $ \vec{a} = 5; \vec{b} = 1; \cos \alpha = 120^\circ$	54. $ \vec{a} = 6; \vec{b} = 2; \cos \alpha = 45^\circ$
55. $ \vec{a} = 2; \vec{b} = 4; \cos \alpha = 30^\circ$	56. $ \vec{a} = 10; \vec{b} = 3; \cos \alpha = 150^\circ$
57. $ \vec{a} = 4; \vec{b} = 2; \cos \alpha = 45^\circ$	58. $ \vec{a} = 5; \vec{b} = 3; \cos \alpha = 135^\circ$
59. $ \vec{a} = 3; \vec{b} = 1; \cos \alpha = 120^\circ$	60. $ \vec{a} = 4; \vec{b} = 2; \cos \alpha = 150^\circ$

Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, если

61. $\vec{a} \{1; -3; 1\}; \vec{b} \{2; 1; 3\}$	62. $\vec{a} \{-2; 3; 1\}; \vec{b} \{-1; 2; 2\}$
63. $\vec{a} \{0; 0; 2\}; \vec{b} \{1; 2; 1\}$	64. $\vec{a} \{2; 1; 3\}; \vec{b} \{1; -3; 1\}$
65. $\vec{a} \{1; 1; -1\}; \vec{b} \{2; 1; 3\}$	66. $\vec{a} \{-1; 1; 2\}; \vec{b} \{3; 1; 1\}$
67. $\vec{a} \{2; 1; 1\}; \vec{b} \{-1; 1; 1\}$	68. $\vec{a} \{0; 1; 2\}; \vec{b} \{2; 1; 1\}$
69. $\vec{a} \{2; 1; 1\}; \vec{b} \{3; -1; -1\}$	70. $\vec{a} \{-2; 2; 0\}; \vec{b} \{1; 1; -1\}$

Найти проекцию $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$

71. $\vec{a} \{1; 1; 2\}; \vec{b} \{-1; 3; 0\}$	72. $\vec{a} \{0; 1; 4\}; \vec{b} \{1; 2; -1\}$
73. $\vec{a} \{3; 1; 1\}; \vec{b} \{-1; 3; 4\}$	74. $\vec{a} \{-1; 3; 1\}; \vec{b} \{2; 2; -2\}$
75. $\vec{a} \{2; 2; -3\}; \vec{b} \{1; 1; -1\}$	76. $\vec{a} \{2; 0; 1\}; \vec{b} \{5; -1; 3\}$

77. $\vec{a}\{5;1;-1\}$; $\vec{b}\{3;2;1\}$	78. $\vec{a}\{8;7;3\}$; $\vec{b}\{-4;0;1\}$
79. $\vec{a}\{-3;3;1\}$; $\vec{b}\{7;2;4\}$	80. $\vec{a}\{4;0;-1\}$; $\vec{b}\{2;-2;1\}$

Найти угол между векторами

81. $\vec{a}\{3;-1;1\}$; $\vec{b}\{7;0;1\}$	82. $\vec{a}\{-1;1;1\}$; $\vec{b}\{2;1;0\}$
83. $\vec{a}\{2;1;0\}$; $\vec{b}\{7;0;1\}$	84. $\vec{a}\{2;2;2\}$; $\vec{b}\{1;1;1\}$
85. $\vec{a}\{1;1;1\}$; $\vec{b}\{-2;1;1\}$	86. $\vec{a}\{1;-1;1\}$; $\vec{b}\{2;1;-2\}$
87. $\vec{a}\{3;1;0\}$; $\vec{b}\{2;2;2\}$	88. $\vec{a}\{2;2;1\}$; $\vec{b}\{-1;1;1\}$
89. $\vec{a}\{3;3;1\}$; $\vec{b}\{2;2;-1\}$	90. $\vec{a}\{1;1;-1\}$; $\vec{b}\{1;-1;1\}$
91. $\vec{a}\{2;2;0\}$; $\vec{b}\{0;0;3\}$	92. $\vec{a}\{0;0;1\}$; $\vec{b}\{4;0;3\}$
93. $\vec{a}\{2;1;-1\}$; $\vec{b}\{7;1;0\}$	94. $\vec{a}\{-1;1;2\}$; $\vec{b}\{2;1;-1\}$
95. $\vec{a}\{2;2;0\}$; $\vec{b}\{-3;1;1\}$	96. $\vec{a}\{1;3;1\}$; $\vec{b}\{7;2;1\}$
97. $\vec{a}\{0;2;1\}$; $\vec{b}\{-3;1;1\}$	98. $\vec{a}\{0;3;1\}$; $\vec{b}\{1;2;1\}$
99. $\vec{a}\{1;2;2\}$; $\vec{b}\{1;2;1\}$	100. $\vec{a}\{2;-1;-1\}$; $\vec{b}\{3;2;1\}$

III. Векторное произведение векторов

Вычислить векторное произведение векторов

1. $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$	2. $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$
3. $\vec{a} = 7\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$	4. $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$
5. $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$	6. $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$
7. $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j} + 3\vec{k}$	8. $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$
9. $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{k} - \vec{j}$	10. $\vec{a} = \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j} - 3\vec{k} + 2\vec{i}$
11. $\vec{a}\{2;4;1\}$; $\vec{b}\{3;7;1\}$	12. $\vec{a}\{1;0;1\}$; $\vec{b}\{2;1;1\}$
13. $\vec{a}\{1;1;2\}$; $\vec{b}\{3;2;1\}$	14. $\vec{a}\{1;1;-1\}$; $\vec{b}\{4;1;3\}$
15. $\vec{a}\{2;0;2\}$; $\vec{b}\{-2;1;1\}$	16. $\vec{a}\{7;0;3\}$; $\vec{b}\{1;-1;0\}$
17. $\vec{a}\{11;0;2\}$; $\vec{b}\{0;1;3\}$	18. $\vec{a}\{2;-1;3\}$; $\vec{b}\{3;3;1\}$

19. $\vec{a} \{1; 1; 4\}; \vec{b} \{4; 2; 1\}$	20. $\vec{a} \{3; 3; 3\}; \vec{b} \{1; -1; 0\}$
--	---

Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$

21. $\vec{a} \{3; 3; 1\}; \vec{b} \{4; 2; 1\}$	22. $\vec{a} \{1; 1; 1\}; \vec{b} \{2; -1; 1\}$
23. $\vec{a} \{1; -1; 1\}; \vec{b} \{-2; 1; 1\}$	24. $\vec{a} \{2; 1; 0\}; \vec{b} \{1; -1; 1\}$
25. $\vec{a} \{3; 3; -3\}; \vec{b} \{2; -2; 1\}$	26. $\vec{a} \{2; 0; 1\}; \vec{b} \{-1; 1; 1\}$
27. $\vec{a} \{5; 1; 1\}; \vec{b} \{-2; 1; 1\}$	28. $\vec{a} \{1; 0; 3\}; \vec{b} \{-3; 4; 2\}$
29. $\vec{a} \{1; -3; 1\}; \vec{b} \{4; 2; 1\}$	30. $\vec{a} \{1; -2; -2\}; \vec{b} \{2; 2; 1\}$
31. $\vec{a} \{1; 1; 3\}; \vec{b} \{3; 1; 1\}$	32. $\vec{a} \{3; 0; 3\}; \vec{b} \{4; 3; 1\}$
33. $\vec{a} \{2; 1; 1\}; \vec{b} \{3; 1; 0\}$	34. $\vec{a} \{1; -1; 1\}; \vec{b} \{4; 1; 5\}$
35. $\vec{a} \{2; 2; 1\}; \vec{b} \{1; 1; 3\}$	36. $\vec{a} \{0; 1; 2\}; \vec{b} \{7; 4; 0\}$
37. $\vec{a} \{5; 1; 3\}; \vec{b} \{-1; 1; 1\}$	38. $\vec{a} \{2; 1; -1\}; \vec{b} \{3; 2; 1\}$
39. $\vec{a} \{1; 4; 1\}; \vec{b} \{-1; 2; 1\}$	40. $\vec{a} \{3; 2; 1\}; \vec{b} \{4; 0; 1\}$

Найти площадь треугольника построенного на векторах

41. $\vec{a} \{2; 3; 1\}; \vec{b} \{-1; -1; 2\}$	42. $\vec{a} \{3; 1; 1\}; \vec{b} \{-1; 2; 2\}$
43. $\vec{a} \{-3; 3; 1\}; \vec{b} \{4; 1; 0\}$	44. $\vec{a} \{0; 1; 3\}; \vec{b} \{2; 3; 1\}$
45. $\vec{a} \{1; 1; 4\}; \vec{b} \{3; 0; 1\}$	46. $\vec{a} \{-1; 2; 1\}; \vec{b} \{3; 3; 1\}$
47. $\vec{a} \{2; 2; -1\}; \vec{b} \{3; 0; 1\}$	48. $\vec{a} \{4; 1; 2\}; \vec{b} \{0; 1; 1\}$
49. $\vec{a} \{-1; -1; 2\}; \vec{b} \{3; 3; 1\}$	50. $\vec{a} \{4; 1; 3\}; \vec{b} \{2; 2; -1\}$
51. $\vec{a} \{2; 2; 1\}; \vec{b} \{1; 1; 1\}$	52. $\vec{a} \{-1; 1; 1\}; \vec{b} \{2; 2; 2\}$
53. $\vec{a} \{3; 1; 1\}; \vec{b} \{-1; 0; 1\}$	54. $\vec{a} \{2; 1; 3\}; \vec{b} \{-1; -1; 2\}$
55. $\vec{a} \{3; 2; 4\}; \vec{b} \{4; -2; 3\}$	56. $\vec{a} \{4; 0; 1\}; \vec{b} \{3; 1; 2\}$
57. $\vec{a} \{2; 1; 3\}; \vec{b} \{3; 3; 2\}$	58. $\vec{a} \{4; 1; 1\}; \vec{b} \{2; 1; 3\}$
59. $\vec{a} \{3; 3; 1\}; \vec{b} \{1; 3; 3\}$	60. $\vec{a} \{2; 3; 3\}; \vec{b} \{4; 0; 1\}$

Найти векторное произведение

61. $ \vec{a} = 2; \vec{b} = 3; \alpha = 45^0$	62. $ \vec{a} = 5; \vec{b} = 1; \alpha = 60^0$
63. $ \vec{a} = 2; \vec{b} = 2; \alpha = 30^0$	64. $ \vec{a} = 3; \vec{b} = 1; \alpha = 90^0$
65. $ \vec{a} = 1; \vec{b} = 5; \alpha = 120^0$	66. $ \vec{a} = 7; \vec{b} = 8; \alpha = 150^0$
67. $ \vec{a} = 4; \vec{b} = 2; \alpha = 135^0$	68. $ \vec{a} = 2; \vec{b} = 1; \alpha = 120^0$
69. $ \vec{a} = 1; \vec{b} = 5; \alpha = 60^0$	70. $ \vec{a} = 3; \vec{b} = 2; \alpha = 45^0$
71. $ \vec{a} = 2; \vec{b} = 3; \alpha = 30^0$	72. $ \vec{a} = 4; \vec{b} = 3; \alpha = 120^0$
73. $ \vec{a} = 6; \vec{b} = 2; \alpha = 150^0$	74. $ \vec{a} = 8; \vec{b} = 2; \alpha = 45^0$
75. $ \vec{a} = 3; \vec{b} = 2; \alpha = 30^0$	76. $ \vec{a} = 4; \vec{b} = 4; \alpha = 60^0$
77. $ \vec{a} = 5; \vec{b} = 5; \alpha = 30^0$	78. $ \vec{a} = 3; \vec{b} = 2; \alpha = 120^0$
79. $ \vec{a} = 2; \vec{b} = 1; \alpha = 150^0$	80. $ \vec{a} = 1; \vec{b} = 3; \alpha = 135^0$

Задачи на векторное произведение

81. Дан ΔABC $A(-1;1;0)$, $B(1;1;1)$; $C(1;1;3)$. Вычислить $S_{\Delta ABC}$.
82. Дан ΔABC $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$; $C(3;2;3)$. Вычислить $S_{\Delta ABC}$.
83. Даны середины сторон Δ $M_1(-1;-1;0)$, $M_2(1;0;-1)$; $M_3(-1;-1;-1)$. Вычислить S_{Δ} .
84. Даны середины сторон Δ $M_1(1;0;-1)$, $M_2(0,5;2;0,5)$; $M_3(1,5;0;-2)$. Найти S_{Δ} .
85. Даны середины сторон Δ $M_1(1;2;0)$, $M_2(0,5;2;-0,5)$; $M_3(1,5;0;-1,5)$. Найти S_{Δ} .
86. Даны середины сторон Δ $M_1(1;0;1,5)$, $M_2(2;0;2,5)$; $M_3(1;0;-2)$. Найти S_{Δ} .
87. Даны середины сторон Δ $M_1(-1;2;0)$, $M_2(-1;1;-1)$; $M_3(0;-1;-1)$. Найти S_{Δ} .
88. Даны середины сторон Δ $M_1(-1;1;-1)$, $M_2(1;1;-1)$; $M_3(0;0;-1)$. Найти S_{Δ} .

89. Даны середины сторон Δ $M_1(1; -2; 0)$, $M_2(1; -1; -1)$; $M_3(0; 1; -1)$. Найти S_Δ .
90. Даны середины сторон Δ $M_1(1; 0; 4)$, $M_2(2; 0; 3)$; $M_3(-1; 0; 0)$. Найти S_Δ .
91. Даны середины сторон Δ $M_1(0; -1; 0)$, $M_2(-1; -1; 1)$; $M_3(1; 0; -2)$. Найти S_Δ .
92. Сила $\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ приложена к точке $M(2; -1; 1)$. Найти момент этой силы относительно начала координат.
93. Сила $\vec{F} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ приложена к точке $M(1; 2; 3)$. Найти момент этой силы относительно $A(3; 2; -1)$.
94. Сила $\vec{P} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ приложена к точке $E(4; 5; 9)$. Найти момент этой силы относительно $K(9; 5; -1)$.
95. Сила $\vec{M} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ приложена к точке $N(1; 2; 3)$. Найти ее момент относительно $O(0; 0; 0)$.
96. Сила $\vec{P} = \vec{j} + \vec{k}$ приложена к точке $N(3; 2; 1)$. Найти момент этой силы относительно $B(4; 2; -1)$.
97. Сила $\vec{P} = \vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$ приложена к точке $E(5; 4; 0)$. Найти момент этой силы относительно $K(0; 0; 5)$.
98. Сила $\vec{M} = \vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ приложена к точке $N(0; 1; 1)$. Найти момент этой силы относительно $O(0; 0; 0)$.
99. Сила $\vec{F} = 3\vec{i} - 4\vec{k}$ приложена к точке $P(2; 1; 0)$. Найти момент относительно $O(0; 0; 0)$.
100. Сила $\vec{N} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ приложена к точке $P(2; 0; 1)$. Найти момент относительно $K(3; 2; -1)$.

IV. Прямая и плоскость в пространстве

1. Найти точку M_1 , симметричную точке M_0 относительно заданной плоскости: $M_0(-2; 0; 3)$, $2x - 2y + 10z + 1 = 0$.
2. Найти точку M_1 , симметричную точке M_0 относительно заданной прямой:
 $M_0(0; -3; -2)$, $\frac{x - 0,5}{0} = \frac{y + 1,5}{-1} = \frac{z - 1,5}{1}$.
3. Найти расстояние между прямыми $\frac{x - 9}{-6} = \frac{y}{2} = \frac{z - 2}{1}$ и $\frac{x + 5}{3} = \frac{y + 5}{2} = \frac{z - 1}{-2}$.

4. Найти уравнение проекции прямой $\frac{x}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{-3}$ на плоскость, заданную уравнением $2x - 3y + z - 4 = 0$.

5. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$ и отсекающей на оси OY отрезок, равный 3.

6. Найти расстояние от точки $M(3, 5, 5)$ до прямой $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{1}$.

7. Найти уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{-1}$ и $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{-1}$.

8. Найти расстояние между параллельными прямыми $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$ и $\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$.

9. Через прямую $\frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{4}$ провести плоскость, параллельную плоскости $x + y - z + 15 = 0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точки пересечения плоскости $2x + y - 3z + 1 = 0$ с прямыми $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z+1}{2}$ и $\frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+4}{-6}$.

11. Найти точку M_1 , симметричную точке M_0 относительно заданной плоскости: $M_0(3; 3; 3)$, $8x + 6y + 8z - 25 = 0$.

12. Найти точку M_1 , симметричную точке M_0 относительно заданной прямой: $M_0(-1; 0; 12)$, $\frac{x-0,5}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-4}{2}$.

13. Найти расстояние между прямыми $\frac{x+3}{4} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-3}{2}$ и $\frac{x-4}{8} = -3 = \frac{z+7}{3}$.

14. Найти уравнение проекции прямой $\begin{cases} x = 2t, \\ y = -1 + 5t, \\ z = -3t - 1 \end{cases}$ на плоскость, заданную уравнением $2x + 3y - z + 4 = 0$.

15. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x + 2y - z + 2 = 0, \\ 3x - y + z - 5 = 0 \end{cases}$ и отсекающей на оси OX отрезок, равный 2.

16. Найти расстояние от точки $M(7, 9, 7)$ до прямой $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$.

17. Найти уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x}{7} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{5}$ и $\frac{x-1}{7} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{5}$.

18. Найти расстояние между параллельными прямыми $\begin{cases} x+z=1, \\ y+2z=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+z=1, \\ y+2z=1 \end{cases}$.

19. Через прямую $\frac{x}{7} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{5}$ провести плоскость, параллельную плоскости $x+2y+z-1=0$.

20. Составить уравнение прямой, проходящей через точки пересечения плоскости $2x+y-3z+1=0$ с прямыми $\begin{cases} x=t+3, \\ y=5-5t, \\ z=2t-1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=2t+5, \\ y=4t+3, \\ z=-4-6t \end{cases}$.

21. Найти точку M_1 , симметричную точке M_0 относительно заданной плоскости: $M_0(-1; 0; 1)$, $2x+4y-3=0$.

22. Найти точку M_1 , симметричную точке M_0 относительно заданной прямой: $M_0(2; -2; -3)$, $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{0} = \frac{z+1,5}{0}$.

23. Найти расстояние между прямыми $\begin{cases} x=-6t+9, \\ y=2t, \\ z=t+2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=3t-5, \\ y=2t-5, \\ z=-2t+1 \end{cases}$.

24. Найти уравнение проекции прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+1}{1}$ на плоскость, заданную уравнением $x-3y+2z-4=0$.

25. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x+z=1, \\ y+2z=0 \end{cases}$ и отсекающей на оси OZ отрезок, равный 1.

26. Найти расстояние от точки $M(4, 3, 10)$ до прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$.

27. Найти уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-1}{-3}$ и $\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{-8} = \frac{z+1}{-12}$.

28. Найти расстояние между параллельными прямыми $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{-1}$ и $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{-1}$.

29. Через прямую $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$ провести плоскость, параллельную плоскости $x + y - z + 15 = 0$.

30. Найти уравнение плоскости, проходящей через ось OX и образующей с плоскостью $\sqrt{2}x + y - z + 2 = 0$ угол, равный $\frac{\pi}{4}$.

31. Найти точку M_1 , симметричную точке M_0 относительно заданной плоскости: $M_0(2; -2; -3)$, $y + z + 2 = 0$.

32. Найти точку M_1 , симметричную точке M_0 относительно заданной прямой: $M_0(-1; 2; 0)$, $\frac{x+0,5}{1} = \frac{y+0,7}{-0,2} = \frac{z-2}{2}$.

33. Найти расстояние между прямыми $\frac{x-3}{4} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-3}{3}$ и $\frac{x}{8} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-4}{3}$.

34. Найти уравнение проекции прямой $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$ на плоскость, заданную уравнением $x - y + 3z + 8 = 0$.

35. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ и отсекающей на оси OX отрезок, равный 2.

36. Найти расстояние от точки $M(1, 2, -1)$ до прямой $\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 3x - y + 4z - 29 = 0 \end{cases}$.

37. Найти уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$ и $\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$.

38. Найти расстояние между параллельными прямыми $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{1}$ и $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z+3}{2}$.

39. Через прямую $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{1}$ провести плоскость, параллельную плоскости $x + y - z + 3 = 0$.

40. Через прямую $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $x + 4y - 3z + 7 = 0$.

41. Найти точку M_1 , симметричную точке M_0 относительно заданной плоскости: $M_0(-2; -3; 0)$, $x + 5y + 4 = 0$.

42. Найти точку M_1 , симметричную точке M_0 относительно заданной прямой: $M_0(3; 3; 3)$, $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1,5}{0} = \frac{z-3}{1}$.

43. Найти расстояние между прямыми $\frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1}$ и $\frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}$.

44. Найти уравнение проекции прямой $\begin{cases} x = 4t, \\ y = 3t - 4, \\ z = -2t - 1 \end{cases}$ на плоскость, заданную

уравнением $x - y + 3z + 8 = 0$.

45. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$ и отсекающей на оси OY отрезок, равный 2.

46. Найти расстояние от точки $M(4, -3, 1)$ до прямой $\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$.

47. Найти уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x+5}{4} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{7} = \frac{z+1}{2}$.

48. Найти расстояние между параллельными прямыми $\begin{cases} x = 3t + 2, \\ y = 4t - 1, \\ z = 2t \end{cases}$ и

$$\begin{cases} x = 3t + 7, \\ y = 4t + 1, \\ z = 2t + 3 \end{cases}.$$

49. Через прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$ параллельно плоскости $x - 2y + z + 1 = 0$.

50. Написать уравнение плоскости, которая проходит через точку $(3; 1; -2)$ и прямую $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$.

51. Найти точку M_1 , симметричную точке M_0 относительно заданной плоскости: $M_0(3; -3; -1)$, $2x - 4y - 4z - 13 = 0$.

52. Найти точку M_1 , симметричную точке M_0 относительно заданной прямой: $M_0(3; -3; -1)$, $\frac{x-6}{5} = \frac{y-3,5}{4} = \frac{z+0,5}{0}$.

53. Найти расстояние между прямыми $\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$ и $\frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}$.

54. Найти уравнение проекции прямой $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$ на плоскость, заданную уравнением $x + 4y - 3z + 7 = 0$.

55. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 3x - y + 4z - 29 = 0 \end{cases}$ и отсекающей на оси OZ отрезок, равный 1.

56. Найти расстояние от точки $M(3, 2, 6)$ до прямой $\frac{x}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-3}{-1}$.

57. Найти уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-5}{1}$ и $\begin{cases} x = t, \\ y = -2t + 1, \\ z = t - 1 \end{cases}$.

58. Найти расстояние между параллельными прямыми $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ и $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z-1}{2}$.

59. Через прямую $\begin{cases} 2x + y - 6z + 3 = 0 \\ x - y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$ параллельно плоскости $x + y - z + 15 = 0$.

60. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(1; 1; 6)$ и прямую $\begin{cases} x = -1 + 3t, \\ y = 2t, \\ z = t \end{cases}$.

61. Найти точку M_1 , симметричную точке M_0 относительно заданной плоскости: $M_0(3; -1; 1)$, $2x - y + 3z + 4 = 0$.

62. Найти точку M_1 , симметричную точке M_0 относительно заданной прямой: $M_0(4; 5; 10)$, $2x + 3y + z + 10 = 0$.

63. Найти расстояние между прямыми $\frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = z$ и $\frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}$.

64. Составить уравнение прямой, образованной пересечением плоскости $x + 2y - z + 5 = 0$ с плоскостью, проходящей через точку $M(5; 3; 2)$ и ось OY .

65. Составить уравнение прямой, образованной пересечением плоскости $x + 2y - z + 5 = 0$ с плоскостью, проходящей через точку $M(5; 3; 2)$ и ось OY .

66. Найти расстояние от точки $M(3, 2, -1)$ до прямой $\begin{cases} 2x - 2y + z + 3 = 0, \\ 3x - 2y + 2z + 17 = 0 \end{cases}$.

67. Найти уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x-5}{13} = y-6 = \frac{z+3}{-4}$ и $\frac{x-2}{13} = y-3 = \frac{z+3}{-4}$.

68. Найти расстояние между параллельными прямыми $\frac{x-3}{2} = y = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2} = y-1 = \frac{z}{2}$.

69. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной двум плоскостям: $2x - 3y + z - 1 = 0$ и $x - y + 5z + 3 = 0$.

70. Даны вершины треугольника $ABC: A(4; 1; -2), B(2; 0; 0), C(-2; 3; 5)$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины B на сторону AC .

71. Найти точку M_1 , симметричную точке M_0 относительно заданной плоскости: $M_0(6; -4; -2), x + y + z = 3$.

72. Найти точку M_1 , симметричную точке M_0 относительно заданной прямой: $M_0(4; 3; 10), \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$.

73. Найти расстояние между прямыми $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}$ и $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{5}$.

74. Найти длины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(1; -3; 3)$ параллельно плоскости $3x + y - 3z = 0$.

75. Показать, что прямая $\frac{x}{6} = \frac{y-3}{-8} = \frac{z-1}{-9}$ параллельно плоскости $x + 3y - 2z + 1 = 0$.

76. Найти расстояние от точки $M(4, 5, 10)$ до прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$.

77. Найти уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{2} = -z$ и $\begin{cases} x - 2y + 2z - 8 = 0, \\ x + 6z - 6 = 0 \end{cases}$.

78. Найти расстояние между параллельными прямыми $\frac{x-3}{2} = y = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2} = y-1 = \frac{z}{2}$.

79. Через прямую $\frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{2} = -z$ провести плоскость, параллельную плоскости $x + y + z = 0$.

80. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3; 4; 0)$ и прямую $x - 2 = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$.

81. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-2}{-3}$ и параллельно прямой $\frac{x+5}{4} = 7 = \frac{z-1}{2}$.

82. Через прямую $\frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{2}$ провести плоскость, параллельную плоскости $x + y - z + 15 = 0$.

83. Найти расстояние от точки $P(7; 9; 7)$ до прямой $\begin{cases} x = 4t + 2, \\ y = 3t + 1, \\ z = 2t \end{cases}$

84. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1; 2; 3)$ и $N(-3; 4; -5)$ параллельно оси OZ .

85. Составить уравнение прямой, образованной пересечением плоскости $3x - y - 7z + 9 = 0$ с плоскостью, проходящей через ось OX и точку $A(3; 2; -5)$.

86. При каких значениях b и d прямая $\begin{cases} x - 2y + z + 9 = 0, \\ 3x + by + z + d = 0 \end{cases}$ лежит в плоскости XOY ?

87. Найти проекцию точки $C(3; -4; -2)$ на плоскость, проходящую через две прямые: $\frac{x-5}{13} = y-6 = \frac{z+3}{-4}$ и $\frac{x-2}{13} = y-3 = \frac{z+3}{-4}$.

88. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1}$ и точку $P(1; 0; 7)$.

89. Даны вершины треугольника $A(4; 1; -2)$, $B(2; 0; 0)$, $C(-2; 3; -5)$. Составить уравнения его высоты, опущенной из вершины B на противоположную сторону.

90. Показать, что прямые $x + 3 = \frac{y+1}{2} = z + 1$ и $\begin{cases} x = 3z - 4, \\ y = z + 2 \end{cases}$ пересекаются, и найти точку А их пересечения.
91. Через точку $M(-4; -5; 3)$ провести прямую, пересекающую две данные прямые $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}$ и $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$.
92. Найти проекцию точки $P(3; 1; -1)$ на плоскость $x + 2y + 3z - 30 = 0$.
93. вычислить расстояние от точки $P(2; 3; -1)$ до прямой $\begin{cases} 2x - 2y + z + 3 = 0, \\ 3x - 2y + 2z + 17 = 0. \end{cases}$
94. Найти точку М, симметричную точке $N(6; -4; -2)$ относительно плоскости $x + y + z = 3$.
95. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x + 2y - z + 2 = 0, \\ 3x - y + z - 5 = 0 \end{cases}$ параллельно прямой $\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = -2 + 2t, \\ z = 1 + 2t. \end{cases}$
96. Найти проекцию точки $A(2; -1; 3)$ на плоскость $5x - 2y + z + 15 = 0$.
97. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(5; -7; 3)$ параллельно прямой $\begin{cases} x - 3y + 2z - 6 = 0, \\ 2x - y + 4z + 17 = 0. \end{cases}$
98. Найти расстояние между прямыми $\frac{x-3}{8} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+6}{3}$ и $\frac{x+5}{8} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z+6}{12}$.
99. Найти расстояния от точки $A(0; 2; 5)$ до прямой $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{3}$.
100. Найти уравнения перпендикуляра к плоскости $x - 2y + z - 9 = 0$ проходящего через точку $A(-2; 0; -1)$, и определить координаты основания этого перпендикуляра.

V. Кривые 2-го порядка

Используя параллельный перенос, привести уравнение кривой 2-го порядка к каноническому виду и построить кривую

1. $2x^2 - 8x + y^2 - 6y + 1 = 0$	2. $x^2 + 4x + 4y^2 = 0$
3. $x^2 - 8x - 4y^2 = 0$	4. $y^2 - 6y - x^2 + 2x = 0$

5. $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$	6. $5x^2 - 6y^2 + 10x - 12y - 31 = 0$
7. $x^2 - 4y^2 + 6x + z = 0$	8. $3x^2 - y^2 + 12x - 4y - 4 = 0$
9. $x^2 - 4y^2 + 2x + 16y - 7 = 0$	10. $x^2 - y^2 - 4x + 6y - 7 = 0$
11. $4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y - 23 = 0$	12. $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$
13. $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 8 = 0$	14. $x^2 + 2y^2 + 8x - 4 = 0$
15. $x^2 + 2y^2 + 8x - 4 = 0$	16. $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$
17. $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$	18. $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y + 49 = 0$
19. $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 3 = 0$	20. $2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 11 = 0$
21. $x^2 + 10x - 4y + 33 = 0$	22. $y^2 - 6x + 2y - 11 = 0$
23. $x^2 - 4x + 5y + 14 = 0$	24. $2y^2 + x - 4y + 2 = 0$
25. $x^2 - 8x + 3y^2 + 19 = 0$	26. $y^2 - 5x + 6y + 4 = 0$
27. $x^2 + 6y + 6x - 6 = 0$	28. $y^2 + 6x - 8y + 22 = 0$
29. $x^2 + 8x - 2y + 14 = 0$	30. $2y^2 - 8y + x^2 - 6x + 1 = 0$
31. $4x^2 + y^2 + 4y = 0$	32. $y^2 - 8y - 4x^2 = 0$
33. $x^2 - 6x - y^2 + 2y = 0$	34. $9y^2 - 25x^2 - 18y - 100x - 316 = 0$
35. $5y^2 - 6x + 10y - 12x - 31 = 0$	36. $y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$
37. $3y^2 - x^2 + 12y - 4x - 4 = 0$	38. $y^2 - 4x^2 + 2y + 16x - 7 = 0$
39. $y^2 - x^2 - 4y + 6x - 5 = 0$	40. $9x^2 + 4y^2 - 8y + 18x - 23 = 0$
41. $16x^2 - 9y^2 + 54y + 64x + 127 = 0$	42. $y^2 + x^2 - 2y + 6x - 5 = 0$
43. $4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$	44. $2x^2 + y^2 + 8y - 4 = 0$
45. $9x^2 + 4y^2 - 40y + 36x + 100 = 0$	46. $-4y^2 + x^2 + 8y - 2x + 3 = 0$
47. $3x^2 + 2y^2 + 8y - 6x + 11 = 0$	48. $y^2 + 10y - 4x + 33 = 0$
49. $x^2 - 6y + 2x - 11 = 0$	50. $y^2 - 4y + 5x + 14 = 0$
51. $2x^2 + y - 4x + 2 = 0$	52. $2x^2 + y - 4x + 2 = 0$
53. $y^2 - 8y + 3x + 19 = 0$	54. $x^2 - 5y + 6x + 4 = 0$

55. $x^2 + 6y - 8x + 22 = 0$	56. $y^2 + 8y - 2x + 14 = 0$
57. $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 80 = 0$	58. $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 130 = 0$
59. $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y + 65 = 0$	60. $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 5 = 0$
61. $2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 12 = 0$	62. $3x^2 - y^2 + 12x - 4y - 8 = 0$
63. $9x^2 - 22y^2 - 18x - 100y - 320 = 0$	64. $2x^2 - 8x + y^2 - 6y + 5 = 0$
65. $x^2 + 10x - 4y + 10 = 0$	66. $y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$
67. $x^2 - 6x + 3y + 6 = 0$	68. $x^2 - 16x + 7y + 12 = 0$
69. $x^2 + 6y + 7x - 3 = 0$	70. $y^2 + 6x - 12y + 7 = 0$
71. $9x^2 + 4y^2 - 6x = 0$	72. $y^2 - 6y + 16x^2 = 0$
73. $x^2 - 4x + y^2 - 2y = 0$	74. $2y^2 - 4y + x^2 - 6y + 1 = 0$
75. $8x^2 - 4x + y^2 = 0$	76. $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$
77. $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0$	78. $x^2 + 12x - 6y + 3 = 0$
79. $8x^2 + y^2 - 4y - 2x = 0$	80. $4y - x^2 - 4x - 8 = 0$
81. $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$	82. $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$
83. $9x^2 + 9 - y^2 = 0$	84. $x^2 + 4y^2 - 24y + 20 = 0$
85. $4x^2 + 9y^2 - 8x + 6y - 23 = 0$	86. $x^2 + 2y^2 + 8x - 4y = 0$
87. $x^2 + 10x - 4y + y^2 = 0$	88. $x^2 - 4x + 5y + 12 = 0$
89. $9x^2 + 4y^2 + 18x - 4y + 5 = 0$	90. $x^2 - 8x - 4y^2 - 4 = 0$
91. $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 8 = 0$	92. $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$
93. $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y + 49 = 0$	94. $x^2 + 10x - 4y + 33 = 0$
95. $y^2 + 10y - 4x + 33 = 0$	96. $x^2 - 4x + 5y - 14 = 0$
97. $2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 11 = 0$	98. $x^2 - 4x + 5y + 14 = 0$
99. $x^2 + 2y^2 + 8x - 4 = 0$	100. $x^2 - 4y^2 + 2x + 16y - 7 = 0$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

1. Найти пределы функций, используя при необходимости замечательные пределы*

1.1. Найти пределы:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-3} \right)^{5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x \sin^2 x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x}{3+x^2} \right)^{4x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-5} \right)^{3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + \sin x}{2x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+1}{3x^2-2} \right)^{5x^2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x} \right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\operatorname{tg}^2 8x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1} \right)^{7x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\sin x} - 1}{x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{7}{2x^2} \right)^{x^2+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{6x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{x^2}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{6x^2+1} \right)^{x^2+4x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{1 - \cos x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} (1+10x)^{\frac{1}{3x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin \sqrt{x}}{\operatorname{arctg}^{2/3} 2x}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} (1-5x)^{\frac{1}{3x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\operatorname{tg} 3x}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-5} \right)^{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin 2x}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8+x}{10+x} \right)^{2x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{x^2} - 1}{\operatorname{tg}^2 2x}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} \right)^{x^2}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7 - x}{x + 3} \right)^{3x - 1}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lg \left(1 + \frac{4}{x^2} \right)}{1 - \cos \frac{1}{x}}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3x} \right)^{7x}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 3}{2x - 1} \right)^{4x + 1}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + x^2}{1 + 2x^2} \right)^{x^2}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 3x + x^2}{2 + x^2} \right)^{2x^2}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 4} \right)^{x^2}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 1}{2x + 3} \right)^{1 - x}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3x + 1} \right)^{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{4^x} - 1 \right)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \left(\frac{2}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x)}{\sin 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[5]{x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 8x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x \sin^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x^2 - 9}{\sqrt[9]{x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{\sqrt[6]{1 + x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \sin 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} 7x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) \operatorname{ctg} \pi x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{5x^2 + 1} - \frac{x^2}{5x - 3} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{5}{x+2}}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} 2x)^{\frac{1}{\sin 3x}}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 10x)^{\frac{1}{2x+3}}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3x+2}\right)^{7x}$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x^2)^{\frac{3}{\operatorname{tg}^2 x}}$$

$$32. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{3+2x}\right)^{-3x}$$

$$33. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{2+3x}\right)^{x+3}$$

$$34. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{3x}}$$

$$35. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{2x-1}\right)^{x-1}$$

$$36. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{2x-7}$$

$$37. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{3x-1}$$

$$38. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 5}\right)^{3x^2-1}$$

$$39. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3x}{2+3x}\right)^{\frac{7x}{2}}$$

$$40. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4 + 4}{x-1}\right)^{2x+3}$$

$$41. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - 10x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{-x} - e}{4x + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{2x} - 1}{\sin 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\operatorname{arctg} 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sqrt{8+x} - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 8} - 2}{4x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 7x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x-1} - 3}{\sqrt{x+6} - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x-1} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x \cdot \arcsin 3x}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{-3x} - 1}{\operatorname{tg} 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x+5}{\sqrt{8+x^2} - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{3x}}{\ln(1 - \operatorname{tg} x)}$$

$$42. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 2x)^2}{x^4 - 5x^2 + 4}$$

$$43. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}$$

$$44. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^2 - 4x + 4}$$

$$45. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{(x^2 - 9)^2}$$

$$46. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^4 - 1}$$

$$47. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 8x + 15}{(x + 3)(x + 5)^2}$$

$$48. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$$

$$49. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{6x^2 - 5x + 1}{3x - 1}$$

$$50. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)^2}{x^4 - 3x^2 - 4}$$

$$51. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}$$

$$52. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{(x - 2)^2 \cdot (x + 5)}$$

$$53. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 10x + 25}{x^3 - 125}$$

$$54. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^2 + 3x - 40}{(x + 1)(x^2 + 16x + 64)}$$

$$55. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - 1}$$

$$56. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 5x}{\arctg 3x}$$

$$57. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{4x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 6x}{x \cdot \tg x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \tg 4x}{\arcsin x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg x - \sin x}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tg 7x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^2(\tg x))}{1 - \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot \sin 3x}{\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{4x} - 3^{2x}}{\arctg 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-6x}}{\tg 2x \cdot \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos 6x)}{\tg x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{\arcsin 2x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\cos 7x \cdot \sin 6x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - \sin^2 x}{\sqrt[4]{1+x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 4x - 21}{(x - 7)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1 + 4 \tg x)}{\cos^2 x - 1}$$

$$58. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + x^2 + x + 2}{x^3 + 1}$$

$$59. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{6x^2 + x - 1}{x - \frac{1}{3}}$$

$$60. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 2x^2}$$

$$61. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{3x - 21}{x^2 - 6x - 7}$$

$$62. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x^3 + 3x^2 + x + 3}$$

$$63. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$$

$$64. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{x^4 - 625}$$

$$65. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 4}$$

$$66. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 2x)^2}{x^2 - 4x + 4}$$

$$67. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{3x^3 - 5x^2 + x}$$

$$68. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^6 - x^4}$$

$$69. \lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$$

$$70. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x^4 + 4x^2 - 5}$$

$$71. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x^2}{\arcsin 5x \cdot \sin\left(\frac{x}{4}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x^3}{x \cdot (5^{3x} - 5^x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{8x^2 - 9x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+2x} - \sqrt[4]{1-x}}{\sin x \cdot \cos 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x^4}{x^2 \cdot (1 - \cos 3x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin\left(\frac{(\pi - x)}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{4x})}{2x^2 + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 4x}{4x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt[4]{1-2x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 5x)}{x \cdot \arcsin 4x \cdot 5^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{tg}^2 2x)}{1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+2x}}{\ln(1-7x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^{-3x} - 1)}{\operatorname{tg} x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 4x - 1}{x \cdot \operatorname{tg}^3 x}$$

$$72. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{(x^2 + x - 2)^2}$$

$$73. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$$

$$74. \lim_{x \rightarrow -7} \frac{x(x^2 - 49)}{x^2 + 14x + 49}$$

$$75. \lim_{x \rightarrow -9} \frac{x^2 + 9x}{x^2 + 6x - 27}$$

$$76. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^4 - 2x^3}$$

$$77. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 27}$$

$$78. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^4 - 2x^2 - 575}{x^2 + x - 20}$$

$$79. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 11x + 28}$$

$$80. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 4x + 3}$$

$$81. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 6x}{x + 3}$$

$$82. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

$$83. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{9x^2 - 1}{(3x + 1)(x - 1)^2}$$

$$84. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + x^3}$$

$$85. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x + 2}$$

$$86. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 2x + 1)^2}{(2x^2 - x - 1)^2}$$

$$87. \lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{6x^2 + x - 1}{x + 0,5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3\pi x}{\sin 7\pi x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{6x} - 4^x}{\operatorname{arctg}(-5x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} 5x}{1 - \cos 10x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - \cos 6x}{\sin(13x^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3^{2x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{tg}^2(\sin x))}{\cos x \cdot x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x^2}{1 - \cos(-2x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{(2\pi - x)}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\sin 9x \cdot \cos 10x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(-2x))}{x \cdot \operatorname{tg} x \cdot 2^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3(\sqrt[3]{x})}{8x^2 - 6x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1 - 7x} - \sqrt[5]{1 - 3x}}{\operatorname{tg}^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos 2x}{\arcsin 11x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{5x}}{\ln(1 + \operatorname{tg} 3x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{\operatorname{tg}(3x)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)^3}{x^2 \cdot (7^{3x} - 7^{4x})}$$

$$88. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$$

$$89. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 162}{x^2 - 3x - 28}$$

$$90. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$91. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 3x - 28}$$

$$92. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^4 - 8x^2 - 425}{(x-5)(x+5)}$$

$$93. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$$

$$94. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^4 - x^2 - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

$$95. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 6x + 9}$$

$$96. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{2x^4 - x^2 - x + 1}$$

$$97. \lim_{x \rightarrow -3,5} \frac{2x^2 + 13x + 21}{2x + 7}$$

$$98. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^4 - 16}$$

$$99. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 + 2x + 1}$$

$$100. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^4 - 16}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5\pi x}{\operatorname{tg} 9\pi x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \operatorname{tg} 5x}{\sin 2x \cdot x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - 1}{e^{2x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \cdot \sin^3 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{2x} - 1}{\sqrt[3]{x} \cdot \arcsin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 3x}{\sin 8x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 1}{4^{9x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 4x^3}{\operatorname{tg} x \cdot (2^{3x} - 2^x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{2x} - 1}{\sin (2x)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+6x} - \sqrt[3]{1+4x}}{\operatorname{arctg} 2x \cdot \cos 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x \cdot \cos}{\operatorname{tg} x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt{1+8x}}{\ln(1 - \sin x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(-3x) - 1}{\sin 9x^2}$$

1.2. Замечательные пределы

1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\operatorname{arctg}(x+2)}$	2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x+1} \right)^x$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x \operatorname{tg} 3x}$	4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x+7} \right)^{2x}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \operatorname{tg} x}$	6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 3(x-2)}{x^2 - 3x + 2}$
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1} \right)^{4x-1}$	8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{\sin 3x}$
9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-4}{5x+8} \right)^{1-2x}$	10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\sin 2x}$
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^{2x+1}$	12. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$
13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+5}{x^2-5} \right)^{x^2}$	14. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} \right)^{\frac{3}{x}}$
15. $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(2+x) - \ln x)$	16. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$
17. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$	18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3-1}{x^3+1} \right)^{2x+5}$
19. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x} - e^{5x}}{x}$	20. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{5} \right)^{\frac{2}{x^2}}$
21. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x-2}$	22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+7} \right)^{-2x}$
23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{3x^2}$	24. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{3}{x-5}}$
25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{csp} x - \cos 4x}{5x^2}$	26. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+5} \right)^{-3x}$
27. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5^x - 5}{x-1}$	28. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_3 x - 1}{x-3}$
29. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$	30. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^5-1}{x^5+1} \right)^{5x}$
31. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{x}$	32. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{\sin 3x}$

33. $\lim_{x \rightarrow} \left(\frac{x+3}{x-8} \right)^{2x-1}$	34. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x \right)$
35. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x$	36. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} x$
37. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+14}{x-7} \right)^{-x+5}$	38. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{3x^2}$
39. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x}{\sin 5x}$	40. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - 1}{21x - x^3}$
41. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{2/x}$	42. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arcsin 2x}{1 - \cos 4x}$
43. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-7x)^{1/2x}$	44. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{20 \cdot \ln \left(1 + \frac{x}{2} \right)}{\operatorname{tg} 8x}$
45. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2x}{2x-8} \right)^{3x-7}$	46. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\operatorname{tg} 2x}$
47. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos x}$	48. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 6x}{\sin 12x}$
49. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{4x} \right)^x$	50. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{x}}{\left(4^{\frac{1}{x}} - 1 \right)^2}$
51. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{21 \cdot \ln \left(1 + \frac{x}{3} \right)}{7x - x^5}$	52. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[7]{1+x} - 1}$
53. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}}$	54. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+5} \right)^{1-8x}$
55. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sqrt[7]{1+x} - 1}$	56. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{2x} - 1}{\operatorname{tg} 5x}$
57. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{-5x}}{\sin 5x}$	58. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[5]{x} - 1}$

59. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x^2 - 9}{\sqrt[9]{x} - 1}$	60. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{7x}\right)^{21x}$
61. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} 5x}$	62. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$
63. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{6x+5}$	64. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{2x^2 + 1}\right)^{x^2}$
65. $\lim_{x \rightarrow \frac{e}{2}} \frac{\ln 2x - 1}{2x - e}$	66. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{-x} - e}{4x + 4}$
67. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{4}{x}}{\frac{1}{e^x - 1}}$	68. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 3x}{\sin^2 3x}$
69. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 6x}$	70. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 10x)^{\frac{1}{3x-1}}$
71. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{e^{\frac{x}{4}} - e}{x - 4}$	72. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2 + 5x}\right)^{6x^2 - x + 3}$
73. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 5x}$	74. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{7^x - 1}}$
75. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{7}{x}}{\frac{1}{e^x - 1}}$	76. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 + 3x - 1}\right)^{x^2}$
77. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lg \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}{1 - \cos \frac{1}{x}}$	78. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{3x^2}$
79. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+7}{x+8}\right)^{-2x}$	80. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{2x}$

81. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lg\left(1 + \frac{5}{x^4}\right)}{\operatorname{tg}^4 \frac{1}{x}}$	82. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1x}{6x^2 + 1}\right)^{x^2 + 4x - 1}$
83. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{1 - \cos 8x}$	84. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 4x - \cos 4x}{3x^2}$
85. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot (5^{1/x} - 1)$	86. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - x}{x - 1}$
87. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x - \sin^2 x}{3x^2}$	88. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 \sin x}{\cos 8x - \cos 4x}$
89. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 7}{3x - 9}\right)^{2x + 5}$	90. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)$
91. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} x}{\cos 5x}$	92. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \operatorname{arctg} x}{\sin x - \operatorname{tg} x}$
93. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4 - x}{7 - x}\right)^{-3x}$	94. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 7x)^{\frac{1}{2x + 4}}$
95. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\operatorname{tg} 3x}$	96. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + 3x}{7 + 3x}\right)^{x^2 - 1}$
97. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{2x + 5}$	98. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arcsin 3x}{1 - \cos 6x}$
99. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x - 7x^2}{\sin 2x}$	100. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{x^2 + 5x}$

II. Непрерывность функций

Используя понятие точки разрыва и определение типов точек разрыва выяснить является ли точка, точкой разрыва данной функции и установить тип разрыва

1. $y = (x - 3)^3; x_0 = 3$	2. $y = \frac{1}{x - 4}; x_0 = 4$
-----------------------------	-----------------------------------

3. $y = \ln(x-5); x_0 = 5$	4. $y = \frac{(x-4)^2}{x-3}; x_0 = 3$
5. $y = \frac{(x-5)^3}{x-5}; x_0 = 5$	6. $y = \sin + \frac{1}{x^2 + x - 3}; x_0 = 3$
7. $y = \ln \frac{1}{x+4}; x_0 = -4$	8. $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}; x_0 = -1$
9. $y = \log_2(x+2); x_0 = -2$	10. $y = \frac{x^2 - x - 2}{x+1}; x_0 = -1$
11. $y = 2^{\frac{1}{x-1}}; x_0 = 1$	12. $y = \frac{x}{x^2 + 1}; x_0 = 1$
13. $y = \frac{2x}{\sin 4x}; x_0 = 0$	14. $y = \operatorname{tg} x + \frac{1}{x^2 - x + 2}; x_0 = -1$
15. $y = \frac{\arcsin x}{x^2 + x + 1}; x_0 = 0$	16. $y = \frac{1}{x+1}; x_0 = -1$
17. $y = \ln(5x-1); x_0 = \frac{1}{5}$	18. $y = \cos x + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}; x_0 = 2$
19. $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x-2}; x_0 = 2$	20. $y = \sqrt{x^2 - 2x + 5}; x_0 = 2$
21. $y = \frac{1}{3^{x-2} + 1}; x_0 = 2$	22. $y = \frac{1}{\frac{1}{3^{x-2} + 1}}; x_0 = 2$
23. $y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}; x_0 = 3$	24. $y = \log_3(3x-1); x_0 = \frac{1}{3}$
25. $y = \frac{\sin(2x-4)}{x+2}; x_0 = 2$	

Найти точки разрыва и определить их характер

26. $f(x) = \frac{ 3x-5 }{3x-5}$	27. $f(x) = \frac{1}{x} \sin x$
28. $f(x) = \frac{1}{\frac{1}{2^{1-x}} + 1}$	29. $f(x) = \frac{ 3x-1 }{3x-1}$
30. $f(x) = \frac{5}{2 + \frac{4}{7^{5-x}}}$	31. $f(x) = \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$
32. $f(x) = \frac{ x }{x}$	33. $f(x) = \frac{1+x^3}{1-x}$

34. $f(x) = \frac{3}{\frac{1}{2^{x+3}} + 1}$	35. $f(x) = \frac{1}{x-3} \cdot \sin(x-3)$
36. $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 6}{(x-1)}$	37. $f(x) = \frac{8+x^3}{2+x}$
38. $f(x) = \frac{ x+2 }{x+2}$	39. $f(x) = \frac{\sqrt{3-x}-4}{x^2-4}$
40. $f(x) = \frac{ 5x }{x}$	41. $f(x) = \frac{7}{\frac{1}{3^{2x+1}} + 4}$
42. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$	43. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2-4}$
44. $f(x) = \frac{5-\sqrt{7-4x}}{x+3}$	45. $f(x) = \frac{1}{2^x-1}$
46. $f(x) = \frac{1}{ x } \cdot \sin x $	47. $f(x) = \frac{3}{\frac{1}{4^{x-2}} + 3}$
48. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-3}$	49. $f(x) = \arcsin \frac{x^2-4}{x-2}$
50. $f(x) = \log_3(4x-1)$	

Найти точки разрыва и определить их характер

51. $y = \frac{x^2 + 5x - 6}{x+6}$	52. $y = \ln\left(\frac{1}{x+3}\right)$
53. $y = \frac{\sqrt{3x-4}}{x+4}$	54. $y = \frac{2x^2+x}{x}$
55. $y = 2^{\frac{1}{3x-1}}$	56. $y = \frac{ 2x+1 }{2x+1}$
57. $y = \operatorname{arctg} \frac{2}{x}$	58. $y = \frac{5}{\frac{2}{5^{7-x}} + 1}$
59. $y = \frac{x^2 + 4x + 4}{x+2}$	60. $y = \frac{1-x^3}{1-x}$
61. $y = 2^{\frac{1}{x}}$	62. $y = \frac{1-x^2}{1+x}$

63. $y = e^{\frac{1}{x-1}}$	64. $y = \frac{2}{\frac{3}{2^x} - 1}$
65. $y = \frac{x^2 + 3x - 4}{x + 1}$	66. $y = \ln\left(\frac{5x}{2x - 3}\right)$
67. $y = 5^{\frac{1}{5-2x}}$	68. $y = \frac{\sqrt{5-x}}{6+x}$
69. $y = \operatorname{arctg} \frac{2}{x-1}$	70. $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x + 3}$
71. $y = \frac{\sqrt{8-x}}{x^2 + x - 2}$	72. $y = 2^{\frac{1}{3-x}}$
73. $y = \frac{x^2 + 7x - 8}{x - 1}$	74. $y = 7^{\frac{2x}{7+x}}$
75. $y = \frac{ 4x-1 }{4x-1}$	

Найти такие значения параметра a , при которых функция будет непрерывна в указанной точке x_0

76. $\begin{cases} x; & x \leq 1 \\ a + \ln x; & x > 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$	77. $\begin{cases} \frac{1}{3^{x-2}}; & x < 2 \\ \frac{a}{x}; & x \geq 2 \end{cases} \quad x_0 = 2$
78. $\begin{cases} \frac{\sin x}{2x}; & x < 0 \\ a; & x < 0 \\ \frac{x}{2x + x^2}; & x > 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$	79. $\begin{cases} \operatorname{tg} x; & x < \frac{\pi}{4} \\ 4 \cos^2 x + a; & x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$
80. $\begin{cases} (1-x)^{1/x}; & x < 0 \\ (1+4x)^{\frac{1}{2x}}; & x > 0 \\ e^a; & x = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$	81. $\begin{cases} 3x; & x \leq 1 \\ a + \log_{1/2} x; & x > 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$

82. $\begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}; & x \leq 0 \\ \frac{a}{x+2}; & x > 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$	83. $\begin{cases} \sin(x+a); & x \leq 0 \\ e^a; & x > 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$
84. $\begin{cases} (1+2x)^{1/x}; & x < 0 \\ e^a; & x \geq 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$	85. $\begin{cases} \cos^2 x; & x \geq \frac{\pi}{6} \\ ax+4; & x < \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad x_0 = \frac{\pi}{6}$
86. $\begin{cases} (1-3x)^{2/x}; & x < 0 \\ a; & x = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$	87. $\begin{cases} 2x+1; & x \leq 2 \\ ax^2 - 2,5x; & x > 2 \end{cases} \quad x_0 = 2$
88. $\begin{cases} \operatorname{tg} x; & x < \frac{\pi}{4} \\ 4\sin^2 x - a; & x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$	89. $\begin{cases} \frac{\operatorname{tg} 4x}{2x}; & x > 0 \\ x+2a; & x \leq 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$
90. $\begin{cases} (1+3x)^{-1/x}; & x < 0 \\ e^a; & x > 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$	91. $\begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{2^{x+4}} + 1}; & x < -4 \\ \frac{a}{x+1}; & x \geq -4 \end{cases} \quad x_0 = -4$
92. $\begin{cases} \frac{1}{3^{x+1}}; & x < -4 \\ \frac{a}{x^2+1}; & x \geq -4 \end{cases} \quad x_0 = -1$	93. $\begin{cases} (1-x)^{2/x}; & x < 0 \\ (1+2x)^{-\frac{4}{x}}; & x > 0 \\ e^a; & x = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$
94. $\begin{cases} \frac{\ln(1+3x)}{2x}; & x < 0 \\ x+a; & x \geq 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$	95. $\begin{cases} \frac{\sin^2 4x}{x^2}; & x > 0 \\ a-12x; & x \geq 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$
96. $\begin{cases} \frac{1}{e^{x+3}}; & x < -3 \\ x^2 + ax; & x \geq -3 \end{cases} \quad x_0 = -3$	97. $\begin{cases} \frac{1}{5^{2x+1}} + 3; & x < -\frac{1}{2} \\ \log_2 a; & x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \quad x_0 = -\frac{1}{2}$
98. $\begin{cases} \sin^2 2x; & x \leq \frac{\pi}{6} \\ \operatorname{tg} ax - \frac{1}{4}; & x > \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad x_0 = \frac{\pi}{6}$	99. $\begin{cases} 2x+1; & x > 1 \\ a + \log_{1/3} x; & x \leq 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$

100. $\begin{cases} 2^{\frac{1}{x-2}}; & x < 2 \\ 3x + a; & x \geq 2 \end{cases} \quad x_0 = 2$	
---	--

III. Найти производную функции

1. $y = \arcsin \lg \frac{4}{x^2}$	2. $y = \frac{\cos^2 \sqrt{7x+5}}{3^{5x-1}}$
3. $y = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg} \ln(2x+1)}{e^{-x+8}}$	4. $y = \frac{\arcsin^2 \ln x}{\ln \sin \sqrt{x}}$
5. $y = \sqrt{1 + \cos^3 \frac{1}{5x}}$	6. $y = \frac{\operatorname{tg}^2 \sin x}{\ln \cos x}$
7. $y = \frac{3 \arccos(2e^{2x} - 1)}{\operatorname{tg} \ln x}$	8. $y = \frac{\ln(1 - 5^{2x})}{\cos \lg x}$
9. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 3x}}$	10. $y = 2^{-\frac{\cos^4 x}{e^x}}$
11. $y = \sqrt{\frac{2 \cos^3 3x}{\lg x + 3}}$	12. $y = \arcsin \log_2 \frac{1}{\sqrt{x}}$
13. $y = \frac{\sin^2 5x}{(x^3 + 2x)^3}$	14. $y = \frac{\arccos \ln \sqrt{x}}{(x^3 - 1)^2}$
15. $y = \frac{\operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{x+5}}}{\lg(x-1)}$	16. $y = \frac{\sin(\cos 2x)}{\arcsin^3 4x}$
17. $y = \frac{\ln \cos x}{\ln \sin x}$	18. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} x$
19. $y = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - e^{3x+5}$	20. $y = \frac{\operatorname{arctg}(x^2 + 5)}{\ln \cos x}$
21. $y = 2^{x \lg^2 x}$	22. $y = \frac{(\sqrt{x})^3}{\sin(2 \ln x)}$
23. $y = 10^{3 \lg^2 x + 2 \lg x \cdot \sin 2x}$	24. $y = e^{\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}} \cdot \operatorname{tg} 3x$

25. $y = \sin(\cos 2x) + \log_3 \frac{1}{\cos x}$	26. $y = \frac{\operatorname{tg}^3 \ln x}{x^2 - 1}$
27. $y = \frac{\sqrt[3]{\lg x + 5}}{\arcsin \sqrt{x}}$	28. $y = \frac{3 \arccos(2e^{2x} - 1)}{\operatorname{tg} 3x}$
29. $y = \frac{5 \arcsin(5^{3x} - 8)}{\operatorname{ctg} 5x}$	30. $y = \frac{\cos^3 \frac{1}{2x}}{\operatorname{arctg}(e^{3x})}$
31. $y = \cos\left(\frac{1}{\operatorname{arctg} 2^x}\right)$	32. $y = \sqrt[3]{\ln \sin \frac{1}{x^2}}$
33. $y = \frac{\ln \cos \frac{1}{x}}{e^{5x}}$	34. $y = \ln \frac{1 + \sqrt{\sin x}}{1 - \sqrt{\sin x}} + 2 \operatorname{arctg} 3x$
35. $y = \sqrt[4]{2 \operatorname{arctg}^3 x} \cdot \cos e^{4x}$	36. $y = \frac{\sin e^{x \cdot \operatorname{arctg} x}}{\ln \frac{1}{x}}$
37. $y = \frac{e^{x^2 \sin \ln x}}{\arcsin 3x}$	38. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^5 \cos 2x}}$
39. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{\arccos^{3x}}}$	40. $y = 3^{\operatorname{ctg} \frac{1}{x}} \cdot \sin \cos 2x$
41. $y = \frac{\ln \sqrt{x^2 - \cos \lg x}}{\operatorname{tg}(5^x)}$	42. $y = \operatorname{arccoa}\left(\frac{\sin^2 5x}{x}\right)$
43. $y = \ln \sqrt{\frac{1}{\arcsin 3^{2x}}}$	44. $y = 5^{\frac{3 \lg 1}{\sqrt{\cos 2x}}}$
45. $y = \frac{\sin 2x}{\cos \ln^2 3x}$	46. $y = \frac{\cos 2x}{\sin \lg^3 5x}$
47. $y = \frac{1}{3} \frac{\lg \sqrt{\sin x}}{\arcsin^2 3x}$	48. $y = \frac{\sin^2 \sqrt{3x - 1}}{5^{2x+5}}$
49. $y = \frac{e^{-3x+5}}{\operatorname{tg} \ln(7x+8)}$	50. $y = \frac{\ln \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{x}}}{\cos^3 2x}$

51. $y = \frac{\operatorname{tg}^3 \ln x}{\sin (\cos x)}$	52. $y = \frac{\cos \lg x}{\ln (1-8^{3x})}$
53. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{\sqrt[5]{\operatorname{tg}^3 \sqrt{x}}}$	54. $y = \log_3 \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}$
55. $y = \frac{\cos^3 2x}{(x^5 + 3x)^2}$	56. $y = \frac{\arcsin (x^3 - 1)}{\ln^2 \sqrt{x}}$
57. $y = \frac{\sin (\cos^2 3x)}{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}$	58. $y = \frac{\ln \cos^2 x}{\ln \sin^2 x}$
59. $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \ln \frac{x}{2} - 3^{2x+8}$	60. $y = \frac{\operatorname{arctg} \cos x}{\ln (x^2 + 5x)}$
61. $y = 3^{x^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x}}}$	62. $y = \frac{(\sqrt{x})^5}{\operatorname{tg} \frac{\sin x}{2}}$
63. $y = e^{2x + \lg \frac{1}{\sqrt{\lg x}}}$	64. $y = \frac{\operatorname{arctg}^3 \cos x}{\sin \ln x}$
65. $y = \frac{\cos \ln 3x}{\operatorname{arctg}^2 \sin x}$	66. $y = \frac{\arcsin \frac{1}{\lg 2x}}{e^{3x}}$
67. $y = \frac{\operatorname{arctg} \lg^2 \frac{1}{2x}}{3^{5x}}$	68. $y = \frac{\operatorname{arctg}^2 \cos x}{\sin^3 \frac{1}{x}}$
69. $y = \frac{x^2 \cos \frac{x}{2}}{\ln \operatorname{tg} \sqrt{x}}$	70. $y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{\lg (-x)}}$
71. $y = \frac{\sin^3 \frac{1}{\sqrt{\ln x}}}{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}$	72. $y = \frac{1}{\sin^3 \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right)}$
73. $y = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{\arcsin \frac{1}{\ln x}}}{5}$	74. $y = \frac{5}{7 \cdot \sqrt[4]{\operatorname{arctg} \frac{1}{\cos^2 x}}}$

75. $y = \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sin^2 \sqrt{x}}$	76. $y = \frac{\ln \cos 3x}{\sqrt{\arcsin 2x}}$
77. $y = \frac{\arccos 5x}{\lg \frac{1}{\sqrt{x}}}$	78. $y = 3^{x^2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}}}$
79. $y = \frac{\ln^3 \frac{1}{\sqrt{x}}}{\cos \operatorname{tg} \frac{1}{x}}$	80. $y = \cos^2 \frac{1}{\ln \operatorname{tg}^3 x}$
81. $y = \sin^3 \frac{1}{\lg \operatorname{ctg}^2 x}$	82. $y = \frac{1}{\cos^2 \lg \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{5}}$
83. $y = 2^{\sin^2 \ln \frac{\operatorname{tg} 3x}{5}}$	84. $y = \frac{1}{\ln \frac{1}{\sin 3x}}$
85. $y = \frac{1}{\ln \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}}$	86. $y = \cos^3 \lg \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} 3x}}$
87. $y = \frac{\sin \ln x}{\arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}}$	88. $y = 12^{-\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + x \right)} + \arcsin \sqrt{1 - e^x}$
89. $y = \frac{1}{2} \sin \sqrt{\ln x} - 5 \operatorname{arctg} e^{\sqrt{5x}}$	90. $y = \frac{\arcsin \operatorname{tg} \left(\frac{1}{x} + 5 \right)}{e^{5x-1}}$
91. $y = \frac{\ln \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}}{\operatorname{arctg}^2 x}$	92. $y = \frac{1}{\ln 3} \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{x} \cdot \sin \cos 2x$
93. $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg}^2 x + \log_3 \frac{1}{\cos x} \right)$	94. $y = \lg^3 \operatorname{tg} \frac{1}{\sin x}$
95. $y = \frac{1}{\sqrt[7]{\operatorname{tg} \lg \frac{1}{\cos x}}}$	96. $y = \frac{\sin \frac{1}{\sqrt[3]{\ln x + 5}}}{\cos \operatorname{tg} x}$

97. $y = \arcsin \log_2 \left(-\frac{1}{x^3} \right)$	98. $y = \sin^3 \lg \frac{1}{8x}$
99. $y = \frac{1}{\cos^2 \lg \frac{1}{16x}}$	100. $y = \cos^5 \lg \frac{1}{\arcsin 7x}$

IV. Найти пределы, используя правило Лопиталя

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}}{\sin 5x}$	2. $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 e^{-x}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$	4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 7x^2 + 4x + 2}{x^3 - 5x + 4}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$	6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - 1}{\operatorname{tg} 3x}$
7. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$	8. $\lim_{x \rightarrow 5} \left(2 - \frac{x}{5} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{10}}$
9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{2x - \pi}$	10. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$
11. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{3}{1 + \ln x}}$	12. $\lim_{x \rightarrow 0} (x \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$
13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x} + 1 \right)^x$	14. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{3}{x}$
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$	16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$
17. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x - \frac{\pi}{4}}}$	18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$
19. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x)^{\log_2 x}$	20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1}{2 \operatorname{arctg} x - \pi}$

21. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{1-x}$	22. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sin \frac{\pi x}{2}}$
23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{2x} - 5^{2x}}{2x - \operatorname{arctg} 3x}$	24. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6-x}{3} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}}$
25. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin 2x)^{\operatorname{ctg} x}$	26. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$
27. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$	28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{tg} 2x - \sin x}$
29. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(2-x)}}$	30. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$
31. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1)^{\frac{1}{x}}$	32. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}}$
33. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^{2x} - 7^{-x}}{2 \operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x}$	34. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5}{x^5 - 1} - \frac{7}{x^7 - 1} \right)$
35. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(e^x - 1)}$	36. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}$
37. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$	38. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-2x}}{x + \sin x}$
39. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x^3}$	40. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{1+2 \ln x}}$
41. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$	42. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-1)^{\frac{1}{\ln(2x-1)}}$
43. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2 - x - 5} \right)$	44. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$
45. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{tg} x - x}$	46. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$

47. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$	48. $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x + e))^{\frac{1}{x}}$
49. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}$	50. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$
51. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sqrt{2} \sin x - 1}$	52. $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$
53. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$	54. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin x}{x_2}$
55. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{\sin x}$	56. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 - \operatorname{tg}^2 x}$
57. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 125}{x^4 - 625}$	58. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{2 \sin x}$
59. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg}^2 x}$	60. $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + x)^{\frac{2}{x}}$
61. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{-x}$	62. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \ln(x - a)}{\ln(e^x - e^a)}$
63. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$	64. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 3x}{x - \sin x}$
65. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{\sin^3 2x}$	66. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \sin x}$
67. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$	68. $\lim_{x \rightarrow \infty} [(\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \ln x]$
69. $\lim_{x \rightarrow \infty} [x(e^{1/x} - 1)]$	70. $\lim_{x \rightarrow 0} [x^2 e^{1/x^2}]$
71. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x - \pi}$	72. $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + x)^{1/x}$
73. $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{tg} 2x$	74. $\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[3]{x} \ln x$

75. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \operatorname{tg} 5x$	76. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\sqrt{x}}$
77. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \cdot \ln(x + e^x)$	78. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \sin(2x - 1) \cdot \operatorname{tg} \pi x$
79. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$	80. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{m}{x^2 - 1}}$
81. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^x)^{\frac{3}{x}}$	82. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{m}{x} \right)^x$
83. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}$	84. $\lim_{x \rightarrow 1+0} (x - 1)^{\frac{5}{\ln 2(x-1)}}$
85. $\lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{ctg} 3x)^{\frac{5}{\ln x}}$	86. $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin 3x)^{\operatorname{tg}}$
87. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$	88. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$
89. $\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{4} \right)^{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}$	90. $\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\operatorname{tg} \frac{\ln x}{4} \right)^{\frac{1}{\sin \pi}}$
91. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(2 - \frac{x}{2} \right)^{\operatorname{tg} 6}$	92. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}}$
93. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{3 \operatorname{tg} x}$	94. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}}$
95. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x - 1}{x} \right)^{\frac{\ln(3 - 2x)}{\ln(2 - x)}}$	96. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$
97. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x) \operatorname{ctg}^2 x$	98. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$
99. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{\sin^2 \frac{x}{2}}$	100. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2)^{\frac{1}{x^3 - 3x}}$

V. Написать уравнения касательной и нормали к графику функции в заданной точке

1. $y = \sqrt{x^4 + 3}, \quad x_0 = 1$	2. $\begin{cases} x = t + 6t^2, \\ y = 1 - t, \end{cases} \quad x_0 = -3$
3. $y = \sqrt{x^5 + 4}, \quad x_0 = 2$	4. $\begin{cases} x = t^3 - t^2, \\ y = 2 + 4t, \end{cases} \quad t_0 = -1$
5. $y = 5x^3 + x^2, \quad x_0 = 11$	6. $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \operatorname{tg}(t + \pi), \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{3}$
7. $y = \operatorname{tg} 2x, \quad x_0 = 0$	8. $\begin{cases} x = \sin(t - 3\pi) \\ y = \operatorname{tg}(2t - \pi), \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{6}$
9. $y = \ln 2x, \quad x_0 = 0$	10. $y = \frac{3x - 4}{2x - 3}, \quad M_0(2; 2)$
11. $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = \operatorname{arctg} t, \end{cases} \quad t_0 = -\frac{1}{6}$	12. $y = 5^{x-1}, \quad x_0 = 3$
13. $y = \arcsin \frac{x-1}{2}, \quad M(1; 0)$	14. $\begin{cases} x = 2 \ln \operatorname{ctg} t + 1 \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t, \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{6}$
15. $y = \frac{1 + \sqrt{2x}}{1 - \sqrt{2x}}, \quad x_0 = 2$	16. $y = \arccos 3x, \quad M\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$
17. $\begin{cases} x = 5(\sin t - t \cos t) \\ y = 5(\cos t + t \sin t), \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{4}$	18. $\begin{cases} x = 2e^t \\ y = e^{-t}, \end{cases} \quad t_0 = 0$
19. $y = \frac{2x + \sqrt[4]{x}}{x - \sqrt[3]{x}}, \quad x_0 = -8$	20. $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos 2t, \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{6}$

21. $\begin{cases} x = t - \ln \cos t \\ y = t + \ln \sin t, \quad t_0 = \frac{\pi}{4} \end{cases}$	22. $y = x_3 + 2x^2 - 4x - 3, \quad x_0 = -2$
23. $\begin{cases} x = \arcsin(t+1) \\ y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad t_0 = -1 \end{cases}$	24. $y = \frac{3x + \sqrt[4]{x}}{3x^2 - \sqrt{x}}, \quad x_0 = 1$
25. $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}, \quad M\left[3; \frac{2}{3}\right]$	26. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \operatorname{arctg} t, \quad t_0 = 1 \end{cases}$
27. $y = \frac{2x+1}{x}, \quad M(1;3)$	28. $\begin{cases} x = 2 \ln \operatorname{ctg} t + 1, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t, \quad t_0 = \frac{\pi}{4} \end{cases}$
29. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0, \quad x_0 = 1$	30. $\begin{cases} x = 5 \sin^3 t \\ y = 5 \cos^3 t, \quad t_0 = \frac{\pi}{3} \end{cases}$
31. $y = \frac{x^2 + \sqrt[3]{x}}{x - \sqrt[3]{x}}, \quad x_0 = -8$	32. $\begin{cases} x = \arcsin(t+1) \\ y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad t_0 = -1 \end{cases}$
33. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \operatorname{arctg} t, \quad t_0 = 1 \end{cases}$	34. $\begin{cases} x = \cos \frac{t}{2} \\ y = t - \sin t, \quad t_0 = \pi \end{cases}$
35. $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0, \quad y_0 = 0$	36. $y = \frac{2x+1}{x}, \quad M(1,3)$
37. $y = \frac{1}{3x+2}, \quad M\left(2; \frac{1}{8}\right)$	38. $\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t}{1+t^3}, \quad t_0 = 1 \end{cases}$
39. $\begin{cases} x = \frac{1+\ln t}{t^2} \\ y = \frac{3+2\ln t}{t}, \quad t_0 = 1 \end{cases}$	40. $\begin{cases} x = t(1 - \sin t) \\ y = t \cdot \cos t, \quad t_0 = 0 \end{cases}$

41. $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{1}{2}\left(t + \frac{2}{t}\right), \quad t_0 = 1 \end{cases}$	42. $\begin{cases} x = 4\sin^3 t \\ y = 4\cos^3 t, \quad t_0 = \frac{\pi}{4} \end{cases}$
43. $y = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad M\left(-2; -\frac{2}{5}\right)$	44. $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{3}, \quad M(3; 1)$
45. $x^5 + y^5 - 2xy = 0, \quad y_0 = 1$	46. $\begin{cases} x = 2 \cdot e^t \\ y = e^{-t}, \quad t_0 = 0 \end{cases}$
47. $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2, \quad t_0 = -2 \end{cases}$	48. $y = \frac{2x}{x^2 + 1}, \quad M(1; 1)$
49. $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t, \quad t_0 = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$	50. $\begin{cases} x = \frac{t+1}{t} \\ y = \frac{t-1}{t}, \quad t_0 = -1 \end{cases}$
51. $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin t, \quad t_0 = \frac{\pi}{4} \end{cases}$	52. $y = \frac{1+3x^2}{x^2 + 3}, \quad M(1, 1)$
53. $\begin{cases} x = \frac{1+\ln t}{t^2} \\ y = \frac{3+2\ln t}{t}, \quad t_0 = 1 \end{cases}$	54. $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6, \quad M(1, -1)$
55. $y^2 = 2px, \quad x_0 = 1$	56. $\begin{cases} x = 4\sin^3 t \\ y = 4\cos^3 t, \quad t_0 = \frac{\pi}{6} \end{cases}$
57. $\begin{cases} x = \frac{6t}{1+t^2} \\ y = \frac{6t^2}{1+t^2}, \quad t_0 = 2 \end{cases}$	58. $\begin{cases} x = 2t \cos t \\ y = 2t \cdot \sin t, \quad t_0 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$
59. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \operatorname{arctg} t, \quad t_0 = 1 \end{cases}$	60. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1, \quad M(-9, -8)$

61. $y = \frac{3x - 2x^3}{3}, M\left(1, \frac{1}{3}\right)$	62. $\begin{cases} x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad t_0 = -1 \end{cases}$
63. $\begin{cases} x = t - t^4 \\ y = t^2 - t^3, \quad t_0 = 1 \end{cases}$	64. $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos^3 t \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \quad t_0 = \frac{\pi}{4} \end{cases}$
65. $y = \frac{x^2}{10} + 3, M\left(2, \frac{17}{5}\right)$	66. $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{4}, M\left(-2, \frac{5}{4}\right)$
67. $y = 8 \sqrt[4]{x} - 70, M(16, -54)$	68. $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos^3 t, \quad t_0 = \frac{\pi}{6} \end{cases}$
69. $\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = t^2 + t + 1, \quad t_0 = 1 \end{cases}$	70. $\begin{cases} x = 2 \operatorname{tg} t \\ y = 2 \sin^2 t + \sin^3 t, \quad t_0 = \frac{\pi}{4} \end{cases}$
71. $y = 6 \sqrt[6]{x} - \frac{16 \sqrt[4]{x}}{3}, x_0 = 1$	72. $y = \frac{3x - 2x^3}{3}, x_0 = 1$
73. $\begin{cases} x = 2 \operatorname{tg} t \\ y = 2 \sin^2 t + \sin^3 t, \quad t_0 = \frac{\pi}{4} \end{cases}$	74. $y = -\frac{2(x^8 + 2)}{3(x^4 + 1)}, x_0 = 1$
75. $y = \frac{1}{3x + 2}, x_0 = 2$	76. $\begin{cases} x = \frac{1+t^3}{t^2 + 1} \\ y = \frac{t}{t^2 - 1}, \quad t_0 = 2 \end{cases}$
77. $\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos t \\ y = \sin t, \quad t_0 = \frac{\pi}{3} \end{cases}$	78. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4 \\ y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3, \quad t_0 = 0 \end{cases}$
79. $y = \frac{1 + 3x^2}{3 + x^2}, x_0 = 1$	80. $y = \frac{1 + 2\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}, x_0 = 4$

81. $\begin{cases} x = t(t \cos t - 2 \sin t), \\ y = t(t \sin t + 2 \cos t), \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{4}$	82. $\begin{cases} x = \frac{2t + t^2}{1 + t^3}, \\ y = \frac{2t - t^2}{1 + t^3}, \end{cases} \quad t_0 = 1$
83. $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3, \end{cases} \quad t_0 = 2$	84. $x^2 + y^2 - 4 = 0, \quad x_0 = 1$
85. $y = \frac{x^2 + 3x}{x - 5}, \quad x_0 = 12$	86. $\begin{cases} x = t(1 - \sin t), \\ y = t \cdot \cos t, \end{cases} \quad t_0 = 2$
87. $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t, \end{cases} \quad t_0 = 2$	88. $\begin{cases} x = \frac{1+t}{t^2}, \\ y = \frac{3}{2t^2} + \frac{2}{t}, \end{cases} \quad t_0 = \frac{5}{6}$
89. $\begin{cases} x = 5(t \sin t + \cos t) \\ y = 5(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad t_0 = \frac{5}{4}$	90. $\begin{cases} x = \sin t \\ y = 2^t, \end{cases} \quad t_0 = 0$
91. $\begin{cases} x = t^2 + 3t^4 \\ y = t^2 - t, \end{cases} \quad t_0 = 2$	92. $y = \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x^2}, \quad x_0 = 8$
93. $\begin{cases} x = \sqrt{3} \sin^3 t \\ y = \sqrt{3} \cos^3 t, \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{6}$	94. $y = \frac{x^2 + 3x^5 - 71}{8}, \quad x_0 = 1$
95. $y = \frac{1}{3x + 1}, \quad x_0 = 3$	96. $y = \frac{x + 1}{x^2 - 1}, \quad x_0 = 2$
97. $\begin{cases} x = \sqrt{2} t \cdot \cos t, \\ y = \sqrt{2} \cdot \sin t + \sin t, \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{2}$	98. $y = x^7 - 8x^3 - \sqrt{x}, \quad x_0 = 4$
99. $\begin{cases} x = \sin t \\ y = 3^t, \end{cases} \quad t_0 = 0$	100. $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 - t^3, \end{cases} \quad t_0 = 3$

VI. Провести полное исследование функции и построить ее график

1. $y = \frac{1-x^2}{x-2}$	2. $y = \frac{x^4}{x^3-8}$
3. $y = \frac{x}{x^3+2}$	4. $y = \frac{4-x^2}{x+3}$
5. $y = \frac{x^3-3x}{x^2-1}$	6. $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$
7. $y = e^{2x-x^2}$	8. $y = x e^{\frac{1}{x}}$
9. $y = (x-2)e^{-\frac{1}{x}}$	10. $y = \frac{\ln x}{x}$
11. $y = x^2 \ln^2 x$	12. $y = x e^{-\frac{1}{x^2}}$
13. $y = x e^{-\frac{1}{x^2}}$	14. $y = x^2 - e^{\frac{2}{x}}$
15. $y = x^2 \ln x$	16. $y = \frac{\ln x}{x^2}$
17. $y = x^2 e^{-x^2}$	18. $y = \frac{x^3+4}{x^2}$
19. $y = \sqrt[3]{1-x^3}$	20. $y = \frac{x^2}{x^2+4}$
21. $y = \frac{x^2-2x+3}{x+2}$	22. $y = \frac{x^3}{x^3-4}$
23. $y = \frac{x^2}{x^2-4}$	24. $y = \frac{x^2+1}{x^2-4}$
25. $y = x \ln^2 x$	26. $y = \ln(1+x^2)$
27. $y = x e^x$	28. $y = \sqrt[3]{x^2-1}$
29. $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$	30. $y = \frac{x^2+1}{x}$

31. $y = \frac{x}{3 - x^2}$	32. $y = \frac{2 - x^2}{1 - 4x^2}$
33. $y = \frac{x^3 + x}{x^2 - 1}$	34. $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$
35. $y = \frac{2x + 1}{x^2}$	36. $y = \frac{x}{1 - x^2}$
37. $y = \frac{x}{(1 - x)^2}$	38. $y = \frac{x}{(x - 1)^2}$
39. $y = \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 - x - 1}$	40. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
41. $y = \frac{x^3 + 1}{x^2}$	42. $y = \frac{3x - 2}{5x^2}$
43. $y = \frac{x}{1 + x^2}$	44. $y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$
45. $y = \frac{x^5 - 8}{x^4}$	46. $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$
47. $y = \frac{1 + 2x}{(x + 1)^2}$	48. $y = \frac{2x}{(x - 1)^2}$
49. $y = \frac{2x^3}{x^2 - 4}$	50. $y = \frac{1 - x}{x^2}$
51. $y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}$	52. $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$
53. $y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$	54. $y = x^3 - 3x^2$
55. $y = (x - 5)e^x$	56. $y = \frac{3x}{1 + x^2}$
57. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$	58. $y = \frac{1}{1 - x^2}$
59. $y = \frac{x^4 + 1}{x^2}$	60. $y = x^3 - 5x + 3x - 5$
61. $y = (x + 1)^4 + e^x$	62. $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$

63. $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$	64. $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$
65. $y = x^3 \cdot e^{-\frac{1}{x}}$	66. $y = \frac{x+3}{x} \cdot e^{-x}$
67. $y = e^{-x^4}$	68. $y = \sqrt[3]{x} - x$
69. $y = x^2 e^{-x}$	70. $y = x^2 \cdot e^{-2x^2}$
71. $y = \frac{2x^3 + x}{x^2 - 1}$	72. $y = \frac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2}$
73. $y = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x-2}$	74. $y = \frac{\sqrt{4x^3 - x^4}}{3}$
75. $y = x^4 \cdot e^{-x}$	76. $y = (x+1)^3 \cdot \sqrt[3]{x-1}$
77. $y = (x^2 - 4) \cdot \sqrt[3]{x^2}$	78. $y = (x+2)^2 \cdot \sqrt[3]{x}$
79. $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$	80. $y = x + \frac{1}{x}$
81. $y = -x^2 \cdot e^{-x}$	82. $y = \frac{e^x}{e^x - 1}$
83. $y = \frac{e^2 \cdot \ln x}{x}$	84. $y = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$
85. $y = (x+1)^2 \cdot e^{-x}$	86. $y = \frac{x}{x-3} \cdot e^x$
87. $y = (x-1) \cdot \sqrt{x}$	88. $y = \frac{8 - x^5}{x^4}$
89. $y = \frac{2 - 3x}{5x^2}$	90. $y = -\frac{1}{5} (x^4 - 4x^3)$
91. $y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}$	92. $y = \frac{3x}{x-1} + 3x$
93. $y = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$	94. $y = \frac{x^2 - 4}{x + 3}$
95. $y = -x^2 \ln x$	96. $y = e^{x^2 - 2x}$

97. $y = -x e^{\frac{1}{x}}$	98. $y = \frac{3x - x^3}{x^2 - 1}$
99. $y = \frac{x^3}{4 - x^2}$	100. $y = \frac{x}{x^2 - 3}$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3

I. Найти область определения функции и изобразить эту область графически.

$$1. z = \frac{\ln(x-y)}{\sqrt{8-x^2-y^2}} + \sqrt{y+1}$$

$$2. z = \frac{\arccos x}{(xy)^{\frac{5}{6}}} \log_2(y - x^2 + 1)$$

$$3. z = \ln(1-y^2) \arcsin(x-2y)$$

$$4. z = \sqrt{y-2x} + \sqrt[6]{|y|-1}$$

$$5. z = \frac{\ln(x+y)}{(x+1)(|y|-2)}$$

$$6. z = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}} (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$7. z = \sqrt{x-y} \arcsin(x+2)$$

$$8. z = x\sqrt{3-|y|} + \arccos(x+3)$$

$$9. z = \frac{\sqrt{\arctg(x-1)}}{\arccos(x-y)}$$

$$10. z = y\sqrt{|x|-1} + \lg(x^2 + y^2 - 5)$$

$$11. u = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

$$12. z = \arccos \frac{x}{x+y}$$

$$13. f(r, \varphi) = r\sqrt{\sin \varphi};$$

$$14. u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}$$

$$15. z = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1-y)$$

$$16. z = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1-y)$$

$$17. u = \ln(1-x^2-y^2+z^2)$$

$$18. z = \sqrt{\log_a(x^2 + y^2)}$$

$$19. f(r, \varphi) = r\sqrt{\cos 2\varphi}$$

$$20. z = \sqrt{9-x^2-y^2} + \sqrt{x^2+y^2-4}$$

$$21. z = \ln(-x-y)$$

$$22. z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$$

$$23. u = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}$$

$$24. u = \frac{1}{(x-1)(y-2)}$$

$$25. u = \sqrt{x^2 + 4y^2 - 2x - 3}$$

$$26. u = \ln(x^2 + y^2 - 1)$$

$$27. u = \ln(y^2 - 2x)$$

$$28. u = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$29. u = \arcsin\left(\frac{x}{x+y}\right)$$

$$30. u = y + \arcsin(x+2)$$

$$31. u = \arccos\left(\frac{x}{y^2}\right)$$

$$32. u = \frac{\ln(x)\ln(y)}{\sqrt{1-x-y}}$$

$$33. u = \sqrt{xy} + \arcsin(x)$$

$$34. u = \ln(x) - \ln(\sin(y))$$

$$35. u = y + \arcsin(x+2)$$

$$36. u = \ln(\sin(xy))$$

$$37. u = \arcsin(|x|)$$

$$38. z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \arcsin x + \sqrt{1 - y^2};$$

$$39. z = (2x - y)^{\frac{1}{2}} + (4 - x^2 - 4y^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$40. z = \arcsin(2 \sin(x^2 + y^2));$$

$$41. z = (\sqrt{x-y} + \sqrt{x+y})^{-1};$$

$$42. z = \sqrt{\ln \frac{4}{x^2 - y^2}};$$

$$43. z = \ln(x^2 + y^2 - 2x) + \sqrt{1 - y^2 + x};$$

$$44. z = \frac{1}{\sqrt{xy}} + \sqrt{1 - x^2};$$

$$45. z = \ln(\cos(x^2 + y^2));$$

$$46. z = \arccos\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$47. z = \sqrt{\frac{x^2 + 2x + y^2}{x^2 - 2x + y^2}};$$

$$48. z = \arcsin\left(\frac{x}{y^2}\right) + \arcsin(1 - y);$$

$$49. z = \sqrt{y \sin x};$$

$$50. z = \ln\left(\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - 1\right);$$

$$51. z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}},$$

$(0 < r < R);$

$$52. z = \sqrt{-x} + \sqrt{y};$$

$$53. z = \arccos\left(\frac{x^2 + y^2}{9}\right);$$

$$54. z = \sqrt{x - \sqrt{y}};$$

$$55. z = \frac{x}{\sqrt{x-y}} + \frac{y}{\sqrt{x+y}};$$

$$56. z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)};$$

$$57. z = xy + \sqrt{\ln \frac{9}{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - 9};$$

$$58. z = \arcsin\left(\frac{x-y}{1+x^2}\right);$$

$$59. z = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)};$$

$$60. z = \operatorname{tg}(x+y);$$

$$61. z = \frac{1}{\sqrt{y-x^2}} + \arcsin y;$$

$$62. z = \sqrt{x \ln y};$$

$$63. z = \frac{1}{\ln(y+x+x^2)} + \sqrt{x+y};$$

$$64. z = \sqrt{(x+y) \ln(x-y)};$$

$$65. z = (e^x - y)^{-1} + (x^2 + y^2 - 4y)^{\frac{1}{2}};$$

$$66. z = \sqrt{4^x - 2^y} + \sqrt{xy};$$

$$67. z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - x^2} \arcsin y.$$

$$68. u = \sqrt[5]{\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} - 1}$$

$$69. u = \log_5\left(\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - 1\right)$$

$$70. u = \frac{2xy}{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - 1}$$

$$71. u = \sqrt{10x + 2y + 19 - y^2}$$

72. $u = \log_{3/5}(y^2 - 10x - 2y - 19)$

73. $u = \sqrt[5]{y^2 - 10x - 2y - 19}$

74. $u = \frac{7x + 4y - 1}{x^2 - 10y - 2x - 19}$

75. $u = \log_4(x^2 - 10y - 2x - 19)$

76. $u = \frac{x^2 - y^3}{\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} - 1}$

77. $u = \sqrt[4]{\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} - 1}$

78. $u = \frac{4x + 1}{\sqrt[4]{8x - y^2}} + \log_2(-8x - y^2)$

79. $u = \log_5(8y - x^2) + \log_2(x^2 + 8y)$

80. $u = \sqrt{8x - y^2} + \sqrt[4]{y^2 + 8x}$

81. $u = \arccos\left(\frac{8y}{x^2}\right)$

82. $u = \arcsin\left(\frac{8x}{y^2}\right)$

83. $u = \sqrt[6]{\frac{x^2 + 4x + y^2}{x^2 - 4x + y^2}}$

84. $u = \log_5(4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y - 68) + x^2 - y^3$

85. $u = (4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y + 4)^{1/6} + 2xy$

86. $u = \log_{1/2}(4 - 4x^2 - 9y^2 + 8x + 36y)$

87. $u = \sqrt[7]{104x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4}$

88. $u = \frac{2x^3 + e^y}{4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4}$

89. $u = \log_5(4y^2 - 3x^2 - 8y - 12x - 32)$

90. $u = \sqrt[4]{4x^2 - 3y^2 - 8x - 12y - 32}$

91. $u = \sqrt[8]{16 - x^2 - y}$

92. $u = \ln(y^2 + x - 16)$

93. $u = \sqrt[4]{16 - x^2 - y^2}$

94. $u = \sqrt{x^2 + y - 16}$

95. $u = \sqrt{x^2 + y^2 - 16}$

96. $u = \frac{5xy - y}{5x^2 - 9y^2 - 30x - 18y - 9}$

97. $u = \ln(5x^2 + 9y^2 + 30x - 18y + 9)$

98. $u = \log_2(y^2 - 10x - 2y - 19)$

99. $u = \frac{x^2 + 4xy}{x^2 - 10y - 2x - 19}$

100. $u = \sqrt[10]{10x + 2y + 19 - y^2}$

II Вычислить частные производные и полные дифференциалы от заданной функции.

1. $z = 3\sin(x^2 + y^2) - 5x^3y - 7$	2. $z = \ln(3x + 2y)$
3. $z = 8\ln(xy^3) + 10xy^2 - 8x$	4. $z = 2^{xy}$
5. $z = 2e^{3x+y^2} - 2x^2y^2 + 9y$	6. $z = \operatorname{tg}^2 x y^2$
7. $z = 8\cos(xy) - 3x - 12x^4y$	8. $z = \sqrt{x^3 - y^2}$
9. $z = 3\sqrt{x^2 + y^2} - 5x^3 + 8y$	10. $z = \sin^2(x^3 + y)$
11. $z = x\sin(xy) + 8x^2y^2 - 7x$	12. $z = \operatorname{arctg} xy$

13. $z = 0,5\ln(x^2 + y^2) - 9x^3y + 2x$	14. $z = x^{\sin y}$
15. $z = \sqrt{x + 2y} + 3x^4y - 8x - 2$	16. $z = \ln \sin(x^2 + y)$
17. $z = 8e^{x+y^2} - 3xy^3 + 7x - 3$	18. $z = \arcsin(xy + 1)$
19. $z = 8\ln(x^2 + y^2) - 6x^2y^3 + 8x - 1$	20. $z = \cos(\sin xy)$
21. $z = \ln(x + e^y)$	22. $u = x^2yz + e^{xyz}$
23. $z = x e^{\frac{y}{x}}$	24. $u = z \ln(x + y) + z^y$
25. $z = x^y$	26. $u = x^y + y^z$
27. $z = e^{\frac{y}{x}}$	28. $u = \ln(x + yz) + xyz$
29. $z = \sin(x + xy)$	30. $u = x e^{\frac{z}{y}}$
31. $z = e^{xy}$	32. $u = z^2 e^x + z^2 y$
33. $z = e^{\cos(x+y)}$	34. $u = xyz + x^2 + e^{xy}$
35. $z = \sin^2(y + x)$	36. $u = \cos(xyz)$
37. $z = \frac{y}{x}$	38. $u = \ln \frac{x + y}{y + z}$
39. $z = y \sqrt{\frac{y}{x}}$	40. $u = x \ln \frac{y}{z}$
41. $z = \sqrt{\frac{x}{y}}$	42. $u = \sqrt{xyz}$
43. $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$	44. $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$
45. $z = \frac{\sin(x - y)}{x}$	46. $u = \cos(xy) + \sin(yz) + z^x$
47. $z = x^{\cos y}$	48. $u = \operatorname{arctg}\left(\frac{xy}{z}\right) + e^{xz}$
49. $z = \frac{x^2}{y^2}$	50. $u = z^y + y^x$
51. $z = \arcsin \frac{x}{y}$	52. $u = \frac{x^2 + y^2}{x + y + z}$
53. $z = \sin(xy^2)$	54. $u = 3^z \ln \frac{xy}{x + y}$
55. $z = \log_5(x^2 + y^2)$	56. $u = e^{xy} + z^{xy}$

57. $z = x^{\ln y}$	58. $u = \cos \frac{(x-y)z}{x^2 + y^2}$
59. $z = e^{xy^2}$	60. $u = (x-y)^z \ln(xy)$
61. $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$	62. $u = \cos \frac{x-y}{xy} - \ln xz$
63. $z = y \ln \frac{x}{y}$	64. $u = z \cdot \sin(xy + yz)$
65. $z = 2 \cos^2 \left(x - \frac{y}{2} \right)$	66. $u = (x+z)^y + x \ln(yz)$
67. $z = e^{\frac{x}{y}}$	68. $u = \ln(x^2 z) + x^{yz}$
69. $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$	70. $u = z^y + y^x$
71. $z = \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2})$	72. $u = x^{y/z}$
73. $z = \operatorname{tg} \frac{y^2}{x}$	74. $u = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}}$
75. $z = \ln \cos \frac{x}{y}$	76. $u = x^{y^2}$
77. $u = (xy)^z$	78. $u = x^{y^z}$
79. $u = x^y$	80. $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$
81. $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$	82. $u = \sqrt[z]{\frac{x}{y}}$
83. $u = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	84. $u = x^2 + y^3 + 3x^2 y^3$
85. $u = xy^2 z^3 + \frac{x}{y^2 z^3}$	86. $u = \cos(xy)$
87. $u = \sin(x + yz)$	88. $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$
89. $u = \operatorname{tg}(x + y)e^{x/y}$	90. $u = \sqrt{x^2 + y^2} e^{x/y}$
91. $u = xy \ln(xy)$	92. $u = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
93. $u = x^{yz}$	94. $u = \left(\frac{y}{x} \right)^z$
95. $u = z^{x/y}$	96. $u = x^{y^z}$
97. $u = x^y y^z z^x$	98. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$

99. $z = y^2 + y\sqrt{x} + x + y + 10$

100. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

III. Найти производную $\frac{\partial y}{\partial x}$ от неявно заданной функции.

1. $x^3y + y^3x = 2$

2. $x^2y^2 - x^4 - y^4 = -1$

3. $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$

4. $y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}}$

5. $xy - \ln y = \frac{1}{e-1}$

6. $yx^2 + e^{y-1} = 2$

7. $ye^x + e^y = 2e$

8. $x^2 + y^2 + \lg(x+y) = 5$

9. $3xy + y \operatorname{arctg} x = 1$

10. $2 \sin xy + xe^{\frac{y-\pi}{6}} = 2$

11. $2^{xy} - 3xy^2 + 2y^3 = 0$

12. $y^2 + 3x^2 - xz^2 - 3y + 4zy^2 - 1 = 0$

13. $\cos(2x + y^3) - 4x^y + 3x^3y - 2x = 0$

14. $e^{yz} + \sin(x + z^2) - 2y^3 + \sqrt{3x} = 0$

15. $\sin(3y^2 + x) + 3x^2y - 2 + 3 = 0$

16. $2z^2y + 3xy - y^2x + xe^{3z} = 0$

17. $\operatorname{tg}(y^3x^2) - 2xy + y^{2x} + 3x = 0$

18. $x^3y - 2xyz + z^2y^3 = 0$

19. $\operatorname{ctg}(2y^2x) - 3 \ln xy - 2xy = 0$

20. $\operatorname{ctg}(2y^2x) - 3 \ln xy - 2xy = 0$

21. $z^5 - x \sin(zy) + \sqrt{xz} = 0$

22. $3x^2y + e^{3x+y} = 0$

23. $(2x+1)^{3y} + \ln(xyz) + zx^2y = 0$

24. $(4xy+5)^{2x+1} + 2 \sin(x^2y^3) + 1 = 0$

25. $2xz^3 + x^3y^2 + z^4 = 0$

26. $x \operatorname{tg}(y^2x) - e^{xy} + 2 = 0$

27. $\arcsin(x+y) + xz^2 + zy^2 = 0$

28. $\cos(x+y) + \sin(y+x) = 0$

29. $x^2 + y + z^3 + e^{xyz} = 0$

30. $x \operatorname{tg} y + (x+y)^2 = 0$

31. $e^z + z^2 + 2xy = 0$

32. $x^2 + y^2 + x^y = 0$

33. $z - x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x} = 0$

34. $x^2y + \arcsin(x+y) = 0$

35. $\cos(x+z) + \sin(xyz) = 0$

36. $x^2y + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0$

37. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4yz + 1 = 0$

38. $xy - \ln(xy) = 0$

39. $xyz - x^3 - y^3 - z^3 - 3 = 0$

40. $x^2y + \arccos(x^2 + y^2) = 0$

41. $\frac{y}{z} - \ln \frac{x}{z} = 0$

42. $x^2 + y^2 - \ln(xy) = 0$

43. $x - z \ln \frac{z}{y} = 0$

44. $x^2 + e^{xy} + x \ln y = 0$

45. $x^2 + 2y^3z + yx = 0$

46. $\cos^2 x + \cos^2 y + 1 = 0$

47. $e^{xyz} + xyz = 0$

48. $x^2 y + \sin(x^2 + y^2) = 0$

49. $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + 1 = 0$

50. $\operatorname{tg}(x y) + x^2 y = 0$

51. $z^2 + y e^{\frac{x}{z}} = 0$

52. $x^2 - 2 y^2 + x y = 0$

53. $x \sin(y z) + y \cos(x z) = 0$

54. $\cos^2(x^2 + y^2) + x y = 0$

55. $x^2 y z + x^z = 0$

56. $x^y + e^{yx} + 2 = 0$

57. $x y z + \ln(x^2 + y^2 + z^2) - 3 = 0$

58. $x^2 y + \sin(x^2 + y^2) = 0$

59. $\operatorname{tg}(x y z) + \sin(x + z) = 0$

60. $\operatorname{tg}^2(x y) + x y + y^2 = 0$

61. $x(y^2 + z^2) + e^{xz} = 0$

62. $x^2 - 2 y^2 + z^2 - 4 x + 2 z + 2 = 0$

63. $x \cos y + y \cos z + z \cos x = \pi/2$

64. $\ln \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} = a,$

65. $z^3 - 4 x z + y^2 - 4 = 0,$

66. $x^2 - 2 y^2 + 3 z^2 - y z + y = 2$

67. $x - y + \operatorname{arctg} y = 0$

68. $x \sin y + \cos 2 y = \cos y$

69. $x^2 + 2 x y + y^2 - 4 x + 2 y - 2 = 0$

70. $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = a \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

71. $z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z - x},$

72. $e^z = \cos x \cdot \cos y$

73. $\frac{x}{z} = \ln \frac{y}{z} + 1,$

74. $2 x^2 + 2 y^2 + z^2 - 8 x z + 6 = 0$

75. $x^3 + 3 x y z - z^3 - 27 = 0$

76. $x^2 + 2 y^2 + 3 z^2 - 59 = 0$

77. $x^2 - y^2 - z^2 + 6 z + 2 x - 4 y + 12 = 0$

78. $x^2 + y^2 + z^2 = y - z + 3$

79. $x^3 + 2 y^3 + z^3 - 3 x y z - 15 = 0$

80. $x^2 + y^2 + z^2 - 2 x z = 0$

81. $x^2 + y^2 + z^2 - x y = 2$

82. $e^z + x + 2 y + z = 4$

83. $z^3 + 3 x y z + 3 y = 7$

84. $e^{z-1} = \cos x \cdot \cos y + 1$

85. $x y = z^2 - 1$

86. $x^2 + y^2 + z^2 + 2 x z - 5 = 0$

87. $3 x^2 y^2 + 2 x y z^2 - 2 x^3 z + 4 y^3 = 0$

88. $z^2 - x y + z - x^2 + 4 = 0$

89. $\ln z - x + 2 y - z + \ln 3 = 0$

90. $x^2 + y^2 + z^2 - 2 x y - 2 y z - 17 = 0$

91. $\sqrt{x^2 + y^2} + z^2 - 3 z - 3 = 0$

92. $x^2 + y^2 + z^2 + 2 x y - y z - 4 x - 3 y = 0$

93. $x^2 - 2 x y - 3 y^2 + 6 x - 2 y + z^2 - 8 z = 0$

94. $e^z - x y z - x + 1 = 0$

95. $x + y + z + 2 - x y z = 0$

96. $x^3 + y^3 + z^3 - 3 x y z = 4$

97. $3 x - 2 y + z = x z + 5$

98. $x^2 + y^2 + z^2 - z - 4 = 0$

99. $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \frac{3}{2}$

100. $x^2 + y^2 + z^2 - 6 z = 0$

IV Найти уравнение касательной плоскости и нормали**к поверхности в т. M_0**

1. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, M_0\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

2. $z = x^2 + y^2, M_0(1, -2, 5)$

3. $z = \sin x \cdot \cos y, M_0\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$

4. $x^2 + y^2 - z^2 = 0, M_0(1, 0, 1)$

5. $x^2 + y^2 - z^2 = -1, M_0(2, 2, 3)$

6. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 2, M_0(3, 2, 1)$

7. $z = 1 + x^2 + y^2, M_0(1, 1, 3)$

8. $y = x^2 + z^2, M_0(1, 5, 2)$

9. $z = \ln(x^2 + y^2), M_0(1, 0, 0)$

10. $x^2 - y^2 + z^2 = 1, M_0(1, 1, 1)$

11. $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy, M_0(3, 4, -7)$

12. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{8} = 0, M_0(4, 3, 4)$

13. $x^2yz + 2x^2z - 3xyz + 2 = 0,$
 $M_0(1, 0, -1);$

14. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0, M_0(4, 3, 4);$

15. $x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 5, M_0(1, 2, 1);$

16. $z = x^2 - y^2, M_0(1, 1, 0).$

17. $z = \sin x \cdot \cos y$

$M_0\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$

18. $z = y \operatorname{tg} \frac{x}{a}, M_0\left(\frac{\pi a}{4}; a; a\right),$

19. $z = 4 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} M_0\left(1; 1; \frac{\pi}{4}\right),$

20. $z = x + y - e^{x-2y}, M_0(1; -1; -e^3),$

21. $z = x^2 e^{2y} - y^2 e^{2x}, M_0(1; 1; 0),$

22. $z = \frac{\cos^2 xy}{x}, M_0\left(1; \frac{\pi}{3}; \frac{1}{4}\right),$

23. $z = x^y M_0(1; 1; 1),$

24. $z = \frac{y}{x^3 - y^3} M_0\left(1; -1; \frac{1}{2}\right),$

25. $z = x y e^{\sin \pi x y} M_0(1; 1; 1),$

26. $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y} M_0\left(\frac{\pi}{4}; 1; 0\right),$

27. $z = (1 + x y)^y M_0(1; 1; 2)$

28. $z = \sin \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{y \pi^2}{x}, M_0\left(1; \frac{2}{\pi}; 1\right),$

29. $z = xy \ln(x + y) M_0(1; 1; \ln 2),$

30. $z = \ln(x + \ln y) M_0(1; 1; 0),$

31. $z = (\sin x)^y M_0\left(\frac{\pi}{6}; 1; \frac{1}{2}\right),$

32. $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0, M_0(1; -2; 2)$

33. $x^2 y - e^{xy} + z^2 - \sin z + 1 = 0,$
 $M_0(1; 0; 0).$

34. $(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5, M_0(1; 1; 2)$

35. $xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy} + z) = 0,$
 $M_0(0; 0; -1).$

36. $x^3 + y^2 - 4xy + 3 = 0,$
 $M_0(1; -2; 2)$

$$37. \quad x^2 + y + z^2 + 4z = 0, \\ M_0(2; -1; -1).$$

$$38. \quad x(y+z)(xy-z) + 8 = 0, \\ M_0(2; 1; 3)$$

$$39. \quad x^2 y - e^{xy} + z^2 - \sin z + 1 = 0, \\ M_0(1; 0; 0).$$

$$40. \quad 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz = 3, \\ M_0(1; 1; 1)$$

$$41. \quad x + 2y - \ln z + 4 = 0, \\ M_0(2; -3; 1)$$

$$42. \quad 4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z, \\ M_0(2; 3; 6)$$

$$43. \quad xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy} + z) = 0, \\ M_0(0; 0; 1).$$

$$44. \quad z^3 + y^2 - 4xz + 3 = 0 \quad (1; -2; 2)$$

$$45. \quad z^2 - \sqrt{y^2 - z^2} + \frac{2}{x} = 0, \\ M_0(1; 2; 0).$$

$$46. \quad x(y+z) \cdot (xy-z) + 8 = 0, \\ M_0(2; 1; 3)$$

$$47. \quad x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz - 2xz + 16 = 0 \\ M_0(1; 2; 3)$$

$$48. \quad 2^{x/y} + 2^{y/z} = 8 \quad M_0(2; 2; 1).$$

$$49. \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8, \\ M_0(0; -2; 0)$$

$$50. \quad z \ln(x+z) - \frac{xy}{z} = 0, \\ M_0(0; 1; 1).$$

$$51. \quad z = x^2 e^{2y} - y^2 e^{2x} \quad M_0(1; 1; 0),$$

$$52. \quad (z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5, \\ M_0(1; 1; 2)$$

$$53. \quad 2x^2 2y^2 + z^2 + 8xz - z - 8 = 0, \\ M_0(0; 2; 0).$$

$$54. \quad 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz = 3, \\ M_0(1; 1; 1)$$

$$55. \quad e^z - xyz = e \quad M_0(1; 1; 0).$$

$$56. \quad x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz - 2xz + 16 = 0, \\ M_0(1; 2; 3).$$

$$57. \quad 2^{x/z} + 2^{y/z} = 8 \quad M_0(2; 2; 1).$$

$$58. \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8, \\ M_0(0; -2; 0).$$

$$59. \quad z \ln(x+z) - \frac{xy}{z} = 0, \\ M_0(0; 1; 1)$$

$$60. \quad 4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z, \\ M_0(2; 3; 6)$$

$$61. \quad e^z - xy^2 z = e \quad M_0(1; 1; 0)$$

$$62. \quad x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz + 16 - 2xz = 0, \\ M_0(1; 2; 3).$$

$$63. \quad z = x \ln \frac{y}{x}, \quad M_0(1; 1; 0),$$

$$64. \quad z = x \sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}, \quad M_0(1; 1; 2),$$

$$65. \quad z = \left(\frac{1}{3}\right)^{y/x} \quad M_0\left(1; 1; \frac{1}{3}\right),$$

$$66. \quad z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y} \quad M_0\left(\frac{\pi}{4}; 1; 0\right),$$

$$67. \quad z = x^{xy} \quad M_0(1; 1; 1),$$

$$68. \quad z = (x + 2y)^{x+2y}, \quad M_0(1; 1; 2z),$$

$$69. z = \operatorname{arctg} \sqrt{x^y}, M_0\left(1; 1; \frac{\pi}{4}\right),$$

$$70. z = 4e^{-2y} + (2x + 4y - 3)e^{-y} - x - 1, \\ M_0\left(-1; 1; 4e^{-2} - e^{-1}\right)$$

$$71. z = \frac{y}{x^3 - y^3} \quad M_0\left(1; -1; \frac{1}{2}\right),$$

$$72. z = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad M_0\left(1; 1; \frac{1}{2}\right),$$

$$73. z = xe^{-xy} \quad M_0\left(1; 1; \frac{1}{e}\right),$$

$$74. z = e^{y \cos x} \quad M_0\left(\pi; 1; \frac{1}{e}\right),$$

$$z = x - y + \operatorname{arctg} y,$$

$$75. M_0\left(-1; \frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right),$$

$$76. z = x \operatorname{tg} \frac{y^2}{a} \quad M_0\left(a; \frac{\pi a}{4}; a\right),$$

$$77. z = 4x - xy + y^2 \quad M_0(1; 1; 4),$$

$$78. z = e^{x \cos y} \quad M_0\left(1; \pi; \frac{1}{e}\right),$$

$$79. (y-1)^2 = \frac{4^2}{5}(z-1), M_0(1, 5, 6)$$

$$80. (z-1)^2 = -\frac{5^2}{4}(y-1),$$

$$M_0(1, -3, 6)$$

$$81. (y-1)^2 = -\frac{4^2}{5}(x-1),$$

$$M_0(2, 5, 5)$$

$$82. (x-1)^2 = \frac{1}{5}(z-1), M_0(2, 4, 6)$$

$$83. (x-1)^2 = \frac{1}{4}(y-1), M_0(2, 5, 5)$$

$$84. \frac{y^2}{3^2} - \frac{z^2}{1^2} = 1, M_0(2, 3\sqrt{2}, 1)$$

$$85. \frac{x^2}{2^2} + \frac{z^2}{1^2} = 1, M_0\left(\sqrt{2}, 3, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$86. x^2 + y^2 - z + 1 = 0, M_0(1; 1; 3)$$

$$87. \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1, M_0(2\sqrt{2}, 3, 1)$$

$$88. \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1, M_0\left(\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, 1\right)$$

$$89. \frac{x^2}{1^2} + \frac{z^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = -1,$$

$$M_0(1, 4\sqrt{3}, 5)$$

$$90. \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{4^2} - \frac{z^2}{5^2} = 0,$$

$$M_0(1, 4, 5\sqrt{2})$$

$$91. \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{4^2} - \frac{z^2}{5^2} = -1,$$

$$M_0(1, 4, 5\sqrt{3})$$

$$92. \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{4^2} - \frac{z^2}{5^2} = 1, M_0(1, 4, 5)$$

$$93. x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0,$$

$$M_0(-1; -1; 1)$$

$$94. \frac{x^2}{3^2} + \frac{z^2}{4^2} - \frac{y^2}{1^2} = -1,$$

$$M_0(3, \sqrt{3}, 4)$$

$$95. x^2 - y^2 + z - 1 = 0, M_0(1; 1; 1)$$

$$96. \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{1^2} - \frac{z^2}{4^2} = -1,$$

$$M_0(3, 1, 4\sqrt{3})$$

$$97. \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{1^2} - \frac{z^2}{4^2} = 1,$$

$$M_0(3, 1, 4)$$

$$98. \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{1^2} + \frac{z^2}{4^2} = 1,$$

$$M_0\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$99. -x^2 + y^2 + z + 1 = 0,$$

$$M_0(-1; 1; -1)$$

$$100. \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{1^2} - \frac{z^2}{4^2} = 0,$$

$$M_0(3, 1, 4\sqrt{2})$$

У Найти экстремумы функций нескольких переменных

$$1. z = x^2 + xy + y^2 - 3x = 6y - 2$$

$$2. z = 2x^2 - xy + y^2 - 3x - y + 1$$

$$3. z = 3x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 3$$

$$4. z = 2x^2 + xy - y^2 - 7x + 5y + 2$$

$$5. z = x^2 - 3xy - y^2 - 2x + 6y + 1$$

$$6. z = 3x^2 + xy - 6y^2 - 6x - y + 9$$

$$7. z = x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x + 6y - 2$$

$$8. z = 4x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 4y + 1$$

$$9. z = 0,5x^2 + xy + y^2 - x - 2y + 8$$

$$10. z = 8x^2 - xy + 2y^2 - 16x + y - 1$$

$$11. z = 2x^2 + 4xy - y^2 + 4x - 4$$

$$12. z = 5x^2 - 3xy + y^2,$$

$$D: x \geq -1, y \geq -1, x + y \leq 1$$

$$13. z = 3x^2 - 3xy + 2y^2 + 4y + 2$$

$$14. z = 10 + 2xy - x^2,$$

$$D: 0 \leq y \leq 4 - x^2$$

$$15. z = x^2 + xy + 2y^2 + 8x + 4y - 2$$

$$16. z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x,$$

$$D: x \geq 0, x + y - 2 \leq 0, y \geq 0$$

$$17. z = 2x^2 - 5xy - y^2 + 4x - y + 3$$

$$18. z = x^2 + xy - 2,$$

$$D: 4x^2 - 4 \leq y \leq 0$$

$$19. z = 3x^2 + 4xy + y^2 - x + 2y + 7$$

$$20. z = x^2 + xy,$$

$$D: -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3$$

$$21. z = 4x^2 - 3xy + 2y^2 - 5x + 3y + 8$$

$$22. z = x^2 - xy + y^2 - 4x,$$

$$D: x \geq 0, y \geq 0, 2x + 3y - 12 \leq 0$$

$$23. z = 5x^2 - xy + 2y^2 - 3x + 5y + 9$$

$$24. z = x^2 + 3y^2 - x - y,$$

$$D: x \leq 1, y \leq 1, x + y \geq 1$$

$$25. x^3 + y^3 - 3xy,$$

$$D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3$$

$$26. z = 3x^2 - 5xy + 2y^2 - x + 2y + 5$$

27. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$,
D: $x + y \leq 3$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
28. $z = 5x^2 - xy + 2y^2 - 3x + y + 1$
29. $z = xy - 2x - y$,
D: $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 4$
30. $z = 3x^2 - 2xy + y^2 + 6x + 7y - 2$
31. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$,
D: $y \leq 3$, $y \geq \frac{1}{3}x^2$
32. $z = 2x^2 + 5xy + 7y^2 - x + 2y - 1$
33. $z = 2x + y - xy$,
D: $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4$
34. $z = 3x^2 + xy + 5y^2 - x - y + 2$
35. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$,
D: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$
36. $z = x^2 3xy + 2y^2 - 3x + 4y + 3$
37. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$,
D: $x + y + 3 \geq 0$, $x \leq 0$, $y \leq 0$
38. $z = 2x^2 + 5xy + y^2 + x + 2y - 1$
39. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$,
D: $y - x - 1 \leq 0$, $y \geq 0$, $x \leq 0$
40. $z = x^2 + 3xy - 2y^2 + 3x - y - 1$
41. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x - y$,
D: $y \leq x + 2$, $y \geq 0$, $x \leq 0$
42. $z = 3x^2 - xy + 4y^2 + x - 5y + 6$
43. $z = x^2 2xy + 2y^2 + 4x + 1$,
D: $x + y + 1 \leq 0$, $y \geq 0$, $x \geq -3$
44. $z = x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + y - 3$
45. $z = 4x + 2y + 4x^2 + y^2 + 6$,
D: $x + y + 2 \geq 0$, $x \leq 0$, $y \leq 0$
46. $z = 2x^2 + 5xy + x + y - 5$
47. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$,
D: $x + y - 1 \leq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
48. $z = x^2 + 3xy - y^2 - 2x - y + 3$
49. $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$,
D: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \leq 3 - x$
50. $z = 2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y + 3$
51. $z = x^2 + y^2 - 9xy + 1$,
D: $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 3$
52. $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2 = 7$
53. $z = x^2 + 2y^2 + 1$,
D: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 3$
54. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$
55. $3 - 2x^2 - xy - y^2$,
D: $x \leq 1$, $y \geq 0$, $y \leq x$
56. $z = x^2 + 2xy + 4y^2 + 2x - 8y + 1$
57. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$,
D: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$
58. $z = 5x^2 - 8xy + 2y^2 + 2y + 2$
59. $z = x^2 + 2xy + 2y$,
D: $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$
60. $z = xy^2(1 - x - y)$ ($x > 0$, $y > 0$)
61. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$
62. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ ($x > 0$, $y > 0$)
63. $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$ ($x > 0$, $y > 0$)

$$65. z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$$

$$66. z = (2x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$67. z = 2 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$$

$$68. z = x^2 + xy + y^3 - 2x - y$$

$$69. z = 2x^3 + 3x^2 - 6xy$$

$$70. z = x^2 + 8y^2 + 6xy - 1$$

$$71. z = -x^2 + 3x - xy - y^2 + 6y$$

$$72. u = x^2 - xy + y^2$$

$$73. u = x^2 - xy - y^2$$

$$74. u = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$$

$$75. u = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$$

$$76. u = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$$

$$77. u = x^3 - 2x^2y^2 + y^4$$

$$79. u = e^{x+2y}(x^2 - y^2)$$

$$80. u = e^{x-y}(x^2 - 2xy + 2y^2)$$

$$81. u = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$82. u = (x - 2y)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$83. u = xy \ln(x^2 + y^2)$$

$$84. z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2;$$

$$85. z = x^3 + y^3 - 9xy + 27;$$

$$86. z = y^3 - 2x^2y + 3y^2 + 2x^2;$$

$$87. z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2;$$

$$88. z = y^2 - 2x + x^2 - 2y - 4\sqrt{xy} + 8;$$

$$89. z = xy \ln(x^2 - y^2);$$

$$90. z = 6xy - 9y^2 - 9x^2 + 4x + 4y;$$

$$91. z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y}, \begin{cases} x > 0, \\ y > 0. \end{cases}$$

$$92. z = x^2 + 2xy + 4x - y^2;$$

$$93. z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)};$$

$$94. z = 5x^2 - 3xy + y^2;$$

$$95. z = xy(1 - x - y);$$

$$96. z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y;$$

$$97. z = 1 - (x^2 + y^2)^{3/2};$$

$$98. z = x^{\frac{1}{2}}(x + y^2).$$

$$99. z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20;$$

$$100. z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1;$$

§5. Правила выполнения и оформления контрольных работ

1. Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради. Необходимо оставлять поля шириной 4 - 5 см для указаний и замечаний рецензента.
2. На обложке тетради должны быть написаны фамилия, инициалы, номер зачетной книжки студента, название дисциплины, номер контрольной работы, название учебного заведения, дата отсылки в УГНТУ и адрес студента.
3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по положенному варианту. Варианты определяются преподавателем.
4. Решения задач надо располагать в порядке возрастания номеров задания, сохраняя номера задач.
5. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, делая необходимые чертежи.
6. Номер варианта определяется двумя последними цифрами номера зачетной книжки.

В случае незачета и отсутствия прямого указания рецензента о том, что студент может ограничиться представлением исправленных решений отдельных задач, вся работа должна быть выполнена заново.

§6. Календарный план курса математики для студентов -заочников инженерно- технических специальностей

1. Содержание лекций. Определители и их свойства. Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя. Решения систем линейных уравнений с тремя неизвестными. Формулы Крамера. Метод Гаусса. Матрицы. Действия над матрицами. Обратная матрица и ее единственность. Однородные системы 2-х линейных уравнений с тремя неизвестными. Скалярные и векторные величины. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов и их свойства. Условия перпендикулярности, коллинеарности и компланарности векторов.

Уравнение плоскости и прямой, проходящей через данную точку с заданным вектором нормали. Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Угол между прямыми. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей (прямых). Уравнение прямой с угловым коэф-

фициентом. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых. Расстояние от точки до прямой. Расстояние от точки до плоскости.

Кривые второго порядка. Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду. Полярная система координат. Поверхности второго порядка. Введение в математический анализ функции одной переменной. Предел функции в точке и на бесконечности. Односторонние пределы. Первый и второй замечательные пределы и их следствия. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва и их классификация. Непрерывность элементарных функций. Математический анализ функции одной переменной. Производная функции. Правила дифференцирования. Производная сложной функции. Таблица производных. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически. Повторное дифференцирование. Дифференциал. Его свойства и приложения в приближенных вычислениях. Признаки монотонности экстремумов функций, выпуклость, вогнутость, точки перегиба. Правило Лопиталя - Бернулли. Асимптоты. Необходимое и достаточное условия их существования. Исследование функции и построение ее графика.

Понятие функции нескольких переменных и ее график. Полное приращение, полный дифференциал. Частные приращения, частные производные и их геометрический смысл для функции двух переменных.

Экстремумы функции двух переменных. Необходимые и достаточные условия. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой ограниченной области.

2. Содержание практических занятий. Определители и их свойства. Матрицы. Обратная матрица. Решение систем линейных уравнений. Матричный метод, метод Крамера и Гаусса. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов. Прямая на плоскости. Плоскость и прямая в пространстве. Кривые второго порядка.

Пределы. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация. Дифференцирование функций. Экстремумы функции. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба. Асимптоты функции. Исследования функции и построение ее графика.

Частные производные. Экстремумы функции двух переменных. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой ограниченной области.

Список литературы

1. Клетеник Д.В., Сборник задач по аналитической геометрии /Под ред. Н.В. Ефимова. - М.: Наука, 1986. - 224 с.
2. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии - М.: ГИФМЛ, 1962. - 228 с.
3. Данко П.В., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. - М.: Высшая школа, 1980. - Ч. 1 - 320 с.
4. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа. /Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. - М.: Наука, 1981. - 368 с.
5. Пискунов Н.Г. Дифференциальное и интегральное исчисления - М.: Наука, 1985.- Т. 1 - 456 с.
6. Пискунов Н.Г. Дифференциальное и интегральное исчисления - М.: Наука, 1970. -Т. 2 - 576 с.
7. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: Наука, 1976. - 320 с.
8. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.: Наука, 1984 - 432 с.
9. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. - М.: Наука, 1968. - 336 с.
10. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. - М.: Наука, 1980 - 176 с.
11. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. - М.: Наука, 1981. - 232 с.
12. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. - М.: Наука, 1973. - 720 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава I. Матрицы и определители.....	1
§1. Свойства определителей 2-го и 3-го порядков.....	1
§2. Алгебраические дополнения и миноры.....	3
§3. Алгебраические операции над матрицами.....	3
§4. Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений. Формулы Крамера.....	5
§5. Метод Гаусса решения систем алгебраических линейных уравнений. (Метод исключения).....	7
Глава II. Элементы векторной алгебры.....	12
§1. Действия над векторами.....	12
§2. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов.....	14
§3. Векторный базис. Координаты вектора.....	14
§4. Прямоугольная декартова система координат. Деление направленного отрезка в заданном отношении.....	17
§5. Проекция вектора (направленного отрезка) на ось.....	18
§6. Скалярное произведение двух векторов и его свойства.....	19
§7. Векторное произведение двух векторов и его свойства.....	22
§8. Смешанное произведение трех векторов и его свойства.....	24
Глава III. Аналитическая геометрия на плоскость и в пространстве.....	25
§1. Прямая на плоскости.....	25
§2. Плоскость.....	28
§3. Прямая в пространстве.....	31
§4. Плоскость и прямая в пространстве.....	34

§5. Кривые второго порядка.....	36
Глава IV. Введение в математический анализ.....	38
§1. Предел переменной величины. Предел функции.....	38
§2. Свойства бесконечно малых функций (БМФ).....	40
§3. Основные теоремы о пределах функций.....	41
§4. Неопределенность вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}, \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}, \{\infty - \infty\}, \{0 \cdot \infty\}$	42
§5. Непрерывные функции и их свойства.....	44
§6. Свойства функций, непрерывных на отрезке.....	47
Глава V. Математический анализ функций одной переменной.....	48
§1. Производная функции и ее свойства.....	48
§2. Производная функции, заданной неявно.....	52
§3. Приложения производной в геометрии и механике.....	52
§4. Приращение и дифференциал функции.....	53
§5. Правило Лопиталья- Бернулли раскрытия неопределенностей.....	55
§6. Исследование функции и построение ее графика.....	56
Глава VI. Математический анализ функции многих переменных.....	58
§1. Области определения функций и их изображения.....	58
§2. Частные производные и дифференциалы функций многих переменных.....	60
§3. Производная функции, заданной неявно. Экстремумы функций двух переменных.....	64
§4. Контрольные работы.	69
§5. Правила выполнения и оформления контрольных работ.....	141

§6. Календарный план курса математики для студентов-заочников

инженерно- технических специальностей.....	141
Список литературы.....	143

Редактор М.Е. Галина

Подписано в печать . Бумага офсетная №2. Формат 60х84 1/16.

Гарнитура «Таймс». Печать офсетная. Усл.-печ. л. 6,0. Уч.-изд. л. 5,3.

Тираж 1000 экз. Заказ .

Издательство Уфимского государственного нефтяного технического университета
 Типография Уфимского государственного нефтяного технического университета

Адрес издательства и типографии:
 450062, г. Уфа, ул. Космонавтов, 1.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Понятие числовой матрицы. Квадратные матрицы. Определители 2-го порядка и их свойства.
2. Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя 3-го порядка. Определитель 3-го порядка. Правило Саррюса. Теорема о разложении определителя 3-го порядка по элементам строки (столбца).
3. Свойства определителей 3-го порядка.
4. Системы линейных уравнений. Правило Крамера.
5. Понятие равенства двух матриц. Действия над матрицами. Обратная матрица. Единственность обратной матрицы. Матричный способ решения систем линейных уравнений.
6. Ранг матрицы. Теорема Кронекера - Капеллы $\Leftrightarrow$ условие $\exists$ ненулевого решения системы линейных однородных уравнений (ранг матрицы системы меньше числа неизвестных). Система двух линейных однородных уравнений с тремя неизвестными.
7. Понятие вектора. Действия над векторами. Свойства.
8. Коллинеарные векторы. Умножение вектора на число и его свойства.
9. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Теоремы. Следствия.
10. Геометрическая интерпретация линейной зависимости системы из 2-х векторов. Следствие.
11. Компланарность векторов. Геометрическая интерпретация линейной зависимости системы из 3-х векторов. Следствие.
12. Аксиоматика векторного пространства. Понятие размерности векторного пространства над множеством действительных чисел. Базис. Координаты вектора. Единственность координат. Примеры.
13. ϑ_2 . Базис.
14. ϑ_3 . Базис.
15. Линейные операции над векторами, заданными своими координатами.
16. Ортонормированный базис. Понятие прямоугольной декартовой системы координат на плоскости и в пространстве. Декартовы координаты точки. Деление направленного отрезка в заданном отношении.
17. Величина направленного отрезка. Проекция направленного отрезка на ось и ее свойства. Теорема (тождество) Шарля. Геометрический смысл скалярной проекции.
18. Скалярное произведение 2-х векторов и его свойства. Критерий ортогональности 2-х векторов. Геометрический смысл знака скалярного произведения.
19. Скалярное произведение в координатах. Приложения скалярного произведения. Геометрический смысл координат вектора в ортонормированном базисе. Направляющие косинусы вектора.

20. Тройка векторов. Правая и левая тройка векторов. Векторное произведение 2-х векторов и его свойства.
21. Векторное произведение в координатах. Приложения векторного произведения.
22. Смешанное произведение тройки векторов. Необходимое и достаточное условия компланарности трех векторов.
23. Геометрический смысл смешанного произведения и его знака.
24. Свойства смешанного произведения. Смешанное произведение в координатах. Приложения смешанного произведения.
25. Прямая на плоскости. Различные виды уравнений прямой. Геометрический смысл коэффициентов. Направляющий вектор прямой.
26. Условие параллельности. Взаимное расположение 2-х прямых на плоскости.
27. Угол между двумя прямыми. $\perp$ 2-х прямых.
28. Расстояние от точки до прямой. Вывод формулы.
29. Понятие линии на плоскости и ее уравнения. Уравнение окружности. Понятие поверхности в пространстве и ее уравнения. Уравнение сферы.
30. Плоскость в пространстве, различные виды ее уравнений. Геометрический смысл коэффициентов. Неполные уравнения плоскости.
31. Взаимное расположение 2-х плоскостей. Условие параллельности двух плоскостей.
32. Угол между двумя плоскостями. Условие $\perp$ двух плоскостей.
33. Расстояние от точки до плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через 3 точки, не лежащие на одной прямой.
34. Прямая в пространстве. Канонические и параметрические уравнения прямой.
35. Общие уравнения прямой. Переход к каноническому виду.
36. Направляющий вектор плоскости. Определение нормального вектора плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через прямую и точку, не лежащую на этой прямой.
37. Взаимное расположение 2-х прямых в пространстве. Теорема. Следствие. Условие параллельности и совпадения 2-х прямых.
38. Общий $\perp$ двух скрещивающихся прямых и его уравнение. Угол между 2-мя прямыми в пространстве. Условие $\perp$ 2-х прямых.
39. Угол между прямой и плоскостью. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.
40. Эллипс. Определение эллипса. Каноническая система координат. Каноническое уравнение эллипса.
41. Исследование канонического уравнения эллипса. Основной четырехугольник. Построение эллипса.
42. Эксцентриситет эллипса. Рациональные выражения фокальных радиусов эллипса.
43. Гипербола. Определение гиперболы и вывод ее канонического уравнения. Каноническая система координат.

44. Исследование канонического уравнения гиперболы. Построение гиперболы.
45. Асимптоты гиперболы. Полный четырехугольник. Более точное построение гиперболы.
46. Эксцентриситет гиперболы. Рациональные выражения фокальных радиусов гиперболы.
47. Парабола. Вывод канонического уравнения параболы. Исследование формы параболы.
48. Преобразование прямоугольных декартовых систем координат. Полярные координаты точки. Зависимость между полярными и декартовыми координатами точки.
49. Поверхности 2-го порядка. Цилиндрические поверхности 2-го порядка.
50. Поверхности вращения. Поверхности вращения 2-го порядка.
51. Метод параллельных сечений. Трехосный эллипсоид.
52. Однополостный гиперболоид.
53. Эллиптический параболоид.
54. Гиперболический параболоид.
55. Конические поверхности. Конус 2-го порядка.
56. Абсолютная величина действительного числа и ее свойства.
57. Предел упорядоченной переменной величины и его разновидности. Предел функции в точке, в бесконечности. Ограниченные функции, Огр. функции в окрестности точки. Огр. (в окрестности , имеющей конечный предел) функции .
58. Бесконечно малые функции и их свойства ($\pm$, $\times$, следствия).
59. Бесконечно малые функции и их свойства $\left(\frac{\alpha}{f(x)}, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \neq 0, \alpha \cdot f(x) \right)$. Теорема о связи б.м.ф. с функцией, имеющей конечный предел.
60. Основные теоремы о пределах функции (I).
61. Теоремы о предельных переходах в неравенствах.
62. Бесконечно большие функции. Их связь с б.м. функциями. Поведение многочлена на бесконечности и $\lim$ отношения двух множеств на бесконечности.
63. Основные теоремы о пределах функций (II). Предел сложной функции.
64. Сравнение б.м.ф. Эквивалентные б м.ф. Основные теоремы об экв. б.м.ф. Главная часть бесконечно малой функции.
65. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Следствия 2-го замечательного предела.
66. Непрерывность функции в точке. Основные свойства функций, непрерывных в точке.

67. Непрерывность сложной функции. Непрерывность основных элементарных функций.
68. Односторонние пределы функции в точке. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва функции и их классификация. Непрерывность функции на отрезке. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
69. Производная функции. Ее геометрический и механический смысл. Основные правила дифференцирования.
70. Таблица производных.
71. Обратная функция и ее дифференцирование. Обратные тригонометрические функции и их производные.
72. Производная сложной функции. Теорема. $(\ln|x| = ?)$.
73. Логарифмическая производная и ее приложения. (производная показательно-степенной функции).
74. Дифференцируемость функции. Теорема. Непрерывность дифференцируемой функции.
75. Дифференциал функции и его свойства. Применение в приближенных вычислениях.
76. Инвариантность формы 1-го дифференциала (относительно замены независимой переменной).
77. Теорема Ферма. Теорема Ролля.
78. Теорема Лагранжа.
79. Теорема Коши.
80. Теорема Лопиталя - Бернулли. Раскрытие неопределенностей $\{0 \cdot \infty\}$, $\{\infty - \infty\}$, $\{1^\infty\}$, $\{\infty^0\}$, $\{0^0\}$.
81. Производные и дифференциалы высших порядков и их свойства. Неинвариантность формы дифференциала 2-го порядка и высшего порядков относительно замены независимой переменной.
82. Формула Тейлора с остаточным числом в форме Лагранжа. Формула Маклорена.
83. Параметрическое задание функциональной зависимости. Производная функции, заданной параметрически.
84. Выпуклость, вогнутость точки перегиба графика функции. Необходимые условия, достаточные условия.
85. Достаточные условия экстремума функции одной переменной выраженные через производные $(n + 1)$ порядков.
86. Асимптоты кривых и их классификация. Необходимое и достаточное условия $\exists$ асимптот. Общая схема исследования функций и построения графиков функций.
87. Наибольшее, наименьшее значения функции на сегменте.
88. Определение функции многих переменных. Область определения, предел и непрерывность функции многих переменных. Формулировка свойств непрерывной функции на ограниченной замкнутой области.

89. Частные производные и их геометрический смысл для функций 2-х переменных.
90. Дифференцируемость в точке функции многих переменных. Необходимые условия дифференцируемости.
91. Достаточные условия дифференцируемости в точке функции многих переменных.
92. Полный дифференциал функции многих переменных и его свойства. Применение к приближенным вычислениям.
93. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала.
94. Производная сложной функции многих переменных. Полная производная. Инвариантность формы I дифференциала относительно замены независимых переменных.
95. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Теорема о независимости результата дифференцирования от его порядка.
96. Неявные функции многих переменных. Теоремы $\exists$. Дифференцирование неявных функций.
97. Экстремумы функции двух переменных. Необходимое условие экстремумов. Достаточные условия.
98. Наибольшее и наименьшее значения функции многих переменных в замкнутой ограниченной области.