

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЯНОЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра математики

**Контрольные работы для студентов заочной формы обучения
экономических специальностей
по дисциплине «Математический анализ»**

Уфа 2019

Составители: Хакимова З.Р., старший преподаватель
Рецензенты: Сахарова Л.А., доцент, к.т.н.

Основной формой обучения студента-заочника является *самостоятельная работа* над учебным материалом; она складывается из чтения учебников, решения задач, выполнения контрольных заданий. В помощь заочникам организуют чтение лекций и практические занятия. Кроме того, студент может обращаться к преподавателю с вопросами в письменном виде или устно. Указания студенту по текущей работе даются также в процессе рецензирования контрольных работ. Однако студент должен помнить, что только при систематической и упорной самостоятельной работе помощь ВУЗа будет достаточно эффективной.

Завершающим этапом изучения каждого из математических курсов (или отдельных частей курса высшей математики) является сдача зачетов и экзаменов в соответствии с учебным планом.

1. Лекции и практические занятия

Во время сессий, которые бывают два раза в год для студентов-заочников организуются лекции и практические занятия. Они носят по преимуществу обзорный характер. Их цель – обратить внимание на общую схему построения соответствующего раздела курса, подчеркнуть важнейшие факты, указать главные практические приложения, факты из истории науки. Кроме того, на этих занятиях могут быть более подробно разобраны отдельные вопросы курса (например, методы приближенных вычислений и др.); могут быть также рассмотрены отдельные вопросы программы, отсутствующие или недостаточно полно освещенные в рекомендуемых пособиях.

2. Контрольные работы

1. В процессе изучения математических курсов студент должен выполнить ряд контрольных работ, главная цель которых – оказать студенту помощь в его работе. Рецензии на эти работы позволяют студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса; указывают на имеющиеся у него пробелы, на желательное направление дальнейшей работы; помогают сформулировать вопросы для консультации с преподавателем (письменной или устной).

2. Не следует приступать к выполнению контрольного задания до решения достаточного количества задач по материалу, соответствующего этому заданию. Опыт показывает, что чаще всего неумение решить ту или иную задачу контрольного задания вызывается тем, что студент не выполнил эти требования.

3. Контрольные работы должны выполняться самостоятельно. Несамостоятельно выполненная работа не дает возможности преподавателю-рецензенту указать студенту на недостатки в его работе, в усвоении им учебного материала, в результате чего студент не приобретает необходимых знаний и может оказаться неподготовленным к устному экзамену и зачету.

4. Рекомендуется присылать работы своевременно, чтобы впоследствии не возникало трудностей со сдачей зачета или экзамена и вместе с тем это дает рецензенту возможность указать студенту на допускаемые им ошибки и не удлиняет срок рецензирования работ.

5. Прорецензированные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованиям рецензента, следует сохранять. Без предъявления преподавателю прорецензированных контрольных работ студент не допускается к сдаче зачета или экзамена.

6. Распределение контрольных работ по семестрам устанавливается в соответствии с распределением по семестрам материала и сообщается студентам дополнительно.

3. Решение задач

1. Чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.

2. При решении задач нужно обосновывать каждый этап решения исходя из теоретических положений курса.

3. Решения задач и примеров следует излагать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от основных. Ошибочные записи не следует стирать и замазывать, а зачеркивать.

Чертежи необходимо выполнять аккуратно и в соответствии с данными условиями.

4. Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа, которого требует условие, и, по возможности, в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения (если таковы даны) входящих в нее букв. В промежуточных вычислениях не следует вводить приближенные значения корней, числа π и т.п.

5. Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Если, например, решалась задача с конкретными физическим или геометрическим содержанием, то полезно прежде всего проверить размерность полученного ответа.

4. Изучение теоретического материала

1. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, проделывая на бумаге все вычисления (в том числе и те, которые по их простоте опущены в учебнике), воспроизводя имеющиеся в учебнике чертежи.

2. Особое внимание следует обращать на определение основных понятий. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно.

3. Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждений. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательстве. Нужно добиваться точного представления о том, в каком месте доказательства использовано каждое предположение теоремы. Полезно составлять схемы доказательств сложных теорем. Правильному пониманию многих теорем помогает разбор примеров математических объектов, обладающих и не обладающих свойствами, указанными в предположениях и утверждениях теорем.

4. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т.п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные для письменной или устной консультации с преподавателем.

5. Письменное оформление работы студента имеет исключительно важное значение. Записи в конспекте должны быть сделаны аккуратно. Хорошее внешнее оформление конспекта по изученному материалу не только

приучит студента к необходимому в работе порядку, но и позволит ему избежать многочисленных ошибок, которые происходят из-за небрежных, беспорядочных записей.

5. Консультации

1. Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удастся (неясность терминов, формулировок теорем, отдельных задач и др.), он может обратиться к преподавателю для получения от него указаний в виде письменной или устной консультаций.

2. В своих запросах студент должен точно указывать, в чем он испытывает затруднение. Если он не разобрался в теоретических объяснениях, или в доказательстве теоремы, или в выводе формулы по учебнику, то нужно указать, какой это учебник, год его издания и страницу, где рассмотрен затрудняющий его вопрос, и что именно его затрудняет. Если студент испытывает затруднение при решении задачи, то следует указать характер этого затруднения, привести предполагаемый план решения.

7. Зачет и экзамен

На экзаменах и зачетах выясняется прежде всего отчетливое усвоение всех теоретических и прикладных вопросов программы и умение применять полученные знания к решению практических задач. Определения, теоремы, правила должны формулироваться точно и с пониманием существа дела; решение задач в простейших случаях должны проделываться без ошибок и уверенно; всякая письменная и графическая работа должна быть аккуратной и четкой. Только при выполнении этих условий знания могут быть признаны удовлетворяющими требованиям, предъявляемым программой.

При подготовке к экзамену учебный материал рекомендуется повторять по учебнику и конспекту.

Примерная программа дисциплины на семестр

Введение в математический анализ

1. Предел последовательности. Основные свойства пределов. Бесконечно малые и бесконечно большие величины.
2. Функция одной переменной. Определение функции. График функции и его построение. Основные элементарные функции. Предел функции. Теоремы о пределах функции. Пределы $\frac{\sin x}{x}$ и $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ при $x \rightarrow 0$. Бесконечно малая функция и бесконечно большая функция. Их свойства. Непрерывность функции. Основные свойства непрерывных функций. Понятие сложной функции. Понятие обратной функции.

Основы дифференциального исчисления функции одной независимой переменной.

3. Задачи, приводящие к определению производной. Определение производной. Правила дифференцирования. Дифференциал и приращение функции. Дифференцирование сложных функций. Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя. Формула Тейлора.
4. Возрастание и убывание функций. Экстремум функции. Выпуклость и вогнутость, точки перегиба. Асимптоты. Исследование функции и построение ее графика.

Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных.

5. Область определения функции. Предел функции нескольких переменных. Частные производные и дифференциал функции нескольких переменных.
6. Производная по направлению. Градиент.
7. Понятие о частных производных высших порядков. Экстремум функции нескольких переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции в ограниченной замкнутой области.
8. Условный экстремум, необходимое условие. Метод множителей Лагранжа.

9. Метод наименьших квадратов.

Комплексные числа и действия над ними. Интегральное исчисление функции одной независимой переменной.

10. Понятие комплексного числа. Основные действия над комплексными числами.

11. Понятие о первообразной функции. Теорема о множестве всех первообразных. Неопределенный интеграл и его свойства. Геометрический смысл неопределенного интеграла. Основные методы интегрирования: интегрирование методом замены переменной, интегрирование по частям.

12. Интегрирование дробно-рациональных функций. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена на множители. Интегрирование тригонометрических функций. Интегрирование некоторых иррациональных функций.

13. Определенный интеграл и его свойства. Определенный интеграл с переменным верхним пределом интегрирования. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям. Вывод формул для вычисления площади плоской фигуры, заданной в различных системах координат. Вычисление длин дуг плоских кривых, заданных в различных системах координат (прямоугольной; параметрической; полярной).

14. Несобственные интегралы 1-го рода. Признаки сходимости. Несобственные интегралы 2-го рода. Признаки сходимости.

Обыкновенные дифференциальные уравнения.

15. Понятия о дифференциальных уравнениях, их классификация. Экономические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

16. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Частное и общее решение.

17. Основные классы уравнений, интегрируемых в квадратурах (уравнения с разделяющимися и разделенными переменными).

18. Уравнения, интегрируемые в квадратурах (однородное, линейное, Бернулли, в полных дифференциалах).

19. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Основные понятия.

20. Линейные уравнения второго порядка, однородные и неоднородные. Теоремы о структуре общего решения. Решение линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами: уравнения с правой частью специального вида. Метод вариации произвольных постоянных как метод нахождения общего решения неоднородного уравнения.

Методические указания по изучению курса математический анализ

Литература

При изучении курса «Математический анализ» рекомендуется использовать следующую литературу:

1. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах (с решениями) [Текст] : в 2 ч./ П.Е. Данко и др./ - 7-е изд., испр. - М. : Оникс.Ч. 1. - 2009. - 368 с. Ч. 2. - 2012. - 416 с.
2. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. – М.: Дело, 2003. – 704 С.
3. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления [Текст] : в 2 т. / Н. С. Пискунов. - стер. изд. - М. : Интеграл-Пресс. Т. 1. - изд., стер. - 2009. - 416 с.
4. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст] : полный курс / Д. Т. Письменный. - 11-е изд. - М. : Айрис-пресс, 2013. - 608 с.
5. Сборник задач по математике для втузов: Линейная алгебра и основы математического анализа (под редакцией А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича). - М.: Наука, 2003. – 478 С.

Тема1. Введение в анализ.Предел.

Литература: [1], гл.6; [2], гл.2,3; [3], гл.1,2; [4], гл.1, §1-4.

Понятие предела играет фундаментальную роль, так как с ним непосредственно связаны основные понятия математического анализа - производная, интеграл и др.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a или в некоторых точках этой окрестности. Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$ (в точке a), если для каждого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что $|f(x) - b|$ будет меньше ε , когда $|x - a|$, при $x \neq a$, меньше δ .

Если число b есть предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, то пишут:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

когда x стремится к a произвольным образом;

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b, \text{ когда } x \text{ стремится к } a \text{ слева, оставаясь меньше } a;$$

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b, \text{ когда } x \text{ стремится к } a \text{ справа, оставаясь больше } a.$$

При этом, если существует предел функции, когда $x \rightarrow a$ произвольным образом, то существуют и будут с ним одинаковы односторонние пределы функции, когда $x \rightarrow a$ только слева или только справа, т.е. если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, то $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$.

Если же односторонние пределы различны или хотя бы один из них не существует, то не существует и предел функции при $x \rightarrow a$ произвольным образом, т.е. если $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ не существует.

Задача 1. Найти пределы функции $y = 3^{\frac{1}{x}}$ при x стремящемся к нулю:

1) слева, 2) справа и 3) произвольным образом.

Решение. 1) Если переменная x будет стремиться к 0 слева, оставаясь отрицательной, т.е. если x будет отрицательной бесконечно малой, то $\frac{1}{x}$ будет отрицательной бесконечно большой и

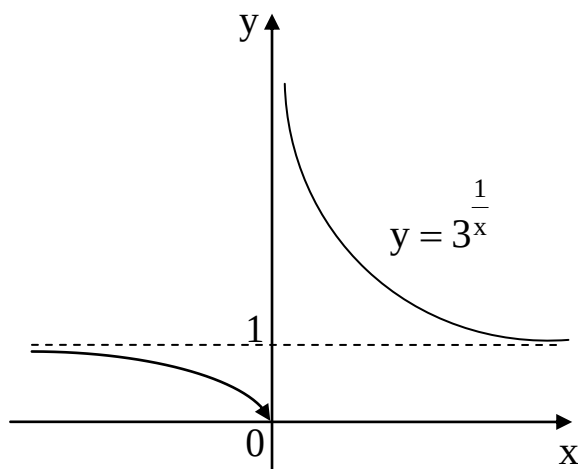
$$\lim_{x \rightarrow 0-0} 3^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{x}} = \left|\left(\frac{1}{3}\right)^{+\infty} \rightarrow 0\right| = 0.$$

2) Если $x \rightarrow 0+0$, то $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow 0+0} 3^{\frac{1}{x}} = \left|3^{+\infty} \rightarrow +\infty\right| = +\infty$.

3) Если x будет стремиться к нулю произвольным образом, не оставаясь с одной стороны от него, то $\frac{1}{x}$ будет стремиться к бесконечности, принимая

значения разных знаков. Вследствие этого при $x \rightarrow 0$ функция $3^{\frac{1}{x}}$ не имеет предел.

График функции $y = 3^{\frac{1}{x}}$ показан на рис.



Таким образом, в определении предела функции не учитывается значение функции в предельной точке, которое может даже и не существовать. Отсюда следует, что под знаком предела можно производить тождественные преобразования аналитического выражения, задающего функцию, не принимая во внимание саму предельную точку. Например, под знаком предела можно производить сокращение дроби на множитель, обращающийся в нуль в предельной точке, но не равный нулю вблизи от этой точки. Иногда это позволяет в тех случаях, когда применение теорем о пределах невозможно, сделать возможным их применение после некоторых преобразований под знаком предела.

Соображения о возможности тождественных преобразований под знаком предела применимы не только в тех случаях, когда аргумент стремится к конечному пределу, но и при неограниченном возрастании аргумента по модулю.

Задача 2. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 1}{x^3 - x + 2}$.

Решение. В этом случае ни числитель, ни знаменатель не имеют предела, т.к. они неограниченно возрастают.

Произведем преобразование аналитического выражения под знаком предела, поделив числитель и знаменатель на x^3 .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 1}{x^3 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{1}{x^3} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right)} = \frac{5 + 0}{1 - 0 + 0} = 5.$$

так как при $x \rightarrow \infty$ $\frac{1}{x^3}$ и $\frac{1}{x^2}$ - величины бесконечно малые.

Особый интерес приобретает случай преобразования функции $f(x)$ к функции $\varphi(x)$, непрерывной в самой точке x_0 и совпадающей с $f(x)$ во всех других точках некоторой окрестности точки x_0 . Тогда, очевидно,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0).$$

Задача 3. Найти $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{5 - \sqrt{9 + 2x}}{2 - \sqrt[3]{x}}$.

Решение. Функция $f(x) = \frac{5 - \sqrt{9 + 2x}}{2 - \sqrt[3]{x}}$ элементарная, но при $x_0 = 8$ она

не определена и поэтому разрывна в этой точке. Числитель и знаменатель в точке $x_0 = 8$ обращаются в 0. Попробуем выделить общий множитель $(x - 8)$ и сократить на него аналитическое выражение, считая $x \neq 8$:

$$\frac{5 - \sqrt{9 + 2x}}{2 - \sqrt[3]{x}} = \frac{(5 - \sqrt{9 + 2x})(5 + \sqrt{9 + 2x})(4 + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{(2 - \sqrt[3]{x})(4 + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})(5 + \sqrt{9 + 2x})} =$$

$$= \frac{(16 - 2x)(4 + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{(8 - x)(5 + \sqrt{9 + 2x})} = \frac{2(8 - x)(4 + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{(8 - x)(5 + \sqrt{9 + 2x})} = \frac{2(4 + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{(5 + \sqrt{9 + 2x})}.$$

Функции $f(x) = \frac{5 - \sqrt{9 + 2x}}{2 - \sqrt[3]{x}}$ и $\varphi(x) = \frac{2(4 + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{5 + \sqrt{9 + 2x}}$

рассматриваемые в области, содержащей $x_0 = 8$ различны, хотя различие это и проявляется только в одной точке $x_0 = 8$ ($f(x)$ не определена в этой точке, а $\varphi(x)$ определена). Во всякой же другой области не содержащей $x_0 = 8$ имеем $f(x) \equiv \varphi(x)$. Но функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x_0 = 8$ (она элементарна и определена в этой точке), значит, на основании равенства имеем

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{5 - \sqrt{9 + 2x}}{2 - \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{2(4 + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{5 + \sqrt{9 + 2x}} = \frac{2(4 + 2\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{8^2})}{5 + \sqrt{9 + 16}} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}.$$

Тема 2. Производная и дифференциал

Литература: [1], гл.7, §1; [2], гл.4; [3], гл.3; [4], гл.5, §1-3.

Тема 3. Приложения производной для исследования функций

Литература: [1], гл.7, §2; [2], гл.5; [3], гл.5; [4], гл.5, §4,5.

Тема 4. Функции нескольких переменных

Литература: [1], гл.8; [2], гл.9, 9.1-9.4; [3], гл.8; [4], гл.7, §1-3.

При изучении этой темы рекомендуется проводить аналогию с уже известными соответствующими фактами дифференциального исчисления функции одной переменной. Вместе с тем необходимо представлять, какие особенности возникают в трактовке того или иного понятия при переходе от функции одной переменной к функциям нескольких переменных. Например, функцию одной переменной можно изобразить линией на плоскости (графиком). Функция двух переменных также имеет график, но это уже не линия, а поверхность. Функции трех и большего числа переменных аналогичного изображения не имеет.

Но функция двух переменных допускает и другое геометрическое изображение в виде множества, или семейства, линий уровня этой функции. Функция трех переменных не имеет наглядного геометрического образа.

Функция двух переменных может быть геометрически изображена поверхностью – графиком этой функции. Но функция двух переменных допускает и другое геометрическое изображение в виде множества, или семейства, линий уровня этой функции. Функция трех переменных не имеет

наглядного геометрического образа, аналогичного графику функции одной или двух переменных, но для нее остается в силе возможность геометрического представления ее в виде *семейства поверхностей уровня*. Поверхность уровня, так же как и линия уровня, представляет собой множество точек, в которых функция имеет одно и то же значение (т.е. на этом множестве точек из области определения функции она постоянна). Поверхности уровня функции $u = f(x, y, z)$ определяются тем же уравнением

$$f(x, y, z) = u. \quad (1)$$

Только надо считать, что для каждой из этих поверхностей величина u имеет постоянное значение. Можно сказать, что уравнение (1) является *уравнением семейства поверхностей уровня* функции $u = f(x, y, z)$, а величина u - *параметром*, каждое числовое значение которого определяет в семействе поверхностей уровня конкретную поверхность.

Например, функция

$$u = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}$$

принимает значения $u \geq 0$; причем значение $u = 0$ она принимает только в одной точке – начале координат. Поверхностями уровня этой функции будут эллипсоиды

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = u$$

или

$$\frac{x^2}{4u} + \frac{y^2}{9u} + \frac{z^2}{16u} = 1,$$

с полуосями $a = 2\sqrt{u}$, $b = 3\sqrt{u}$, $c = 4\sqrt{u}$. При $u = 0$ эллипсоид вырождается в точку – начало координат.

Две линии уровня, так же как и две поверхности уровня, не могут пересекаться, так как в противном случае в точке их пересечения функция имела бы два различных значения, что невозможно.

Независимо от числа аргументов имеет место следующее свойство: если функция f непрерывна в некоторой ограниченной и замкнутой области D , то в этой области обязательно найдутся точки, в которых функция f принимает свои наибольшие и наименьшие значения в этой области.

Область называется замкнутой, если этой области принадлежат все точки границы области.

Точки наибольшего и наименьшего значений функции находятся среди критических точек функции внутри области и точек границы области. Следовательно, для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции в области надо найти критические точки функции внутри области и отдельно исследовать функцию на границе.

Задача. Найти наименьшее и наибольшее значения функций $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в замкнутой области, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.

Решение. Обозначим замкнутую область через D , которая представляет собой треугольник. Найдем стационарные точки данной функции; имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 4, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y; \text{ в силу необходимых условий экстремума}$$

находим $x = \frac{8}{3}; \quad y = \frac{4}{3}$. Тогда $\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right)$ принадлежит области D .

$$z\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right) = -5\frac{1}{3}.$$

Исследуем функцию на границе области D .

Она состоит из трех участков $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$. Найдем наибольшее и наименьшее значения z на каждом из них.

1) $x = 0$, $z_1 = z(0; y) = y^2$, где $0 \leq y \leq 4$. Найдем стационарные точки: $z'_1 = 2y$, $z'_1 = 0$ при $y = 0$; $z_1(0) = 0$. Вычислим значения функции на концах отрезка $[0; 4]$.

При $y = 0$ вычислили, а $z_1(4) = 16$.

2) $2x + 3y - 12 = 0$. Рассмотрим изменение x : $0 \leq x \leq 6$, из уравнения выражаем $y = \frac{12 - 2x}{3}$, тогда $z_2 = z\left(x; \frac{12 - 2x}{3}\right) = \frac{1}{9}(19x^2 - 120x + 144)$.

Найдем стационарные точки: $z'_2 = \frac{1}{9}(38x - 120)$, $z'_2 = 0$ при $x = 3\frac{3}{19}$;

$z_2\left(3\frac{3}{19}\right) = -5\frac{1}{19}$. Вычислим значения функции на концах отрезка $[0; 6]$.

$$z_2(0) = 16, \quad z_2(6) = 12.$$

3) $y = 0$, $z_3 = z(x; 0) = x^2 - 4x$, где $0 \leq x \leq 6$. Найдем стационарные точки $z'_3 = 2x - 4$, $z'_3 = 0$ при $x = 2$. $z_3(2) = -4$.

На концах значения были вычислены в п. 1) и 2).

Сравнивая значения функции z в области D , приходим к выводу: наибольшее значение функции z равно 16 в точке $(0; 4)$, а наименьшее

значение равно $-5\frac{1}{3}$ в точке $\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

Тема 5. Метод наименьших квадратов

Литература: [3], гл.8, §19.

Тема 6. Комплексные числа и действия над ними.

Литература: [3], Т.1, гл.VII, §1-8.

Тема 7. Интегральное исчисление функции одной независимой переменной.

Литература: [2], гл.6,7.

[3], Т.1, гл.X, гл.XI, §1-8.

Тема 8. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Литература: [2], гл.18-20.

[3], Т.2, гл. гл.XIII, §1-9, 16-25.

Контрольные работы №1, №2

При выполнении контрольных работ студент должен руководствоваться следующими указаниями:

1. Каждую работу следует выполнять в отдельной тетради, на передней обложке которой должны быть указаны фамилия и инициалы студента, полный шифр, номер контрольной работы и дата ее отсылки в университет.

2. Решения всех задач и пояснения к ним должны быть достаточно подробными. Рекомендуется делать соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием формулы, теорем, выводов, которые используются при решении.

3. Все вычисления должны быть приведены полностью, чертежи и графики должны быть выполнены аккуратно, четко, с указанием единиц масштаба, координатных осей, обозначения к задачам должны соответствовать указаниям на чертеже.

4. Для удобства рецензирования преподавателем контрольной работы следует оставлять на каждой странице широкие поля.

В период экзаменационной сессии на зачете студент обязан представить зачетную контрольную работу и по требованию преподавателя дать устные пояснения ко всем задачам, содержащимся в работе.

Студент выполняет вариант контрольной работы, который совпадает с порядковым номером в списке группы.

Для получения допуска на экзамен (зачет), контрольные работы необходимо сдать за месяц до начала следующей сессии в деканат заочного факультета для регистрации работы. Во избежание утери, зарегистрированную работу рекомендуется занести на кафедру математики (3-204 с 9 до 16).

Дополнительную информацию Вы можете найти на сайте кафедры математики <http://www.math.rusoil.net>. Здесь же выложено методическое пособие с заданиями для контрольных работ.

Для выполнения контрольных работ №1, 2 рекомендуется использовать учебно-методические комплексы (УМК) разделы 5,6,8-11, а для самостоятельной работы студентов – контрольно-измерительные материалы (КИМ) разделы 5,6,8-11, которые Вы также можете найти на сайте кафедры, либо скачать в ауд.3-204 (при себе иметь электронный носитель).

(образец титульного листа)

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение

профессионального образования

**«УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЯНОЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Кафедра математики

Контрольная работа №_____

дисциплина: «Математический анализ»

Вариант №_____

Выполнил(а)

ст. гр. _____

Ф.И.О. (студента)

шифр №_____

Проверил

Ф.И.О. (преподавателя)

Уфа 201__ г.

Контрольная работа № 1

Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функции одной и нескольких переменных.

Задание 1. Вычислить пределы

1.	a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{3x^2 - 16x + 16}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{4x^2 + x + 3}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x^2}$
2.	a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 2}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 2}{6x^3 - 4x^2 + 3x}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$
3.	a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x - 10}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{5x^2 + 4x - 3}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{x(1-x)}$
4.	a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 3x - 18}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2 - x + 1}{5x^2 + 6x - 2}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{7x}$
5.	a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{2x^2 - 3x - 9}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x - 2}{x^3 - 3x^2 + 4}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{\sin x}$
6.	a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{2x^2 + x - 10}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - x - 1}{2x^4 + 2x^3 + 1}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos 3x}$
7.	a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{3x^2 - x - 2}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 1}{4x^3 - 4x + 2}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - 3^x}$
8.	a) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 8x + 15}{x^2 + 3x - 10}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2 + x + 2}{5x^2 - 6x + 2}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 1}{x}$
9.	a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 4x - 1}{5x^2 - 3x + 1}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 9x}{\operatorname{tg} x}$
10.	a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 7x + 10}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x - 2}{x^3 - 3x^2 + 4}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos 5x}$
11.	a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - x^2}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{2x}$
12.	a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x - 10}{x^3 + 3x^2 - x - 5}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 1}{x}$

13.	a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 6x + 18}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x}{x^4 + 3x^3 - 1}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin 5x}$
14.	a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 8x + 15}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 15}{x^2 - 10x + 1}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{x}$
15.	a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 3x - 4}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x - 5}{x^3 + 27}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^2}{1 - \cos 7x}$
16.	a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 3x + 2}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 1}{7x + \sqrt{x}}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{\sin 9x}$
17.	a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 7x + 10}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 5x}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$
18.	a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 5x^2 - 7}{5x^4 - 2x^2 + 1}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\arcsin 5x}$
19.	a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 3x - 4}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 4}{x - 6\sqrt{x}}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x^3}$
20.	a) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 13x + 6}{x^2 - 36}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 3x - 2}{3x^2 + 7x}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{25x^2}$
21.	a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x^2 - 2x + 1}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 3x}{x^3 + 5x^2 - 11}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}}$
22.	a) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 6x + 5}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1}{x^2 - 2x + 2}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 2x}{1 - \cos x}$
23.	a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 3}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 + x - 3}{5x - x^2}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x}$
24.	a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 6x - 16}{x^2 - 7x + 10}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x - x^3}{4x^3 - 15x}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos 4x}$
25.	a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 1}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - 5x + 7}{4x^2 + 3x - 16}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{4^x - 1}$
26.	a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 12x + 20}{x^2 + 7x - 18}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - 2x^3}{x^4 + 12x - 6}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{1 - \cos x}$
27.	a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 8x + 7}{x^2 - 2x - 3}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{17 - x}{2x - \sqrt{x} + 3}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{x^2 + 2x}$

28.	a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 3x + 2}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 11x - 12}{4 - 19x^2}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x^2 - 4x}$
29.	a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 15}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4}{1 - 2x^4}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$
30.	a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 9x - 10}{x^2 + 5x + 4}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 3}{1 - 25x^2}$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{\arctg 2x}$

Задание 2. Функция y задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения аргумента x . Требуется:

- 1) найти односторонние пределы и скачок функции в точках разрыва;
- 2) построить график функции.

1.	$y = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{если } x \leq 2, \\ 6 - 2x, & \text{если } x > 2. \end{cases}$	16.	$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \leq 0, \\ 2^x, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ x + 2, & \text{если } x > 2. \end{cases}$
2.	$y = \begin{cases} 9 - x^2, & \text{если } x \leq 1, \\ 2x + 3, & \text{если } x > 1. \end{cases}$	17.	$y = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x \leq 1, \\ \ln x, & \text{если } 1 < x \leq e, \\ -x, & \text{если } x > e. \end{cases}$
3.	$y = \begin{cases} x + 2, & \text{если } x \leq 0, \\ 1 + x^2, & \text{если } 0 < x < 1, \\ 3 - x, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$	18.	$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \sin x, & \text{если } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ x - \frac{\pi}{2} + 1, & \text{если } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$
4.	$y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x < 0 \\ x - 1, & \text{если } 0 \leq x \leq 3 \\ 5 - x, & \text{если } x > 3 \end{cases}$	19.	$y = \begin{cases} x + \pi, & \text{если } x \leq -\pi, \\ \cos x + 1, & \text{если } -\pi < x \leq 0, \\ -x + 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$
5.	$y = \begin{cases} \cos x, & \text{если } x \leq 0, \\ 1 - x, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ x^2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$	20.	$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \leq 0, \\ e^x - 1, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ -x + 2, & \text{если } x > 2. \end{cases}$

6.	$y = \begin{cases} 4x + 1, & \text{если } x \leq -1, \\ x^2 - 4x, & \text{если } x > -1. \end{cases}$	21.	$y = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}, & \text{если } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \sin x + 1, & \text{если } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ -x + \frac{\pi}{2}, & \text{если } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$
7.	$y = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{если } x \leq 2, \\ x + 1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$	22.	$y = \begin{cases} -x - 2, & \text{если } x \leq -1, \\ -x^2, & \text{если } -1 < x \leq 1, \\ x + 3, & \text{если } x > 1. \end{cases}$
8.	$y = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2, & \text{если } 0 < x < 1, \\ 3 - 2x, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$	23.	$y = \begin{cases} x + 3, & \text{если } x \leq -2, \\ x^2 - 3, & \text{если } -2 < x \leq 0, \\ -x, & \text{если } x > 0. \end{cases}$
9.	$y = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{если } x \leq 0, \\ x, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$	24.	$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \leq 2, \\ x^2 - 1, & \text{если } 2 < x \leq 3, \\ -x + 11, & \text{если } x > 3. \end{cases}$
10.	$y = \begin{cases} 2x + 3, & \text{если } x \leq 2, \\ 3x - x^2, & \text{если } x > -1. \end{cases}$	25.	$y = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leq 0, \\ \ln(x + 1), & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ x + 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$
11.	$y = \begin{cases} -1, & \text{если } x \leq 0, \\ \sin x, & \text{если } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ x, & \text{если } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$	26.	$y = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x \leq -3, \\ -x - 5, & \text{если } -3 < x \leq 0, \\ x^2, & \text{если } x > 0. \end{cases}$
12.	$y = \begin{cases} \frac{2x + 3}{2}, & \text{если } x \leq -1, \\ 2^x, & \text{если } -1 < x \leq 2, \\ 4 - x, & \text{если } x > 2. \end{cases}$	27.	$y = \begin{cases} -x - 2, & \text{если } x \leq 2, \\ -x^2 + 1, & \text{если } 2 < x \leq 1, \\ x - 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

13.	$y = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x \leq 1, \\ x^2, & \text{если } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$	28.	$y = \begin{cases} x + 2, & \text{если } x \leq -1, \\ x^2 + 1, & \text{если } -1 < x \leq 2, \\ 1 - x, & \text{если } x > 2. \end{cases}$
14.	$y = \begin{cases} x + 2, & \text{если } x \leq -2, \\ -x^2 + 4, & \text{если } -2 < x \leq 0, \\ -x + 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$	29.	$y = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}, & \text{если } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & \text{если } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0, \\ x, & \text{если } x > 0. \end{cases}$
15.	$y = \begin{cases} -x - 1, & \text{если } x \leq -1, \\ (x + 1)^2, & \text{если } -1 < x \leq 1, \\ x + 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$	30.	$y = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x \leq -2, \\ -x^2 + 3, & \text{если } -2 < x \leq 1, \\ -x + 4, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

Задание 3. Найти производные и дифференциалы указанных функций.

1.	а) $y = 5x^7 - \frac{3}{2x^4} + 6\sqrt[4]{x^3}$; в) $y = \frac{x+2}{\ln x}$;	б) $y = x^3 \operatorname{arctg} 2x$; г) $y = (3x^2 + e^{2x})^4$.
2.	а) $3x^4 - \frac{5}{3x^3} - 9\sqrt[3]{x^2} - 1$; в) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$;	б) $y = (x^3 + 1)\ln(x+1)$; г) $y = e^{\sin 4x}$.
3.	а) $y = 3x^6 - \frac{2}{3x^3} + 6\sqrt[6]{x^2}$; в) $y = \frac{\arccos x}{x^3 - 1}$;	б) $y = 5^x \operatorname{tg} 2x$; г) $y = \sqrt{x^3 + \sin 3x}$.
4.	а) $y = 2x^4 - \frac{1}{3x^3} + 4\sqrt[4]{x^3}$; в) $y = \frac{2^x}{\operatorname{arctg} x}$;	б) $y = (x^2 - 2)\sin 2x$; г) $y = \sqrt[4]{x^3 + \ln 2x}$.

5.	a) $y = 2x^3 - \frac{2}{3x^5} + 3\sqrt[3]{x^2}$; б) $y = \frac{\sin x}{x - \cos x}$;	б) $y = (4x^3 + 1)\operatorname{tg} 2x$; г) $y = (x^2 - \ln x)^3$.
6.	a) $y = 4x^3 - \frac{3}{x^2} + 5\sqrt[5]{x^3}$; б) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x^2 - 2x}$;	б) $y = e^{2x}(x^3 - 1)$; г) $y = (\ln \sin x - x)^3$.
7.	a) $y = 3x^5 - \frac{3}{2x^3}$; б) $y = \frac{\arccos x}{x^3 - 1}$;	б) $y = 5^x \operatorname{tg} x$; г) $y = \sqrt{x^3 \sin 3x}$.
8.	a) $y = 3x^7 - \frac{3}{2x^4} + 8\sqrt[4]{x^3}$; б) $y = \frac{2 \sin x}{1 + \cos x}$;	б) $y = x^3 \operatorname{arctg} x$; г) $y = \ln(x^2 + 5x)$.
9.	a) $y = 2x^5 - \frac{3}{2x^5} + 7\sqrt[7]{x^2}$; б) $y = \left(\arcsin \frac{x}{3}\right)^2$;	б) $y = \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}$; г) $y = \ln \operatorname{tg} 2x$.
10.	a) $y = 4x^2 - \frac{5}{6x^6} + 10\sqrt[5]{x^4}$; б) $y = e^{\operatorname{arctg} x}$;	б) $y = \frac{\sin x}{1 + \operatorname{tg} x}$; г) $y = (\ln x + e^{3x})^2$.
11.	a) $y = 2x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}} - \ln 2$; б) $y = \frac{x - 1}{\arcsin x}$;	б) $y = e^{2x}(x^4 + 5x)$; г) $y = \sqrt[3]{(4 + \operatorname{tg} x)^2}$.
12.	a) $y = 7x^5 + \frac{3}{4x^4} - 17x + 8$; б) $y = \frac{(x + 3)^2}{x^3 + 5}$;	б) $y = \sin 5x \cdot (1 - x^2)$; г) $y = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \cos 2x\right)^5$.

13.	а) $y = 8x^4 - \frac{5}{3\sqrt[5]{x^3}} + \ln x - 45$; б) $y = \frac{\arctg 5x}{x}$;	б) $y = 3^{-x} \cdot (1 - x^2)$; г) $y = \sqrt{\sin(1 - 7x)}$.
14.	а) $y = 4x^3 + \frac{7}{\sqrt[7]{x}} + 15x - 5$; б) $y = \frac{(2 + x)^3}{11 - x}$;	б) $y = (x^3 + 4) \cdot \cos x$; г) $y = \sqrt{\arctg(3 - x)}$
15.	а) $y = 12x - \frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}} + 0,1x^{10} - 41$; б) $y = \left(\frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 5x - 1} \right)^4$;	б) $y = (x + 7)^3 \cdot \log_3 x$; г) $y = e^{8x - x^2}$.
16.	а) $y = 9x^4 - \frac{6}{\sqrt[6]{x}} + x^2 - \sqrt{5}$; б) $y = \frac{\tg 3x}{x^3 + 5}$;	б) $y = (x - 3x^2)^2 \cdot (4 + x^2)$; г) $y = \sqrt[3]{\ln(15x - 31)}$.
17.	а) $y = 3x^7 - \frac{9}{4x^4} + 11x - 3$; б) $y = \sqrt{\frac{x^3 + 2x - 4}{x^2 + 7}}$;	б) $y = (5 - x^2) \cdot \cos 2x$; г) $y = (x - \tg x)^4$.
18.	а) $y = 5x^8 + \frac{1}{9\sqrt{x^2}} + 17x - 16$; б) $y = \frac{e^{3x}}{\arcsin x}$;	б) $y = \sqrt{x - 1} \cdot \tg x$; г) $y = \cos^2(3 - 5x)$.
19.	а) $y = 3x^{10} + \frac{7}{x^7} - 5x^2 + 1$; б) $y = \frac{\ln x}{x^2 - x + 3}$;	б) $y = 3^x \cdot (x^3 + 6)^2$; г) $y = (11x^4 + 3x^2 - \cos x)^{0,5}$.
20.	а) $y = 7x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}} + 42x^{1,5} + 21$;	б) $y = (x^2 + 5x - 6)^2 \cdot (x^2 - 3x + 4)$;

	в) $y = \frac{\arccos 2x}{5^x};$	г) $y = \ln(x^3 - 4x^2 + 5x - 7).$
21.	а) $y = 3x^7 - \frac{1}{5x^5} + 12x - 51;$ в) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x - 4};$	б) $y = e^{3x} \cdot \cos x;$ г) $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 5}.$
22.	а) $y = 10x^4 + 11x^3 - \frac{9}{\sqrt[9]{x^4}} + 1;$ в) $y = \frac{\sin 5x}{1 + \cos x};$	б) $y = (x - 1)(x + 1)(x^2 - 4)^2;$ г) $y = 3^{x^2 - 2x}.$
23.	а) $y = 6x^5 + \frac{2}{\sqrt{x^7}} + 1,55;$ в) $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{\sin x};$	б) $y = (x + 2) \ln(1 - x);$ г) $y = (\operatorname{arctg}(11 - 9x))^5.$
24.	а) $y = 7x^3 + 11x^2 - \frac{6}{\sqrt[6]{x^5}} + 11x^2;$ в) $y = \frac{\operatorname{arccis} x}{x^2 - 3};$	б) $y = (x^2 - 3x) \log_6 x;$ г) $y = e^{\cos 5x}.$
25.	а) $y = 2x^7 - 5x^2 + 2\sqrt{x} - 4;$ в) $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+1};$	б) $y = x^2 \cdot \sin 2x;$ г) $y = \left(\arcsin \frac{x}{4} \right)^3.$
26.	а) $y = 5x^3 - \frac{x}{2} + \frac{5}{3} \sqrt[5]{x^3} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}};$ в) $y = \frac{\ln x}{1 + 2 \sin x};$	б) $y = 4^x \cdot \operatorname{tg} 2x;$ г) $y = \sqrt{3x + \cos 3x}.$
27.	а) $y = 9x^2 + 11x + \frac{3}{2} \sqrt{x^3} - \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}};$ в) $y = \frac{(x-1)^2}{\log_3 x};$	б) $y = \sqrt[3]{x} \cdot 3^{2x};$ г) $y = 3^{\cos^2 x}.$
28.	а) $y = 17x^3 - 2x^2 - 4\sqrt[4]{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}};$	б) $y = x^3 \cdot \arcsin x;$

	в) $y = \frac{1 + e^{5x}}{1 - e^{5x}};$	г) $y = \left(\operatorname{tg} \frac{x}{3} \right)^3.$
29.	а) $y = 31 \cdot x^4 - 5x^3 + 6 \cdot \sqrt[6]{x} - \sqrt{3};$ в) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{1 - \sqrt{x}};$	б) $y = 3^{2x} \cdot \operatorname{ctg} x;$ г) $y = \sqrt[4]{\ln(3x + 2)}.$
30.	а) $y = 7x^2 - \frac{10}{\sqrt{x}} + 7^x;$ в) $y = \frac{\cos 2x}{1 + 2 \sin x}$	б) $y = x \cdot \ln(\sin x);$ г) $y = \arccos \sqrt{2x}.$

Задание 4. Исследовать данную функцию и построить ее график.

1.	$y = \frac{x^2}{x - 1};$	16.	$y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2};$
2.	$y = xe^x;$	17.	$y = -(x + 1)e^{x+2};$
3.	$y = \frac{x^2 + 5}{x^2 - 1};$	18.	$y = \frac{x}{\ln x};$
4.	$y = \frac{3 - 2x}{(x - 2)^2};$	19.	$y = \frac{3 - x^2}{x + 2};$
5.	$y = x \cdot \sqrt{1 - x};$	20.	$y = \frac{2x + 3}{3x - 5};$
6.	$y = xe^{-x};$	21.	$y = \frac{x}{x^2 + 1};$
7.	$y = \frac{x^3 + 2}{x^2};$	22.	$y = \frac{x - 1}{x^2 - 4};$
8.	$y = \frac{x^2}{x^2 - 1};$	23.	$y = \frac{x}{x^2 - 1};$
9.	$y = x^2 e^x;$	24.	$y = (x + 2)e^{x+2};$
10.	$y = \frac{x^3}{x^2 - 4};$	25.	$y = \frac{x^2}{(x - 2)^2};$

11.	$y = \frac{x^3}{(x-2)^2};$	26.	$y = 3 - 3 \ln \frac{x}{x+4};$
12.	$y = \sqrt[3]{1+x^3};$	27.	$y = x^2 \ln x;$
13.	$y = \frac{x^2}{(x-1)^2};$	28.	$y = \frac{x^2}{x^2+1};$
14.	$y = \frac{x+4}{e^{x+4}};$	29.	$y = \frac{x-3}{(x+2)^2};$
15.	$y = \frac{4x}{x^2+4};$	30.	$y = \frac{e^{-2x}}{2x}.$

Задание 5. Найти область определения функции и изобразить ее на координатной плоскости

1. $z = \sqrt{-x} + \sqrt{y};$	16. $z = \ln(y^2 - 2x);$
2. $z = \arccos\left(\frac{x^2 + y^2}{9}\right);$	17. $z = \frac{1}{\sqrt{xy}};$
3. $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}},$ $(0 < r < R);$	18. $z = \arcsin y;$
4. $z = \sqrt{x - \sqrt{y}};$	19. $z = \ln(x^2 + y^2) + \sqrt{1 - y^2} + x;$
5. $z = \ln\left(\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - 1\right);$	20. $z = \sqrt{x \ln y};$
6. $z = \frac{x}{\sqrt{x-y}} + \frac{y}{\sqrt{x+y}};$	21. $z = \ln \frac{4}{x^2 - y^2};$
7. $z = \frac{1}{(x-1)(y-2)};$	22. $z = \frac{1}{\ln(x^2)} + \sqrt{x+y};$
8. $z = \frac{1}{\ln(1 - x^2 - y^2)};$	23. $z = (\sqrt{x-y} + \sqrt{x+y})^{-1};$

9. $z = \arcsin(1 - y)$;	24. $z = \frac{y}{\sqrt{x}}$;
10. $z = xy + \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$;	25. $z = y + \arcsin(x + 2)$;
11. $z = \sqrt{x^2 + 2x + y^2}$;	26. $z = (e^x - y)^{-1}$;
12. $z = \arcsin(x - y)$;	27. $z = (2x - y)^{\frac{1}{2}}$;
13. $z = \arccos\left(\frac{y}{x}\right)$;	28. $z = \sqrt{4^x - 2^y}$;
14. $z = \ln(xy)$;	29. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \arcsin x$;
15. $z = \sqrt{x + 3y}$;	30. $z = \arccos y + \arccos x $.

Задание 6. В №1-8 показать, что функция $z = z(x, y)$ удовлетворяет уравнению $F(x, y, z) = 0$

№	$z = z(x, y)$	$F(x, y, z) = 0$
1	$z = y \ln(x^2 - y^2)$	$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y^2} = 0$
2	$z = \frac{x^2}{2y} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$	$x^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{x^3}{y} = 0$
3	$z = \frac{xy}{x + y}$	$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$
4	$z = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}$	$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y^2} = 0$
5	$z = x \ln\left(\frac{y}{x}\right)$	$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$
6	$z = (x^2 + y^2) \operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right)$	$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - 2z = 0$
7	$z = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$	$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + 2z(1 + z) = 0$

8	$z = 4e^{-2y} + (2x + 4y - 3)e^{-y} - x - 1$	$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial y} + x + z = 0$
---	--	--

В №9-20 для заданных функций найти частные производные

9	$u = e^{\frac{x}{y}} + e^{-\frac{z}{y}}$	$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$
10	$z = \frac{\cos y^2}{x}$	$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$
11	$z = \ln(x^2 + y^2)$	$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$
12	$r = \rho^2 \cdot \sin^4 \varphi$	$\frac{\partial r}{\partial \rho}, \frac{\partial r}{\partial \varphi}$
13	$z = \cos(x^5 y^2)$	$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$
14	$u = \operatorname{tg}^2(3v + 4\varpi)$	$\frac{\partial u}{\partial v}, \frac{\partial u}{\partial \varpi}$
15	$r = \rho \sin \varphi - \varphi \cos \rho$	$\frac{\partial r}{\partial \rho}, \frac{\partial r}{\partial \varphi}$
16	$\varpi = 2^{3t^2 + 2z^3 - tz^2}$	$\frac{\partial \varpi}{\partial t}, \frac{\partial \varpi}{\partial z}$
17	$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{1 + x^2}$	$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$
18	$u = 2y\sqrt{x} + 3y^2 \cdot \sqrt[3]{z^2}$	$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$
19	$z = \left(\frac{y}{x}\right)^t$	$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial t}$
20	$u = z \cdot e^{-zy}$	$\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial y}$

В №21-30 для указанной функции $z = z(x, y)$ найти дифференциал dz первого порядка

№	$z = z(x, y)$
21	$z = xy + \frac{y}{x}$
22	$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$
23	$z = e^{(x^2+y^2)^2}$
24	$z = xy + \ln(x^2 + y^2)$
25	$z = \sqrt{x^2 + y^4 - 5}$
26	$z = \ln\left(\operatorname{tg} \frac{y}{x}\right)$
27	$z = \frac{\cos x}{\sin y}$
28	$z = \arcsin \frac{y}{x}$
29	$z = \sqrt[3]{x^4 + y^4}$
30	$z = e^{xy} + \frac{x}{\sqrt{y}}$

Задание 7. В №1-15 дана функция $u = f(x, y)$, точка $M_0(x_0, y_0)$ и вектор $\vec{a}$. Найти $\vec{\operatorname{grad}} u(M_0)$ и $\frac{\partial u}{\partial \ell}(M_0)$ по направлению вектора $\vec{a}$.

№	$u = f(x, y)$	$M_0(x_0, y_0)$	$\vec{a}$
1	$u = 3x^2 + 2xy + y^2$	$M_0(1; 2)$	$\vec{a}\{4; 3\}$
2	$u = x^2 + 3xy^2$	$M_0(1; 3)$	$\vec{a}\{1; 2\}$
3	$u = \operatorname{arctg}(x^2 y^2)$	$M_0(1; -1)$	$\vec{a}\{5; -12\}$
4	$u = \ln(5x + 3y)$	$M_0(2; 2)$	$\vec{a}\{2; -3\}$

5	$u = 2x^3y + 3xy^2$	$M_0(1; -2)$	$\bar{a}\{6; -8\}$
6	$u = 2x^4 + 8x^2y^3$	$M_0(2; -1)$	$\bar{a}\{4; 3\}$
7	$u = x^2 + xy + y^2$	$M_0(1; 1)$	$\bar{a}\{2; -1\}$
8	$u = 5x^2 + 6xy$	$M_0(2; 1)$	$\bar{a}\{1; 2\}$
9	$u = 3x^4 + 2x^2y^2$	$M_0(-1; 2)$	$\bar{a}\{4; -3\}$
10	$u = 3x^2y^2 + 5xy^2$	$M_0(1; 1)$	$\bar{a}\{2; 1\}$
11	$u = \frac{x+y}{x^2+y^2}$	$M_0(1; -2)$	$\bar{a}\{1; -2\}$
12	$u = \arctg(x^2 + y^2)$	$M_0(1; -1)$	$\bar{a}\{5; -12\}$
13	$u = \ln(5x^2 + 4y^2)$	$M_0(1; 1)$	$\bar{a}\{2; -1\}$
14	$u = \arcsin\left(\frac{x^2}{y}\right)$	$M_0(1; 2)$	$\bar{a}\{5; -12\}$
15	$u = \arctg(xy^2)$	$M_0(2; 3)$	$\bar{a}\{4; -3\}$

В №16-30 дана функция $u = f(x, y)$, точка $M_0(x_0, y_0)$ и линия L , проходящая через т. M_0 . Найти $\vec{\text{grad}} u(M_0)$ и $\frac{\partial u}{\partial \ell}(M_0)$ в направлении линии L , в сторону возрастания координаты x .

№	$u = f(x, y)$	$M_0(x_0, y_0)$	L
16	$u = \ln(x^2 + y^2)$	$M_0(1; 3)$	$L: y^2 = 9x$
17	$u = y^2 e^x$	$M_0(2; 2)$	$L: xy = 4$
18	$u = \arctg\left(\frac{x}{y}\right)$	$M_0(1; 1)$	$L: x^2 + y^2 - 2x = 0$
19	$u = \arcsin\left(\frac{x}{y+1}\right)$	$M_0(1; 1)$	$L: y = \sqrt{x}$
20	$u = \arctg(x + y)$	$M_0(1; 1)$	$L: y = x$

21	$u = \ln(x^2 + y^2)$	$M_0(1; 1)$	$L: x^2 + y^2 = 2$
22	$u = x^2 + y^2$	$M_0(4; 4)$	$L: y^2 = 4x$
23	$u = x^2 + y^2$	$M_0(6; 8)$	$L: x^2 + y^2 = 100$
24	$u = \operatorname{arctg}(x y^2)$	$M_0(1; -1)$	$L: y = -x$
25	$u = \arcsin\left(\frac{x}{x+y}\right)$	$M_0(5; 5)$	$L: y^2 = 5x$
26	$u = \operatorname{arcctg}(x^2 + y)$	$M_0(2; 1)$	$L: y^2 = \sqrt{x^2 - 3}$
27	$u = \arccos\left(\frac{x}{y}\right)$	$M_0(1; 2)$	$L: y = 2x$
28	$u = x^2 + y^2 + x y$	$M_0(3; 1)$	$L: 4x - 3y - 9 = 0$
29	$u = \arccos\left(\frac{y}{x+y}\right)$	$M_0(5; 5)$	$L: y^2 = 5x$
30	$u = \ln(x + y)$	$M_0\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$	$L: y = \operatorname{tg}(x)$

Задание 8. Исследовать функцию $u = f(x, y)$ на экстремум

№	$u = f(x, y)$	№	$u = f(x, y)$
1	$z = e^x(4y - xy - y^2)$	16	$z = x^3 + y^3 - 9xy + 27;$
2	$z = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$	17	$z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y;$
3	$u = x^2 - xy + y^2$	18	$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y;$
4	$u = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$	19	$z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2);$
5	$u = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$	20	$z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)};$
6	$u = xy + \frac{1}{2(x+y)}$	21	$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y;$
7	$u = e^{x-y}(x^2 - 2xy + 2y^2)$	22	$z = xy(1 - x - y);$

8	$u = (x - 2y)e^{-(x^2+y^2)}$	23	$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y;$
9	$u = x^2 - xy - y^2$	24	$z = xy + 3x - 2y;$
10	$u = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$	25	$z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20;$
11	$u = x^3 - 2x^2y^2 + y^4$	26	$z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2;$
12	$u = e^{x+2y}(x^2 - y^2)$	27	$z = 6xy - 9y^2 - 9x^2 + 4x + 4y;$
13	$u = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$	28	$z = x^2 + xy - 2;$
14	$u = xy \ln(x^2 + y^2)$	29	$z = x^2 + 2xy + 4x - y^2;$
15	$z = x^3y^2(6 - x - y)$	30	$z = xy - 3x - 2y;$

Задание 9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = f(x, y)$ в замкнутой области D , ограниченной заданными линиями.

1	$u = x^2 + 2xy - 10$	$D: y = 0,$ $y = x^2 - 4;$
2	$u = x^2 + xy - 2$	$D: y = 0,$ $y = 4x^2 - 4;$
3	$u = xy - 2x - y$	$D: x = y = 0,$ $x = 3, \quad y = 4;$
4	$u = x^3 + y^3 - 3xy$	$D: x = y = 0,$ $x = 2, \quad y = 3;$
5	$u = x^2 + 2xy - 10$	$D: y = 0,$ $y = x^2 - 4;$
6	$u = 5x^2 - 3xy + y^2$	$D: x = y = 0,$ $y + x = 2;$
7	$u = x^2 - 2y^2 + 4$	$D: x^2 + y^2 = 1;$
8	$u = \frac{1}{2}x^2 - xy$	$D: y = \frac{1}{3}x^2,$ $y = 3;$

9	$u = x^2 + 3y^2 + x - y$	$D: x = 1, y = -1, y + x = 1;$
10	$u = x^2 + 2xy + 2y^2$	$D: x = 1, y = 0, y = 2;$
11	$u = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$	$D: y = 0, x = -3, x + y + 1 = 0;$
12	$u = x^2 - 2xy - \frac{5}{2}y^2 - 2x$	$D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2.$
13	$z = x^2 - xy + y^2 - 4x;$	$D: x = 0, y = 0, 2x + 3y - 12 = 0.$
14	$z = x^2 + 3y^2 + x - y;$	$D: x = 1, y = 1, x + y - 1 = 0.$
15	$z = x^3 + y^3 - 3xy;$	$D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3.$
16	$z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x;$	$D: x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0.$
17	$z = xy - 2x;$	$D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4.$
18	$z = \frac{1}{2}x^2 - xy;$	$D: y = \frac{1}{3}x^2, y = 3.$
19	$z = 2x + y - xy;$	$D: 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4.$
20	$z = x^2 + 2xy - 4x + 8y;$	$D: 0 \leq x \leq 1, -4 \leq y \leq 2.$
21	$z = x^2 + y^2 - xy + x + y;$	$D: x = 0, y = 0, x - y - 3 = 0.$
22	$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1;$	$D: 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1.$
23	$z = x^2 - y^2 - x + y;$	$D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1.$
24	$z = x^2 + 2xy - 4x + 8y;$	$D: x = 0, y = 0, 5x - 3y + 45 = 0.$
25	$z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 5;$	$D: x + y = 5, x = -1, y = -1.$
26	$z = -3x^2 + 2y^2 + 12x - 4y;$	$D: x = 0, y = 0, 3x + 4y = 12.$
27	$z = 3xy - 6x^2 - 6y^2 + 15x;$	$D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1.$
28	$z = x^2 + 6xy - x + 3y;$	$D: x = 0, x = 3, y = 0, y = 3.$
29	$z = x^2 - 4xy + y^2 + 6y;$	$D: y = x, y = 0, x = 4.$
30	$z = 5xy - y^2;$	$D: x = 4, y^2 = 5x + 5.$

Задание 10. В результате эксперимента получены данные, выписанные в виде таблицы. Методом наименьших квадратов требуется установить функциональную зависимость величины y от величины x : $y = f(x)$

Вариант 1

x	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
y	0,5	7,5	12,5	14,5	14,5	15

Вариант 2

x	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5
y	10,5	9,5	6,5	4,5	2,5	2,5

Вариант 3

x	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5
y	0,5	3,5	4,5	4,5	4,5	4

Вариант 4

x	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
y	0,5	5,5	6,5	8,5	9,5	9

Вариант 5

x	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5
y	9,5	7,5	5,5	6,5	6,5	6,5

Вариант 6

x	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5
y	0,5	6,5	12,5	14,5	15,5	15

Вариант 7

x	-2,5	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5
y	0,5	1,5	2,5	2,5	2,5	4

Вариант 8

x	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
y	10,5	10,5	9,5	9,5	6,5	7,5

Вариант 9

x	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
y	0,5	3,5	8,5	8,5	9,5	10

Вариант 10

x	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5
y	9,5	9,5	8,5	7,5	6,5	7,5

Вариант 11

x	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5
y	0,5	4,5	5,5	5,5	6,5	8

Вариант 12

x	-2,5	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5
y	9,5	9,5	9,5	5,5	6,5	8

Вариант 13

x	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
y	0,5	3,5	3,5	3,5	4,5	4

Вариант 14

x	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5
y	10,5	10,5	10,5	8,5	8,5	11

Вариант 15

x	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
y	0,5	5,5	5,5	7,5	8,5	9

Вариант 16

x	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5
y	0,5	8,5	9,5	10,5	10,5	10

Вариант 17

x	-3,5	-2,5	-1,5	-0,5	0,5	1,5
y	9,5	7,5	7,5	10,5	11,5	12

Вариант 18

x	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
y	0,5	2,5	3,5	3,5	4,5	4

Вариант 19

x	-2,5	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5
y	0,5	1,5	3,5	3,5	4,5	6

Вариант 20

x	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
y	10,5	10,5	9,5	8,5	6,5	6,5

Вариант 21

x	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5
y	0,5	0,5	5,5	7,5	8,5	9

Вариант 22

x	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
y	9,5	8,5	8,5	6,5	5,5	6,5

Вариант 23

x	-3,5	-	-1,5	-0,5	0,5	1,5
y	0,5	7,5	7,5	9,5	10,5	11

Вариант 24

x	-4,5	-	3,5	-2,5	-1,5	-0,5	0,5
y	8,5	7,5	7,5	7,5	8,5	9	

Вариант 25

x	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	
y	0,5	3,5	4,5	6,5	6,5	6	

Вариант 26

x	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	
y	10,5	8,5	6,5	6,5	4,5	5,5	

Вариант 27

x	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	
y	0,5	9,5	11,5	12,5	12,5	12	

Вариант 28

x	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	
y	0,5	9,5	15,5	17,5	18,5	18	

Вариант 29

x	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	
y	9,5	7,5	6,5	8,5	10,5	8,5	

Вариант 30

x	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	
y	0,5	0,5	1,5	3,5	3,5	3	

Контрольная работа №2

Интегральное исчисление функции одной независимой переменной.

Дифференциальные уравнения. Ряды.

Задание 1. Найти неопределенный интеграл.

Вариант	Интеграл	Вариант	Интеграл
1	$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$ $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$	16	$\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{tg} x}}$ $\int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x+4)} dx$
2	$\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx$ $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$	17	$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt[4]{\operatorname{tg} x}}$ $\int \frac{(x^3 - 1)dx}{4x^3 - x}$
3	$\int \frac{\arcsin x + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ $\int \cos^2 x \sin^4 x dx$	18	$\int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\sqrt{\cos x}}$ $\int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx$
4	$\int \frac{dx}{(\arcsin^2 x) \sqrt{1-x^2}}$ $\int \sin x \cos 3x dx$	19	$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 + \cos 2x}}$ $\int \ln^2 x dx$
5	$\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ $\int \cos 3x \cos x dx$	20	$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\int \frac{\ln x dx}{x^3}$
6	$\int \frac{e^x dx}{3 + e^{2x}}$ $\int \sin 5x \sin x dx$	21	$\int \sqrt[3]{1+x^3} x^2 dx$ $\int x^2 e^{-2x} dx$

7	$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{2+e^x}}$ $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$	22	$\int \frac{x^3}{x^8+5} dx$ $\int x^3 e^x dx$
8	$\int \frac{dx}{x \ln x}$ $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}$	23	$\int \frac{x^3 dx}{x^8-2}$ $\int \sin(\ln x) dx$
9	$\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$ $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}} dx$	24	$\int \frac{x^2 dx}{(8x^3+27)^{3/2}}$ $\int \cos(\ln x) dx$
10	$\int \sqrt{\frac{\ln x}{x^2}} dx$ $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx$	25	$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$ $\int x^2 \sin 2x dx$
11	$\int \frac{\ln^2 x + \ln x + 1}{x} dx$ $\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{5x^2-2x+1}}$	26	$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ $\int x^3 \cos 3x dx$
12	$\int \frac{3^x dx}{\sqrt{1+3^x}}$ $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}$	27	$\int \frac{x dx}{(1+x^2)^2}$ $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx$
13	$\int \frac{2^x dx}{1+4^x}$ $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$	28	$\int \frac{x dx}{x^2-5}$ $\int x \operatorname{arctg} x dx$
14	$\int \frac{1+\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx$	29	$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}} dx$

	$\int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx$		$\int e^x \cos x dx$
15	$\int \frac{3 + \operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x} dx$ $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$	30	$\int \sqrt[6]{5-x^4} x^3 dx$ $\int 3^x \sin x dx$

Задание 2. Вычислить определенный интеграл.

Вариант	Интеграл	Вариант	Интеграл
1	$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$	16	$\int_0^1 \arcsin x dx$
2	$\int_1^e x^2 \ln x dx$	17	$\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$
3	$\int_0^1 x e^{-x} dx$	18	$\int_0^1 x e^x dx$
4	$\int_0^2 x^2 e^{-x} dx$	19	$\int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x}}$
5	$\int_1^e \ln^2 x dx$	20	$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x dx$
6	$\int_1^e x \ln^2 x dx$	21	$\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x dx$
7	$\int_0^1 \arcsin \frac{x}{2} dx$	22	$\int_0^{\pi/4} \sin x \cos 3x dx$
8	$\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$	23	$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$
9	$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx$	24	$\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$

10	$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$	25	$\int_0^1 \frac{3^x \, dx}{1+9^x}$
11	$\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx$	26	$\int_0^1 \frac{2^x \, dx}{1+2^x}$
12	$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x \, dx}{\sin^2 x}$	27	$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \, dx$
13	$\int_0^{\pi/2} \frac{x \, dx}{\cos^2 x}$	28	$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x}$
14	$\int_0^{1/2} x e^{2x} \, dx$	29	$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$
15	$\int_0^{1/3} x e^{3x} \, dx$	30	$\int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \, dx$

Задание 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

Вариант	Интеграл	Вариант	Интеграл
1	$y = e^x, y = e^{-x}, x = 1$	16	$ y = -x^2 + 2x$
2	$y = x^2, y = \frac{x^3}{3}$	17	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$
3	$y = x^2, y = \sqrt{x}$	18	$y^2 = x^3, y = 8, x = 0$
4	$y^2 = 2x + 1, x - y - 1 = 0$	19	$y = 2 - x^2, y^3 = x^2$
5	$y = x^2 + 1, y = x + 1$	20	$y^3 = x, y = 1, x = 8$
6	$y = x^2 + 4x, y = x + 4$	21	$y = x - 1, y = x^2 - 2x + 1$
7	$y^2 = x + 1,$ $y = x^2 + 2x + 1$	22	$y = x^2 - 3, y = -2x$
8	$y = \frac{1}{1+x^2}, y = \frac{x^2}{2}$	23	$y = \frac{1}{2+x^2}, y = \frac{x^2}{24}$
9	$y^2 = 4x, x^2 = 4y$	24	$y^2 = 3x, x^2 = 3y$

10	$ y = 1 - x^2$	25	$ y = -x^2 - 2x$
11	$y = e^x, y = e^{-x}, x = -2$	26	$y = x^2 + x - 2, y = 0$
12	$y = x^2, y = x^5$	27	$y = e^x, y = e^{-x}, x = 2$
13	$y = x^2, y = \sqrt{-x}$	28	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
14	$y = x + 1,$ $y = x^2 + 2x + 1$	29	$y^2 = x^3, x = 3$
15	$y = x^2 + 3x,$ $y = -x^2 - 3x$	30	$y = \ln x, x = e, y = 0$

Задание 4. Вычислить несобственный интеграл.

Вариант	Интеграл	Вариант	Интеграл
1	$\int_0^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$	16	$\int_0^{+\infty} x e^{-x} \, dx$
2	$\int_0^1 \frac{x^2 \, dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$	17	$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} \, dx$
3	$\int_0^1 \frac{x^3 \, dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$	18	$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \, dx$
4	$\int_0^2 \frac{x \, dx}{\sqrt{4-x^2}}$	19	$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} \, dx$
5	$\int_0^2 \frac{x^2 \, dx}{\sqrt[3]{8-x^3}}$	20	$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2} \, dx$
6	$\int_0^2 \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{16-x^4}}$	21	$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} \, dx$
7	$\int_0^3 \frac{x \, dx}{\sqrt{9-x^2}}$	22	$\int_0^{+\infty} \frac{x^3 \, dx}{(x^4+1)^3}$

8	$\int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x - 1}}$	23	$\int_0^{+\infty} \frac{e^x dx}{(1 + e^x)^2}$
9	$\int_0^1 \frac{e^{3x} dx}{\sqrt{e^{3x} - 1}}$	24	$\int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx$
10	$\int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$	25	$\int_0^{+\infty} \frac{x^4 dx}{(x^5 + 5)^4}$
11	$\int_0^1 \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^{4x} - 1}}$	26	$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^3 + 3)^2}$
12	$\int_0^1 \sqrt{\frac{\arcsin x}{1 - x^2}} dx$	27	$\int_0^{+\infty} \frac{e^{2x} dx}{(e^{2x} + 2)^3}$
13	$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$	28	$\int_0^{+\infty} \frac{e^{3x} dx}{(e^{3x} + 3)^3}$
14	$\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^4}}$	29	$\int_0^{+\infty} \frac{x^5 dx}{(x^6 + 6)^5}$
15	$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^6}}$	30	$\int_0^{+\infty} x e^{-3x} dx$

Задание 5. Исследовать сходимость несобственного интеграла.

Вариант	Интеграл	Вариант	Интеграл
1	$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{1 + x^2}$	16	$\int_0^1 \frac{dx}{(1 - x^2)^2}$
2	$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 3x dx}{1 + x^2}$	17	$\int_0^2 \frac{dx}{(4 - x^2)^3}$
3	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^3 + 1}}$	18	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + 4x^3}$
4	$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^4} dx$	19	$\int_0^1 \frac{dx}{1 - x^2 + \sqrt{1 - x}}$

5	$\int_0^{+\infty} \frac{x \, dx}{\sqrt{x^4 + 1}}$	20	$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x+16-x^4}}$
6	$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \, dx}{x^2 + 1}$	21	$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
7	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}$	22	$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$
8	$\int_0^{+\infty} \frac{x \, dx}{\sqrt{x^5 + 1}}$	23	$\int_0^1 \frac{dx}{(x^3 - 1)^2}$
9	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$	24	$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 - 8}}$
10	$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \, dx}{x^2}$	25	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
11	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x}}$	26	$\int_0^\pi \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{x}(x^2 + 1)}$
12	$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x} \, dx}{x^2}$	27	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x^3 - x^4}}$
13	$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[8]{x^3 - 1}}$	28	$\int_0^{1/2} \frac{\sin 2x \, dx}{\sqrt[4]{x}(x^2 + 1)}$
14	$\int_1^{+\infty} \frac{\cos 4x}{x^4} \, dx$	29	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - x^3}}$
15	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt[3]{x^2 + 1}}$	30	$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \, dx}{\sqrt[3]{x}}(x^3 + 1)$

Задание 6. Решить дифференциальное уравнение первого порядка.

Вари- ант	Уравнение	Вари- ант	Уравнение
1	$x^2 \, dy = (y^2 + xy) \, dx$	16	$y' + 2xy = 2x$

2	$y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$	17	$dy = \left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y} \right) dx$
3	$y dx + (2\sqrt{xy} - x) dy = 0$	18	$y' - 3\frac{y}{x} = x$
4	$(x - x^3)y' + (-x^2 - 1)y - 3x^3 = 0$	19	$x dy + (2y - x) dx = 0$
5	$(x + y) dx + (y - x) dy = 0$	20	$y'(x - x^3) + (3x^2 - 1)y = 2x^3(x - x^3)^2$
6	$y' + xy = x^3 y^3$	21	$-3x dx - 2xy^2 dx = 3x^2 y dy$
7	$2xy dy = (x^2 + y^2) dx$	22	$8x + xy^2 + \sqrt{6 - x^2} y' = 0$
8	$y' + y \cos x = \sin 2x$	23	$x\sqrt{5 + y^2} dx + y\sqrt{1 + x^2} dy = 0$
9	$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$	24	$(5 + e^x)yy' = e^x$
10	$(x + y) dx + x dy = 0$	25	$y(5 + \ln y) + xy' = 0$
11	$y' - \frac{3}{x}y = x^3 e^x$	26	$y' = \frac{x^2 + xy + 4y^2}{x^2 - 2xy}$
12	$x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$	27	$y' - \frac{y}{1-x} = \frac{e^{4x}}{1-x}$
13	$(y - x) dx + (y + x) dy = 0$	28	$y' - \frac{y}{2x+1} = e^{3x} \sqrt{2x+1}$
14	$y' - \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}$	29	$x dx - 2xy^2 dx = 2y dy + 3x^2 y dy$
15	$x dy = (x + 2y) dx$	30	$y' - y \sin x = y^2 e^{\cos x}$

Задание 7. Решить линейное дифференциальное уравнение.

Вариант	Уравнение	Вариант	Уравнение
1	$y'' + 9y = 6e^{3x}$	16	$y'' - 4y' + 3y = 12 \sin x - 4 \cos x$
2	$y'' - 3y' = 2 - 6x$	17	$y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$
3	$y'' + y = \cos x$	18	$y'' + 4y = 2 \sin 2x$
4	$y'' - 8y' + 7y = 14$	19	$y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$
5	$y'' - y = e^x$	20	$y'' + 2y' + y = xe^x$
6	$y'' - 2y' - y = e^{-x}$	21	$y'' - 7y' + 12y = x$
7	$3y'' + 4y' = 8x + 6$	22	$y'' - 4y = x + 1$
8	$y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$	23	$y'' - 9y = x + 1$
9	$y'' - y = e^{-x}$	24	$y'' - 6y' + 9y = e^x$
10	$y'' - 2y' + 3y = e^{-x} \cos x$	25	$4y'' - 12y' + 9y = e^x$
11	$y'' - y = 5x + 2$	26	$y'' - 7y' + 12y = e^{2x}$
12	$y'' + 4y' + 4y = \cos 2x$	27	$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$
13	$y'' - 2y' + y = 2e^x$	28	$y'' + 2y' + 10y = xe^x$
14	$y'' + 4y = 8e^{2x}$	29	$y'' + y = \sin x$
15	$y'' - y = 2 \cos x$	30	$y'' - y = xe^x$