

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЯНОЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Кафедра «математики»

ПОСОБИЕ
для подготовки к интернет-тестированию
по математике

Уфа 2012

Пособие для подготовки к интернет-тестированию по математике содержит теоретические материалы, способы и методы решения практических задач для подготовки к интернет-тестированию по математике.

Разработан для студентов, обучающихся по всем формам обучения по направлениям подготовки и специальностям, реализуемым в УГНТУ.

Составители: Акмадиева Т.Р., ст. преподаватель
Байрамгулова Р.С., ст. преподаватель
Фаткуллин Н.Ю., доц., канд. эконом. наук
Шамшович В.Ф., доц., канд. эконом. наук

Рецензенты: Бахтизин Р.Н., зав. кафедрой д-р ф.-м. наук, профессор
Сахарова Л.А., доц., канд. техн. наук

Содержание

Глава 1. Линейная и векторная алгебра	4
§1 Матрицы	4
§2 Определители	7
§3 Векторы	16
Глава 2. Системы координат	30
Глава 3. Прямая на плоскости	32
§1 Виды уравнений прямой на плоскости	32
§2 Частные случаи общего уравнения прямой на плоскости	36
§3 Взаимное расположение прямых на плоскости	37
Глава 4. Плоскость в пространстве	39
§1 Виды уравнений плоскости	39
§2 Частные случаи общего уравнения плоскости	43
§3 Взаимное расположение плоскостей	45
Глава 5. Прямая в пространстве	46
§1 Виды уравнений прямой в пространстве	46
§2 Взаимное расположение прямых в пространстве	47
§3 Взаимное расположение прямой и плоскости	47
Глава 6. Кривые второго порядка	49
Глава 7. Поверхности второго порядка	56
Глава 8. Дифференциальная геометрия	57
§1 Уравнение касательной и нормали к кривой	57
§2 Кривизна кривой	57
§3 Поверхность	58
Глава 9. Предел функции в точке	60
§1 Некоторые неопределенности и правила их раскрытия	60
§2 Непрерывность функции в точке	65
Глава 10. Дифференциальное исчисление функции одной переменной	67
Глава 11. Функции нескольких переменных	82
Глава 12. Неопределенный интеграл	89
§1 Основные методы интегрирования	90
Глава 13. Определенный интеграл	101
§1 Вычисление определенного интеграла	101
§2 Несобственные интегралы	102
§3 Геометрические приложения определенного интеграла	104
§4 Применение определенного интеграла к решению некоторых задач физики	107
Глава 14. Двойной интеграл	108
Глава 15. Криволинейный интеграл	113
Глава 16. Обыкновенные дифференциальные уравнения	116
§1 Дифференциальные уравнения I порядка	117
§2 Типы дифференциальных уравнений первого порядка	118
§3 Дифференциальные уравнения высших порядков	122
§4 Линейные уравнения высших порядков	125

§5 Системы дифференциальных уравнений	131
Глава 17. Дифференциальные уравнения в частных производных	133
§1 Дифференциальное уравнение первого порядка	133
§2 Дифференциальное уравнение второго порядка	133
Глава 18. Ряды	135
§1 Общие сведения	135
§2 Числовые ряды	137
§3 Знакоположительные ряды. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$	139
§4 Знакопередающие ряды $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$	141
§5 Функциональные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$	143
§6 Ряды Тейлора и Маклорена	144
Глава 19. Гармонический анализ	147
Глава 20. Теория поля	153
§1 Скалярное поле	153
§2 Векторное поле	157
Глава 21. Теория функции комплексного переменного	160
§1 Комплексные числа	160
§2 Действия над комплексными числами ($z_1 = x_1 + iy_1$; $z_2 = x_2 + iy_2$)	166
§3 Функция комплексного переменного	168
§4 Дифференцируемость функции комплексного переменного	170
§5 Интеграл от функции комплексного переменного	171
§6 Операционное исчисление	172
Глава 22. Интерполирование	175
Глава 23. Численные методы	177
Глава 24. Дискретная математика	187
§1 Теория графов	187
Глава 25. Теория вероятностей	197
§1 Комбинаторика	197
§2 Вычисление вероятности по классической формуле	198
§3 Геометрическое и статистическое определения вероятности	199
§4 Теоремы сложения и умножения вероятностей	200
§5 Формула полной вероятности. Формула Байеса	202
§6 Повторные испытания	202
§7 Случайная величина и ее числовые характеристики	204
§8 Некоторые распределения дискретных случайных величин	207
§9 Некоторые распределения непрерывных случайных величин	211
§10 Функция одного случайного аргумента	
Глава 26. Математическая статистика	217
§1 Выборка. Статистический ряд. Эмпирический закон	217

распределения. Полигон и гистограмма	
§2 Статистические оценки генеральных параметров. Точечные и интервальные оценки для математического ожидания и дисперсии	221
§3 Проверка статистической гипотезы о законе распределения генеральной совокупности	226
§4 Статистическая и корреляционная зависимости. Эмпирическая и теоретическая линии регрессии	228

Глава 1. Линейная и векторная алгебра

§1 Матрицы

1. Матрица, элементы матрицы	Прямоугольная таблица, составленная из $m \cdot n$ чисел, называется матрицей из m строк и n столбцов размера $m \times n$. Для обозначения матрицы применяются круглые скобки и прописные буквы $A, B, C, \dots$. Числа $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$, составляющие матрицу, называются ее элементами. Горизонтальные ряды матрицы называются строками матрицы, вертикальные - столбцами.	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ – матрица размера 2×3. 1, 2, 3 – элементы первой строки. 3, 5 – элементы третьего столбца. Элемент $a_{22} = 3$.
2. Симметрическая матрица	Если $a_{mn} = a_{nm}$, то матрица называется симметрической	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ – симметрическая матрица
3. Квадратная матрица. Главная и побочная диагонали квадратной матрицы.	Матрица, у которой число строк равно числу ее столбцов называется квадратной матрицей. При этом число ее строк (столбцов) называется порядком матрицы. В квадратной матрице числа $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют главную диагональ матрицы, а числа $a_{n1}, a_{(n-1)2}, \dots, a_{1n}$ – побочную диагональ.	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ есть квадратная матрица третьего порядка. 1, 0, 7 – элементы главной диагонали.

4. Диагональная матрица	Квадратная матрица, у которой все числа, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, называется диагональной матрицей .	Квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется диагональной матрицей . $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ – диагональная матрица второго порядка.
5. Единичная матрица	Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется единичной матрицей . Единичную матрицу обозначают прописной буквой E	Матрица $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ единичная матрица третьего порядка
6. Матрица-строка, матрица-столбец.	Матрица, состоящая только из одной строки, называется матрицей-строкой , состоящая только из одного столбца матрицей - столбцом .	Матрица $A = (2 \ 0 \ 5 \ 4)$ есть матрица – строка. $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ – матрица – столбец.
7. Транспонированная матрица	Матрица A^T называется транспонированной по отношению к матрице A, если столбцы (строки) матрицы A являются соответствующими строчками (столбцами) матрицы A^T .	$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$
8. Равенство матриц	Две матрицы A и B называются равными ($A=B$), если они имеют одинаковые размеры и равные соответствующие элементы.	Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ и $A = B$, то $b_{11} = 1, \quad b_{12} = 2, \quad b_{21} = 3, \quad b_{22} = 4.$
9. Сумма матриц	Пусть даны матрицы $A = (a_{ij})$ и	Задача.

	$B = (b_{ij})$, имеющие одинаковые размеры $m \times n$. Суммой матриц A и B называется матрица $C = A + B$ тех же размеров $m \times n$, что и заданные матрицы, элементы которой c_{ij} определяются правилом $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всех $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$. Сумма матриц подчиняется переместительному и сочетательному законам, т.е. $A + B = B + A$ и $(A + B) + C = A + (B + C)$	Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, то $C = A + B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ Задача. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти $2A + B$. <u>Решение.</u> $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad 2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$
10. Умножение матрицы на число	Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ размеров $m \times n$ на число λ называется матрица $B = (b_{ij})$ тех же размеров, что и матрица A, элементы, которой определяются правилом $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ для всех $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$. Умножение матрицы на число подчиняется закону $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$, где λ и μ – числа.	Задача. Если $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ и $\lambda = 3$, то $B = \lambda A = \begin{pmatrix} 6 & -15 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$

11. Умножение матриц	Произведением матрицы A размеров $m \times n$ на матрицу B размеров $n \times p$ называется матрица $C = A \cdot B$ размеров $m \times p$, элементы c_{ij} которой определяются по формуле $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$, и всех $j = 1, 2, \dots, p$.	Задача. Даны $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ Так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, то произведение $A \cdot B$ определено и $A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$ Задача. Даны $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Решение. Матрица A имеет два столбца, B - две строки; следовательно, $A \cdot B$ определено. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 + 1 \cdot 4 & 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 4 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 & 11 \\ 12 & 4 & 13 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$
§2 Определители		
12. Понятие определителя. Определитель второго порядка.	Определитель – это число, которое по специальным правилам вычисляется для каждой квадратной матрицы. Определителем второго порядка, соответствующим заданной матрице A, называется число равное $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Для обозначения определителя используются вертикальные черточки и прописная буква Δ.	$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 10 - 12 = -2$

13. Определитель третьего порядка	Определителем третьего порядка, соответствующим данной квадратной матрице A, называется число $\Delta = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$ $= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}.$ Элементы a_{11}, a_{22}, a_{33} образуют главную диагональ определителя, а элементы a_{31}, a_{22}, a_{13} – побочную диагональ.	Задача. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ <u>Решение.</u> $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$ $(-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$ $= -5 + 18 + 6 = 19.$
14. Минор	Минором M_{ij} элемента a_{ij}, где $i, j = 1, 2, 3$ определителя третьего порядка, называется определитель второго порядка, полученный из данного вычеркиванием i – й строки и j – го столбца.	$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ Задача. Дано: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$. Найти M_{23}. <u>Решение.</u> $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2.$ <u>Ответ.</u> -2.

15. Алгебраическое дополнение	Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij}, где $i, j = 1, 2, 3$, называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, где $i, j = 1, 2, 3$.	$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33},$ Задача. Дано: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$. Найти A_{12}. Решение. $A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(10 - 12) = 2.$ Ответ. 2.
16. Определители n -го порядка	Определитель n-го порядка, соответствующий квадратной матрице A, обозначается символом $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ и определяется как число	Задача. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$ $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (6 - 4) - 1 \cdot (9 - 1) + 2 \cdot (12 - 2) = -2 - 8 + 20 = 10.$

	$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \dots + a_{2n}A_{2n} = \dots = a_{1n}A_{1n} + a_{2n}A_{2n} + \dots + a_{nn}A_{nn}$ где $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{nn}$ — алгебраические дополнения соответствующих элементов $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$.	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (0 - 2) - 1 \cdot (0 - 6) = 2.$ $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) - 3 \cdot (-6) = -8 + 18 = 10.$ Значение определителя: $-10 + 6 - 40 = -44$.
17. Понятие вырожденной и невырожденной матрицы	Обозначим через Δ определитель матрицы A и вычислим его. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то матрицу A называют неособенной (невырожденной) матрицей, если же $\Delta = 0$, то особенной (вырожденной) матрицей.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 - 12 + 9 - 4 = -3.$ Так как $\Delta = -3 \neq 0$, то матрица A невырожденная.
18. Обратная матрица	Квадратная матрица A^{-1} порядка n называется обратной матрицей для данной матрицы A, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$ где E — единичная матрица. Всякая неособенная матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}, определяемую формулой	Задача. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}. <u>Решение.</u> $\det A = 4 - 6 = -2.$ $M_{11}=4; \quad M_{12}=3; \quad M_{21}=2; \quad M_{22}=1$ $x_{11}=-2; \quad x_{12}=1; \quad x_{21}=3/2; \quad x_{22}=-1/2$

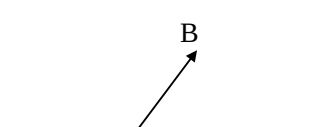
	$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$ где $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{nn}$ есть алгебраические дополнения соответствующих элементов $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ матрицы A.	Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.
19. Ранг матрицы	Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется рангом матрицы. Обозначается $r, r(A)$ или $\text{rang } A$. Очевидно, что $0 \leq r \leq \min(m; n)$, где $\min(m; n)$ – меньшее из чисел m и n. Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется базисным.	Задача. Дана матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 10 \end{pmatrix}$. Определить ее ранг. <u>Решение.</u> Имеем $M_1 = 1 \neq 0$, $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Минор четвертого порядка составить нельзя. <u>Ответ.</u> $\text{rang } A = 3$.
20. Определение ранга матрицы методом элементарных преобразований	Простейший способ определения ранга матрицы состоит в приведении ее к ступенчатому виду при помощи последовательности элементарных преобразований. К ним относятся: - умножение строки на произвольное число, отличное от нуля; - прибавление к некоторой строке любой другой строки, умноженной на	Задача. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 & -8 \\ 7 & -1 & 2 & 1 & -12 \\ 11 & -1 & 3 & 0 & -16 \\ 10 & -2 & 3 & 3 & -20 \end{pmatrix}$. <u>Решение.</u> После вычитания первой строки из остальных получаем

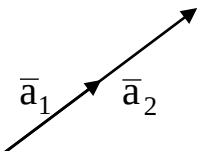
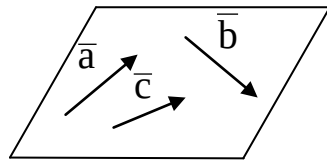
	одно и тоже число; - вычеркивание нулевой строки.	эквивалентную матрицу, а из последней умноженную на 2, $A \approx \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 & -8 \\ 4 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 8 & 0 & 2 & -2 & -8 \\ 4 & 0 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 & -8 \\ 4 & 0 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$ Поскольку три строки промежуточной матрицы были пропорциональны, то из них можно получить две ненулевые строки, которые мы отбросили. Ясно, что $\text{rang } A = 2$, т.к. $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4.$
21. Совместная и несовместная система линейных уравнений. Определенная и неопределенная система линейных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли.	Система, имеющая хотя бы одно решение, называется совместной , имеющая только одно решение определенной , имеющая более одного решения - неопределенной , не имеющая ни одного решения - несовместной . Теорема 1. Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы	Задача. Определить совместность системы линейных уравнений: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim$ $\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}$
	Теорема 2. Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение. Теорема 3. Если ранг совместной системы	$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1 - 6 = 5 \neq 0$ Ранг $A = 2$

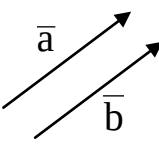
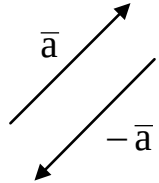
	$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$ $x_1 = \frac{\Delta_1}{\det A}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\det A}; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\det A}.$	
23. Решение систем линейных уравнений матричным методом	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ <u>Задача.</u> Решить матричным способом систему уравнений $\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 2x - y + 2z = 3, \\ 3x + y - 2z = 2. \end{cases}$ <u>Решение.</u> Система содержит одинаковое число уравнений и неизвестных. Вычислим определитель Δ этой системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-5) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 25 \neq 0.$ Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение. Составим матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Так как определитель	

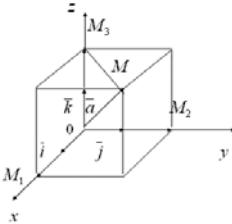
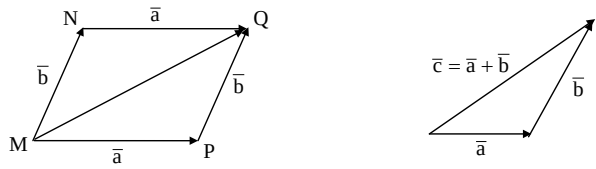
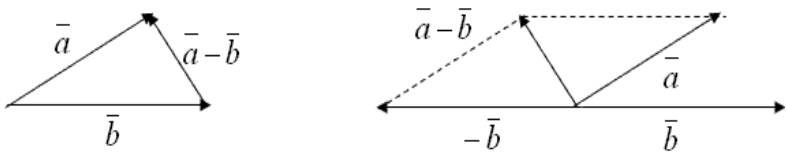
Получим: $\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + \dots + d_{1n}x_n = d_1 \\ d_{22}x_2 + d_{23}x_3 + \dots + d_{2n}x_n = d_2 \\ \\ d_{m2}x_2 + d_{m3}x_3 + \dots + d_{mn}x_n = d_m \end{cases},$ где $d_{1j} = a_{1j}/a_{11}$, $j = 2, 3, \dots, n+1$. $d_{ij} = a_{ij} - a_{i1}d_{1j}$, $i = 2, 3, \dots, n$; $j = 2, 3, \dots, n+1$. Далее повторяем эти же действия для второго уравнения системы, потом – для третьего и т.д.	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix}$ Таким образом, исходная система может быть представлена в виде: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ -5y - 10z = 40 , \\ 6z = 18 \end{cases}$ откуда получаем: $z = 3$; $y = 2$; $x = 1$.
---	--

§3 Векторы

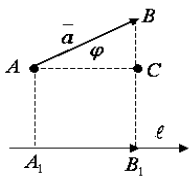
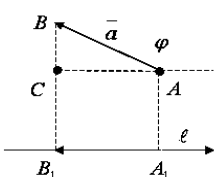
25. Вектор. Координаты вектора.	Вектором называется направленный отрезок. Пусть точка A есть начало вектора, а точка B его <u>конец</u>, тогда этот вектор обозначается символом $\overline{AB}$ и изображается с помощью стрелки. Если заданы 2 точки в пространстве $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то $\overline{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.	 <u>Задача.</u> Дано: $A(2; 0; 1)$, $B(1; 3; -4)$. Найти координаты вектора $\overline{AB}$. <u>Решение.</u> $\overline{AB} = \{1 - 2; 3 - 0; -4 - 1\}$, $\overline{AB} = \{-1; 3; -5\}$. <u>Ответ.</u> $\{-1; 3; -5\}$.
26. Модуль вектора	Расстояние между началом и концом вектора называется длиной вектора или его модулем. Модуль вектора обозначается символами $\overline{AB} , \vec{a} , \dots$ Длина вектора в координатах определяется как	<u>Задача.</u> Дано: $A(2; 0; 1)$, $B(1; 3; -4)$. Найти $\overline{AB}$. <u>Решение.</u>

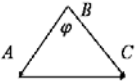
	расстояние между точками начала и конца вектора. Если заданы две точки в пространстве $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, то $ \overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$ Если $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$, то $\vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.	$ \overrightarrow{AB} = \sqrt{(1-2)^2 + (3-0)^2 + (-4-1)^2},$ $ \overrightarrow{AB} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-5)^2},$ $ \overrightarrow{AB} = \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}.$ Ответ. $\sqrt{35}$.
27. Нулевой вектор	Вектор, начало которого совпадает с его концом, называется нулевым и обозначается $\vec{0}$. Нулевой вектор не имеет определенного направления и его $\vec{0} = 0$.	$\vec{0} \quad \vec{0} = \{0; 0; 0\}$ $ \vec{0} = 0$
28. Понятие коллинеарных векторов	Векторы, расположенные на одной прямой или параллельных прямых, называются коллинеарными. Пусть векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ заданы в координатной форме: $\vec{a}_1 = \{x_1; y_1; z_1\} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$, $\vec{a}_2 = \{x_2; y_2; z_2\} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$. $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2$. $\lambda = \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ -условие коллинеарности двух векторов 	Задача. При каких α и β векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \alpha\vec{k}$ и $\vec{b} = \beta\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ коллинеарны? <u>Решение.</u> Так как $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\frac{-2}{\beta} = \frac{3}{-6} = \frac{\alpha}{2}$. Отсюда находим, что $\alpha = -1$; $\beta = 4$.
29. Понятие компланарных векторов	Векторы, расположенные на одной плоскости или на параллельных плоскостях, называются компланарными.	 векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - компланарные.

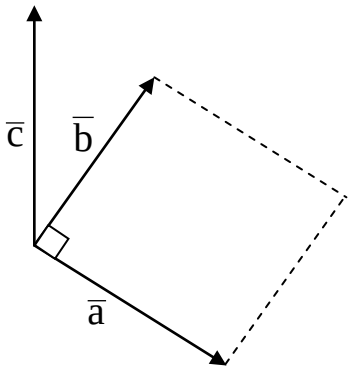
30. Понятие равенства векторов	Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются равными, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковую длину. Равенство векторов записывается в виде $\vec{a} = \vec{b}$. В координатной форме: $\vec{a}_1 = \vec{a}_2$, если $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$.	 $\vec{a} = \{1; 2; 0\}$ $\vec{b} = \{1; 2; 0\}$ $\vec{a} = \vec{b}$
31. Противоположный вектор	Вектор $(-\vec{a})$ называется противоположным вектором для вектора $\vec{a}$, если он ему коллинеарен, имеет одинаковую с $\vec{a}$ длину, но направлен в противоположную сторону. Векторы $\vec{a}$ и $-\vec{a}$ называются взаимно-противоположными векторами.	 $\vec{a} = \{1; 2; 0\}$ $-\vec{a} = \{-1; -2; 0\}$
32. Единичный вектор	Вектор, длина которого равна единице, называется единичным вектором, обозначается символом $\vec{a}^0$ и определяется по формуле $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{ \vec{a} }$.	Задача. (Координаты единичного вектора). Определить координаты единичного вектора $\vec{a}^0$, если $\vec{a} = \{x; y; z\}$. <u>Решение.</u> $\vec{a} = \vec{a} \vec{a}^0 \Rightarrow \vec{a}^0 = \frac{1}{ \vec{a} } \vec{a} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} =$ $= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{k},$ следовательно, $\vec{a}^0 = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k} = \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}.$
33. Направляющие косинусы вектора	Обозначим через α, β, γ углы, между вектором $\vec{a}$ и осями координат OY, OY, OZ. Тогда из прямоугольных треугольников $ОММ_1, ОММ_2, ОММ_3$ получим	Задача. Вектор $\vec{a} = \overline{AB}$ задан координатами своих концов: $A(2; 1; -4)$ и $B(1; 3; 2)$. Найти проекции вектора $\vec{a} = \overline{AB}$ на координатные оси и его направляющие косинусы. <u>Решение.</u> Находим проекции вектора $\vec{a} = \overline{AB}$ на координатные

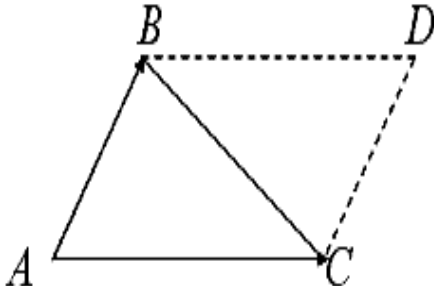
	$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$ $\cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$ $\cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$ 	оси: $a_x = x_B - x_A = 1 - 2 = -1$, $a_y = y_B - y_A = 3 - 1 = 2$, $a_z = z_B - z_A = 2 - (-4) = 6$, а модуль вектора $\vec{a} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{41}$. Вычислим направляющие косинусы: $\cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{41}}$; $\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{41}}$; $\cos \gamma = \frac{6}{\sqrt{41}}$. <u>Ответ.</u> $\cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{41}}$; $\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{41}}$; $\cos \gamma = \frac{6}{\sqrt{41}}$.
34. Сумма векторов	Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец — с концом вектора $\vec{b}$, при условии, что начало вектора $\vec{b}$ приложено к концу вектора $\vec{a}$. Пусть векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ заданы в координатной форме: $\vec{a}_1 = \{x_1; y_1; z_1\} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$, $\vec{a}_2 = \{x_2; y_2; z_2\} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$. Сумма векторов: $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2) \vec{i} + (y_1 + y_2) \vec{j} + (z_1 + z_2) \vec{k}$.	Задача. Дано: $\vec{a} = \{4; 0; -3\}$, $\vec{b} = \{-1; 1; 2\}$. Найти $\vec{a} + \vec{b}$.  <u>Решение.</u> $\vec{a} + \vec{b} = \{4 + (-1); 0 + 1; -3 + 2\}$, $\vec{a} + \vec{b} = \{3; 1; -1\}$. <u>Ответ.</u> $\{3; 1; -1\}$.
35. Разность векторов	Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, что $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$. Разность векторов в координатной форме: $\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = (x_1 - x_2) \vec{i} + (y_1 - y_2) \vec{j} + (z_1 - z_2) \vec{k}$	Задача. Дано: $\vec{a} = \{4; 0; -3\}$, $\vec{b} = \{-1; 1; 2\}$. Найти $\vec{a} - \vec{b}$.  <u>Решение.</u>

		$\bar{a} - \bar{b} = \{4 - (-1); 0 - 1; -3 - 2\},$ $\bar{a} - \bar{b} = \{5; -1; -5\}.$ <u>Ответ.</u> $\{5; -1; -5\}.$
36. Умножение векторов	Пусть даны вектор $\bar{a}$ и число λ. Произведением вектора $\bar{a}$ на число λ называется вектор $\lambda \bar{a}$, коллинеарный вектору $\bar{a}$, имеющий длину $\lambda \bar{a} = \lambda \bar{a}$ и то же направление, что и вектор $\bar{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположное направление, если $\lambda < 0$. Если $\lambda = 0$, то $\lambda \bar{a} = \bar{0}$. Произведение вектора $\bar{a} = \{x; y; z\}$ на число λ в координатной форме: $\lambda \bar{a} = \{\lambda x; \lambda y; \lambda z\}$	Задача. Дано: $\bar{a} = \{2; 0; 3\}$. Найти $3\bar{a}$. <u>Решение.</u> $3\bar{a} = \{6; 0; 9\}.$ <u>Ответ.</u> $\{6; 0; 9\}.$
37. Деление отрезка в данном отношении	Если точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ делит отрезок $[M_1M_2]$, где $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ в отношении λ, т.е. $\overline{M_1M_0} = \lambda \cdot \overline{M_0M_2}$, то ее координаты находятся по формулам $x_0 = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda},$ $z_0 = \frac{z_1 + \lambda \cdot z_2}{1 + \lambda}.$ В частности, при $\lambda = 1$ точка M_0 делит отрезок пополам $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},$	Задача. Даны точки $M_1(2; 4; -2)$ и $M_2(-2; 4; 2)$. На прямой M_1M_2 найти точку M, делящую отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = 3$. <u>Решение.</u> $x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{2 + 3 \cdot (-2)}{1 + 3} = -1,$ $y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{4 + 3 \cdot 4}{1 + 3} = 4,$ $z_M = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} = \frac{-2 + 3 \cdot 2}{1 + 3} = 1.$ Следовательно, искомая точка $M(-1; 4; 1)$. <u>Ответ.</u> $M(-1; 4; 1)$.

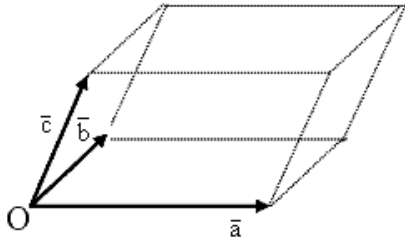
		$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}.$		
38. Проекция вектора на ось	Проекция вектора $\vec{a}$ на ось ℓ равна модулю вектора $\vec{a}$, умноженному на косинус угла φ между вектором и осью: $\text{пр}_{\ell} \vec{a} = \vec{a} \cos \varphi.$  		Задача. Вычислить проекцию вектора $\vec{a} = \{5; 2; 5\}$ на направление вектора $\vec{b} = \{2; -1; 2\}$. <u>Решение.</u> $\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{b} }; \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 = 10 - 2 + 10 = 18,$ $\vec{b} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3.$ Следовательно, $\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{b} } = \frac{18}{3} = 6.$ <u>Ответ.</u> $\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = 6.$	
39. Скалярное произведение векторов	Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos \varphi$ Свойства скалярного произведения: 1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a} ^2;$ 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \perp \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$, или $\vec{b} = 0$. 3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$ 4) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c};$ 5) $(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\vec{b}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b}), m = \text{const}.$ Если рассматривать векторы $\vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\};$ $\vec{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$ в декартовой прямоугольной системе координат, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b.$		Задача. Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $\vec{a} = 4, \vec{b} = 6, \vec{a} \wedge \vec{b} = \pi/3.$ <u>Решение.</u> $15\vec{a} \cdot \vec{a} - 18\vec{a} \cdot \vec{b} - 10\vec{a} \cdot \vec{b} + 12\vec{b} \cdot \vec{b} =$ $= 15 \vec{a} ^2 - 28 \vec{a} \vec{b} \cos \frac{\pi}{3} + 12 \vec{b} ^2 = 15 \cdot 16 - 28 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot 36 = 240 - 336 + 432 = 672 - 336 = 336.$ <u>Ответ.</u> 336.	

40. Определение угла между векторами. Геометрический смысл скалярного произведения векторов.	Так как $\overline{ab} = \overline{a} \overline{b} \cos \varphi$, то $\cos \varphi = \frac{\overline{ab}}{ \overline{a} \overline{b} } = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$	Задача. Даны вершины треугольника $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$ и $C(3;-2;1)$. Определить внутренний угол треугольника при вершине B.  Решение. Построим векторы $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$. Имеем $\overline{BA} = \{3;0;4\}$, $\overline{BC} = \{7;0;1\}$. Тогда $\cos \varphi = \cos(\overline{BA}, \overline{BC}) = \frac{\overline{BA} \overline{BC}}{ \overline{BA} \overline{BC} } = \frac{3 \cdot 7 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1}{\sqrt{9+0+16} \sqrt{49+0+1}} =$ $= \frac{25}{5\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$ Ответ. $\frac{\pi}{4}$.
41. Ортогональность векторов	Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $\overline{ab} = 0$ или $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$ Условие называется условием перпендикулярности двух векторов	Задача. При каком m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ перпендикулярны. Решение. $\vec{a} = \{m, 1, 0\}$; $\vec{b} = \{3, -3, -4\}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3m - 3 = 0 \Rightarrow m = 1.$ Ответ. $m = 1.$
42. Физический смысл скалярного произведения векторов	Задача. Вычислить работу по перемещению материальной точки вдоль отрезка, из точки $B(1;-2;3)$ в точку $C(3;4;2)$ под действием постоянной по величине и направлению силы $\vec{F} = \{2;1;5\}$. Решение. Из курса физики известно, что работа A, совершаемая при указанных в примере условиях, находится	

	по формуле $A = \overline{F} \cdot \overline{S} = \overline{F} \cdot \overline{BC}$. Так как $\overline{BC} = \{2; 6; -1\}$, $\overline{F} = \{2; 1; 5\}$, то $A = \overline{FBC} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 5 \cdot (-1) = 5.$ <u>Ответ.</u> 5.	
43. Векторное произведение векторов	Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям: 1) $\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} \sin \varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$; 2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$; 3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов. Упорядоченная тройка некопланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется правой, если из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден против часовой стрелки. В противоположном случае тройка называется левой. Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ или $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$. <u>Свойства векторного произведения векторов:</u> 1) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$; 2) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$; 3) $(m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b})$; 4) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$. Введем декартовую систему координат и рассмотрим векторные произведения единичных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j},$ $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$ 	
44. Векторное произведение векторов в координатной форме	Если заданы векторы $\vec{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$ и $\vec{b} = \{x_b; y_b; z_b\}$ в декартовой прямоугольной системе координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то	<u>Пример.</u> Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. $\vec{a} = \{2; 5; 1\}; \quad \vec{b} = \{1; 2; -3\}.$ $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}$

	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$	
45. Нахождение площади параллелограмма. Геометрическое приложение векторного произведения векторов.	Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется по формуле: $S = \vec{AB} \times \vec{AC} $ 	Задача. Даны вершины треугольника $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$ и $C(5;2;6)$. Вычислить площадь этого треугольника. <u>Решение.</u> Найдем векторы $\vec{AB}$, $\vec{AC}$. Имеем: $\vec{AB} = \{2; -2; -3\}$, $\vec{AC} = \{4; 0; 6\}$. Так как $\vec{AB} \times \vec{AC}$ равен площади параллелограмма $\vec{dc} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3$, то площадь S треугольника ABC найдется по формуле $S = \frac{1}{2} \vec{AB} \times \vec{AC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k} =$ $= \frac{1}{2} \sqrt{12^2 + (-24)^2 + 8^2} = \frac{1}{2} \sqrt{874} = 14.$ <u>Ответ.</u> 14. Задача. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$; $3\vec{a} + \vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{b} = 1$; $\vec{a} \wedge \vec{b} = 30^\circ$. $(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + 9\vec{b} \times \vec{a} + 3\vec{b} \times \vec{b} =$ $= -\vec{b} \times \vec{a} + 9\vec{b} \times \vec{a} = 8\vec{b} \times \vec{a}$

		$S = 8 \vec{b} \vec{a} \sin 30^\circ = 4(\text{ед}^2).$ <u>Ответ.</u> 4.
46. Механическое приложение векторного произведения векторов	<u>Задача.</u> Сила $\vec{F} = \{3; 2; -4\}$ приложена к точке $M(2; -1; 1)$. Определить момент силы относительно начала координат. <u>Решение.</u> Пусть точка A есть некоторая точка R^3. Моментом силы $\vec{F}$, приложенной к точке M, относительно точки A называется вектор $\overrightarrow{AM} \times \vec{F}$. По условию $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} = \{2; -1; 1\}$, $\vec{F} = \{3; 2; -4\}$. Тогда, согласно формуле (1.61), получим $\overrightarrow{OM} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 11\vec{j} + 7\vec{k}.$ <u>Ответ.</u> $\{2; 11; 7\}$.	
47. Смешанное произведение векторов	Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$ или $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Смешанное произведение $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. <u>Свойства смешанного произведения:</u> - Смешанное произведение равно нулю, если: - хоть один из векторов равен нулю; - два из векторов коллинеарны; - векторы компланарны; $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$; $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} = \vec{c}, \vec{a}, \vec{b} = -\vec{b}, \vec{a}, \vec{c} = -\vec{c}, \vec{b}, \vec{a} = -\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$; $\lambda \vec{a}_1 + \mu \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c} = \lambda \vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c} + \mu \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}$; - Объем треугольной пирамиды, образованной векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен $\frac{1}{6} \vec{a}\vec{b}\vec{c}$.	

48. Смешанное произведение векторов в координатной форме	Если $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$, $\vec{c} = \{x_3; y_3; z_3\}$, то $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$	Задача. Даны векторы $\vec{a} = \{1; 2; -1\}$, $\vec{b} = \{2; 2; 3\}$, $\vec{c} = \{0; 1; 4\}$. Вычислить $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. <u>Решение.</u> $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 2 - 16 - 3 = -13.$ <u>Ответ.</u> $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -13$.
49. Геометрическое приложение смешанного произведения векторов. Вычисление объема параллелепипеда.	Модуль смешанного произведения численно равен объему V параллелепипеда построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ как на ребрах, т.е. $V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} .$ 	Задача. Вычислить V параллелепипеда построенного на векторах $\vec{a} = \{1; 4; 3\}$, $\vec{b} = \{0; 2; 5\}$, $\vec{c} = \{2; 3; 1\}$. <u>Решение.</u> $V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \right = 2 + 40 - 12 - 15 = 15.$ <u>Ответ.</u> $V = 15$ куб.ед.

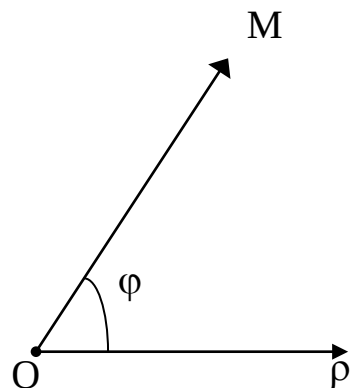
50. Необходимое и достаточное условия компланарности трех векторов, заданных в координатной форме	Для того, чтобы три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение равнялось нулю, т.е. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ или в координатной форме $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$	Задача. При каком значении $x \in \mathbb{R}$ векторы $\vec{a} = \{1; 3; 0\}$, $\vec{b} = \{2; 0; 6\}$, $\vec{c} = \{x; 0; 3\}$ компланарны? Решение. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, если $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$. Тогда $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \\ x & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 18 \cdot x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$ Ответ. 1.
51. Норма вектора в евклидовом пространстве. Нормирование вектора.	Линейное пространство, в котором определена операция скалярного умножения, называется евклидовым и обычно обозначается E. Нормой (длиной) вектора $\vec{x}$ в E называется число, равное длине вектора. Из аксиом скалярного произведения следуют свойства нормы: обозначаемое $\vec{x}$ $\vec{x} > 0$, при условии $\vec{x} \neq 0$. $\vec{x} = 0$, если $\vec{x} = 0$. $\vec{x} + \vec{y} \leq \vec{x} + \vec{y}$.	Задача. Укажите соответствие между заданным вектором и соответствующим ему нормированным вектором $(1, 0) \rightarrow B$ $(1, 1) \rightarrow E$ $(3, 4) \rightarrow C$ $(1, 2) \rightarrow D$ Ответ. A) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, B) $(1, 0)$, C) $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, D) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, E) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Задача. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ вектор $\vec{a} = \left(\lambda; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ является нормированным при значениях λ, равных ...

	Вектор, норма которого равна единице, называется единичным (нормированным) вектором, или ортом.	<u>Решение.</u> Длина нормированного вектора равна единице, следовательно $\sqrt{\lambda^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1,$ следовательно $\lambda = \pm \frac{2}{3}$. <u>Ответ.</u> $\lambda = \pm \frac{2}{3}$.
52. Характеристический многочлен матрицы. Собственный вектор матрицы.	Характеристическим уравнением матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называется уравнение $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$ Корни этого уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ называются характеристическими числами матрицы; они всегда действительны, если исходная матрица является симметрической. Система уравнений $\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 = 0, \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22} - \lambda)\xi_2 + a_{23}\xi_3 = 0, \\ a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + (a_{33} - \lambda)\xi_3 = 0, \end{cases}$	Задача. Дана матрица $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Найти ее характеристические числа и собственные векторы. <u>Решение.</u> $\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ 4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } (5 - \lambda)(3 - \lambda) - 8 = 0, \text{ т.е. } \lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0;$ характеристические числа $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 7$. Собственный вектор, соответствующий первому характеристическому числу, находим из системы уравнений $\begin{cases} (5 - \lambda_1)\xi_1' + 2\xi_2' = 0, \\ 4\xi_1'' + (3 - \lambda_2)\xi_2'' = 0. \end{cases}$ Подставив значение $\lambda_2 = 7$,

	в которой λ имеет одно из значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и определитель которой в илу этого равен нулю, определяет тройку чисел $(\xi_1; \xi_2; \xi_3)$, соответствующую характеристическому числу. Эта совокупность трех чисел $(\xi_1; \xi_2; \xi_3)$ с точностью до постоянного множителя определяет ненулевой вектор $\mathbf{r} = \xi_1 \mathbf{i} + \xi_2 \mathbf{j} + \xi_3 \mathbf{k}$, называемый собственным вектором матрицы.	приходим к соотношению $\xi_1'' - \xi_2'' = 0$, т.е. $\xi_1'' = \xi_2'' = \beta \neq 0$. Собственным вектором, соответствующим второму характеристическому числу, служит $\mathbf{r}_2 = \beta \mathbf{i} + \beta \mathbf{j}$.
--	--	--

Глава 2. Системы координат

1. Координаты точки в полярной системе координат



Точка $M(\rho; \varphi)$ (см. чертеж) в полярной системе может быть задана с помощью двух координат:

ρ - длина вектора $\overline{OM}$

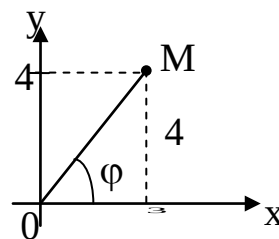
φ - угол между вектором $\overline{OM}$ и осью $O\rho$.

Задача.

Полярные координаты точки $A(3, 4)$ имеют вид...

- 1) $\left(5, \arctg \frac{4}{3}\right)$ 2) $\left(5, \arctg \frac{3}{4}\right)$
 3) $\left(25, \arctg \frac{4}{3}\right)$ 4) $\left(25, \arctg \frac{3}{4}\right)$

Решение.



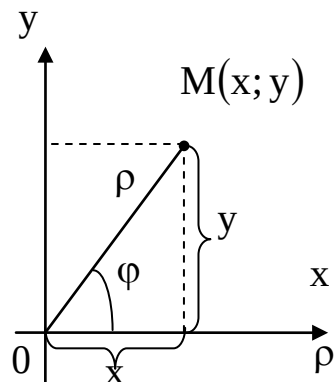
$$\rho = |\overline{OM}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{3}; \quad \varphi = \arctg \frac{4}{3}.$$

Тогда $M\left(5; \arctg \frac{4}{3}\right)$.

Ответ. №1

2. Связь между декартовой и полярной системами координат



Совместим ось $O\rho$ с положительной полуосью Ox . По чертежу из прямоугольного треугольника можно записать **формулы связи**

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

Задача.

Уравнение $x^2 + y^2 = ax$ в полярных координатах имеет вид

- 1) $\rho = a \cos \varphi$ 2) $\rho^2 = a \cos \varphi$
3) $\rho = a \sin \varphi$ 4) $\operatorname{tg} \varphi = a$

Решение.

Подставим в уравнение $x = \rho \cdot \cos \varphi$; $y = \rho \cdot \sin \varphi$. Тогда

$$\rho^2 \cdot \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = a \rho \cos \varphi.$$

$$\rho^2 = a \rho \cdot \cos \varphi$$

$$\rho = a \cdot \cos \varphi$$

Ответ. №1

Задача.

Уравнение линии $(x^2 + y^2)^3 = 3x$ в полярных координатах ($x = r \cdot \cos \varphi$; $y = r \cdot \sin \varphi$) имеет вид...

1) $r^3 = 3 \cos \varphi$ 2) $r^5 = 3 \sin \varphi$

3) $r^5 = 3 \cos \varphi$ 4) $r^2 = 3 \cos \varphi$

Решение.

$$(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)^3 = 3r \cos \varphi$$

$$(r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi))^3 = 3r \cos \varphi$$

$$r^6 = 3r \cos \varphi$$

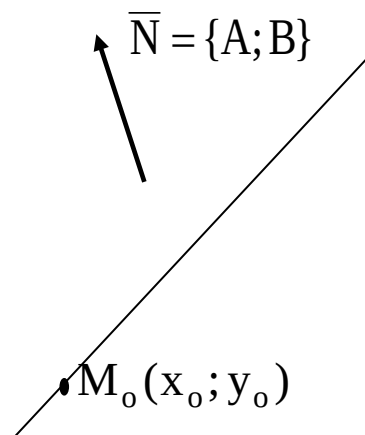
$$r^5 = 3 \cos \varphi$$

Ответ. №3

Глава 3. Прямая на плоскости

§1 Виды уравнений прямой на плоскости

1. Уравнение прямой, проходящей через точку с нормальным вектором



Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ с нормальным вектором $\vec{N} = \{A; B\}$

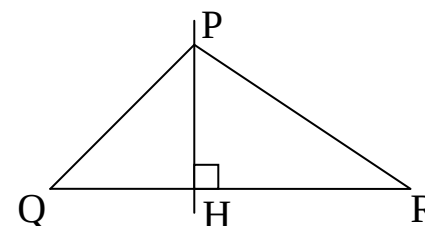
(нормальный вектор – вектор, перпендикулярный прямой)

Задача.

Даны вершины треугольника $P(2;1)$, $Q(-1;-1)$, $R(3;2)$. Тогда уравнение высоты PH имеет вид...

Варианты ответов: 1) $x + y + 2 = 0$ 2) $3x + 2y - 13 = 0$
3) $4x + 3y - 11 = 0$ 4) $2x + 3y - 13 = 0$

Решение.



Вектор $\vec{QR}$ перпендикулярен прямой PH . Тогда $\vec{QR} = \vec{N} = \{4; 3\}$.

Прямая PH проходит через точку $P(2;1)$.

Тогда уравнение PH : $4(x - 2) + 3(y - 1) = 0$;

$4x + 3y - 11 = 0$.

Ответ. №3

2. Общее уравнение прямой

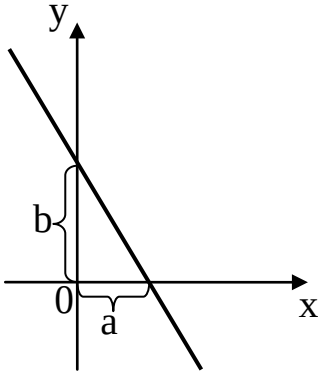
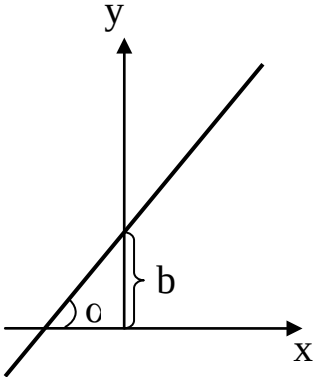
Общее уравнение прямой
 $Ax + By + C = 0$,

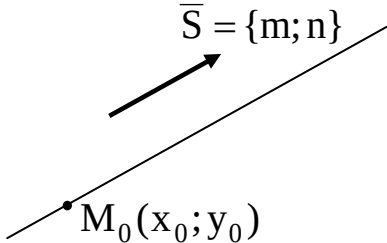
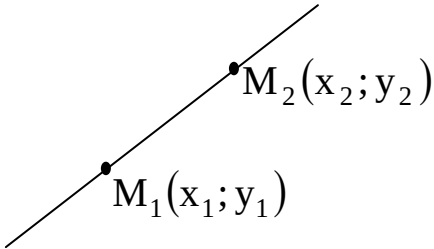
где $\vec{N} = \{A, B\}$ – координаты нормального вектора.

Задача.

Найти нормальный вектор прямой $4x - y + 5 = 0$.

Решение.

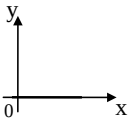
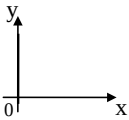
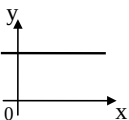
		Коэффициенты при переменных – это координаты нормального вектора. $\bar{N} = \{4, -1\}$.
3. Уравнение прямой в отрезках	 Уравнение прямой в отрезках $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	
4. Уравнение прямой с угловым коэффициентом	 Уравнение прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$ k - угловой коэффициент, $k = \operatorname{tg} \alpha$ b - отрезок, отсекаемый прямой на оси	<u>Задача.</u> Прямая проходит через точки $O(0;0)$ и $B(-2;1)$. Тогда ее угловой коэффициент равен... <u>Решение.</u> Уравнение прямой через две точки $\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-0}{1-0}; \quad \frac{x}{-2} = \frac{y}{1}.$ Выразим y через x, тогда $y = -\frac{1}{2}x.$ Следовательно, $k = -\frac{1}{2}$

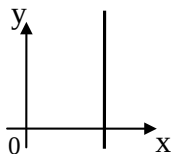
5. Уравнение прямой, проходящей через точку с направляющим вектором	Оу.  Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ с направляющим вектором $\bar{S} = \{m; n\}$ $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$ (направляющий вектор – вектор, параллельный прямой)	Задача. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A_0(-1; 5)$ параллельно вектору $\{2; 3\}$ <u>Решение.</u> $\frac{x + 1}{2} = \frac{y - 5}{3}$ $3x + 3 = 2y - 10$ $3x - 2y + 13 = 0$
6. Уравнение прямой, проходящей через две точки	 Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$	Задача. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $O(0; 0)$ и $B(-2; 1)$. <u>Решение.</u> $\frac{x - 0}{-2 - 0} = \frac{y - 0}{1 - 0}$ $x = -2y.$ <u>Ответ.</u> $x = -2y.$

7. Уравнение прямой по точке с угловым коэффициентом	Уравнение прямой по точке $M_0(x_0; y_0)$ с угловым коэффициентом k $y - y_0 = k(x - x_0)$, где $k = \operatorname{tg} \alpha$ α - угол наклона прямой к положительному направлению оси Ox. Если $\alpha > 90^\circ$, то $k < 0$.	<u>Задача.</u> Градусная мера угла между прямой $y = \sqrt{3}x + 1$ и положительным направлением оси Ox равна... Варианты ответов: 1) 60° 2) 45° 3) 30° 4) 120° <u>Решение.</u> Угол между прямой и положительным направлением оси Ox находится из углового коэффициента k. $k = \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$, $\alpha = 60^\circ$. <u>Ответ.</u> №1. <u>Задача.</u> Прямая образует с осью Ox угол 135° и проходит через точку $A(-2; 4)$. Написать ее уравнение. <u>Решение.</u> $k = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$. Подставим k и координаты точки A в уравнение $y - 4 = -1 \cdot (x + 2)$; $x + y - 2 = 0$.
8. Параметрические уравнения прямой	Параметрические уравнения прямой $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}$	<u>Задача.</u> Параметрическими уравнениями прямой на плоскости являются уравнения... Варианты ответов: 1) $\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -1 \end{cases}$ 2) $y = 3x - 1$ 3) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4}$ 4) $5x + 4y - 20 = 0$ <u>Решение.</u> Сравнивая варианты ответов и вид параметрических уравнений, приходим к выводу <u>Ответ.</u> №1.

9. Расстояние от точки до прямой	Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле $d = \frac{ Ax_0 + By_0 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$
----------------------------------	---

§2 Частные случаи общего уравнения прямой на плоскости

10. Уравнение оси Oх	 ось Oх: $y = 0$	Задача. Укажите правильное соответствие между уравнениями и типами уравнений прямой 1) $2x - 5y - 9 = 0$ 2) $y = -3x + 7$ 3) $x = 6$ Варианты ответов: А) уравнение прямой с угловым коэффициентом В) уравнение прямой, параллельной оси абсцисс С) общее уравнение прямой D) уравнение прямой, параллельной оси ординат Е) уравнение прямой в отрезках на осях <u>Решение.</u> Проанализируем все уравнения 1. Уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$. Это общее уравнение прямой. 2. Это уравнение вида $kx + b$. Это уравнение с угловым коэффициентом. 3. $x = 6$. В уравнении нет переменной y. Тогда прямая параллельна оси Oу. <u>Ответ.</u> (1) ↔ С (2) ↔ А (3) ↔ D
11. Уравнение оси Oу	ось Oу: $x = 0$	
12. Уравнение прямой, параллельной оси Oх	 Прямая параллельна оси Oх: $By + C = 0$ или $y = -\frac{C}{B}$ (в уравнении отсутствует координата x)	
13. Уравнение прямой, параллельной оси Oу	Прямая, параллельна оси Oу: $Ax + C = 0$ или $x = -\frac{C}{A}$ (в уравнении отсутствует координата y)	
14. Уравнение прямой, проходящей через начало координат	 Прямая проходит через начало координат: $Ax + By = 0$	



§3 Взаимное расположение прямых на плоскости

Вид уравнения прямой	С угловым коэффициентом	Общее уравнение	С направляющим вектором
	$y = k_1x + b_1$ $y = k_2x + b_2$	$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 = 0$ $A_2x_2 + B_2y_2 + C_2 = 0$	$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1}$ $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2}$
15. Условие параллельности прямых	$k_1 = k_2$	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$	$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$
16. Условие перпендикулярности прямых	$k_1 \cdot k_2 = -1$	$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$	$m_1m_2 + n_1n_2 = 0$
17. Угол между прямыми	$\operatorname{tg} \alpha = \left \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1} \right $	$\cos \varphi = \frac{ A_1A_2 + B_1B_2 }{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$	$\cos \varphi = \frac{ m_1m_2 + n_1n_2 }{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}$

Задача.

Уравнением прямой, перпендикулярной прямой $y = 2x + 3$, является...

Варианты ответов: 1) $x + 3y + 12 = 0$ 2) $x + 2y + 4 = 0$ 3) $2x - y + 1 = 0$ 4) $3x - y - 5 = 0$

Решение.

Для прямой $y = 2x + 3$ угловой коэффициент $k_1 = 2$, т.к. прямая должна быть перпендикулярной, то $k_2 = -\frac{1}{2}$

$$1) x + 3y + 12 = 0, \quad 3y = -x - 12, \quad y = -\frac{1}{3}x - 4, \quad k = -\frac{1}{3} \neq -\frac{1}{2}$$

$$2) x + 2y + 4 = 0, \quad 2y = -x - 4, \quad y = -\frac{1}{2}x - 2, \quad k = -\frac{1}{2}$$

$$3) 2x - y + 1 = 0, \quad y = 2x + 1, \quad k = 2 \neq -\frac{1}{2}$$

$$4) 3x - y - 5 = 0, \quad y = 3x - 5, \quad y = 3 \neq -\frac{1}{2}$$

Ответ. №2.

Задача.

Среди прямых, заданных уравнениями $\ell_1 : y = 2x$, $\ell_2 : y = 2x - 1$, $\ell_3 : x + 2y - 1 = 0$, $\ell_4 : 2x + 4y + 1 = 0$, число неупорядоченных взаимно перпендикулярных пар прямых, равно...

Решение.

Для $\ell_1 : k = 2$;

$\ell_2 : k = 2$;

$$\ell_3 : 2y = -x + 1, \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \quad k = -\frac{1}{2};$$

$$\ell_4 : 4y = -2x - 1, \quad y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \quad k = -\frac{1}{2}.$$

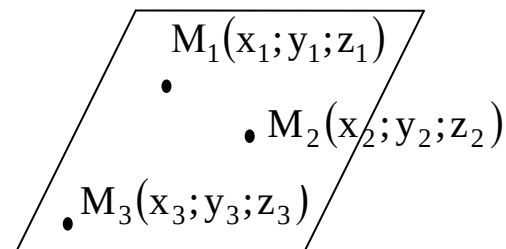
$$\ell_1 \perp \ell_3; \quad \ell_1 \perp \ell_4; \quad \ell_2 \perp \ell_3; \quad \ell_2 \perp \ell_4, \quad \text{т.к. } 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Ответ. число неупорядоченных взаимно перпендикулярных пар прямых равно 4.

Глава 4. Плоскость в пространстве

§1 Виды уравнений плоскости

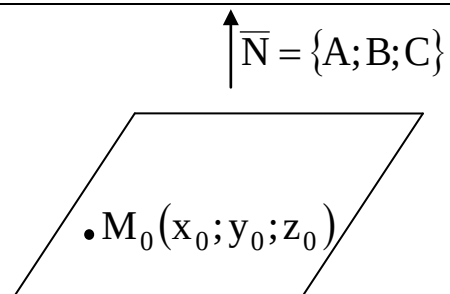
1. Уравнение плоскости, проходящей через три точки



Уравнение плоскости, проходящей **через три точки** $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

2. Уравнение плоскости, проходящей через точку с нормальным вектором

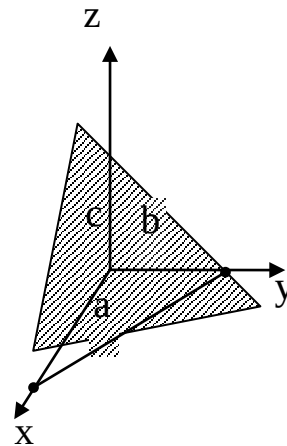


Уравнение плоскости, проходящей **через точку** $M_0(x_0; y_0; z_0)$ **с нормальным вектором** $\vec{N} = \{A; B; C\}$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

(нормальный вектор – вектор, перпендикулярный плоскости)

3. Уравнение плоскости в отрезках



Уравнение плоскости **в отрезках**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

где a, b, c – отрезки, которые отсекает плоскость соответственно на осях

Задача.

Какие отрезки отсекает плоскость $2x + 3y + 6z - 12 = 0$ на осях координат.

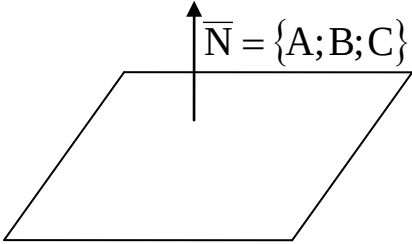
Решение.

Сведем к уравнению плоскости в отрезках

$$2x + 3y + 6z - 12 = 0 \quad | :12,$$

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1.$$

Тогда по оси Ox отсекается отрезок, равный 6; по оси Oy – отрезок, равный 4; по оси Oz – отрезок, равный 2.

	Ох, Оу, Oz.	
4. Общее уравнение плоскости	 Общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ Коэффициенты при переменных x, y и z – это координаты нормального вектора $\bar{N} = \{A; B; C\}$.	<u>Задача.</u> Нормальный вектор плоскости $x - 4y - 8z - 3 = 0$ имеет координаты Варианты ответов: 1) $(1; -4; -8)$ 2) $(-4; -8; -3)$ 3) $(1; -4; 8)$ 4) $(1; -4; -3)$ <u>Решение.</u> Координаты нормального вектора – это коэффициенты при переменных x, y и z. $\bar{N} = \{1; -4; -8\}$ <u>Ответ.</u> №1.
<u>Задача.</u> Плоскости $4x - y + 3z + 1 = 0$ принадлежат точки... Варианты ответов: 1) $C(0; 4; 1)$ 2) $E(4; -1; 3)$ 3) $D(-2; 0; 3)$ 4) $A(-1; 6; 3)$		

Решение.

Точка принадлежит плоскости, если ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости.

C: $4 \cdot 0 - 4 + 3 \cdot 1 + 1 = 0$. C принадлежит плоскости

E: $4 \cdot 4 + 1 + 3 \cdot 3 + 1 \neq 0$

D: $4 \cdot (-2) - 0 + 3 \cdot 3 + 1 \neq 0$

A: $4 \cdot (-1) - 6 + 3 \cdot 3 + 1 = 0$. A принадлежит плоскости

Ответ. точки C и A принадлежат плоскости.

Задача.

Если точка $P(-1; 2; 3)$ принадлежит плоскости $2x - 4y + Cz - 5 = 0$, то коэффициент C равен...

Решение.

Подставим координаты точки в уравнение плоскости

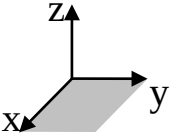
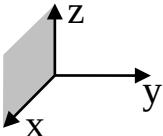
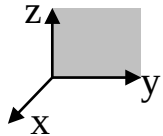
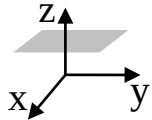
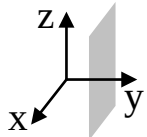
$$2 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 + C \cdot 3 - 5 = 0$$

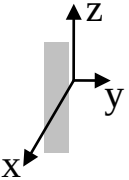
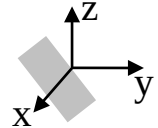
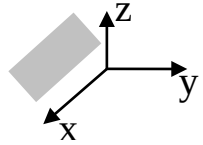
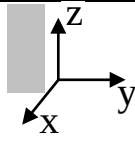
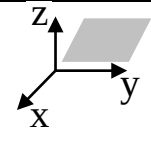
$$3C - 15 = 0$$

$$C = 5$$

Ответ. $C = 5$

§2 Частные случаи общего уравнения плоскости

5. Плоскость xOy	 Плоскость (xOy): $z = 0$	<u>Задача:</u> Установить соответствие между уравнением плоскости и ее положением в пространстве. 1) $2x + 3z + 5 = 0$ 2) $4y - z - 3 = 0$ 3) $5x + 2y - 9 = 0$ 4) $x + 7y - 2z = 0$
6. Плоскость xOz	 Плоскость (xOz): $y = 0$	
7. Плоскость yOz	 Плоскость (yOz): $x = 0$	
8. Плоскость, параллельная xOy	 Плоскость, параллельная (xOy): $Cz + D = 0$ или $z = -\frac{D}{C}$ (в уравнении отсутствуют переменные x и y)	
9. Плоскость, параллельная xOz	 Плоскость, параллельная (xOz): $By + D = 0$ или $y = -\frac{D}{B}$ (в уравнении отсутствуют переменные x и z)	Варианты ответов: А) параллельна оси z В) проходит через начало координат С) параллельна оси y Д) проходит через ось y Е) параллельна оси x <u>Решение.</u>

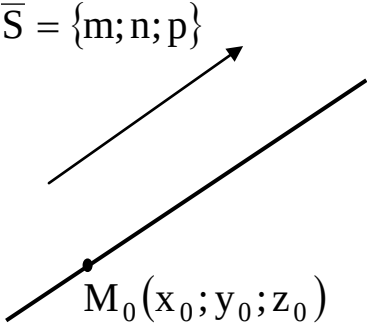
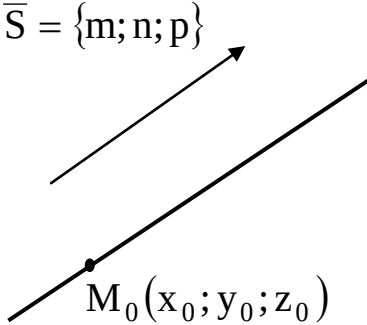
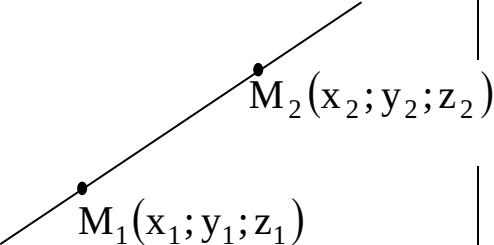
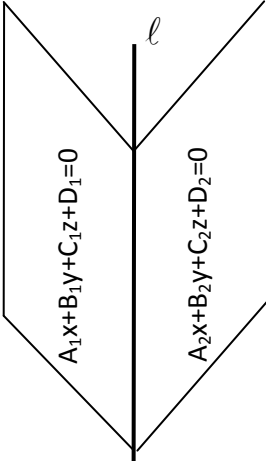
10. Плоскость, параллельная yOz	 Плоскость, параллельная (yOz): $Ax + D = 0 \quad \text{или} \quad x = -\frac{D}{A}$ (в уравнении отсутствуют переменные y и z)	1) $2x + 3z + 5 = 0$. Отсутствует переменная y. Тогда параллельна оси Oy.
11. Плоскость проходит через начало координат	 Плоскость проходит через начало координат $Ax + By + Cz = 0$	2) $4y - z - 3 = 0$. Отсутствует переменная x. Тогда параллельна оси Ox. 3) $5x + 2y - 9 = 0$. Отсутствует переменная z. Тогда параллельна оси Oz. 4) $x + 7y - 2z = 0$. Отсутствует свободный член. Тогда плоскость проходит через начало координат.
12. Плоскость, параллельная оси Ox	 Плоскость, параллельная оси Ox: $By + Cz + D = 0$ (в уравнении отсутствует переменная x)	<u>Ответ.</u> (1) $\leftrightarrow C$ (2) $\leftrightarrow E$ (3) $\leftrightarrow A$ (4) $\leftrightarrow B$
13. Плоскость, параллельная оси Oz	 Плоскость, параллельная оси Oz: $Ax + By + D = 0$ (в уравнении отсутствует переменная z)	
14. Плоскость, параллельная оси Oy	 Плоскость, параллельная оси Oy: $Ax + Cz + D = 0$	

	(в уравнении отсутствует переменная y)	
15. Расстояние от точки до плоскости	Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляется по формуле $d = \frac{ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$	
§3 Взаимное расположение плоскостей Пусть даны плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$		
16. Условие перпендикулярности плоскостей	$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$	<u>Задача.</u> Найти угол между плоскостями $3x + 2y - z + 10 = 0$ и $6x + 4y - 2z + 1 = 0$.
17. Условие параллельности плоскостей	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$	<u>Решение.</u> Нормальный вектор плоскости $3x + 2y - z + 10 = 0$ имеет координаты $\bar{N}_1 = \{3; 2; -1\}$. Для второй плоскости $6x + 4y - 2z + 1 = 0$ $\bar{N}_2 = \{6; 4; -2\}$. Воспользуемся формулой вычисления угла
18. Угол между плоскостями	$\cos \varphi = \frac{ A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 }{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$	$\cos \varphi = \frac{ 3 \cdot 6 + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) }{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{6^2 + 4^2 + (-2)^2}} =$ $= \frac{28}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{56}} = \frac{28}{\sqrt{14} \cdot 2\sqrt{14}} = \frac{28}{28} = 1$

		$\cos \varphi = 1, \quad \varphi = 0.$ <u>Ответ.</u> $0^\circ.$
--	--	--

Глава 5. Прямая в пространстве

§1 Виды уравнений прямой в пространстве

1. Канонические уравнения – это уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ с направляющим вектором $\bar{S} = \{m; n; p\}$ $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$	2. Параметрические уравнения прямой $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$	3. Уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$	4. Общие уравнения прямой в пространстве (как пересечение двух плоскостей) $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$
 A 3D coordinate system showing a line passing through point $M_0(x_0; y_0; z_0)$. A vector $\bar{S} = \{m; n; p\}$ is shown originating from M_0 and pointing along the line.	 A 3D coordinate system showing a line passing through point $M_0(x_0; y_0; z_0)$. A vector $\bar{S} = \{m; n; p\}$ is shown originating from M_0 and pointing along the line.	 A 3D coordinate system showing a line passing through two points $M_1(x_1; y_1; z_1)$ and $M_2(x_2; y_2; z_2)$.	 A 3D coordinate system showing two planes intersecting along a line ℓ. The planes are labeled with their general equations: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ and $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

§2 Взаимное расположение прямых в пространстве

Пусть даны прямые $\ell_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$ и $\ell_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$

5. Условие перпендикулярности прямых	6. Условие параллельности прямых	7. Угол между прямыми
$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$	$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$	$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$

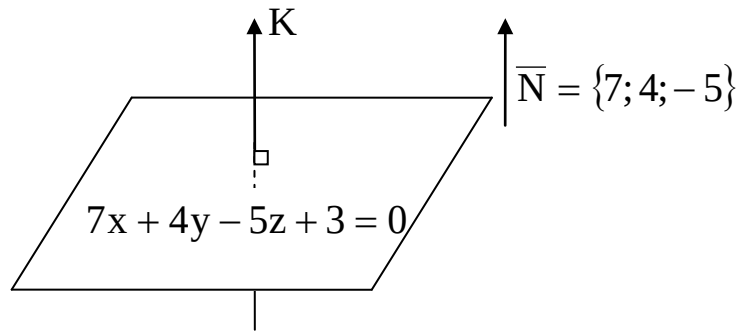
§3 Взаимное расположение прямой и плоскости

Даны плоскость $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ и прямая $\ell: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$

8. Условие перпендикулярности прямой и плоскости	$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$
9. Условие параллельности прямой и плоскости	$Am + Bn + Cp = 0$
10. Угол между прямой и плоскостью	$\sin \varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$

Задача.

Написать уравнение прямой, проходящей через точку $K(2; 3; -1)$ перпендикулярно плоскости $7x + 4y - 5z + 3 = 0$

Решение.

Нормальный вектор плоскости $\vec{N}$ является направляющим вектором прямой. Прямая проходит через точку $K(2; 3; -1)$.

Тогда

уравнение $\frac{x - 2}{7} = \frac{y - 3}{4} = \frac{z + 1}{-5}$

Задача.

Определить взаимное расположение плоскости $\alpha : 2x - y + 3z - 1 = 0$ и прямой $\ell : \frac{x - 4}{1} = \frac{y + 2}{-1} = \frac{z}{-1}$.

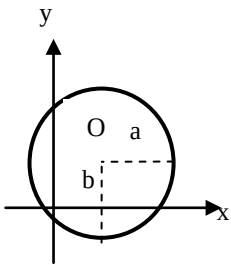
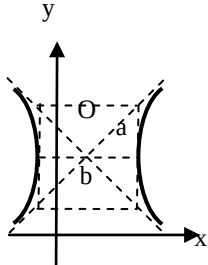
Решение.

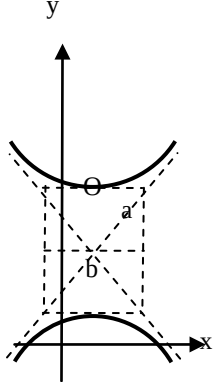
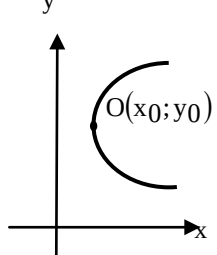
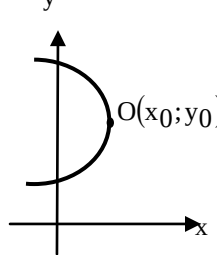
Для плоскости нормальный вектор $\vec{N} = \{2; -1; 3\}$; для прямой – направляющий вектор $\vec{S} = \{1; -1; -1\}$.

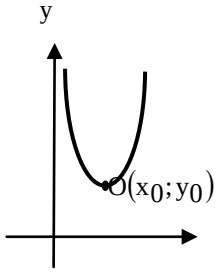
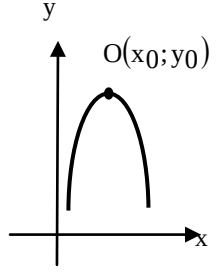
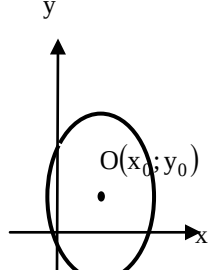
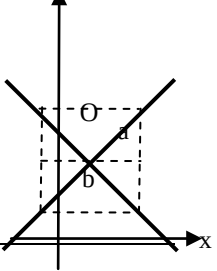
$$\vec{N} \cdot \vec{S} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) = 0.$$

Следовательно, плоскость параллельна прямой.

Глава 6. Кривые второго порядка

Уравнение	Чертеж	Фокусы	Эксцентриситет	Директриса	Асимптота
1. Эллипс $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ $O(x_0; y_0)$ - центр a, b - полуоси		Если $a > b$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ $F(x_0 \pm c; y_0)$	$\varepsilon = \frac{c}{a}$	$x - x_0 = \pm \frac{a}{\varepsilon}$	—
		Если $a < b$ $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ $F(x_0; y_0 \pm c)$	$\varepsilon = \frac{c}{b}$	$y - y_0 = \pm \frac{b}{\varepsilon}$	—
2. Гипербола $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ $O(x_0; y_0)$ - центр a - действительная полуось, b - мнимая		$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $F(x_0 \pm c; y_0)$	$\varepsilon = \frac{c}{a}$	$x - x_0 = \pm \frac{a}{\varepsilon}$	$y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$

3. Гипербола $-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ или $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1$ $O(x_0; y_0)$ - центр a - мнимая полуось, b - действительная		$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $F(x_0; y_0 \pm c)$	$\varepsilon = \frac{c}{b}$	$y - y_0 = \pm \frac{b}{\varepsilon}$	$x - x_0 = \pm \frac{b}{a}(y - y_0)$
4. Парабола $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ $O(x_0; y_0)$ - вершина p - расстояние между фокусом и директрисой		$F\left(x_0 + \frac{p}{2}; y_0\right)$	-	$x - x_0 = -\frac{p}{2}$	-
5. Парабола $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$		$F\left(x_0 - \frac{p}{2}; y_0\right)$	-	$x - x_0 = \frac{p}{2}$	-

6. Парабола $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$		$F\left(x_0; y_0 + \frac{p}{2}\right)$	-	$y - y_0 = -\frac{p}{2}$	-
7. Парабола $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$		$F\left(x_0; y_0 - \frac{p}{2}\right)$	-	$y - y_0 = \frac{p}{2}$	-
8. Окружность $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ $O(x_0; y_0)$ - центр R - радиус		-	$\varepsilon = 0$	-	-
9. Две пересекающиеся прямые $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 0$		-	-	-	-

10. Уравнение

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 0$$

определяет точку $(x_0; y_0)$

-

-

-

-

-

Задача.

Укажите соответствие между кривыми второго порядка и их уравнениями:

1. $(x + 6)^2 + (y - 2)^2 = 64$ 2. $x^2 + 4y = 16$ 3. $x^2 + 4y^2 = 4$ 4. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$

Варианты ответов: А) эллипс В) гипербола С) окружность D) парабола

Решение.

Проанализируем каждое уравнение

1). Уравнение можно записать в виде $(x + 6)^2 + (y - 2)^2 = 8^2$. Это уравнение окружности.

2). Уравнение содержит переменную x во второй степени, а переменную y - в первой. Это уравнение параболы.

3). Поделим уравнение на 4. Тогда $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Обе переменные в квадрате. В левой части – сумма; в правой – единица. Это уравнение эллипса.

4). $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$. Обе переменные во второй степени. В левой части – разность; в правой – единица. Это уравнение гиперболы.

Ответ. (1) ↔ С (2) ↔ D (3) ↔ А (4) ↔ В

Задача.

Установите соответствие между кривой второго порядка и ее уравнением.

1. Парабола 2. Эллипс 3. Гипербола

Варианты ответов: А) $x^2 - 4y^2 = 0$ В) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ С) $x + 4y = 1$ D) $y^2 = 4x$ Е) $x^2 + 4y^2 = 1$

Решение.

- 1). Парабола. В уравнении одна переменная должна быть в первой степени, другая – во второй. Это уравнение (D).
- 2). Эллипс. Обе переменные должны быть во второй степени. В левой части – сумма; в правой – единица. Это уравнение (Е).
- 3). Гипербола. Обе переменные должны быть во второй степени. В левой части – разность; в правой – единица. Это уравнение (В)

Ответ. (1) $\leftrightarrow$ D (2) $\leftrightarrow$ Е (3) $\leftrightarrow$ В

Задача.

Если $C(1;1)$ - центр окружности, которая проходит через точку $A(5;4)$, то уравнение этой окружности имеет вид...

Варианты ответов: 1) $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 25$ 2) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 25$

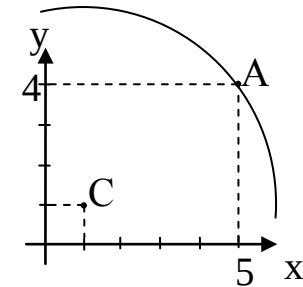
$$3) (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$$

$$4) (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$$

Решение.

Так как $C(1;1)$ - центр, то уравнение может быть №3 или №4. Найдем радиус – это расстояние AC .

$$|AC| = \sqrt{(5-1)^2 + (4-1)^2} = 5. \text{ Итак, } r = 5, \text{ тогда уравнение №3.}$$



Ответ. №3.

Задача.

Если уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, то длина ее действительной полуоси равна...

Варианты ответов: 1) 3 2) 16 3) 9 4) 4

Решение.

Действительная полуось берется из положительного слагаемого $\frac{x^2}{9}$. Тогда $a^2 = 9$, $a = 3$.

Ответ. №1.

Задача.

Если уравнение окружности имеет вид $x^2 + y^2 = 16$, то его центром C и радиусом r являются...

Варианты ответов: 1) $C(0;0)$, $r = 16$ 2) $C(0;0)$, $r = 4$ 3) $C(1;1)$, $r = 16$ 4) $C(1;1)$, $r = 4$

Решение.

Уравнение можно записать в виде $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 4^2$. Тогда центр $C(0;0)$, радиус $r = 4$.

Ответ. №2.

Задача.

Радиус окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 2y = 0$, равен ...

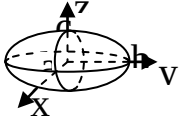
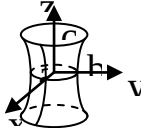
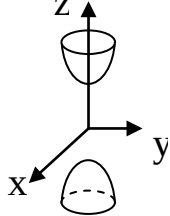
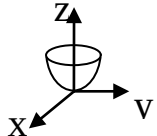
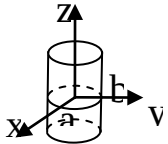
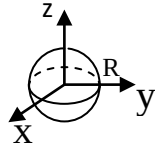
Варианты ответов: 1) 3 2) -1 3) 4 4) 1

Решение.

$x^2 + (y^2 - 2y + 1) - 1 = 0$; $x^2 + (y-1)^2 = 1^2$. Тогда центр $O(0;1)$, радиус $r = 1$.

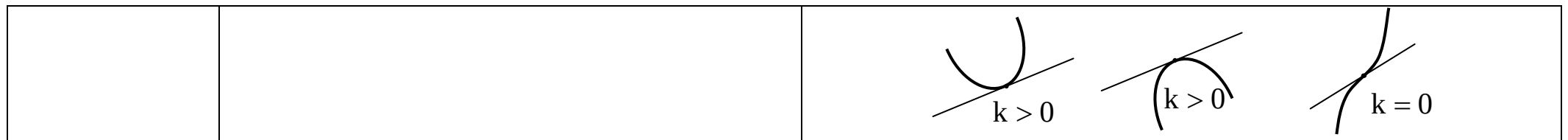
Ответ. №4.

Глава 7. Поверхности второго порядка

Уравнение	Чертеж	Задачи
1. Эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$		
2. Однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$		
3. Двуполостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{или}$ $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$		
4. Эллиптический параболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$		
5. Цилиндр $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = R^2$		
6. Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$		

Глава 8. Дифференциальная геометрия

§1 Уравнение касательной и нормали к кривой				
	Для кривой $y = y(x)$ в точке $(x_0; y_0)$	Для кривой $F(x; y) = 0$ в точке $(x_0; y_0)$	Для кривой $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$	Для кривой $\rho = \rho(\varphi)$
1. Уравнение касательной	$y - y_0 = y'_0(x - x_0)$	$(F'_x)_0(x - x_0) + (F'_y)_0(y - y_0) = 0$	$\frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{y'_0}$	-
2. Уравнение нормали	$-y'_0(y - y_0) = x - x_0$	$(F'_x)_0(y - y_0) = (F'_y)_0(x - x_0)$	$x'_0(x - x_0) + y'_0(y - y_0) = 0$	-
§2 Кривизна кривой				
3. Кривизна для кривой $y = y(x)$	$k = \frac{y''(x_0)}{(1 + (y'_0)^2)^{3/2}}$	Задача. Кривизна линии $y = x^2 - 3x + 4$ в точке $M(2; 2)$ равна... Варианты ответов: 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $2\sqrt{2}$ 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 4) $\sqrt{2}$ <u>Решение.</u> Воспользуемся предложенной формулой $k = \frac{y''(x_0)}{(1 + (y'_0)^2)^{3/2}}$; $y' = 2x - 3; \quad y'' = 2.$ Подставим в полученные производные координаты точки $M(2; 2)$, тогда $y'_0 = 2 \cdot 2 - 3 = 1, \quad y''_0 = 2$ $k = \frac{2}{(1 + 1^2)^{3/2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ <u>Ответ.</u> №3.		
4. Кривизна для кривой $F(x; y) = 0$	$k = \frac{-(F'_y)_0^2 \cdot (F''_{xx})_0 + 2(F'_x)_0 \cdot (F'_y)_0 \cdot (F''_{xy})_0 - (F'_x)_0^2 \cdot (F''_{yy})_0}{((F'_x)_0^2 + (F'_y)_0^2)^{3/2}}$			
5. Кривизна для кривой $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$	$k = \frac{x'_0 \cdot y''_0 - x''_0 \cdot y'_0}{((x'_0)^2 + (y'_0)^2)^{3/2}}$			
6. Кривизна для кривой $\rho = \rho(\varphi)$	$k = \frac{\rho_0^2 + 2(\rho'_0)^2 - \rho_0 \cdot \rho''_0}{(\rho_0^2 + (\rho'_0)^2)^{3/2}}$			
7. Радиус кривизны	Радиус кривизны вычисляется по формуле $R = \frac{1}{ k }$, где k – кривизна	Представление о знаке кривизны дает рисунок		



§3 Поверхность			
. Уравнение касательной плоскости	Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x; y; z) = 0$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$	$(F'_x)_0(x - x_0) + (F'_y)_0(y - y_0) + (F'_z)_0(z - z_0) = 0$	Задача. Уравнение касательной плоскости к поверхности $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{75} = 1$ в точке $M(3; 2; 5)$ имеет вид... Варианты ответов: 1) $3x + 2y + 5z - 51 = 0$ 2) $10x + 15y - 6z - 90 = 0$ 3) $3x + 2y + 5z = 0$ 4) $10x + 15y + 6z + 90 = 0$ <u>Решение.</u> $F = \frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{75} - 1$ Найдем частные производные $F'_x = \frac{2x}{27}; \quad F'_y = \frac{2y}{12}; \quad F'_z = \frac{2z}{75}$
	Уравнение касательной плоскости к поверхности $z = z(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$	$z - z_0 = (z'_x)_0(x - x_0) + (z'_y)_0(y - y_0)$	
9. Уравнение нормали	Уравнение нормали плоскости к поверхности $F(x; y; z) = 0$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$	$\frac{x - x_0}{(F'_x)_0} = \frac{y - y_0}{(F'_y)_0} = \frac{z - z_0}{(F'_z)_0}$	

	Уравнение нормали к поверхности $z = z(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$	$\frac{x - x_0}{(z'_x)_0} = \frac{y - y_0}{(z'_y)_0} = \frac{z - z_0}{-1}$	Подставим координаты точки $M(3; 2; 5)$ $(F'_x)_0 = \frac{2 \cdot 3}{27} = \frac{2}{9}; \quad (F'_y)_0 = \frac{2 \cdot 2}{12} = \frac{1}{3}; \quad (F'_z)_0 = \frac{2 \cdot 5}{75} = \frac{2}{15}$ Уравнение касательной плоскости примет вид $\frac{2}{9}(x - 3) + \frac{1}{3}(y - 2) + \frac{2}{15}(z - 5) = 0 \quad \cdot 45$ $10(x - 3) + 15(y - 2) + 6(z - 5) = 0$ $10x - 30 + 15y - 30 + 6z - 30 = 0$ $10x + 15y + 6z - 90 = 0$ <u>Ответ.</u> №2.
--	--	--	---

Глава 9. Предел функции в точке

Если функция $f(x)$ в точке $x = a$ непрерывна, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Т.е. для вычисления предела в функцию подставляется то значение x , к которому приближается эта переменная.

Например, $\lim_{x \rightarrow 2} (4x - 1) = 4 \cdot 2 - 1 = 7$.

§1 Некоторые неопределенности и правила их раскрытия

1. Неопределенность вида $\left \frac{\infty}{\infty} \right $	$P_n(x)$, $Q_m(x)$ - многочлены n - максимальная степень числителя; m - максимальная степень знаменателя. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} 0, & \text{если } n < m \\ \infty, & \text{если } n > m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{если } n = m \end{cases}$ где a_0 - коэффициент при max степени числителя b_0 - коэффициент при max степени знаменателя	<u>Задача.</u> Значение предела $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 + 2x - 5}$ равно... 1) 2 2) 1 3) 0 4) ∞ <u>Решение.</u> Максимальные степени числителя и знаменателя совпадают (=2). Коэффициент при max степени числителя =2, в знаменателе = 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 + 2x - 5} = \left \frac{\infty}{\infty} \right = \frac{2}{1}$ <u>Ответ.</u> №1
--	---	---

		<u>Задача.</u> $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x + 1}{x^2 + 4}$ <u>Решение.</u> Максимальная степень числителя = 3, знаменателя = 2 (3 > 2). Следовательно, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x + 1}{x^2 + 4} = \infty$ <u>Ответ.</u> ∞.
2. Неопределенность вида $\left \frac{0}{0} \right $	Числитель и знаменатель раскладывается на множители с использованием формул: 1) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ 2) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ 3) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	<u>Задача.</u> $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3x^2 - 5x - 2}$ <u>Решение.</u> $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3x^2 - 5x - 2} = \left \frac{0}{0} \right $ Разложим числитель и знаменатель на множители: 1) $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$ 2) $3x^2 - 5x - 2 = 0$

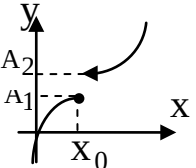
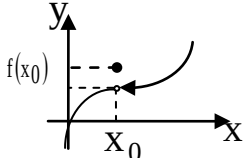
	4) $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 - корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$	$D = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 49$ $x_1 = \frac{5+7}{6} = 2; \quad x_2 = \frac{5-7}{2} = -1.$ $3x^2 - 5x - 2 = 3(x - 2)\left(x + \frac{1}{3}\right) = (x - 2)(3x + 1).$ Тогда $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(3x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)}{(3x + 1)} = \frac{2 + 2}{3 \cdot 2 + 1} = \frac{4}{7}$ <u>Ответ.</u> $\frac{4}{7}.$
--	--	---

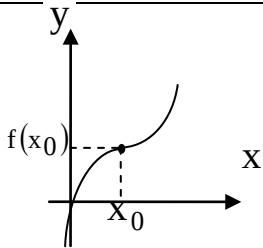
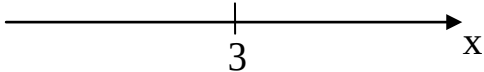
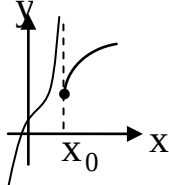
3. Неопределенность вида $\left \frac{0}{0} \right $	Если в функции есть выражение вида $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$, то числитель и знаменатель умножается на $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$. Если есть выражение вида $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ - то на $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$.	Задача. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$ <u>Решение.</u> $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \left \frac{0}{0} \right = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} =$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3})^2 - 2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} =$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4+2}} = \frac{1}{4}$ <u>Ответ.</u> $\frac{1}{4}$.
4. Неопределенность вида $\left \frac{0}{0} \right $	С использованием эквивалентностей $\sin \alpha \sim \alpha$, при $\alpha \rightarrow 0$ $\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha$, при $\alpha \rightarrow 0$ $\arcsin \alpha \sim \alpha$, при $\alpha \rightarrow 0$ $\operatorname{arctg} \alpha \sim \alpha$, при $\alpha \rightarrow 0$ $\ln(1 + \alpha) \sim \alpha$, при $\alpha \rightarrow 0$ $(e^\alpha - 1) \sim \alpha$, при $\alpha \rightarrow 0$ $(a^\alpha - 1) \sim \alpha \cdot \ln a$, при $\alpha \rightarrow 0$	Задача. Значение предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x}$ равно... 1) 0 2) $\frac{3}{4}$ 3) $\frac{1}{4}$ 4) 1 <u>Решение.</u> У функции $\sin 3x$ аргумент $3x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. Можно воспользоваться предложенной эквивалентностью $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x} = \left \begin{array}{l} \sin 3x \sim 3x \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$ <u>Ответ.</u> №2

5. Неопределенность вида $ \infty - \infty $	Привести две дроби к общему знаменателю. В результате получится неопределенность вида $\left \frac{\infty}{\infty} \right$	<u>Задача.</u> $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{x+1} - \frac{2x^2-1}{x-4} \right)$ <u>Решение.</u> Каждая дробь имеет степень числителя больше, чем степень знаменателя. Следовательно, каждая дробь стремится к ∞. $\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{x+1} - \frac{2x^2-1}{x-4} \right) &= \infty - \infty = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2(x-4) - (2x^2-1)(x+1)}{(x+1)(x-4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 8x^2 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1}{x^2 - 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-10x^2 + x + 1}{x^2 - 3x - 4} = \\ &= \left \begin{array}{l} \text{степени числителя и} \\ \text{знаменателя совпадают} \end{array} \right = -\frac{10}{1} = -10 \end{aligned}$ <u>Ответ.</u> -10
---	--	--

6. Правило Лопиталья	Правило Лопиталья используется при неопределенностях $\left \frac{0}{0} \right$ или $\left \frac{\infty}{\infty} \right$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$	<u>Задача.</u> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$ <u>Решение.</u> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \left \frac{0}{0} \right = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = \left \frac{0}{0} \right =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}$ <u>Ответ.</u> $-\frac{1}{2}$
----------------------	--	--

§2 Непрерывность функции в точке

1. Точка разрыва I рода (скачок)	$x = x_0$ - точка разрыва I рода (скачок), если $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ 	<u>Задача.</u> При каких значениях параметра a функция непрерывна? $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 3 \\ x^2 + a, & x > 3 \end{cases}$
2. Точка устранимого разрыва	$x = x_0$ - точка устранимого разрыва (точка разрыва I рода), если $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$ 	<u>Решение.</u>

3. Точка непрерывности	$x = x_0$ - точка непрерывности, если $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$ 	$f(x)$: $\frac{2x + 1}{x^2 + a}$ 
4. Точка разрыва II рода	$x = x_0$ - точка разрыва II рода, если хотя бы один из пределов равен ∞ $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \text{ или } \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ 	$\lim_{x \rightarrow 3 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3 - 0} (2x + 1) = 7$ $\lim_{x \rightarrow 3 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3 + 0} (x^2 + a) = 9 + a$ $f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ Функция непрерывна, если $9 + a = 7$, $a = -2$ <u>Ответ.</u> $a = -2$.

Глава 10. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

1 Формулы дифференцирования

1. $(C)' = 0;$ 2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1};$ 3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a;$ 4. $(e^x)' = e^x;$ 5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a};$ 6. $(\ln x)' = \frac{1}{x};$	7. $(\sin x)' = \cos x;$ 8. $(\cos x)' = -\sin x;$ 9. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$ 10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$ 11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$ 12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$	13. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$ 14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$ 15. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$ 16. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$ 17. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$ 18. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$
--	--	---

2 Основные правила дифференцирования

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемы в точке x. Тогда: 1. Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций: $(u \pm v)' = u' \pm v'.$ 2. Производная произведения двух функций равна: $(u \cdot v)' = u'v + u v'$ 3. Производная частного двух функций равна: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \text{ если } v(x) \neq 0.$	<u>Задача.</u> Найти производные функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$. <u>Решение.</u> Воспользуемся формулой производной частного: $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} =$ $= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \text{ т.е. } (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$ Аналогичным образом получим формулу
--	--

		$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$
3 Производная сложной функции		
Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ является сложной функцией переменной x, а переменную u называют промежуточным аргументом. Теорема. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет в некоторой точке x производную $u'_x = \varphi'(x)$, а функция $y = f(u)$ имеет в соответствующей точке $u = \varphi(x)$ производную $y'_u = f'(u)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ в указанной точке x также имеет производную, которая находится по формуле $y' = f'(u) \cdot \varphi'(x) \text{ или, коротко,}$ $y' = y'_u \cdot u'_x$		Задача. Найти производную функции $y = \sin x^2$. Решение. Представим функцию как сложную, введя промежуточный аргумент u: $y = \sin u$, где $u = x^2$. Тогда $y'_u = \cos u$, $u'_x = 2x$ и, следовательно, $y' = y'_u \cdot u'_x = \cos u \cdot 2x = \cos x^2 \cdot 2x$.
4 Производная обратной функции		
Теорема. Если функция $y = f(x)$ в некоторой точке x имеет отличную от нуля производную $f'(x)$, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ в соответствующей точке y также имеет производную $\varphi'(y)$, равную $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$	Задача. Найти производную обратных тригонометрических функций $y = \arcsin x$. Решение. Пусть $y = \arcsin x$. Обратная ей функция имеет вид $x = \sin y$, где $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. В интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ имеем $x' = \cos y \neq 0$. Тогда по правилу дифференцирования обратной функции $(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$ где перед корнем взят знак $+$, так как $\cos y > 0$ при $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Итак, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$	

5 Производная неявно заданной функции

Если функция задана неявным уравнением $F(x, y) = 0$, т.е. не разрешенным относительно y , то для нахождения производной y'_x надо продифференцировать по x обе части этого уравнения, учитывая, что y есть функция от x , и затем разрешить полученное уравнение относительно y'_x .

Задача.

Найти производную функции y , заданную уравнением $y^5 - 3xy^2 + 4xy + x^3 = 0$.

Решение.

Функция y задана неявно. Дифференцируя обе части этого тождества по x , считая, что y есть функция от x и, пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, получим

$$\begin{aligned} (y^5)' - 3 \cdot (x \cdot y^2)' + 4(x \cdot y)' + (x^3)' &= 0 \\ 5y^4 \cdot y' - 3y^2 - 6xyy' + 4y + 4xy' + 3x^2 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (5y^4 - 6xy + 4x)y' &= 3y^2 - 4y - 3x^2 \Rightarrow \\ y' &= \frac{3y^2 - 4y - 3x^2}{5y^4 - 6xy + 4x} \end{aligned}$$

6 Логарифмическое дифференцирование

На практике встречаются функции, производные которых находят логарифмическим дифференцированием. К их числу относится так называемая **степенно-показательная функция** $y = [u(x)]^{v(x)}$.
Найдем производную, предварительно логарифмируя:

Задача.

$$y = (\sin 3x)^{\sqrt{x}}.$$

Решение.

Найдем логарифм данной функции $\ln y = \ln((\sin 3x)^{\sqrt{x}})$ или $\ln y = \sqrt{x} \cdot \ln(\sin 3x)$. Дифференцируя обе части этого равенства, получим

$$(\ln y)' = (\sqrt{x} \ln(\sin 3x))' \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(\sin 3x) + \sqrt{x} \cdot \frac{3 \cos 3x}{\sin 3x}$$

$$\text{Отсюда } y' = y \left(\frac{\ln(\sin 3x)}{2\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} \operatorname{ctg} 3x \right) \Rightarrow$$

$\ln y = v(x) \ln u(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = v'(x) \ln u(x) +$ $+ v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) \Rightarrow$ $y' = [u(x)]^{v(x)} \left(v'(x) \ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)} \cdot u'(x) \right)$ или $(u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$	$\Rightarrow y' = (\sin 3x)^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln(\sin 3x)}{2\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} \operatorname{ctg} 3x \right)$ <u>Задача.</u> $y = \frac{\sqrt[3]{6x-1} \cdot \sqrt{2x+1}}{\sqrt[5]{15x-4}}.$ <u>Решение.</u> Прологарифмируем данное равенство $\ln y = \ln \left(\frac{(6x-1)^{\frac{1}{3}} \cdot (2x+1)^{\frac{1}{2}}}{(15x-4)^{\frac{1}{5}}} \right) \Rightarrow$ $\Rightarrow \ln y = \ln(6x-1)^{\frac{1}{3}} + \ln(2x+1)^{\frac{1}{2}} - \ln(15x-4)^{\frac{1}{5}} \Rightarrow$ $\Rightarrow \ln y = \frac{1}{3} \ln(6x-1) + \frac{1}{2} \ln(2x+1) - \frac{1}{5} \ln(15x-4).$ Дифференцируя обе части последнего равенства, получим $\frac{y'}{y} = \frac{6}{3(6x-1)} + \frac{2}{2(2x+1)} - \frac{15}{5(15x-4)} \Rightarrow$ $\Rightarrow y' = y \left(\frac{2}{6x+1} + \frac{1}{2x+1} - \frac{3}{15x-4} \right) \Rightarrow$ $\Rightarrow y' = \frac{\sqrt[3]{6x-1} \cdot \sqrt{2x+1}}{\sqrt[5]{15x-4}} \left(\frac{2}{6x-1} + \frac{1}{2x+1} - \frac{3}{15x-4} \right).$
7 Производная функции, заданной параметрически	
Если функция y аргумента x задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$ то производная функции y по переменной x, т.е. y'_x вычисляется по формуле:	<u>Задача.</u> $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3. \end{cases}$ <u>Решение.</u> Найдем $x'_t = -2t$ и $y'_t = 1 - 3t^2$.

$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$	Следовательно $y'_x = \frac{1-3t^2}{-2t}.$
8 Касательная и нормаль к графику функции	
Уравнение прямой, касательной к графику $y = y(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$ Уравнение нормали, т.е. прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно к касательной, имеет вид $y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$	<u>Задача.</u> Составить уравнение касательной и нормали к параболе $y = 2x^2 - 6x + 3$ в точке $M_0(1; -1)$. <u>Решение.</u> Найдем производную функции $y = 2x^2 - 6x + 3$ при $x = 1$. Имеем $y' = 4x - 6$ отсюда $y'(1) = -2$. В результате получим искомые уравнения касательной $y + 1 = -2(x - 1)$ или $2x + y - 1 = 0$ и уравнение нормали $y + 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$ или $x - 2y - 3 = 0$.
9 Дифференциал функции	
Дифференциал любой дифференцируемой функции $y = y(x)$ равен произведению ее производной на дифференциал независимой переменной. $dy = y'(x)dx$	<u>Задача.</u> Найти дифференциал функции $y = e^{x^2}$. <u>Решение.</u> $dy = (e^{x^2})' dx = (e^{x^2} \cdot 2x) dx.$
10 Приближенное вычисление с помощью дифференциала	
Если Δx достаточно мало по абсолютной величине, то с точностью до бесконечно малых более высокого порядка малости, чем Δx, имеет место приближенное равенство: $\Delta y \approx dy \text{ или } y(x + \Delta x) \approx y(x) + y'(x)\Delta x.$	<u>Задача.</u> Вычислить приближенное значение $\arcsin 0,51$. <u>Решение.</u> Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$, полагая $x_0 = 0,5$; $\Delta x = 0,01$ и применяя формулу $\Delta y \approx dy \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$ получим $\arcsin(0,5 + 0,01) \approx$

	$\approx \arcsin(0,5) + (\arcsin x)' \Big _{x_0=0,5} \cdot 0,01 \Rightarrow$ $\arcsin 0,51 \approx \arcsin 0,5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0,5)^2}} \cdot 0,01 \approx \frac{\pi}{6} + 0,01 = 0,513.$ Ответ. 0,513.
11 Производные высших порядков	
Производной n-го порядка называют производную от производной $(n-1)$-го порядка. Производную n-го порядка обозначают $f^{(n)}(x)$ или $y^{(n)}$ $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$	Задача. Найти $f'''(1)$, если $f(x) = x^5$. <u>Решение.</u> $f'(x) = 5x^4$; $f''(x) = (5x^4)' = 20x^3$; $f'''(x) = (20x^3)' = 60x^2 \Rightarrow f'''(1) = 60 \cdot 1^2 = 60.$ Ответ. 60.
12 Производные высших порядков, заданных параметрически	
Если функция задана параметрически, то производные y''_{xx}; y'''_{xxx}; ... вычисляются по формулам $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - x''_{tt} \cdot y'_t}{(x'_t)^3}$ $y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}$	Задача. Найти y''_{xx}, если $x = a \cos^3 t$; $y = a \sin^3 t$. <u>Решение.</u> $y'_x = \frac{(a \sin^3 t)'_t}{(a \cos^3 t)'_t} = \frac{3a \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t} = -\operatorname{tg} t$ $y''_{xx} = \frac{(-\operatorname{tg} t)'_t}{(a \cos^3 t)'_t} = \frac{-\sec^2 t}{-3a \cos^2 t \sin t} = \frac{1}{3a \sin t \cos^4 t}.$
13 Дифференциалы высших порядков	
Дифференциалом n-го порядка называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка:	Задача. Найти дифференциалы второго и третьего порядков функции $y = x(\ln x - 1)$. <u>Решение.</u>

$d^n y = d(d^{n-1} y) = (f^{(n-1)}(x) \cdot dx^{n-1})' \cdot dx$ или $d^n y = f^{(n)}(x) \cdot dx^n$	$dy = (x'(\ln x - 1) + x(\ln x - 1)') dx \Rightarrow dy = \left((\ln x - 1) + x \cdot \frac{1}{x} \right) dx \Rightarrow$ $dy = (\ln x - 1 + 1) dx \Rightarrow dy = \ln x dx.$ $d^2 y = d(\ln x dx) \Rightarrow d^2 y = \frac{1}{x} dx^2;$ $d^3 y = d(d^2 y) \Rightarrow d^3 y = d\left(\frac{1}{x} dx^2\right) \Rightarrow d^3 y = -\frac{1}{x^2} dx^3.$
--	--

14 Правило Лопиталя

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в δ-окрестности точки x_0 и $\varphi'(x) \neq 0$ при всех x из этой окрестности, тогда, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$ или $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty,$ т.е. частное $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ имеет в точке $x = x_0$ неопределенность типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при условии, что существует предел отношения производных. Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и	<u>Задача.</u> Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$. <u>Решение.</u> Здесь имеет место неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Применим правило Лопиталя, т.е. рассмотрим предел отношения производных заданных функций $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{-x}.$ Последний предел дает неопределенность $\frac{0}{0}$. Снова применим правило Лопиталя и получим $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{1} = 0.$ <u>Задача.</u>
---	--

$\frac{\infty}{\infty}$. Но на практике встречаются неопределенности вида $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , ∞^0 , 0^0 . Эти неопределенности путем элементарных преобразований можно свести к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Найти $\lim_{x \rightarrow 2} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \cdot (2 - x)$

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \cdot (2 - x) &= |\infty \cdot 0| = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4}} = \left| \frac{0}{0} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 - x)'}{\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{-\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi x}{4}} \cdot \frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}. \end{aligned}$$

Задача.

Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right)$

Решение.

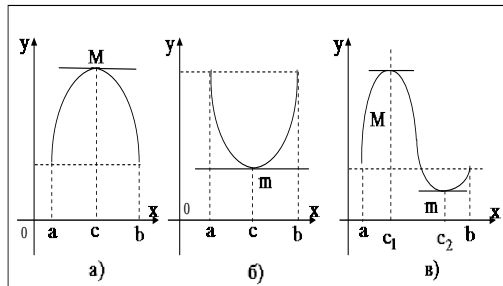
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right) &= |\infty - \infty| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\ln x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} (-x) = -1. \end{aligned}$$

15 Теорема Ролля

Теорема (Ролля). Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. непрерывна на отрезке $[a; b]$,
2. дифференцируема в интервале $(a; b)$,
3. на концах отрезка принимает одинаковые значения: $f(a) = f(b)$.

Тогда внутри отрезка $[a, b]$ найдется хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т.е. $f'(c) = 0$.



Геометрически теорема Ролля означает, что на графике функции $y = f(x)$ найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику параллельна оси Ox .

Задача.

Выполняется ли теорема Ролля для функции $f(x) = x^2 - 6x + 100$, если $a = 1$, $b = 5$? При каком значении c ?

Решение.

Так как функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема при всех значениях x и ее значения на концах отрезка $[1; 5]$ равны:

$$f(1) = 1^2 - 6 \cdot 1 + 100 = 95.$$

$f(5) = 5^2 - 6 \cdot 5 + 110 = 95$, то теорема Ролля на этом отрезке выполняется. Значит c определяется из уравнения

$$f'(x) = 2x - 6;$$

$$2x - 6 = 0;$$

$$x = 3.$$

Следовательно, $c = 3$.

Ответ. выполняется, $c = 3$.

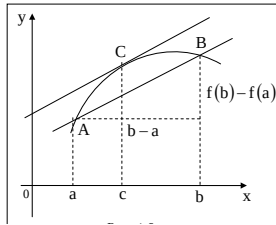
16 Теорема Лагранжа

Теорема (Лагранжа). Если функция $y = f(x)$

1. непрерывна на отрезке $[a, b]$,

2. дифференцируема в интервале (a, b) , то найдется хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad c \in (a, b).$$



Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл. Отношение $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ есть угловой коэффициент секущей AB, а $f'(c)$ — угловой коэффициент касательной к кривой в точке с абсциссой $x = c$.

Задача. Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $y = \ln x$ на отрезке $[1, e]$.

Решение.

Функция определена при всех значениях $x \in (0; +\infty)$, а следовательно и на отрезке $[1, e]$. Функция дифференцируема на интервале $(1; e)$.

Найдем точку c , для которой выполняется равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad \text{где } a = 1, b = e.$$

$$f(b) = f(e) = \ln e = 1, \quad f(a) = f(1) = \ln 1 = 0,$$

$$f(b) - f(a) = 1 - 0 = 1, \quad b - a = e - 1, \quad f'(x) = \frac{1}{x},$$

$$\frac{1}{e - 1} = \frac{1}{x}. \quad \text{Откуда } x = e - 1, \text{ причем } e - 1 \in (1; e).$$

17 Теорема Коши

Теорема (Коши). Если функции $f(x)$ и $g(x)$

1. непрерывны на отрезке $[a, b]$,

2. дифференцируемы в интервале (a, b) , причем $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

18 Теорема Ферма

Теорема (Ферма). Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a; b)$ и в некоторой точке x_0 этого интервала принимает наибольшее или наименьшее значение. Тогда, если в точке x_0 существует производная, то она равна 0, то есть $f'(x_0) = 0$.

19 Интервалы монотонности

Теорема (достаточные условия). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в интервале (a, b) и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для $\forall x \in (a, b)$, то эта функция возрастает (убывает) в интервале (a, b) .

Задача.

Определить интервалы монотонности функции $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$.

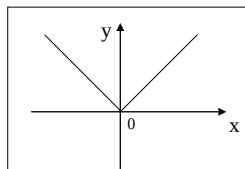
Решение. Найдем $y' = x^2 + 2x - 3$. Функция возрастает для всех значений x , для которых $y' > 0$. Решая неравенство $x^2 + 2x - 3 > 0$, получим $x \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$.

Аналогично, решая неравенство $y' = x^2 + 2x - 3 < 0$, получим $x \in (-3; 1)$.

Следовательно, функция возрастает в промежутках $(-\infty; -3)$ и $(1; \infty)$ и убывает в интервале $(-3; 1)$.

20 Экстремум функции

Точки, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или не существует, называются **критическими точками** функции. Если дифференцируемая функция $y=f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, то ее производная в этой точке равна нулю, то есть $f'(x_0) = 0$ (необходимое условие экстремума функции)



Теорема (достаточное условие экстремума).

$f(x)$ непрерывна в некотором интервале содержащем критическую точку x_0 . Если функция $y = f(x)$

Задача.

Найти экстремумы функции $y = 3x^4 - 4x^3 + 5$.

Решение.

Очевидно, что $D(y) = \mathbb{R}$. Находим $y' = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$.

Определим критические точки: $12x^2(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$. Эти критические точки разбивают всю область определения функции на интервалы $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$. Полученные результаты удобно представить в виде следующей таблицы:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	-	0	-	0	+

дифференцируема в некоторой окрестности критической точки x_0 (кроме, быть может, самой точки x_0) и при переходе аргумента x через нее слева направо производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 — точка максимума; если $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то x_0 — точка минимума.	<table><tr><td>y</td><td></td><td>нет экстр</td><td></td><td>min</td><td></td></tr></table>					y		нет экстр		min	
	y		нет экстр		min						
Из таблицы видно, что в точке $x=0$ нет экстремума, а $x=1$ — точка минимума. Минимум этой функции равен $y_{\min} = y(1) = 4$.											

21 Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции	
Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a; b]$ необходимо: 1. найти критические точки на $(a; b)$; 2. вычислить значения функции в найденных критических точках и в точках $x = a$, $x = b$; 3. из этих значений выбрать наибольшее и наименьшее.	<u>Задача.</u> Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 8$ на $[0; 3]$ <u>Решение.</u> Находим критические точки: $y' = 6x^2 - 18x + 12 = 0$, $x^2 - 3x + 2 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $y(0) = -8$, $y(1) = -1$, $y(2) = -2$, $y(3) = 3$. Наибольшее значение функции при $x = 3$ равно 3. Наименьшее значение функции при $x = 0$ равно -8.

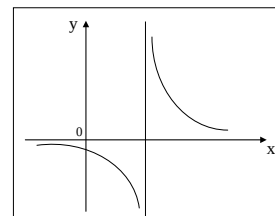
22 Вертикальная асимптота

Прямая $x = x_0$ называется **вертикальной асимптотой графика** функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов функции в этой точке равен бесконечности, то есть $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \infty$.

Задача.

Кривая $y = \frac{1}{x-2}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 2$, так как

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty \text{ и } \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x-2} = +\infty.$$



23 Горизонтальная асимптота

Прямая $y = A$ называется **горизонтальной асимптотой графика** функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ (или $x \rightarrow -\infty$), если $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} f(x) = A$.

Задача.

Прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой кривой $y = \frac{1}{x-2}$, так как $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{1}{x-2} = 0$.

24 Наклонная асимптота

Прямая $y = kx + b$ — асимптота кривой. Для точного определения этой прямой необходимо найти способ вычисления коэффициентов k и b .

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x};$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$$

Задача.

Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

1) Вертикальные асимптоты: $y \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow 0-0$: $y \rightarrow -\infty$ $x \rightarrow 0+0$, следовательно, $x = 0$ — вертикальная асимптота.

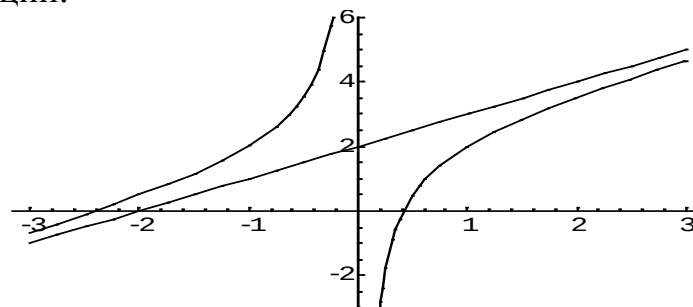
2) Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x} \right) = 2$$

Таким образом, прямая $y = x + 2$ является наклонной асимптотой.
Построим график функции:

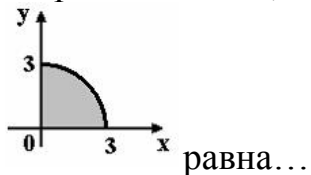


25 Мера плоского множества

Мера [множества](#), математическое [понятие](#), обобщающее понятия длины отрезка, площади плоской фигуры и объёма тела на множества более общей природы. В [качестве](#) примера можно привести определение меры Лебега (введённой А. [Лебегом](#) в 1902) для ограниченных [множеств](#), лежащих на [плоскости](#). При определении меры Лебега, так же как и при определении площади плоских фигур в [геометрии](#), исходят из сравнения части плоскости, занимаемой множеством, с выбранной единицей [измерения](#).

Задача.

Мера множества, изображенного на рисунке,



Решение.

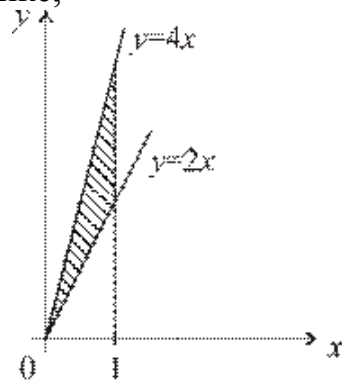
Мерой данного множества будет площадь четверти круга, следовательно, если площадь круга πR^2 , то площадь четверти

круга $\frac{\pi R^2}{4}$.

Ответ. $\frac{\pi R^2}{4}$.

Задача.

Мера плоского множества, изображенного на рисунке,



равна...

Решение.

Площадь заштрихованного треугольника и будет мера данного множества, следовательно, используя геометрический

смысл определенного интеграла для нахождения площади, получим: $S = \int_0^1 (4x - 2x) dx = \frac{2x^2}{2} \Big|_0^1 = 1$.

Ответ. 1

Глава 11. Функции нескольких переменных

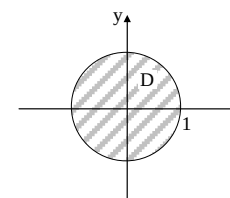
1 Область определения функции нескольких переменных

Пусть даны два числовых множества D и E , где D – некоторая область из пространства R^2 , а E – некоторое подмножество множества R . Если каждой паре чисел $(x, y) \in D$ по некоторому правилу (закону) поставлено в соответствие единственное число $z \in E$, то говорят, что на множестве D задана функция двух переменных $z = f(x, y)$. При этом x и y называются независимыми переменными (или аргументами), z – зависимой переменной (или функцией), множество D – областью определения функции, а E – множеством значений функции.

Задача.

Найти область определения функции $u = \sqrt[4]{1 - x^2 - y^2}$.

Решение. Функция определена при условии $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, т.е. $x^2 + y^2 \leq 1$. Это круг с центром в начале координат и радиусом 1, включающий свою границу, т.е. окружность $x^2 + y^2 = 1$.



2 Предел функции нескольких переменных

Число A называется **пределом функции** $z = f(M)$ при $M \rightarrow M_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такая δ – окрестность точки M_0 , что для любой точки M из этой окрестности (за исключением, быть может, точки M_0) имеет место неравенство $|f(M) - A| < \varepsilon$.

При этом пишут $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A$ или $\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ x_2 \rightarrow x_2^0 \\ \dots \\ x_n \rightarrow x_n^0}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A$,

так как при $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, очевидно $x_1 \rightarrow x_1^0, x_2 \rightarrow x_2^0, \dots, x_n \rightarrow x_n^0$.

Задача.

Найти предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin xy}{x}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin xy}{x} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin xy}{xy} \cdot y = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin xy}{xy} \cdot \lim_{y \rightarrow 2} y = \\ &= \left| \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \right| = 1 \cdot 2 = 2. \end{aligned}$$

Ответ. 2.

3 Частные производные функции нескольких переменных

Частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной x , в точке $M(x, y)$ называется предел (если таковой существует) отношения частного приращения

Задача.

Найти частные производные функции

$\Delta_x z$ к приращению аргумента Δx при стремлении последнего к нулю: $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$ Аналогично определяется частная производная $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$ Для обозначения частных производных функции двух переменных применяются следующие символы: $z'_x, f'_x(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} \left(z'_y, f'_y(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y} \right).$	$z = x^2 y - 3y^2 + 5x$. <u>Решение.</u> $z'_x = (x^2 y - 3y^2 + 5x)'_x = y = \text{const} =$ $= 2xy - 0 + 5 = 2xy + 5$ $z'_y = (x^2 y - 3y^2 + 5x)'_y = x = \text{const} =$ $= x^2 - 6y + 0 = x^2 - 6y$
4 Частные производные высших порядков	
Пусть имеем некоторую функцию $z = f(x, y)$ от двух переменных x и y. Ее частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ являются функциями от переменных x и y. В некоторых случаях для этих функций существуют снова частные производные, называемые частными производными второго порядка (или просто вторыми частными производными): $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = f''_{xx}(x, y),$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = f''_{xy}(x, y),$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = f''_{yx}(x, y),$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = f''_{yy}(x, y).$	<u>Задача.</u> Пусть $z = \text{tg}(3x - y)$ Имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{\cos^2(3x - y)},$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -18 \cdot \cos^{-3}(3x - y) \cdot \sin(3x - y),$ $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-1}{\cos^2(3x - y)},$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \cdot \cos^{-3}(3x - y) \cdot \sin(3x - y)$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-6 \cdot \sin(3x - y)}{\cos^3(3x - y)},$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{-6 \cdot \sin(3x - y)}{\cos^3(3x - y)}.$

Теорема. Если в некоторой окрестности точки $M(x, y)$ производные $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ существуют и непрерывны в самой точке $M(x, y)$, то они равны между собой в этой точке, т.е. имеет место равенство: $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$	
5 Производная сложной функции. Случай одной независимой переменной.	
Теорема. Если функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ дифференцируемы в точке t, а функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в соответствующей точке $M[x(t), y(t)]$, то сложная функция $z = f[x(t), y(t)]$ также дифференцируема в точке t и имеет место формула $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$	Задача. Пусть $z = x^2 \sin \frac{x}{y}$, где $x = 1 + 2t^2$, $y = \sqrt{1+t}$. <u>Решение.</u> $\frac{dz}{dt} = \left(2x \sin \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y} \cos \frac{x}{y} \right) \cdot 4t - \frac{x^3}{y^2} \cos \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+t}}.$
Если $z = f(x, y)$, $y = \varphi(x)$. Тогда $z = f[x, \varphi(x)]$ является сложной функцией переменной x, где $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$	Задача. Пусть $z = \sqrt{x^2 + y^3}$, где $y = \ln \sqrt{x}$. <u>Решение.</u> $\frac{dz}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^3}} + \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2 + y^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^3}} \left(x + \frac{3y^2}{4x} \right).$
6 Производная сложной функции. Случай нескольких независимых переменных.	
Если функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ дифференцируемы в точке $P(u, v)$, а функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, где $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ то сложная функция $z = f[x(u, v), y(u, v)]$ дифференцируема в точке $P(u, v)$, причем ее частные производные в этой точке находятся по формулам	Задача. Пусть $z = x^3 y^3$, $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$ <u>Решение.</u> $\frac{\partial z}{\partial u} = 3x^2 y^3 \cdot v + 3x^3 y^2 \cdot \frac{1}{v};$ $\frac{\partial z}{\partial v} = 3x^2 y^3 \cdot u + 3x^3 y^2 \cdot \left(-\frac{u}{v^2} \right).$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial \vartheta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \vartheta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \vartheta}. \end{cases}$$

7 Полный дифференциал функции

Выражение $\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$

называется **полным приращением** функции $f(x, y)$ в некоторой точке (x, y) , где α_1 и α_2 – бесконечно малые функции при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$ соответственно.

Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x, y) .

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

Для функции произвольного числа переменных:

$$df(x, y, z, \dots, t) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

Задача.

Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2z}$.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \ln x \cdot 2yz;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z} \ln x \cdot y^2;$$

$$du = y^2 z x^{y^2 z - 1} dx + 2x^{y^2 z} yz \ln x dy + y^2 x^{y^2 z} \ln x dz$$

8 Производная неявно заданной функции

Если $F(x, y, z)$ – дифференцируемая функция переменных x , y и z в некоторой области D и $F'_z(x, y, z) \neq 0$, то уравнение $F(x, y, z) = 0$ определяет однозначно неявную функцию $z(x, y)$, также дифференцируемую, и

Задача.

Найти производную неявной функции y , заданной уравнением $x^2 - 2x + 3y^2 + xy - 1 = 0$, и вычислить ее значение в точке $P(2; -1)$.

Решение. Введем обозначение $F(x, y) = x^2 - 2x + 3y^2 + xy - 1$. Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2 + y; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 6y + x. \text{ Следовательно,}$$

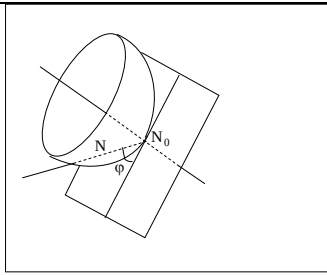
$\frac{dz}{dx} = -\frac{F'_x(x; y; z)}{F'_z(x; y; z)}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{F'_y(x; y; z)}{F'_z(x; y; z)}$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x - 2 + y}{6y + x} \quad \text{и} \quad \left. \frac{dy}{dx} \right _{\substack{x=2 \\ y=-1}} = -\frac{2 \cdot 2 - 2 - 1}{6 \cdot (-1) + 2} = \frac{1}{4}.$
--	--

9 Приближенные вычисления с помощью дифференциала

В приближенных вычислениях пользуются данной формулой. $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx$ $\approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$	<u>Задача.</u> Вычислить приближенно с помощью дифференциала $\operatorname{arctg}\left(\frac{1,97}{1,02} - 1\right)$. <u>Решение.</u> Рассмотрим функцию $f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y} - 1\right)$. $\operatorname{arctg}\left(\frac{x + \Delta x}{y + \Delta y} - 1\right) \approx \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y} - 1\right) + \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y} - 1\right)\right]'_x \Delta x + \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y} - 1\right)\right]'_y \Delta y$ или $\operatorname{arctg}\left(\frac{x + \Delta x}{y + \Delta y} - 1\right) \approx \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y} - 1\right) + \frac{y}{y^2 + (x - y)^2} \Delta x - \frac{x}{y^2 + (x - y)^2} \Delta y.$ Положим теперь $x = 2, y = 1$; тогда $\Delta x = -0,03, \Delta y = 0,02$. Следовательно, $\operatorname{arctg}\left(\frac{2 - 0,03}{1 + 0,02} - 1\right) \approx \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{1} - 1\right) + \frac{1}{1^2 + (2 - 1)^2} \cdot (-0,03) - \frac{2}{1^2 + (2 - 1)^2} \cdot 0,02.$ Или $\operatorname{arctg}\left(\frac{1,97}{1,02} - 1\right) \approx \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2} \cdot 0,03 - 0,02 \approx 0,75$.
---	--

10 Касательная плоскость к поверхности

	<u>Задача.</u> Найти уравнение касательной плоскости к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ в точке M_0, где
--	--



Плоскость, проходящая через точку N_0 , называется **касательной плоскостью** к поверхности в точке N_0 , если угол между секущей N_0N и этой плоскостью стремится к нулю, когда расстояние N_0N стремится к нулю, каким бы образом точка N на поверхности ни стремилась к точке N_0 .

Уравнение касательной плоскости к поверхности в точке M_0 , если плоскость задана неявно:

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$$

Уравнение касательной плоскости к поверхности в точке M_0 , если плоскость задана явно:

$$z - z_0 = F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0)$$

$$y_0 = 1, \quad z_0 = \sqrt{3}.$$

Решение.

Подставляя y_0 и z_0 в уравнение сферы, находим $x_0 = 0$, т.е. $M_0(0, 1, \sqrt{3})$. Запишем уравнение сферы в неявном виде:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0, \quad \text{откуда}$$

$$F'_x = 2x, \quad F'_y = 2y, \quad F'_z = 2z.$$

$$\text{Найдем } A = F'_x(M_0) = 0, \quad B = F'_y(M_0) = 2,$$

$$C = F'_z(M_0) = 2\sqrt{3}.$$

Уравнение касательной плоскости:

$$0(x - 0) + 2(y - 1) + 2\sqrt{3}(z - \sqrt{3}) = 0, \quad \text{или}$$

$$y + \sqrt{3}z - 4 = 0 \quad - \text{плоскость параллельна оси } OX.$$

11 Нормаль к поверхности

Уравнение нормали в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ к поверхности, заданной неявно, запишется в виде:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(P_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(P_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(P_0)}.$$

Уравнение нормали в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ к поверхности, заданной явно, запишется в виде:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(P_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(P_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Задача.

Записать уравнения нормали к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке $M_0(1, -2, 5)$.

Решение.

Поскольку $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$, то

$$F'_x = 2x, \quad F'_y = 2y, \quad F'_z = -1,$$

$$F'_x(M_0) = 2, \quad F'_y(M_0) = -4, \quad F'_z(M_0) = -1.$$

$$\text{Уравнение нормали: } \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{-4} = \frac{z - 5}{-1}.$$

Алгоритм исследования функции $u = f(x, y)$ на экстремум

1) Проверить необходимое условие экстремума:

1. Найти частные производные первого порядка $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

2. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

найти точки возможного экстремума.

2) Проверить достаточные условия экстремума:

1. Найти частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$,

2. Составить матрицу $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, где

$$a_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Задача.

Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y.$$

Решение.

Областью определения является вся плоскость R^2 . Найдем критические точки.

$$f'_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 30, \quad f'_y(x, y) = 6xy - 18.$$

Приравняв эти производные нулю, приходим к системе:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 16 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = \pm 4 \\ x - y = \pm 2 \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим четыре критические точки

$$M_1(3;1), M_2(1;3), M_3(-1;-3), M_4(-3;-1).$$

Теперь найдем вторые частные производные:

$$f''_{xx}(x, y) = 6x, \quad f''_{xy}(x, y) = 6y, \quad f''_{yy} = 6x \text{ и составим выражение}$$

$$\Delta(M) = f''_{xx}(M)f''_{yy}(M) - [f''_{xy}(M)]^2 = 36(x^2 - y^2).$$

Тогда:

1) $\Delta(M_1) = 288 > 0, f''_{xx}(M_1) = 18 > 0, M_1(3;1)$ – точка минимума;

2) $\Delta(M_2) = -288 < 0$, в точке $M_2(1;3)$ экстремума нет;

3) $\Delta(M_3) = -288 < 0$, в точке $M_3(-1;-3)$ экстремума нет;

4) $\Delta(M_4) = 288 > 0, f''_{xx}(M_4) = -18 < 0, M_4(-3;-1)$ – точка максимума.

Итак, данная функция имеет два экстремума: в точке M_1 – минимум, $f(M_1) = -72$ и в точке M_4 – максимум, $f(M_4) = 72$.

Глава 12. Неопределенный интеграл

Первообразная	Дифференцируемая функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором множестве значений x , если $F'(x) = f(x)$ на этом множестве.
Неопределенный интеграл	Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на некотором множестве называется неопределенным интегралом , т.е. $\int f(x)dx = F(x) + C$

Таблица интегралов:

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C$	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C$	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a-x}{a+x} \right + C$	

§1 Основные методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование		
1) $\int k f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx, \quad k - \text{const}$	а) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x^2} \right) dx = \int x^{1/2} dx + \int x^{-1/2} dx + 2 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{1-x^2} =$ $= \frac{2x^{3/2}}{3} + \frac{2x^{1/2}}{1} + 2 \ln x + \frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right + C$ б) $\int \cos(3x + 5) dx = \frac{1}{3} \sin(3x + 5) + C$	
2) $\int (f + g - h) dx = \int f dx + \int g dx - \int h dx$		
3) $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$		
2. Внесение функции под знак дифференциала		
Таблица дифференциалов		
1. $dx = d(x + a)$	9. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x)$	а) $\int \frac{dx}{x + 3} = \int \frac{d(x + 3)}{x + 3} = \ln x + 3 + C$ б) $\int e^x (\sin e^x) dx = \left d(e^x) = e^x dx \right =$ $= \int (\sin e^x) d(e^x) = -\cos e^x + C$ в) $\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C$
2. $x dx = \frac{1}{2} d(x^2)$	10. $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$	
3. $x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3)$	11. $\frac{dx}{1 + x^2} = d(\operatorname{arctg} x)$	
4. $x^3 dx = \frac{1}{4} d(x^4)$	12. $\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = d(\operatorname{arcsin} x)$	
5. $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})$	13. $e^x dx = d(e^x)$	
6. $\sin x dx = -d(\cos x)$	14. $a^x dx = \frac{1}{\ln a} d(a^x).$	
7. $\cos x dx = d(\sin x)$		
8. $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$		

3. Правило подстановки $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$	
Подстановка $x = \varphi(t)$	а) $\int \frac{\ln x}{x} dx = \left \begin{array}{l} \ln x = t \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$ б) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \left \begin{array}{l} \cos x = t \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right = -\int \frac{dt}{t^2} =$ $= -\int t^{-2} dt = -\frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{t} + C = \frac{1}{\cos x} + C$
4. Интегрирование по частям $\int u dv = u \cdot v - \int v dv$	
1) $\int \underbrace{P(x)}_u \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e^{kx} \\ \sin kx \\ \cos kx \\ a^{kx} \end{pmatrix}}_{dv} dx$ 2) $\int \underbrace{\begin{pmatrix} \arcsin kx \\ \arccos kx \\ \operatorname{arctg} kx \\ \log_a x \\ \ln x \end{pmatrix}}_u \cdot \underbrace{P(x)dx}_{dv}$ 3) $\int e^{kx} \cdot \begin{pmatrix} \sin ax \\ \cos ax \end{pmatrix} dx$	а) $\int \ln 2x dx = \left \begin{array}{ll} u = \ln 2x & du = \frac{1}{2x} \cdot 2 dx = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx & v = x \end{array} \right =$ $= x \cdot \ln 2x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln 2x - x + C$ б) $\int x \cos x dx = \left \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{array} \right =$ $= x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$

5. Интегрирование простейших дробей

$$\begin{aligned}
 1) \int \frac{A}{x-a} dx &= A \cdot \ln|x-a| + C \\
 2) \int \frac{A}{(x-a)^k} dx &= A \cdot \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C \\
 3) \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx &= \frac{M}{2} \cdot \ln(x^2+px+q) + \\
 &+ \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 а) \int \frac{3dx}{x-1} &= 3 \cdot \int \frac{d(x-1)}{x-1} = 3 \ln|x-1| + C \\
 б) \int \frac{2dx}{(x+1)^3} &= 2 \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^3} = 2 \int (x+1)^{-3} d(x+1) = \\
 &= 2 \cdot \frac{(x+1)^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{(x+1)^2} + C \\
 в) \int \frac{3x+1}{x^2+2x+10} dx &= \left| x^2+2x+10 = (x+1)^2 + 9 \right| = \\
 &= \int \frac{3x+1}{(x+1)^2+9} dx = \left| \begin{array}{l} x+1=t \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{3(t-1)+1}{t^2+9} dt = \\
 &= 3 \int \frac{t dt}{t^2+9} - 2 \int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{3}{2} \ln(t^2+9) - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \\
 &= \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+10) - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C.
 \end{aligned}$$

6. Интегрирование рациональных дробей

1. Если дробь неправильна, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби (выделить целую часть).

2. Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших рациональных дробей.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2x+1}{x^2-4x+3} dx &= \int \frac{2x+1}{(x-1)(x-3)} dx \\
 \text{Дробь } \frac{2x+1}{x^2-4x+3} &\text{ правильная. Представим ее в виде суммы} \\
 &\text{простейших дробей:} \\
 \frac{2x+1}{(x-1)(x-3)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}, \text{ приведем к общему знаменателю}
 \end{aligned}$$

3. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.	$\frac{2x+1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A(x-3)+B(x-1)}{(x-3)(x-1)}$ $2x+1 = A(x-3)+B(x-1);$ $2x+1 = (A+B)x - 3A - B$ приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x: $\begin{cases} 2 = A + B \\ 1 = -3A - B \end{cases}; \quad \begin{cases} A = -\frac{3}{2} \\ B = \frac{7}{2} \end{cases}$ Значит: $\int \frac{2x+1}{(x-1)(x-3)} dx = -\frac{3}{2} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{7}{2} \int \frac{dx}{x-3} =$ $= -\frac{3}{2} \int \frac{d(x-1)}{x-1} + \frac{7}{2} \int \frac{d(x-3)}{x-3} = -\frac{3}{2} \ln x-1 + \frac{7}{2} \ln x-3 + C$
7. Интегрирование тригонометрических функций	
7.1. $\int \sin ax \cdot \sin bx \, dx$ $\int \sin ax \cdot \cos bx \, dx$ $\int \cos ax \cdot \cos bx \, dx$	Необходимо преобразовать произведение тригонометрических функций в сумму или разность, пользуясь одной из следующих формул $\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$ $\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]$ $\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2} [\sin(a-b)x + \sin(a+b)x]$ а) $\int \sin 8x \cdot \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 6x + \sin 10x) dx =$ $= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{6} \cos 6x - \frac{1}{10} \cos 10x \right) + C$

7.2. $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$, где m и n - целые числа	Если m – нечетное положительное, то подстановка $\cos x = t$. Если n – нечетное положительное, то подстановка $\sin x = t$. Если $m + n$ - четное отрицательное, то подстановка $\operatorname{tg} x = t$. Если m и n - четные неотрицательные, то применяются формулы: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$	б) $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx$$= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$
7.3. $\int R(\sin x, \cos x) dx$	Универсальная подстановка $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, тогда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $x = 2 \operatorname{arctg} t$; $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$. Если $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то подстановка $\cos x = t$; Если $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то подстановка $\sin x = t$; Если $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$, то подстановка $\operatorname{tg} x = t$.	в) $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = \left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{1 + \sin^2 x} - \\ \text{четная относительно } \sin x \\ \operatorname{tg} x = t \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \end{array} \right =$ $= \int \frac{dt}{(1+t^2) \left(1 + \frac{t^2}{1+t^2} \right)} = \int \frac{dt}{2t^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2} t)}{(\sqrt{2} t)^2 + 1}$ $= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2} t + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C$

8. Интегрирование иррациональных функций

8.1. $\int R(x, x^{m/n}, \dots, x^{r/s}) dx$	Приводится к интегралу от рациональной дроби подстановкой $x = t^k$, где k - наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt{x+2}} = \left \begin{array}{l} \text{НОК}(3;2) = 6 \\ x+2 = t^6 \\ x = t^6 - 2 \\ dx = 6t^5 dt \\ t = \sqrt[6]{x+2} \end{array} \right =$
8.2. $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}\right] dx$	Сводится к интегралу от рациональной дроби подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$	$\begin{aligned} &= \int \frac{6t^5 dt}{t^4 - t^3} = 6 \int \frac{t^2 dt}{t-1} = 6 \int \frac{(t^2 - 1) + 1}{t-1} dt = \\ &= 6 \int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = 3t^2 + 6t + 6 \ln t-1 + C = \\ &= 3 \cdot \sqrt[3]{x+2} + 6 \cdot \sqrt[6]{x+2} + 6 \cdot \ln \sqrt[6]{x+2} - 1 + C \end{aligned}$
8.3. Квадратичные иррациональности $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$ $\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$	Под радикалом выделить полный квадрат $ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right)$ и сделать подстановку $x + \frac{b}{2a} = t$	$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}} &= \left \begin{array}{l} 4x^2 + 2x + 1 = \\ = 4 \left(\left(x + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{3}{16} \right) \end{array} \right = \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{4 \left(\left(x + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{3}{16} \right)}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{3}{16}}} = \end{aligned}$

8.4. Интегралы типа $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$ $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$ $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$ 8.5. Дифференциальный бином	Подстановка $x = a \cdot \sin t$ Подстановка $x = a \cdot \operatorname{tg} t$ Подстановка $x = \frac{a}{\sin t}$ 1-й случай а) если p – целое положительное число, то нужно раскрыть скобки	$\left \begin{array}{l} x + \frac{1}{4} = t \\ x = t - \frac{1}{4} \\ dx = dt \end{array} \right = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{16}} = \frac{1}{2} \ln \left t + \sqrt{t^2 + \frac{3}{16}} \right + C$ $= \frac{1}{2} \ln \left x + \frac{1}{4} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}} \right + C$ $\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2} dx = \left \begin{array}{l} x = 2 \sin t \\ dx = 2 \cos t dt \\ t = \arcsin \frac{x}{2} \end{array} \right =$ $= \int \frac{\sqrt{4 - 4 \sin^2 t}}{4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt =$ $= \int \frac{4 \cos^2 t}{4 \sin^2 t} dt = \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t} dt = \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt =$ $= -\operatorname{ctg} t - t + C = -\arcsin \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \left(\arcsin \frac{x}{2} \right) + C =$ $= C - \arcsin \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}$
--	---	---

$\int x^m (a + bx^n)^p dx,$ где m, n, p - рациональные числа, a, b – действительные числа	$(a + bx^n)^p$ по биному Ньютона и вычислить интегралы от степеней; б) если p – целое отрицательное число, то подстановка $x = t^k$, где k - наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n, приводит к интегралу от рациональной дроби; 2-й случай если $\frac{m+1}{n}$ - целое число, то применяется подстановка $a + bx^n = t^k$, где k - знаменатель дроби p; 3-й случай если $\frac{m+1}{n} + p$ - целое число, то применяется подстановка $a + bx^n = x^n t^k$, где k - знаменатель дроби p	$\int \frac{\sqrt[3]{4\sqrt{x} + 1}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-1/2} (1 + x^{1/4})^{1/3} dx =$ $\left \begin{array}{l} m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{4}, p = \frac{1}{3}, \frac{m+1}{n} = 2 \\ \sqrt[4]{x} + 1 = t^3, x = (t^3 - 1)^4 \\ dx = 4(t^3 - 1)^3 \cdot 3t^2 dt \\ t = \sqrt[3]{4\sqrt{x} + 1} \end{array} \right =$ $= \int \frac{t}{(t^3 - 1)^2} \cdot 12t^2 (t^3 - 1)^3 dt = 12 \int (t^6 - t^3) dt =$ $= 12 \cdot \frac{t^7}{7} - 12 \frac{t^4}{4} + C =$ $= \frac{12}{7} (\sqrt[4]{x} + 1)^{7/3} - 3 \cdot (\sqrt[4]{x} + 1)^{4/3} + C$
--	---	---

Задача.

Первообразными функции $y = 3\sqrt{2x-1}$ являются

Варианты ответов: 1) $\frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 7$ 2) $2(2x-1)^{3/2} + 16$ 3) $(2x-1)\sqrt{2x-1}$ 4) $(2x-1)^{3/2} + 1$

Решение.

Т.к. $3\sqrt{2x-1} = 3 \cdot (2x-1)^{1/2}$, то $f(x) = 3 \cdot (2x-1)^{1/2}$, тогда

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{(2x-1)^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{3 \cdot 2}{3} \cdot \frac{(2x-1)^{3/2}}{3} + C = (2x-1)^{3/2} + C$$

Ответ. №4

Задача.

Множество первообразных функции $f(x) = \ln 2x$ имеет вид

Варианты ответов: 1) $x \ln 2x - x + C$ 2) $x \ln 2x + \frac{x^2}{2} + C$ 3) $\frac{1}{2x} + C$ 4) $x \ln 2x + x + C$

Решение.

$$\int \ln 2x \, dx = \left| \begin{array}{ll} \ln 2x = u & dv = dx \\ du = \frac{1}{2x} \cdot 2 \, dx & v = x \end{array} \right| = |u \cdot v - \int v \, du| = x \ln 2x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln 2x - x + C$$

Ответ. №1

Задача.

В неопределенном интеграле $\int \frac{\sqrt{1+2\ln x}}{x} dx$ введена новая переменная $t = 1 + 2\ln x$. Тогда интеграл принимает вид

Варианты ответов: 1) $2\int \sqrt{t} dt$ 2) $\int \sqrt{t} dt$ 3) $2\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$ 4) $\frac{1}{2}\int \sqrt{t} dt$

Решение.

$$\int \frac{\sqrt{1+2\ln x}}{x} dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 + 2\ln x \\ dt = \frac{2}{x} dx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt$$

Ответ. №4

Задача.

Установите соответствие между интегралом и его значением

1. $\int \sin^3 x \cos x dx$ 2. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$ 3. $\int e^x (\sin e^x) dx$ 4. $\int \frac{dx}{1-x^2}$

Варианты ответов: а) $\lg x$ в) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ с) $\frac{1}{4} \sin^4 x$ d) $\frac{1}{\cos x}$ е) $-\cos e^x$

Решение.

$$1) \int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C$$

$$2) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = -\frac{\cos^{-1} x}{-1} + C = \frac{1}{\cos x} + C$$

$$3) \int e^x (\sin e^x) dx = \int \sin e^x d(e^x) = -\cos e^x + C$$

$$4) \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

Ответ. (1) $\leftrightarrow$ с (2) $\leftrightarrow$ d (3) $\leftrightarrow$ е (4) $\leftrightarrow$ в

Глава 13. Определенный интеграл

§1 Вычисление определенного интеграла

1. Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Задача.

Вычислить интеграл $\int_0^3 x^2 dx$.

Решение.

$$\int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = 9 - 0 = 9.$$

Ответ. 9.

Задача.

Вычислить интеграл $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{4+x^2}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{4+x^2} &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Ответ. $\frac{\pi}{4}$.

2. Замена переменной в определенном интеграле

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

Задача.

Вычислить интеграл $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$.

Решение.

$$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx = \left. \begin{array}{l} t = 1 + \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ \text{если } x = 1, \text{ то } t = 1 + \ln 1 = 1 \\ \text{если } x = e, \text{ то } t = 1 + \ln e = 2 \end{array} \right| = \int_1^2 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

Ответ. $\frac{3}{2}$.

3. Формула интегрирования по частям

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Задача.

Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} x \sin x dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \sin x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \\ &= -\pi \cdot (-1) + 0 + \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi. \end{aligned}$$

Ответ. π .

4. Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \cdot \int_0^a f(x) dx, & \text{если } f(x) \text{ — четная функция,} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ — нечетная функция} \end{cases}$$

Задача.

Вычислить интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \cdot \sin^3 x dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \cdot \sin^3 x dx &= \left| \begin{array}{l} f(-x) = \cos^2(-x) \cdot \sin^3(-x) = \\ = -\cos^2 x \cdot \sin^3 x = \\ = -f(x) \text{ — нечетная функция} \end{array} \right| = 0. \end{aligned}$$

Ответ. 0.

Задача.

Вычислить интеграл $\int_{-2}^2 \frac{x^5 + x^3}{x^3 + x} dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \frac{x^5 + x^3}{x^3 + x} dx &= \int_{-2}^2 \frac{x^3(x^2 + 1)}{x(x^2 + 1)} dx = \int_{-2}^2 x^2 dx = \left| \begin{array}{l} f(-x) = (-x)^2 = \\ = f(x) \text{ — четная функция} \end{array} \right| = \\ &= 2 \int_0^2 x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{2 \cdot 2^3}{3} - \frac{2 \cdot 0^3}{3} = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Ответ. $\frac{16}{3}$.

§2 Несобственные интегралы

Несобственные интегралы I рода

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; +\infty)$, то

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

(*)

Если функция $f(x)$ непрерывна на $(-\infty; b]$, то

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

(**)

Если функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx$$

(***)

Если пределы (*), (**) существуют и конечны, то несобственный интеграл – сходящийся, если эти пределы не существуют или бесконечны – расходящийся.

Интеграл сходится – если сходится каждый из двух интегралов в равенстве (***)

Задача.

Вычислить несобственный интеграл или

установить его расходимость: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Решение.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-2} dx = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{b} - 1 \right) = -(0 - 1) = 1,$$

интеграл сходится.

Несобственные интегралы II рода

Если $f(x)$ – непрерывна на $[a; b)$ и имеет бесконечный разрыв при $x = b$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

(*)

Если функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

(**)

Если $f(x)$ терпит бесконечный разрыв внутри отрезка $[a; b]$, т.е. в точке c , $c \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

(***)

Задача.

Вычислить несобственный интеграл или

установить его расходимость: $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$

Решение.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 x^{-2} dx = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x} \Big|_{0+\varepsilon}^1 =$$

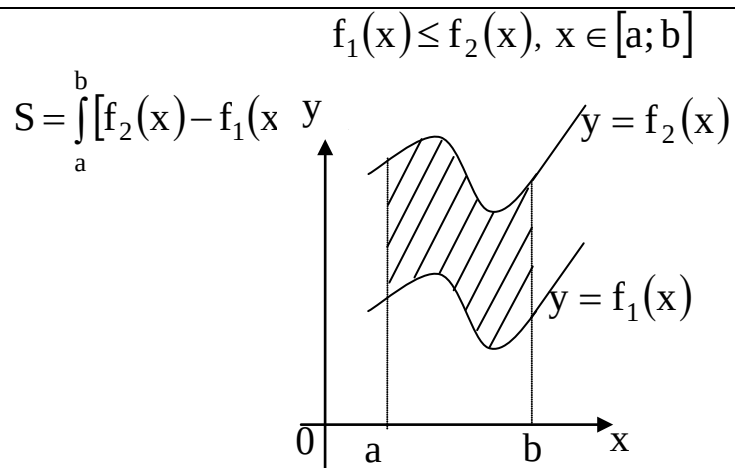
$$= - \left(1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \right) = \infty, \text{ интеграл}$$

расходится.

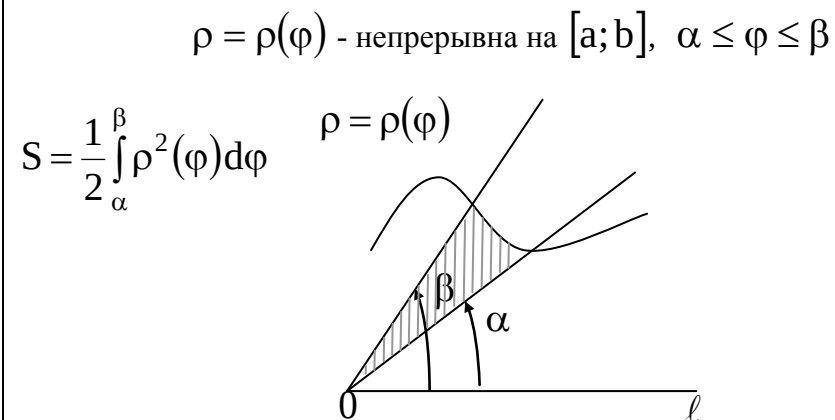
Если пределы (*), (**) существуют и конечны, то несобственный интеграл – сходящийся, если эти пределы не существуют или бесконечны - расходящийся.
 Интеграл сходится – если сходится каждый из двух интегралов в равенстве (***)).

§3 Геометрические приложения определенного интеграла

Площадь плоской фигуры в декартовой системе координат



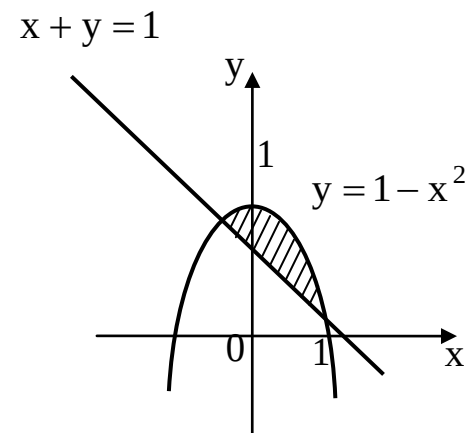
Площадь плоской фигуры в полярной системе координат



Задача.

Площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 1 - x^2$ и прямой $x + y = 1$, вычисляется с помощью интеграла...

Варианты ответов: 1) $\int_0^1 (x^2 - x) dx$ 2) $\int_0^1 (x^2 - 1 + x) dx$ 3) $\int_0^1 (x - x^2) dx$
4) $\int_0^1 (1 - x - x^2) dx$

**Решение.**

$x + y = 1$, следовательно, $y = 1 - x$.

На отрезке $[0; 1]$ график функции $y = 1 - x^2$ расположен выше графика функции $y = 1 - x$, поэтому

$$S = \int_0^1 [(1 - x^2) - (1 - x)] dx = \int_0^1 (1 - x^2 - 1 + x) dx = \int_0^1 (x - x^2) dx$$

Ответ. №3.

Длина дуги плоской кривой в декартовой системе координат

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$y = y(x), \quad a \leq x \leq b$$

$$\ell = \int_c^d \sqrt{1 + (x')^2} dy$$

$$x = x(y), \quad c \leq y \leq d$$

Длина дуги плоской кривой в полярной системе координат

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi$$

$$\rho = \rho(\varphi), \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta$$

Задача.

Найти длину дуги кривой $y^2 = x^3$ от $x = 0$ до $x = 1$ ($y \geq 0$).

Решение.

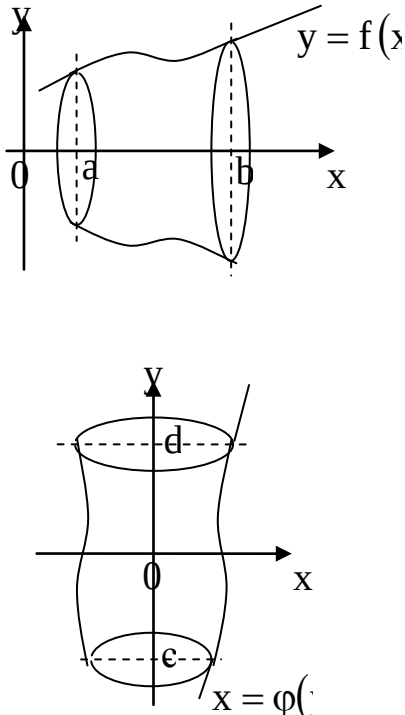
Так как $y \geq 0$, то $y = \sqrt{x^3}$; $y = x^{3/2}$.

$$y' = \frac{3}{2} x^{1/2}.$$

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} x^{1/2}\right)^2} dx =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4} x\right)^{3/2} \Big|_0^1 =$$

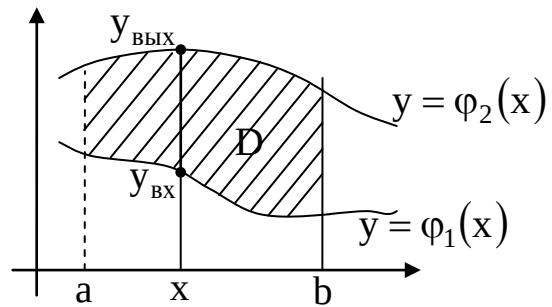
Длина дуги плоской кривой в параметрическом виде на плоскости	$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$ $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$	$= \frac{8}{27} \left(\frac{13}{4} \right)^{3/2} - \frac{8}{27} = \frac{8}{27} \left(\frac{13}{8} \sqrt{13} - 1 \right).$ <u>Ответ.</u> $\frac{8}{27} \left(\frac{13}{8} \sqrt{13} - 1 \right).$	
Длина дуги плоской кривой в параметрическом виде в пространстве	$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt$ $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$		
		Объем	Площадь поверхности

Объем и площадь поверхности тела вращения Кривая $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ вращается вокруг оси Ox Кривая $x = \varphi(y)$, $y \in [c; d]$ вращается вокруг оси Oy		$V_{Ox} = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ $V_{Oy} = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy$	$S_{Ox} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ $S_{Oy} = 2\pi \int_c^d \varphi(y) \sqrt{1 + (\varphi'(y))^2} dy$
§4 Применение определенного интеграла к решению некоторых задач физики			
Вычисление работы	Вычисление работы переменной силы $F(x)$, при перемещении точки вдоль оси Ox из положения $x = a$ в положение $x = b$	$A = \int_a^b F(x) dx$	
Вычисление пути	Путь пройденный телом за промежуток времени от t_1 до t_2 со скоростью $v(t)$	$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$	

Глава 14. Двойной интеграл

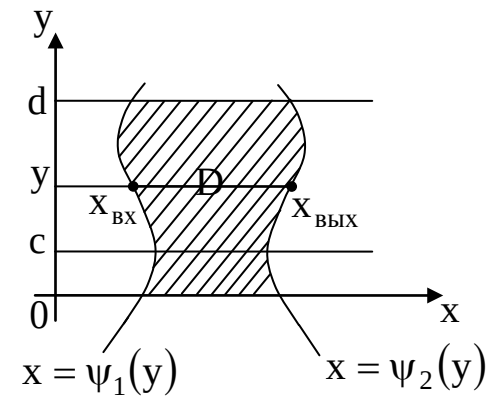
1. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат

а)



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

б)



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$

Задача.

Пусть $S = \int_0^2 dx \int_x^{4-x} f(x, y) dy$. Тогда область интегрирования D данного интеграла имеет вид...

Варианты ответов: 1) прямоугольной трапеции 2) произвольной трапеции
3) треугольника 4) равнобокой трапеции

Решение.

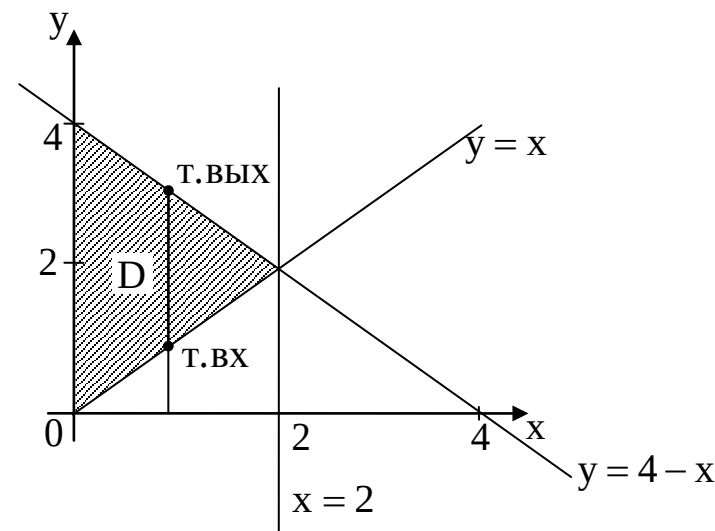
$$x \leq y \leq 4 - x$$

$$0 \leq x \leq 2$$

Построим фигуру, ограниченную линиями $x = 0$, $x = 2$, $y = x$, $y = 4 - x$

Область интегрирования D данного интеграла имеет вид треугольника.

Ответ. №3.

**Задача.**

Вычислить $\iint_D x^2 y dx dy$, где область D - прямоугольник $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ 1 \leq y \leq 2. \end{cases}$

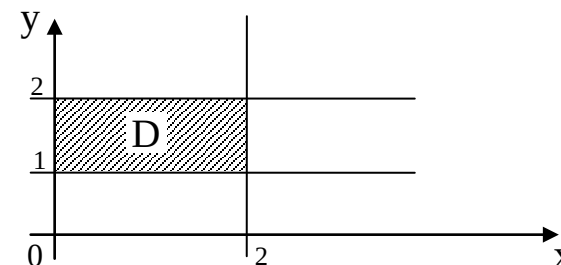
Варианты ответов: 1) 12/3 2) 10/3 3) 14/3 4) 4

Решение.

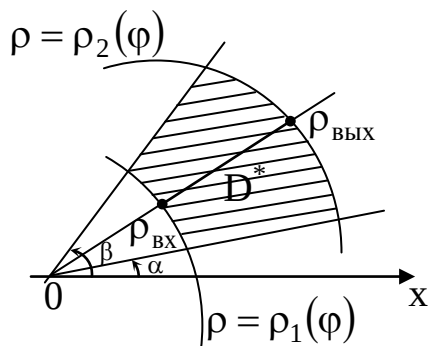
Область D - прямоугольник, изображенный на рисунке.

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y dx dy &= \int_0^2 x^2 dx \int_1^2 y dy = \int_0^2 x^2 dx \left(\frac{y^2}{2} \Big|_1^2 \right) = \int_0^2 x^2 dx \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) = \\ &= \frac{3}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{x^3}{2} \Big|_0^2 = 4. \end{aligned}$$

Ответ. №5.



2. Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho \cdot f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) d\rho$$

Переход к полярным координатам полезен, когда подынтегральная функция имеет вид $f(x^2 + y^2)$ или область D есть круг, кольцо или часть таковых

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$dx dy = \rho d\rho d\varphi$$

Задача.

Дан интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$, где D - кольцо

$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. Тогда повторный интеграл в полярной системе координат по этой области примет вид...

Варианты ответов: 1) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^4 \rho f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\rho$

2) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\rho$ 3) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \rho f(\rho, \varphi) d\rho$

4) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \rho f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\rho$

Решение.

Так как $x = \rho \cos \varphi$,

$y = \rho \sin \varphi$,

$dx dy = \rho d\rho d\varphi$,

$x^2 + y^2 = \rho^2$, то кольцо

$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ в полярной системе координат будет иметь вид $1 \leq \rho^2 \leq 4$, $1 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Тогда

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \rho f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\rho, \text{ т.е.}$$

Ответ. №4.

3. Приложения двойного интеграла

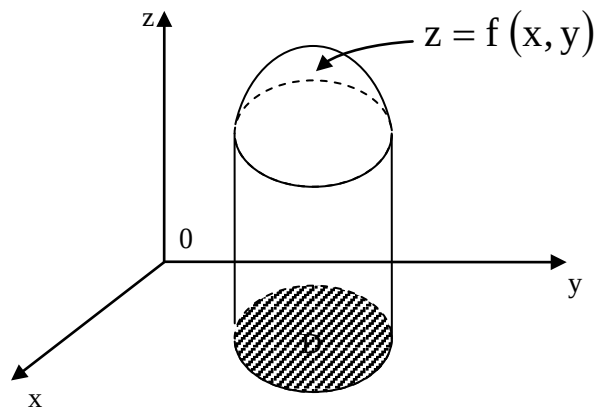
Площадь плоской фигуры в декартовой системе координат

$$S = \iint_D dx dy$$

Площадь плоской фигуры в полярной системе координат

$$S = \iint_D \rho d\rho d\varphi$$

Объем тела



$$V = \iint_D f(x, y) dx dy,$$

где $z = f(x, y)$ - уравнение поверхности, ограничивающей тело сверху.

Масса плоской фигуры

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy,$$

где $\gamma = \gamma(x, y)$ - плотность

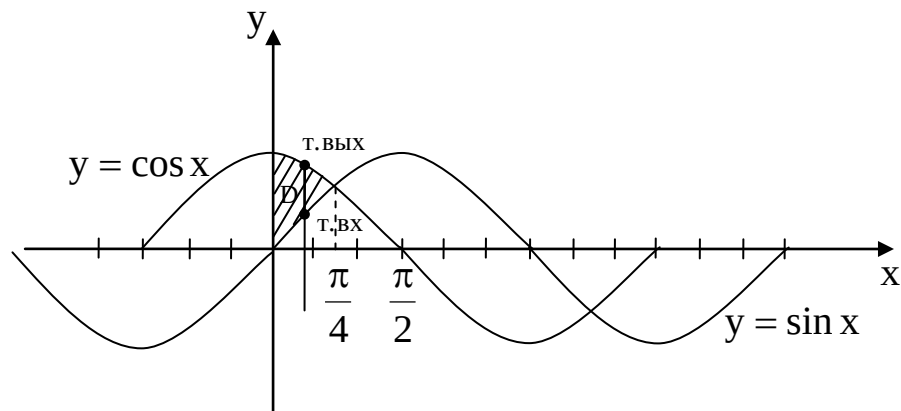
Задача.

Площадь области, ограниченная линиями $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, вычисляется как повторный интеграл...

Варианты ответов: 1) $\int_{\sin x}^{\cos x} dy \int_0^{\pi/4} dx$ 2) $\int_0^{\pi/4} dx \int_{\cos x}^{\sin x} dy$ 3) $\int_0^{\pi/4} dx \int_{\sin x}^{\cos x} dy$ 4) $\int_0^1 dx \int_{\arcsin x}^{\arccos x} dy$

Решение.

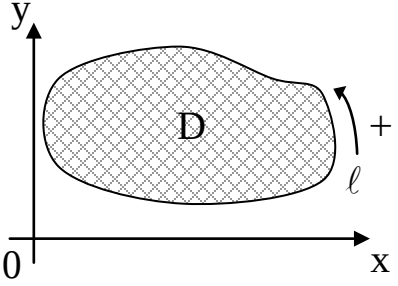
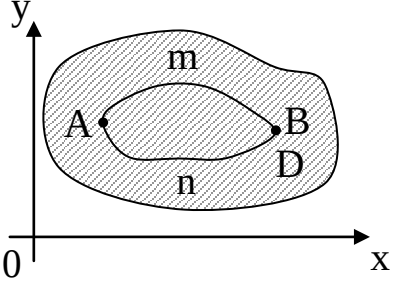
Построим фигуру, ограниченную данными линиями. $S = \iint_D dx dy = \int_0^{\pi/4} dx \int_{\sin x}^{\cos x} dy$



Ответ. №3.

Глава 15. Криволинейный интеграл

	Кривая задана уравнением	
1. Вычисление криволинейного интеграла I рода в декартовой системе координат	$y = \varphi(x), \quad a \leq x \leq b$	$\int_{\ell} f(x, y) d\ell = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$
	$x = \psi(y), \quad c \leq y \leq d$	$\int_{\ell} f(x, y) d\ell = \int_c^d f(\psi(y), y) \cdot \sqrt{1 + (x'_y)^2} dy$
2. Вычисление криволинейного интеграла I рода в полярной системе координат	$\rho = \rho(\varphi), \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta$	$\int_{\ell} f(x, y) d\ell = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \cdot \sqrt{\rho^2 + (\rho'_{\varphi})^2} d\varphi$
3. Вычисление криволинейного интеграла I рода в параметрическом виде	$x = x(t), \quad y = y(t),$ $\alpha \leq t \leq \beta$	$\int_{\ell} f(x, y) d\ell = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$
4. Вычисление криволинейного интеграла II рода в декартовой системе координат	$y = y(x), \quad a \leq x \leq b$	$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b P(x, y(x)) dx + Q(x, y(x)) y'(x) dx$
	$x = x(y), \quad c \leq y \leq d$	$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_c^d P(x(y), y) x'(y) dy + Q(x(y), y) dy$
5. Вычисление криволинейного интеграла II рода в параметрическом виде	$x = x(t), \quad y = y(t),$ $\alpha \leq t \leq \beta$	$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)] dt$

6. Формула Грина		Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в области D, то $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\ell} P dx + Q dy,$ где ℓ - граница области D и интегрирование вдоль кривой ℓ производится в положительном направлении (при движении вдоль кривой область D остается слева).
7. Условия независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования		Пусть A и B – произвольные точки области D, $A_m B$ и $A_n B$ - два произвольных пути, соединяющих эти точки. Тогда следующие условия равносильны: 1) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ (условие Грина). 2) $\int_{A_m B} P dx + Q dy = \int_{A_n B} P dx + Q dy$ (криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования). 3) $P dx + Q dy = dV$ (выражение $P dx + Q dy$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции $V = U(x, y)$) 4) $\oint_{\ell} P dx + Q dy = 0$ (криволинейный интеграл по замкнутому контуру равен 0).
8. Связь между криволинейными интегралами I и II рода		$\int_{\ell} P dx + Q dy + R dz = \int_{\ell} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\ell$ $\int_{\ell} P dx + Q dy = \int_{\ell} (P \cos \alpha + Q \cos \beta) d\ell$
9. Приложения	Первого рода	Второго рода

криволинейного интеграла	Длина кривой ℓ	$\ell = \int_{\ell} d\ell$	Работа под воздействием силы $\vec{F}(P, Q)$ на криволинейном участке АВ	$A = \int_{AB} P dx + Q dy$
	Масса кривой ℓ с плотностью $\gamma = \gamma(x, y)$	$m = \int_{\ell} \gamma(x, y) d\ell$	Площадь плоской фигуры, расположенной в плоскости Оху и ограниченной замкнутой линией ℓ	$S = \frac{1}{2} \oint_{\ell} x dy - y dx$

Задача.

Криволинейный интеграл $\oint_{\ell} x^4 y dx + \frac{1}{5} x^5 dy$ по замкнутому контуру равен...

Варианты ответов: 1) 2 2) 0 3) 4 4) 5

Решение.

$$P(x, y) = x^4; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = x^4$$

$$Q(x, y) = \frac{1}{5} x^5 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{5} \cdot 5x^4 = x^4$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Значит, $\oint_{\ell} x^4 y dx + \frac{1}{5} x^5 dy = 0$.

Ответ. №2.

Глава 16. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Уравнение, связывающее независимую переменную x , функцию $y(x)$ и ее производные $y', y'', \dots, y^{(n)}$, называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**.

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

1. Порядок дифференциального уравнения

Наивысший порядок производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения**.

Задача.

Укажите дифференциальное уравнение первого порядка (выберите несколько вариантов ответа).

Варианты ответов:

1) $dy = (5 - x) \cdot y dx$ 2) $2xy = y' - xe^{-x^2}$ 3) $y^2 - 5y = e^{-5x}$ 4) $\frac{y''}{y'} \sqrt{x-1} = 1$

Решение.

1) Представим уравнение в виде $\frac{dy}{dx} = (5 - x)y$;

$y' = (5 - x)y$ - уравнение первого порядка.

2) Содержит y' , поэтому является дифференциальным уравнением первого порядка.

3) Не содержит производных, поэтому не является дифференциальным уравнением.

4) Содержит y'' , поэтому является дифференциальным уравнением второго порядка.

Ответ. №1, №2.

§1 Дифференциальные уравнения I порядка	
2. Дифференциальные уравнения I порядка.	Уравнение вида $F(x, y, y') = 0$ или $y' = f(x, y)$ называется дифференциальным уравнением I порядка .
3. Решение дифференциального уравнения I порядка	Решением дифференциального уравнения первого порядка $F(x, y, y') = 0$, называется дифференцируемая на некотором интервале (a, b) функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции обращает его в тождество.
4. Общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка	Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x, C)$, которая при любом значении произвольной постоянной C является решением данного уравнения. Построенный на плоскости XOY график всякого решения $y = \varphi(x)$ данного дифференциального уравнения называется интегральной кривой этого уравнения. Таким образом, общему решению $y = \varphi(x, C)$ на плоскости XOY соответствует семейство интегральных кривых , зависящее от одного параметра – произвольной постоянной C .
5. Частные решения	Решения, которые получаются из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при определенном значении произвольной постоянной C , называются частными . Частные решения удовлетворяют начальным условиям (условиям Коши): $y(x_0) = y_0 \quad \text{или} \quad y _{x=x_0} = y_0.$ Геометрически график частного решения – это интегральная кривая, проходящая через заданную точку плоскости $M(x_0, y_0)$.

§2 Типы дифференциальных уравнений первого порядка

6. Уравнения с разделяющимися переменными $y' = f(x) \cdot g(y)$ или $M_1(x) \cdot N_1(y)dx + M_2(x) \cdot N_2(y)dy = 0$

Разделить переменные и проинтегрировать полученные выражения

Задача.

Дано дифференциальное уравнение $xy' + y = 0$ при $y(-1) = 2$. Тогда его решением является функция ...

Варианты ответов: 1) $y = \frac{1}{x} + 3$ 2) $y = -\frac{2}{x}$ 3) $y = -2x$ 4) $y = -2e^{-x-1}$

Решение.

$$xy' = -y$$

$y' = -\frac{y}{x}$ - уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}; \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}; \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}; \quad \ln|y| = -\ln|x| + \ln C; \quad \ln|y| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|; \quad y = \frac{C}{x}.$$

$y(-1) = 2$, значит $x = -1$, $y = 2$. Тогда $2 = \frac{C}{-1}$, $C = -2$. Тогда $y = -\frac{2}{x}$.

Ответ. №2.

Задача.

Дано дифференциальное уравнение $y' = (k+1)x^2$, тогда функция $y = x^3$ является его решением при k равном ...

Варианты ответов: 1) 2 2) 3 3) 1 4) 0

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = (k+1)x^2, \quad dy = (k+1)x^2 dx, \quad y = (k+1) \int x^2 dx; \quad y = (k+1) \frac{x^3}{3} + C.$$

Сравнивая с $y = x^3$, получаем, что $\frac{k+1}{3} = 1$, откуда $k = 2$.

Ответ. №1.

7. Однородное уравнение $y' = f\left(\frac{y}{x}\right) M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$,

где $M(x, y)$, $N(x, y)$ - однородные функции одного порядка

Замена: $t = \frac{y}{x}$; $y = tx$, $y' = t'x + t$ $dy = t dx + x dt$

Задача.

Уравнение $y' - \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ является...

Варианты ответов: 1) уравнением Бернулли

2) однородным дифференциальным уравнением

3) уравнением с разделяющимися переменными

4) дифференциальным уравнением 1 порядка

Решение.

Уравнение перепишем в виде $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$, т.е. в виде $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, значит, оно является однородным.

Ответ. №2.

Задача.

Найти общий интеграл уравнения $(x^2 + 2xy)dx + xy dy = 0$.

Решение.

Функции $M(x, y) = x^2 + 2xy$, $N(x, y) = xy$ - однородные второго порядка.

Пусть $y = tx$, откуда $dy = x dt + t dx$, тогда

$$(x^2 + 2x^2t)dx + tx^2(x dt + t dx) = 0;$$

$$(x^2 + 2x^2t + t^2x^2)dx + tx^3dt = 0;$$

$$x^2(1+t)^2 dx + tx^3dt = 0.$$

Разделим на $(1+t)^2 \cdot x^3$.

$$\frac{dx}{x} + \frac{t dt}{(1+t)^2} = 0.$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{t dt}{(1+t)^2} = C; \quad \ln|x| + \int \frac{t+1-1}{(t+1)^2} = C; \quad \ln|x| + \ln|t+1| + \frac{1}{t+1} = C.$$

Так как $t = \frac{y}{x}$, то $\ln|x| + \ln\left|\frac{y}{x} + 1\right| + \frac{1}{\frac{y}{x} + 1} = C; \quad \ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = C.$

Ответ. $\ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = C.$

8. Линейное уравнение $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$

Замена: $y = u(x) \cdot v(x), \quad y' = u'v + uv'$

Задача.

Проинтегрировать уравнение: $y' + 2xy = 2x$.

Решение.

Полагаем $y = u \cdot v$, тогда $y' = u'v + uv'$ и уравнение примет вид

$$u'v + uv' + 2x \cdot uv = 2x, \quad u'v + u \cdot (v' + 2xv) = 2x.$$

Решим сначала уравнение $v' + 2xv = 0$.

$$\frac{dv}{v} = -2x dx, \quad \ln|v| = -x^2, \quad v = e^{-x^2}.$$

Подставим $v = e^{-x^2}$ и решим уравнение $u' \cdot e^{-x^2} + u \cdot 0 = 2x$,

$$\frac{du}{dx} = 2x \cdot e^{x^2}, \quad du = \int 2x \cdot e^{x^2} dx, \quad u = e^{x^2} + C. \quad \text{Тогда } y = u \cdot v = (e^{x^2} + C) \cdot e^{-x^2} = 1 + Ce^{-x^2}.$$

Ответ. $y = 1 + Ce^{-x^2}.$

9. Уравнение Бернулли $y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^\alpha, \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha \neq 1$
--

Замена: $y = u(x) \cdot v(x), \quad y' = u'v + uv'$

Задача.

Выберите несколько вариантов ответов. Из данных дифференциальных уравнений уравнениями Бернулли являются:

Варианты ответов: 1) $\frac{dy}{dx} - 3x^2 + y = 0$ 2) $y \frac{dy}{dx} + x^3 = 0$ 3) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^3}{x^3}$ 4) $x \frac{dy}{dx} - y = y^2 e^x$

Решение.

Приведем уравнение к виду:

$$1) \quad f(x) = 3x^2 - 5x + 11 \quad 2) \quad f(x) = x^3 - 11x^2 + 11x - 11 \quad \text{III} \quad \text{IV}$$

1) $y' + y = 3x^2$ - линейное ДУ,
2) $y' = -\frac{y}{x}$ - ДУ с разделяющимися переменными;

3) $y' - \frac{1}{x} \cdot y = x^{-3} y^3$ - уравнение Бернулли;

	X			X	X
Оценки	№3	№4			

Обет. №3, №4.	$\hat{P}(y, y)$	$\hat{Q}(y, y)$
---------------	-----------------	-----------------

10. Уравнения в полных дифференциалах $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, где $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du(x, y), \quad u(x, y) = C.$$

$\frac{\partial P}{\partial O}$

1) проверить выполнение условия $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$.

[illegible]

Задача.

Решить уравнение

$$(2xy - 5)dx + (3y^2 + x^2)dy = 0.$$

Решение.

$$P(x, y) = 2xy - 5; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2x. \quad Q(x, y) = 3y^2 + x^2; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x. \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Значит, $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy - 5, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 + x^2.$

Отсюда

$$u(x, y) = \int (2xy - 5)dx = x^2y - 5x + \varphi(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (x^2y - 5x + \varphi(y))'_y = x^2 + \varphi'(y), \quad \text{далее } 3y^2 + x^2 = x^2 + \varphi'(y),$$

$$\varphi'(y) = 3y^2.$$

$$\varphi(y) = \int 3y^2 dy = y^3 + C_1, \quad u(x, y) = x^2y - 5x + y^3 + C_1.$$

Ответ. $x^2y - 5x + y^3 = C.$

§3 Дифференциальные уравнения высших порядков

11. Дифференциальные уравнения высших порядков	Дифференциальными уравнениями n-го порядка называются уравнения вида $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$
12. Решение дифференциальных уравнений	Решением дифференциального уравнения n-го порядка является n раз дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая обращает данное уравнение в тождество.

13. Общее решение дифференциального уравнения	Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ называется общим решением дифференциального уравнения n-го порядка, если при любом выборе произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$ эта функция удовлетворяет начальным условиям $\left. \begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y'_0 \\ y''(x_0) &= y''_0 \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned} \right\} \text{задача Коши.}$
14. Частное решение дифференциального уравнения	Всякое решение, получаемое из общего решения при конкретных значениях постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, называется частным решением этого уравнения.
15. Уравнения, допускающие понижение порядка	
а) $y^{(n)} = f(x)$, n раз проинтегрировать	
Задача. Общее решение ДУ $y''' = x + 2$ имеет вид ... Варианты ответов: 1) $y = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ 2) $y = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$ 3) $y = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ 4) $y = x^4 + x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3$ <u>Решение.</u> $y'' = \int (x + 2)dx = \frac{x^2}{2} + 2x + C_1, \quad y' = \int \left(\frac{x^2}{2} + 2x + C_1 \right) dx = \frac{x^3}{6} + \frac{2x^2}{2} + C_1x + C_2,$ $y = \int \left(\frac{x^3}{6} + x^2 + C_1x + C_2 \right) dx = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{3} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3.$ <u>Ответ.</u> №3	
б) $F(x, y', y'') = 0$ (нет y). Замена: $y' = p$, $p = p(x)$, $y'' = p'$	

Задача.

Общим решением дифференциального уравнения $y'' - 3 \cdot \frac{y'}{x} = 0$ является

Варианты ответов: 1) $C_1 x^4 + C_2$ 2) $C_1 x^3 + C_2 x + 1$ 3) $\frac{x^4}{4} + C_1 x + C_2$ 4) $C_1 x^3 + C_2$

Решение.

Сделаем замену: $y' = p(x)$, $y'' = p'$. Получим уравнения: $p' - 3 \cdot \frac{p}{x} = 0$.

$\frac{dp}{dx} = \frac{3p}{x}$ - уравнение с разделяющимися переменными. $\frac{p}{p} = \frac{3dx}{x}$.

$$\ln|p| = 3\ln|x| + \ln|C|.$$

$$p = (x^3 C_1).$$

Т.к. $p = y'$, то $y' = C_1 x^3$, тогда $y = \int C_1 x^3 dx$, $y = C_1 \frac{x^4}{4} + C_2 = \tilde{C}_1 x^4 + C_2$, где $\tilde{C}_1 = \frac{C_1}{4}$.

Ответ. №1.

в) $F(y, y', y'') = 0$ (нет x). Замена: $y' = p$, $p = p(y)$, $y'' = p \cdot p'$

Задача.

Порядок дифференциального уравнения $y'' - (y')^2 + y'(y - 1) = 0$ можно понизить заменой

Варианты ответов: 1) $y' = z(x)$ 2) $y' = z(y)$ 3) $y'' = z(x)$ 4) $y'' = z(y)$

Решение.

Так как в уравнении нет x , то замена $y' = z(y)$.

Ответ. №2.

§4 Линейные уравнения высших порядков			
16. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка (ЛНДУ)	$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$ (*) Функции $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x), f(x)$ заданы и непрерывны в некотором промежутке $(a; b)$. Если $f(x) \neq 0$, то уравнение называется линейным неоднородным. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (*) называется линейным однородным.		
17. Общее решение ЛНДУ	Общим решением уравнения (*) является сумма его произвольного частного решения $y_{\text{частн.}}$ и общего решения соответствующего однородного уравнения $y_{\text{общ.}}$, т.е. $y = y_{\text{частн.}} + y_{\text{общ.}}$		
18. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = 0$, a_1, a_2 - постоянные	Составить характеристическое уравнение $k^2 + a_1 k + a_2 = 0.$ Вычислить дискриминант и корни характеристического уравнения. Записать ответ, используя следующую таблицу.		
Дискриминант	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
Корни	$k_1 \neq k_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$	$k_1 = k_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$	$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$
Фундаментальная система частных решений	$y_1 = e^{k_1 x},$ $y_2 = e^{k_2 x}$	$y_1 = e^{k_1 x},$ $y_2 = x e^{k_1 x}$	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x,$ $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$
Общее решение	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{k_1 x}$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Задача.

Дано линейное однородное уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0$. Тогда общим решением является

Варианты ответов: 1) $C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$ 2) $e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ 3) $e^{-x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$ 4) $e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

Решение.

Составим характеристическое уравнение

$$k^2 + 2k + 5 = 0;$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16;$$

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = -1 \pm 2i, \quad \alpha = -1, \quad \beta = 2.$$

Значит, общим решением будет

$$y_{\text{общ}} = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Ответ. №2.

Задача.

Установите соответствие между ДУ и их характеристическими уравнениями:

$$1. y^{IV} - 4y''' - y'' = 0; \quad 2. y^{IV} - 4y''' - y'' + y' = 0; \quad 3. y^{IV} - 4y''' - y' + y = 0.$$

Варианты ответов: А) $k^4 - 4k^3 - k^2 + k = 0$ В) $k^4 - 4k - k + 1 = 0$ С) $k^3 - k^2 - k = 0$ D) $k^3 - k^2 - k + 1 = 0$
Е) $k^4 - 4k^3 - k^2 = 0$

Решение.

1) Уравнению $y^{IV} - 4y''' - y'' = 0$ соответствует характеристическое уравнение $k^4 - 4k^3 - k^2 = 0$. (Е).

2) Уравнению $y^{IV} - 4y''' - y'' + y' = 0$ соответствует характеристическое уравнение $k^4 - 4k^3 - k^2 + k = 0$. (А).

3) Уравнению $y^{IV} - 4y''' - y' + y = 0$ соответствует характеристическое уравнение $k^4 - 4k^3 - k + 1 = 0$. (В).

Ответ. (1) $\leftrightarrow$ Е (2) $\leftrightarrow$ А (3) $\leftrightarrow$ В

Задача.

Семейству интегральных кривых $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$, где C_1 и C_2 произвольные постоянные, соответствует однородное дифференциальное уравнение второго порядка ...

Варианты ответов: 1) $y'' - 4y' + 3y = 0$ 2) $y'' + 3y - 1 = 0$ 3) $y'' - 9y = 0$ 4) $y'' + 3y = 0$

Решение.

Из $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$ выпишем корни характеристического уравнения: $k_1 = 3$, $k_2 = -3$.

По теореме Виета: $k_1 + k_2 = 3 - 3 = 0$. $k_1 \cdot k_2 = -9$.

Соответствующее однородное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид: $y'' - 9y = 0$.

Ответ. №3.

Задача.

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с равными действительными корнями характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = -1$ имеет вид...

Варианты ответов: 1) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ 2) $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$ 3) $y = (C_1 + C_2 x)e^x$ 4) $y = C_1 + C_2 x e^{3x}$

Решение.

Так как корни характеристического уравнения равны $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид: $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$.

Ответ. №2.

19. ЛНДУ второго порядка. Метод вариации произвольных постоянных.

Для решения уравнения

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x) \quad (**)$$

необходимо:

1) найти общее решение ($y_{\text{общ}}$) ЛОДУ $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$ в виде

$$y_{\text{общ}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ - частные решения однородного уравнения,

C_1 , C_2 - произвольные постоянные.

2) частное решение уравнения (**) записать в виде:

$$y_{\text{частн}} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x),$$

	где $C_1(x)$, $C_2(x)$ - неизвестные функции. 3) составить систему $\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x) \end{cases}$ и решить ее относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$. 4) проинтегрировав функции $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, найти $C_1(x)$, $C_2(x)$. 5) записать ответ в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения $U_{\text{общ}}$ и полученного частного решения $U_{\text{частн.}}$: $Y = U_{\text{общ}} + U_{\text{частн.}}$
20. ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью	Для решения уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x),$ необходимо: 1) найти общее решение ($U_{\text{общ}}$) ЛОДУ $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$ в виде $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$ где $y_1(x)$, $y_2(x)$ - частное решение однородного уравнения, C_1, C_2 - произвольные постоянные. 2) по виду специальной правой части записать ожидаемую форму частного решения с неопределенными коэффициентами.

	Вид правой части	Форма частного решения
	I. $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$ - многочлен n -ой степени, $\alpha \in \mathbb{R}$.	I. $y_{\text{ч}} = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, где $Q_n(x)$ - многочлен n -ой степени с неопределенными коэффициентами $\left[\begin{array}{l} Q_0(x) = A \\ Q_1(x) = Ax + B \\ Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C \\ Q_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \text{ и т.д.} \end{array} \right],$ r - число, равное кратности корня α как корня характеристического уравнения (т.е. число, показывающее, сколько раз α является корнем уравнения) $k^2 + pk + q = 0.$
	II. $f(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - многочлены степени n и m соответственно.	II. $y_{\text{ч}} = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot (M_{\ell}(x)\cos\beta x + N_{\ell}(x)\sin\beta x)$, где r - число, равное кратности $\alpha + \beta i$ как корня характеристического уравнения $x^2 + px + q = 0$, $M_{\ell}(x)$ и $N_{\ell}(x)$ - многочлены степени ℓ с неопределенными коэффициентами, $\ell = \max(n, m)$ - наивысшая степень многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$.
	3) вычислить производные $y'_{\text{ч}}$, $y''_{\text{ч}}$ и подставить $y_{\text{ч}}$, $y'_{\text{ч}}$, $y''_{\text{ч}}$ в данное уравнение. 4) из полученного тождества найти значения неопределенных коэффициентов. 5) записать ответ в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения $y_{\text{общ}}$ и полученного частного решения $y_{\text{частн}}$: $y = y_{\text{общ}} + y_{\text{частн}}$.	
Задача.		

Частному решению линейного неоднородного дифференциального уравнения $y'' - 5y' + 6y = x + 1$ по виду его правой части соответствует функция

Варианты ответов: 1) $y = Ae^{2x} + Be^{3x}$ 2) $y = Ax + B$ 3) $y = Ax^2 + Bx$ 4) $y = e^{2x}(Ax + B)$

Решение.

Решим однородное уравнение: $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Ему соответствует характеристическое уравнение

$$k^2 - 5k + 6 = 0;$$

$$k_1 = 2;$$

$$k_2 = 3.$$

Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид $y_{\text{общ}} = C_1 y^{2x} + C_2 e^{3x}$.

Частное решение ищем в виде:

$$y_{\text{ч}} = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot x^r.$$

$$\alpha = 0, \quad r = 0, \quad Q_n(x) = Ax + B.$$

Поэтому частное решение имеет вид: $y_{\text{част}} = Ax + B$.

Ответ. №2.

Задача.

Если функция $f(x)$ имеет вид: 1. $f(x) = x$ 2. $f(x) = x^2 + 1$ 3. $f(x) = e^{-x}$ 4) $f(x) = 2$, то частное решение $\bar{y}$ неоднородного дифференциального уравнения $y'' + 2y' + y = f(x)$ следует искать в виде ...

Варианты ответов: А) $\bar{y} = Ax^2 e^{-x}$ В) $\bar{y} = Ae^{-x}$ С) $\bar{y} = A$ D) $\bar{y} = Ax + B$ Е) $\bar{y} = Ax^2 + Bx + C$

Решение.

Однородное уравнение $y'' + 2y' + y = 0$ имеет корни характеристического уравнения, равные $k_1 = k_2 = -1$, а, следовательно, общее решение $y_{\text{общ}} = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$. Тогда частное решение $\bar{y}$ неоднородного дифференциального уравнения следует искать в виде

1) $\bar{y} = Ax + B$, так как содержит многочлены первой степени и $\alpha = 0, \quad r = 0$. (D).

2) $\bar{y} = Ax^2 + Bx + C$, так как содержит многочлен второй степени и $\alpha = 0$, $r = 0$. (E).

3) $\bar{y} = Ax^2 e^{-x}$, так как содержит многочлен нулевой степени и корень $\lambda = -1$ кратности 2 ($\alpha = -1$, $r = 2$). (A).

4) $\bar{y} = A$, так как содержит многочлен нулевой степени и $\alpha = 0$, $r = 0$. (C).

Ответ. (1) $\leftrightarrow D$ (2) $\leftrightarrow E$ (3) $\leftrightarrow A$ (4) $\leftrightarrow C$

Задача.

Частное решение дифференциального уравнения $y'' + 9y = \cos 3x$ имеет вид

Варианты ответов: 1) $A \cos 3x$ 2) $Ax \cos 3x$ 3) $x^2 \cos 3x$ 4) $(A \cos 3x + B \sin 3x)x$

Решение.

Соответствующее уравнение имеет вид $y'' + 9y = 0$, его характеристическое уравнение $k^2 + 9 = 0$, откуда $k^2 = -9$, $k = 0 \pm 3i$.

Т.е. $y_{\text{общ}} = e^{0x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$,

$$y_{\text{общ}} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Тогда частное решение следует искать в виде

$$y_{\text{частн}} = y^{0x} (A \cos 3x + B \sin 3x) \cdot x^1, \quad \alpha = 0, \quad r = 1.$$

$$y = (A \cos 3x + B \sin 3x) \cdot x.$$

Ответ. №4.

§5 Системы дифференциальных уравнений

21. Системы дифференциальных уравнений	Системой дифференциальных уравнений называется совокупность дифференциальных уравнений, каждая из которых содержит независимую переменную, искомые функции и их производные.	<u>Задача.</u> Система дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = -7x + y, \\ y' = -2x - 5y, \end{cases}$ может быть сведена к уравнению вида... Варианты ответов: 1) $x'' + 5x' + 37x = 0$ 2) $x'' + 12x' + 35x = 0$
22. Нормальная система дифференциальных	Система дифференциальных уравнений вида	

Глава 17. Дифференциальные уравнения в частных производных

Если в дифференциальных уравнениях независимых производных две или больше, то дифференциальное уравнение называется дифференциальным уравнением в частных производных.

§1 Дифференциальное уравнение первого порядка

$$X \frac{\partial z}{\partial x} + Y \frac{\partial z}{\partial y} = Z, \quad (1)$$

где X, Y и Z - функции x, y и z .

1. Решение дифференциального уравнения первого порядка в частных производных.

Предварительно решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}.$$

Пусть решение этой системы определяется равенствами

$$\omega_1(x, y, z) = C_1,$$

$$\omega_2(x, y, z) = C_2.$$

Тогда общий интеграл дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$\Phi[\omega_1(x, y, z), \omega_2(x, y, z)] = 0,$$

где $\Phi(\omega_1, \omega_2)$ - произвольная непрерывно-дифференцируемая функция.

§2 Дифференциальное уравнение второго порядка

$$a \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0, \quad (2)$$

где a, b, c - функции x и y .

1. Типы дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных

Если $b^2 - ac > 0$, то уравнение (2) принадлежит гиперболическому типу.
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

каноническое уравнение гиперболического типа.

Если $b^2 - ac = 0$, то уравнение (2) принадлежит параболическому типу.
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

каноническое уравнение параболического типа.

Если $b^2 - ac < 0$, то уравнение (2) принадлежит эллиптическому типу.
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

называется **каноническое уравнение эллиптического типа.**

Задача.

Общее решение дифференциального уравнения в частных производных первого порядка $x \frac{\partial u}{\partial x} + (y-1) \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ имеет вид следующей непрерывно дифференцируемой функции...

Варианты ответов: 1) $u = F\left(\frac{2x^3}{\ln(y-1)} - 1\right)$ 2) $u = F\left(\frac{y-1}{x}\right)$ 3) $u = F(y-1-x)$ 4) $u = F\left(\frac{2x}{y-1}\right)$

Решение.

Запишем систему уравнений: $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y-1} = \frac{du}{0}$. Решая $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y-1}$, получаем $\frac{y-1}{x} = C_1$, решая $du = 0$, получаем

$u = C_2$. Общий интеграл имеет вид: $\Phi\left(\frac{y-1}{x}, u\right) = 0$, откуда $u = F\left(\frac{y-1}{x}\right)$

Ответ. №2.

Глава 18. Ряды

§1 Общие сведения

1. Ряд. Общий член ряда

Выражение вида $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_1, u_2, u_3, \dots$ - члены некоторой бесконечной последовательности, называется **рядом**, u_n называется **общим членом ряда**.

Сумма $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ называется **частичной суммой ряда**

2. Сходимость ряда. Сумма ряда

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **сходящимся**, если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, при этом число S называется **суммой ряда**.

Ряд называется **расходящимся**, если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует или бесконечен.

Задача.

Частичная сумма первых пяти членов числового ряда 11; 13; 15; ... , равна

Варианты ответов: 1) 75 2) 19 3) 47,5 4) 80

Решение.

$$S_5 = 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 75.$$

Ответ. №1.

Задача.

Общий член последовательности $1, -\frac{3}{4}, \frac{5}{9}, -\frac{7}{16}, \dots$ имеет вид...

Варианты ответов: 1) $u_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n^2}$ 2) $u_n = (-1)^n \cdot \frac{2n-1}{n^2}$ 3) $u_n = \frac{2n-1}{n^2}$ 4) $u_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n^2}$

Решение.

Из предложенных ответов не подходят №2 (так как при $n=1$ получаем отрицательное число ($u_1 < 1$)), и №3 (так как нет чередования знаков).

В формулы №1 и №4 подставляем натуральные значения n .

Если $u_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n^2}$, то $u_1 = 3$, не подходит.

Если $u_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n-1}{n^2}$, то $u_1 = 1$, $u_2 = -\frac{3}{4}$, $u_3 = \frac{5}{9}$, $u_4 = -\frac{7}{16}$, ... подходит.

Ответ. №4.

Задача.

Второй член u_2 числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 2^{2n-1}}{n}$ равен...

Решение.

$$a_2 = \frac{4 \cdot 2^{2 \cdot 2 - 1}}{2} = \frac{4 \cdot 2^3}{2} = 16.$$

Ответ. 16.

§2 Числовые ряды

3. Гармонический ряд	Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ называется гармоническим рядом. Он расходится.	Задача. Укажите сходящиеся числовые ряды. Варианты ответов: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^4}}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^7}}$
4. Обобщенный гармонический ряд	Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots \quad (p > 0)$ называется обобщенным гармоническим рядом. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $\left[\begin{array}{l} \text{при } p > 1 \text{ сходится,} \\ \text{при } p \leq 1 \text{ расходится.} \end{array} \right.$	<u>Решение.</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^4}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/5}};$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/4}};$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^7}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/7}}.$ Все ряды являются обобщенными гармоническими рядами, т.е. рядами вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. При $p > 2$ - ряд расходится, поэтому ответ №3. <u>Ответ.</u> №3.
5. Ряд геометрической прогрессии	Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$ ($a \neq 0$), называется рядом геометрической прогрессии.	Задача. Сумма числового ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ равна... Варианты ответов: 1) $\frac{1}{4}$ 2) $\frac{5}{4}$ 3) $\frac{1}{625}$ 4) $\frac{4}{5}$

	Этот ряд при 1) $q < 1$ сходится, его сумма равна $\frac{a}{1-q}$ 2) $q \geq 1$ расходится	<u>Решение.</u> Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ - ряд геометрической прогрессии. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 1 + 1 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \dots,$ $a = 1, \quad q = \frac{1}{5}, \quad S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}.$ <u>Ответ.</u> №2.
6. Необходимое условие сходимости ряда (не является достаточным)	Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то его общий член u_n стремится к нулю, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.	<u>Задача.</u> Из данных рядов выбрать те, для которых не выполняется необходимое условие сходимости ряда 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 5}{n^2}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ 4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ <u>Решение.</u> 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \left \frac{1}{\infty} \right = 0$, выполняется. 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(3 + \frac{5}{n^2}\right)}{n^2} = 3$, не выполняется. 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5^n} = \left \frac{1}{\infty} \right = 0$, выполняется. 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = \left \frac{1}{\infty} \right = 0$, выполняется.

		Ответ. №2.
§3 Знакоположительные ряды. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$		
7. Достаточные признаки сходимости ряда 7.1. Признак Даламбера	Если в ряде с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ выполняется условие $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell, \text{ то}$ 1) при $\ell < 1$, данный ряд сходится 2) при $\ell > 1$, данный ряд расходится	Задача. Из рядов а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^2 + 5n}{9n^2 - n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ сходятся... Варианты ответов: 1) только а 2) только с 3) только в и с 4) ни один не сходится 5) только в
7.2. Радикальный признак Коши	Если в ряде с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ выполняется условие $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell, \text{ то}$ 1) при $\ell < 1$, данный ряд сходится 2) при $\ell > 1$, данный ряд расходится	<u>Решение.</u> а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^2 + 5n}{9n^2 - n}$, $u_n = \frac{7n^2 + 5n}{9n^2 - n}$. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + 5n}{9n^2 - n} = \frac{7}{9} \neq 0,$ не выполняется необходимое условие сходимости, ряд расходится. б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$, $u_n = \frac{n!}{100^n}$, $u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{100^{n+1}}$.
7.3. Интегральный признак Коши	Если члены знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ могут быть представлены как числовые значения некоторой непрерывной монотонно убывающей на промежутке $[1; +\infty)$ функции $f(x)$ так, что $u_1 = f(1)$, $u_2 = f(2)$, ..., $u_n = f(n)$, ..., то: 1) $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходятся или расходятся одновременно	Исследуем по признаку Даламбера. $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot 100^n}{100^{n+1} \cdot n!} =$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1) \cdot 100^n}{100^n \cdot 100 \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{100} = \infty > 1,$ ряд расходится.

7.4. Признаки сравнения

I. Пусть даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

Если для всех n выполняется неравенство

$$u_n \leq v_n, \text{ то}$$

а) из сходимости ряда с большими членами

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ следует сходимость ряда с меньшими

членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$;

б) из расходимости ряда с меньшими членами

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, следует расходимость ряда с большими

членами $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

II. Пусть даны два знакоположительных ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Если существует конечный,

отличный от 0, предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A \quad (0 < A < \infty), \text{ то ряды } \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся или расходятся

одновременно.

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}, \quad u_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}}.$$

Исследуем по признаку сравнения.

Сравним с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}},$

$$v_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

Он сходится, как обобщенный гармонический ряд.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n}}{n\sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1.$$

Значит, ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

одновременно сходятся.

Ответ. №2.

§4 Знакочередующиеся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n, u_n > 0$		
8. Достаточный признак сходимости (признак Лейбница)	Знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ сходится, если: 1) последовательность абсолютных величин ряда монотонно убывает, т.е. $u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots$; 2) общий член ряда стремится к нулю: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. При этом сумма ряда удовлетворяет неравенствам $0 < S < u_1$.	Задача. Установите соответствие между видами сходимости и знакочередующимися рядами. 1. абсолютно сходится А) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n$ 2. условно сходится В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-1}$ 3. расходится С) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ <u>Решение.</u> А) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n, u_n = n$. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$, ряд расходится.
9. Абсолютно сходящийся ряд	Знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если ряд, составленный из модулей его членов, сходится.	В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-1}, u_n = \frac{1}{3n-1}$.
10. Условно сходящийся ряд	Знакопеременный ряд называется условно сходящимся, если сам он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.	а) $\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n-1} = 0 \\ \frac{1}{2} &> \frac{1}{5} > \frac{1}{8} > \dots > \dots \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ряд}$ сходится по признаку Лейбница.

		б) ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$. Сравним с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$, он расходится. $\frac{1}{3n-1} > \frac{1}{3n},$ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ с меньшими членами расходится, значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$ с большими членами расходится. Из п. а) и б) следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-1}$ - сходится условно. С) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ Ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ сходится как ряд геометрической прогрессии, значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ сходится абсолютно. <u>Ответ.</u> (1)↔С, (2)↔В, (3)↔А
§5 Функциональные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$		

11. Ряд, членами которого являются функции от x, называется функциональным. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$	
12. Область сходимости	Совокупность числовых значений аргумента x, при которых функциональный ряд сходится, называется областью сходимости.
13. Степенные ряды	Ряд, членами которого являются степенные функции аргумента x, называется степенным рядом. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n =$ $= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \dots$	В разложении функции $f(x)$ в ряд Тейлора $a_4 = \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}.$ В нашем случае: $f(x) = x^3 - 3, \quad f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x,$ $f'''(x) = 6, \quad f^{IV}(x) = 0, \quad a_4 = \frac{f^{(4)}(3)}{4!} = 0.$ <u>Ответ.</u> №2.
--	--

17. Разложение функции в ряд Маклорена

Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в окрестности точки $x_0 = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, то

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} x^n = f(x_0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots$$

18. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in (-\infty; \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; \infty)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots,$$

Задача.

Дана функция $f(x) = e^{3x}$, тогда первые три (отличные от нуля) члена разложения этой функции в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ имеют вид...

Варианты ответов:

- 1) $1 - 3x + 9x^2$ 2) $1 + 3x - \frac{9}{2}x^2$
 3) $1 + 3x + 9x^2$ 4) $1 + 3x + \frac{9}{2}x^2$

Решение.

Так как

$$x \in \begin{cases} [-1;1], & \text{если } \alpha \geq 0, \\ (-1;1], & \text{если } -1 < \alpha < 0, \\ (-1;1), & \text{если } \alpha \leq -1, \end{cases}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad x \in (-1;1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots, \quad x \in (-1;1]$$

$$\ln(n+1) = \ln n + 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right], \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad x \in [-1;1]$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

$$x \in [-1;1]$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; \infty)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; \infty)$$

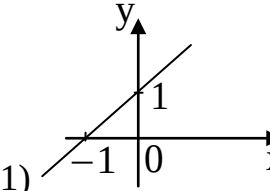
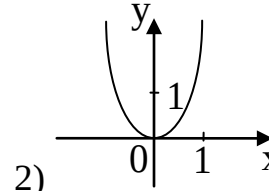
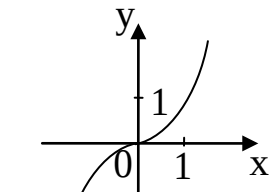
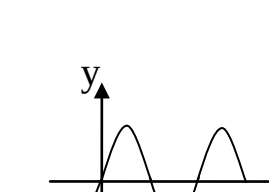
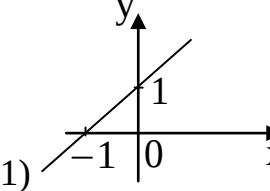
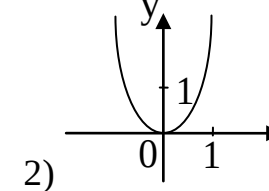
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \text{ то}$$

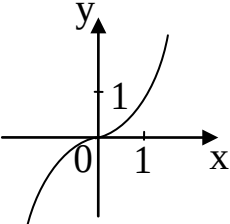
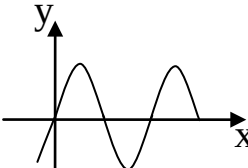
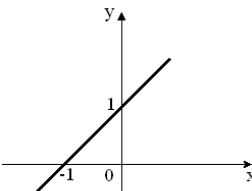
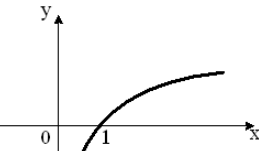
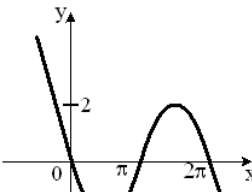
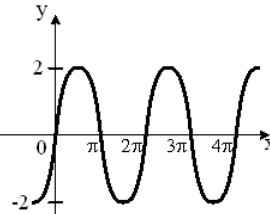
$$e^{3x} = 1 + \frac{(3x)}{1!} + \frac{(3x)^2}{2!} + \dots =$$

$$= 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \dots$$

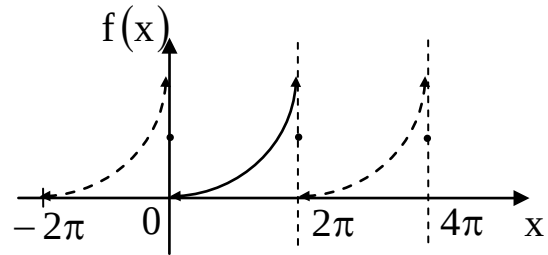
Ответ. №4.

Глава 19. Гармонический анализ

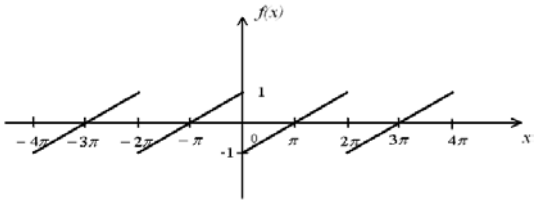
1. Четная функция	Функция $y = f(x)$, определенная на множестве D, называется четной, если для любого значения x из D выполняются условия $-x \in D \text{ и } f(-x) = f(x).$ График четной функции симметричен относительно Ox.	Задача. Укажите график четной функции. Варианты ответов:  1)  2)  3)  4) Решение. График четной функции симметричен относительно оси Oy, поэтому рис. №2. Ответ. №2.
2. Нечетная функция	Функция $y = f(x)$, определенная на множестве D, называется нечетной, если для любого значения x из D выполняются условия $-x \in D \text{ и } f(-x) = -f(x).$ График нечетной функции симметричен относительно начала координат.	Задача. Укажите график нечетной функции. Варианты ответов:  1)  2)

		 3)  4) <u>Решение.</u> График нечетной функции симметричен относительно начала координат (точки O), поэтому рис. №3. <u>Ответ.</u> №3.
3. Периодическая функция	Функция $y = f(x)$, определенная на множестве D, называется периодической на этом множестве, если существует такое число $T > 0$, что при каждом $x \in D$ значение $(x + T) \in D$ и $f(x + T) = f(x)$. При этом T называется периодом функции. Для построения графика периодической функции периода $T > 0$ достаточно построить его на любом отрезке длины T и периодически продолжить его во всю область определения. Элементарными периодическими функциями являются: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$	<u>Задача.</u> Укажите график периодической функции Варианты ответов:  1)  2)  3)  4) <u>Ответ.</u> №4. <u>Задача.</u> Периодической является функция...

		Варианты ответов: 1) $f(x) = \frac{1}{x}$ 2) $f(x) = \sqrt{x}$ 3) $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 4) $f(x) = x^2$ <u>Решение.</u> Функция, описываемая уравнением №3 является периодической. <u>Ответ.</u> №3.
4. Простые гармонические колебания	Колебания, при которых изменения физических величин происходят по закону $y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ или $y = A \cos(\omega t + \varphi_0)$, называются простыми гармоническими колебаниями. A – амплитуда колебания, $(\omega t + \varphi_0)$ – фаза колебания, ω – частота колебания, φ_0 – начальная фаза.	<u>Задача.</u> Гармонические колебания с амплитудой равной 5, частотой равной 3 и начальной фазой $\frac{2\pi}{3}$ описываются законом... <u>Решение.</u> $f(x) = 5 \cos\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right)$ <u>Задача.</u> Гармонические колебания с амплитудой D, частотой ω и начальной фазой β определяются уравнением... Варианты ответов: 1) $f(x) = D\sqrt{\omega x - \beta}$ 2) $f(x) = D(\omega x - \beta)^2$ 3) $f(x) = \frac{D}{(\omega x - \beta)}$ 4) $f(x) = D \cos(\omega x - \beta)$ <u>Ответ.</u> №4.
5. Период колебания	$T = \frac{2\pi}{\omega}$	
6. Ряд Фурье функции $f(x)$	Рядом Фурье периодической функции $f(x)$ с периодом 2π, определенной на отрезке $[-\pi; \pi]$, называется функциональный ряд	<u>Задача.</u> График функции $f(x)$ при $x \in [0; 2\pi]$ и его периодическое продолжение заданы на рисунке

	$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$ где $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$ $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx,$ $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$ Величина интегралов в данных формулах не изменится, если пределами их взять 0 и 2π. Тогда: $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$ $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx,$ $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$	 Тогда ряд Фурье для этой функции имеет вид... Варианты ответов: 1) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 2) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 3) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ <u>Решение.</u> По рисунку видно, что функция $f(x)$ - общего вида, поэтому ряд Фурье для нее имеет вид №3. <u>Ответ.</u> №3.
7. Ряд Фурье для четной функции	Ряд Фурье для четной функции содержит только свободный член и косинусы, т.е. $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad \text{где}$ $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx,$	<u>Задача.</u> Функция $y = f(x)$, заданная на отрезке $[-2; 2]$ является четной. Тогда разложение этой функции в ряд Фурье может иметь вид... Варианты ответов: 1) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{\pi nx}{2}$

	$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx,$ $b_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$	$2) f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi nx}{2} + b_n \sin \frac{\pi nx}{2}$ $3) f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi nx}{2}$ $4) f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi nx}{2}$ <u>Решение.</u> Т.к. $y = f(x)$ является четной функцией, то $b_n = 0$. Поэтому разложение этой функции в ряд Фурье может иметь вид 4. <u>Ответ.</u> №4.
8. Ряд Фурье для нечетной функции	Ряд Фурье для нечетной функции состоит только из синусов $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad \text{где } a_0 = 0, \quad a_n = 0,$ $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$	<u>Задача.</u> Дана функция $f(x) = 2x, \quad x \in [-\pi; \pi]$. Тогда коэффициент a_3 разложения $f(x)$ в ряд Фурье равен... <u>Решение.</u> Функция $f(x) = 2x$ является нечетной, поэтому коэффициент a_n равен 0. Следовательно, $a_3 = 0$. <u>Ответ.</u> 0.
9. Условия Дирихле (разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье)	1) функция $f(x)$ должна быть непрерывной в промежутке значения x от $-\pi$ до π или может иметь в указанном промежутке конечное число разрывов первого рода. 2) функция $f(x)$ должна иметь конечное число максимумов и минимумов или не иметь их совсем.	
10. Теорема Дирихле	Если функция $f(x)$ с областью существования $-\pi \leq x \leq \pi$ удовлетворяет условиям Дирихле, то	<u>Задача.</u> График периодической функции имеет вид:

	1) ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в указанном промежутке значений x; 2) сумма этого ряда равна функции $f(x)$ во всех точках ее непрерывности; 3) в каждой точке разрыва функции сумма ряда равна величине ординаты средней точки скачка графика функции; 4) при $x = \pi$ и $x = -\pi$ сумма ряда одинакова и равна $S = \frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2}.$	 $S(x)$ - сумма ряда Фурье для этой функции. Тогда сумма $S(2\pi)$ равна... <u>Решение.</u> В точке $x = 2\pi$ функция $f(x)$ терпит разрыв, поэтому $S(2\pi) = \frac{1}{2}[f(2\pi - 0) + f(2\pi + 0)] = \frac{1}{2}(1 + (-1)) = 0.$ <u>Ответ.</u> $S(2\pi) = 0.$
--	--	---

Глава 20. Теория поля

§1 Скалярное поле

1. Скалярное поле	Если каждой точке M области некоторого пространства соответствует определенное число $u = u(M)$, говорят, что в области определено скалярное поле. $u = u(M) = u(x, y, z)$	Задача. Скалярным полем является... Варианты ответов: 1) поле скоростей 2) поле силы тяжести 3) поле плотности воздуха 4) магнитное поле Решение. Скалярной функцией среди заданных является плотность воздуха, поэтому поле плотности воздуха является скалярным. Ответ. №3.
2. Линии уровня	Линия уровня скалярного поля – это линия на плоскости Oxy, в точках которой функция $u(x, y)$ сохраняет постоянное значение. $u(x, y) = C, \quad C - \text{const.}$	Задача. Построить линии уровня функции $z = x^2 + y^2$. Решение. Для того чтобы найти линии уровня данной функции, пересечем поверхность $z = x^2 + y^2$ плоскостью $z = C$. Получаем $x^2 + y^2 = C \quad (0 \leq C < +\infty)$. Задавая C различные значения, например, $C = 0, 1, 2, \dots$, получим семейство линий уровней, представляющих собой окружность. При $C = 0$ окружность вырождается в точку $(0; 0)$.
3. Поверхности уровня	Поверхностью уровня скалярного поля	

	называется геометрическое место точек в пространстве, в которых функция $u(M)$ принимает постоянное значение.	$u(x, y, z) = C, \quad C - \text{const}$
--	---	--

4. Градиент скалярного поля

Вектор, координатами которого являются значения частных производных функции $u(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$ называют **градиентом** функции.

Градиент функции указывает направление наискорейшего возрастания функции.

Наибольшая скорость изменения функции в т. М равна $|\overrightarrow{\text{grad}} u|$.

$$\overrightarrow{\text{grad}} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

$$|\overrightarrow{\text{grad}} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

Задача.

Градиентом скалярного поля $u = x^2 y^3 z$ в точке $M(-1; 1; 2)$ является вектор...

Решение.

$$\left\{ \frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z} \right\} = \{ 2xy^3z; 3x^2y^2z; x^2y^3 \};$$

подставим координаты точки $M(-1; 1; 2)$:

$$\overrightarrow{\text{grad}} u(M) = \{-4; 6; 1\} = -4\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}.$$

Ответ. $-4\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}.$

Задача.

Направление наискорейшего возрастания скалярного поля $u = x^2 y - y^2 z + xz^2$ в точке $P(1; 0; 1)$ совпадает с направлением

вектора ...

Решение.

Направление наискорейшего возрастания скалярного поля показывает градиент:

$$\overline{\text{grad}} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right\} = \{2xy + z^2; x^2 - 2yz; -y^2 + 2xz\}.$$

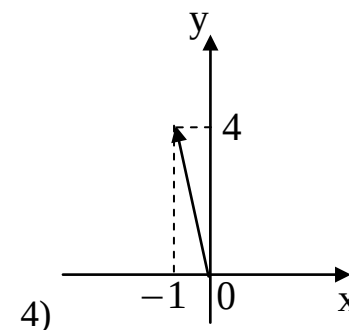
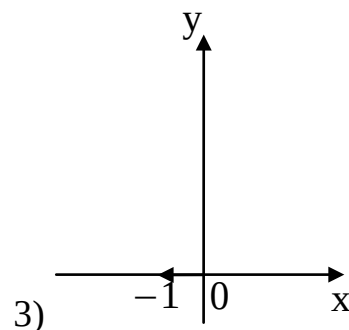
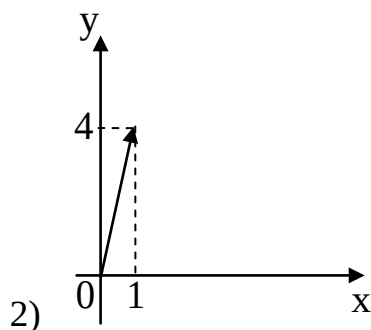
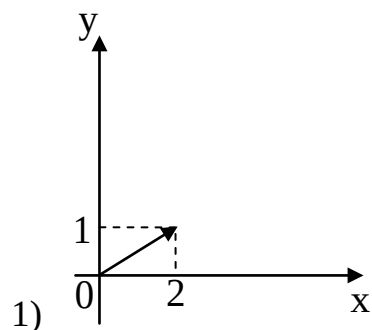
Подставим координаты точки $P(1;0;1)$: $\overline{\text{grad}} u(P) = \{1;1;2\} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

Ответ. $\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

Задача.

Укажите рисунок, на котором изображен градиент функции $u = xy + y^2 - 2x$, вычисленный в точке $A(2;1)$.

Варианты ответов:



Решение.

$$\overline{\text{grad}} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y} \right\} = \{y - 2; x + 2y\}.$$

В точке A $\overline{\text{grad}}(A) = \{-1;4\}$. Вектор $\{-1;4\}$ изображен на рис. 4).

Ответ. №4.

6. Производная скалярного поля по направлению

Производной от функции $u = u(M)$ в точке M по направлению вектора $\vec{\ell}$ называется предел

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}} = \lim_{\Delta \bar{\ell} \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta \bar{\ell}}.$$

Производная по направлению $\bar{\ell}$ характеризует скорость изменения поля в точке М по этому направлению.

Если $\frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}}(\mathbf{M}) > 0$, то функция u возрастает в направлении $\bar{\ell}$, если $\frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}}(\mathbf{M}) < 0$, то функция в направлении $\bar{\ell}$ убывает.

$\left| \frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}}(\mathbf{M}) \right|$ - мгновенная скорость изменения функции u в направлении $\bar{\ell}$ в точке М.

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

$$\text{Если } \bar{\ell} = \{\ell_1; \ell_2; \ell_3\}, \text{ то } \cos \alpha = \frac{\ell_1}{\sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2}}, \quad \cos \beta = \frac{\ell_2}{\sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{\ell_3}{\sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2}}$$

Задача.

Производная скалярного поля $u = x^2 + 3xy^2$ в точке $M(1;1)$ в направлении единичного вектора $\bar{e}\{0;1\}$ равна...

Варианты ответов: 1) 11 2) 5 3) 6 4) 1

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{e}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta. \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3y^2; \text{ в т. М } \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = 2 + 3 = 5, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6xy; \quad \text{ в т. М } \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = 6.$$

$$\cos \alpha = \frac{0}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 0; \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 1. \quad \text{Тогда } \frac{\partial u}{\partial \bar{e}} = 5 \cdot 0 + 6 \cdot 1 = 6$$

Ответ. №3.

§2 Векторное поле		
1. Векторное поле	Если каждой точке М области пространства соответствует некоторый вектор $\vec{a} = \vec{a}(M)$, то говорят, что задано векторное поле. $\vec{a} = \vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$	<u>Задача.</u> Векторным полем является... Варианты ответов: 1) поле атмосферного давления 2) поле силы тяжести 3) поле плотности воздуха 4) поле температур <u>Решение.</u> Векторной функцией среди заданных является сила тяжести, поэтому поле силы тяжести является векторным. <u>Ответ.</u> №2.
2. Дивергенция (расходимость) векторного поля	Дивергенцией (или расходимостью) векторного поля в точке М называется скаляр вида $\text{div } \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$	<u>Задача.</u> Дивергенция векторного поля $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j} + 3z\vec{k}$ равна Варианты ответов: 1) 5 2) 6 3) 7 4) 0 <u>Решение.</u> $\vec{a} = \{2x; y; 3z\}$ $\text{div } \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2 + 1 + 3 = 6$ <u>Ответ.</u> №2.
3. Ротор (вихрь) векторного поля	Ротором (или вихрем) векторного поля $\vec{a} = \{P; Q; R\}$ называется вектор, определяемый формулой $\text{rot } \vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$	$\text{rot } \vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$ $\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

4. Поток векторного поля	Потоком вектора $\vec{a}$ через поверхность σ называется интеграл по поверхности от скалярного произведения вектора поля на единичный вектор нормали к поверхности.	$\Pi = \iint_{\sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iint_{\sigma} a_n d\sigma =$ $= \iint_{\sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma =$ $= \iint_{\sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy$
5. Циркуляция	Криволинейный интеграл по замкнутому контуру L от скалярного произведения вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{dr}$, касательный к контуру L , называется циркуляцией вектора $\vec{a}$ вдоль L .	$C = \oint_L \vec{a} \cdot \vec{dr} = \oint_L P dx + Q dy + R dz$
6. Формула Остроградского – Гаусса	Поток векторного поля через замкнутую поверхность σ (в направлении внешней нормали, т.е. изнутри) равен тройному интегралу от дивергенции этого поля, взятому по объему V , ограниченному данной поверхностью.	$\iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \oiint_{\sigma} a_n d\sigma,$ $\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz =$ $= \oiint_{\sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma =$ $= \oiint_{\sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$ $\Pi = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dx dy dz$
7. Формула Стокса	Циркуляция векторного поля $\vec{a}(M)$ по замкнутому кругу L равна потоку его ротора через любую кусочно-гладкую поверхность σ , лежащую в поле вектора $\vec{a}$ и ограниченную контуром L .	$\oint_L \vec{a} \cdot \vec{dr} = \iint_{\sigma} (\operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}) d\sigma$

8. Соленоидальное векторное поле	Векторное поле $\vec{a}$ называется соленоидальным, если во всех его точках дивергенция равна нулю.	$\operatorname{div} \vec{a} = 0$
9. Потенциальное (безвихревое) векторное поле	Векторное поле $\vec{a}$ называется потенциальным (бевихревым), если во всех точках поля ротор равен нулю.	$\operatorname{rot} \vec{a} = 0$
10. Гармоническое векторное поле	Векторное поле $\vec{a}$ называется гармоническим, если оно одновременно является потенциальным и соленоидальным.	$\operatorname{div} \vec{a} = 0$ и $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$

Глава 21. Теория функции комплексного переменного

§1 Комплексные числа

Комплексное число – это выражение вида $z = x + iy$.

$x = \operatorname{Re} z$ - действительная часть комплексного числа

$y = \operatorname{Im} z$ - мнимая часть комплексного числа

$i^2 = -1$; i - мнимая единица.

Сопряженное к $z = x + iy$ - это число $\bar{z} = x - iy$

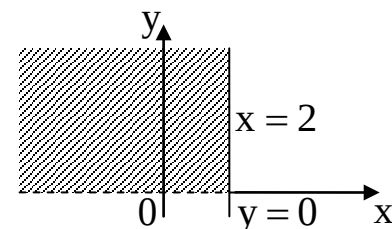
Задача.

Найти геометрический образ выражения $\operatorname{Re}(2z) \leq 4$; $\operatorname{Im} \bar{z} < 0$.

Решение.

$$z = x + iy; \quad 2z = 2x + 2iy; \quad \operatorname{Re}(2z) = 2x, \quad \bar{z} = x - iy, \\ \operatorname{Im}(\bar{z}) = -y.$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} 2x \leq 4 \\ -y < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \leq 2 \\ y > 0 \end{cases}$$



Задача.

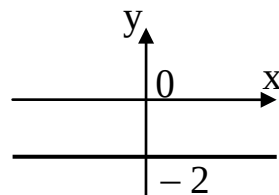
Укажите соответствие между областями и их геометрическими интерпретациями

1) $-2 \leq \operatorname{Im} z \leq 3$ 2) $\operatorname{Im} z = -2$ 3) $\operatorname{Re} z = -2$ 4) $\operatorname{Im} z = 3$

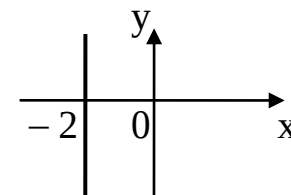
Варианты ответов:

A)

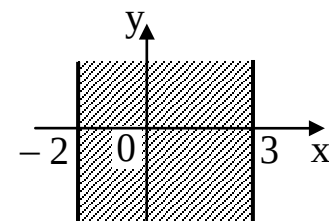
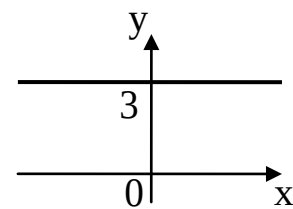
B)



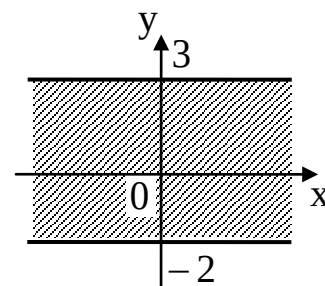
C)



D)



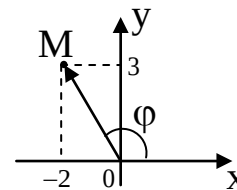
E)



Решение.

Комплексному числу $z = x + iy$ можно поставить в соответствие число $M(x; y)$

Например, $z = -2 + 3i \rightarrow M(-2; 3)$



Модуль $|z|$ комплексного числа – длина вектора $\overline{OM}$.

Модуль вычисляется по формуле $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Задача.

Модуль, равный $\sqrt{3}$, имеют комплексные числа...
(выберите несколько вариантов ответа)

- 1) $\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$
- 2) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
- 3) $-\frac{\sqrt{3}}{3} + i$
- 4) $\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$
- 5) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

Решение.

Найдем модуль каждого числа

- 1) $|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{9} = 3 \neq \sqrt{3}$
- 2) $|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq \sqrt{3}$
- 3) $|z| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + 1} = \sqrt{\frac{4}{3}} \neq \sqrt{3}$

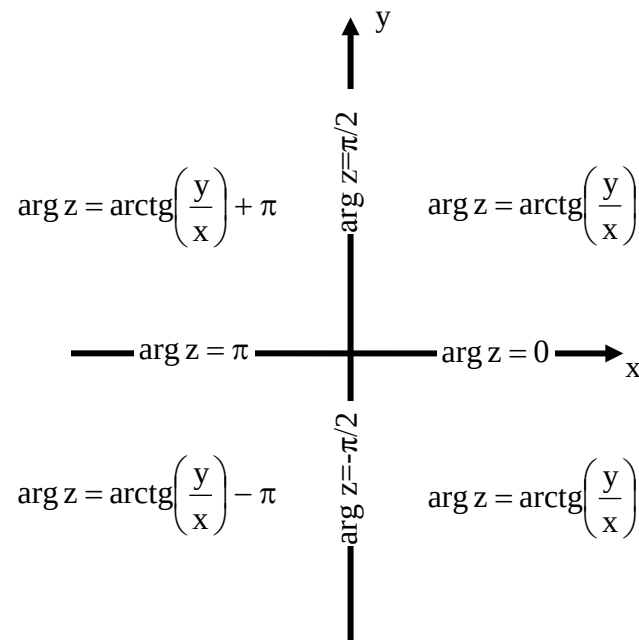
$$4) |z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{6}{4}} = \sqrt{3}$$

$$5) |z| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{3}$$

Ответ. Модуль, равный $\sqrt{3}$ имеют комплексные числа под номерами 4 и 5.

Аргумент - угол между вектором $\overline{OM}$ и осью Ox .
Вычисляется с точностью до 2π .

Главное значение аргумента $\arg z = \varphi$ вычисляется по схеме (в зависимости от значений x и y)



Задача.

Найти аргумент комплексного числа $z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$.

Решение.

$$\left. \begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{array} \right\} M(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}) \text{ лежит в III четверти}$$

$$\begin{aligned} \arg z &= \arctg\left(\frac{y}{x}\right) - \pi = \arctg\left(\frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}\right) - \pi = \arctg 1 - \pi = \\ &= \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

Итак, главное значение аргумента $\arg z = -\frac{3\pi}{4}$.

Вообще же, аргументом может быть угол $\varphi = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4}$

$$\text{или } \varphi = -\frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{11\pi}{4}.$$

$$\underline{\text{Ответ.}} \quad \arg z = -\frac{3\pi}{4}.$$

Алгебраическая форма комплексного числа

$$z = x + iy.$$

Тригонометрическая форма комплексного числа

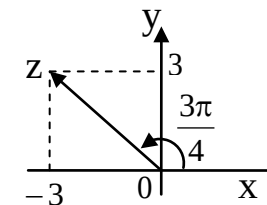
$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Показательная форма комплексного числа

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi}$$

Формула Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

Задача. На рисунке представлена геометрическая иллюстрация комплексного числа



Тогда тригонометрическая форма записи этого числа имеет вид

$$\text{Варианты ответов: 1) } \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$2) 3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \quad 3) 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$4) 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Решение.

Из чертежа видно, что

$$x = -3; \quad y = 3$$

$$\varphi = \arg z = \frac{3\pi}{4}, \quad \text{тогда} \quad |z| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Сравнивая тригонометрическую форму с предложенными вариантами ответов, приходим к выводу, что правильным ответом является №3.

Ответ. №3.

Задача.

Комплексное число $1 + i$ можно представить в виде...

$$\text{Варианты ответов: } 1) \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad 2) \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$3) \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right) \quad 4) \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Решение.

$$z = 1 + i$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{I четверть. Тогда } \arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Анализируем ответы:

$$1) \varphi = \frac{3\pi}{4} \neq \frac{\pi}{4}$$

$$2) |z| = \sqrt{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \text{ - это тригонометрическая форма числа } z = 1 + i$$

3) не является ни одной из форм комплексного числа

$$4) |z| = \sqrt{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \text{ - это показательная форма числа } z = 1 + i$$

Ответ. правильными являются ответы №2 и №4.

Задача.

Комплексное число $\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ в алгебраической форме

имеет вид...

$$1) 1 - i \quad 2) -1 + i \quad 3) 1 + i \quad 4) -1 - i$$

Решение.

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i.$$

Ответ. №3.

§2 Действия над комплексными числами ($z_1 = x_1 + iy_1$; $z_2 = x_2 + iy_2$)

1) Сумма

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

2) Разность

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

3) Произведение

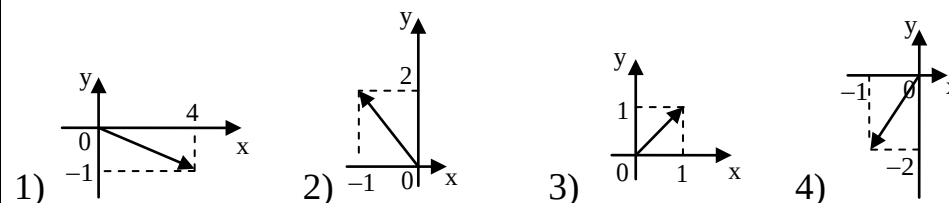
$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = \\ &= x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 - y_1y_2 = \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

4) Деление

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \\ &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

Задача.

Вектор, соответствующий сумме комплексных чисел $z_1 = -1 + 2i$ и $z_2 = 2 - i$, изображен на рисунке...



Решение.

$$z_1 + z_2 = (-1 + 2i) + (2 - i) = (-1 + 2) + i(2 - 1) = 1 + i$$

Для числа $z = 1 + i$ $x = 1$; $y = 1$.

Ответ. №3.

Задача.

Комплексное число $z = \frac{2 - 5i}{3 + i}$ равно...

1) $0,1 - 1,7i$ 2) $\frac{11}{8} - i\frac{13}{8}$

Решение.

$$\begin{aligned} z &= \frac{2 - 5i}{3 + i} = \frac{(2 - 5i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} = \frac{6 - 15i - 2i + 5(i^2)}{9 + 1} = \\ &= \frac{6 - 5 - 17i}{10} = \frac{1}{10} - \frac{17}{10}i = 0,1 - 1,7i \end{aligned}$$

Ответ. №1

Задача.

Дано комплексное число $z = 1 + \sqrt{3}i$. Установите соответствие между операциями над данным числом и результатами их

	ВЫПОЛНЕНИЯ. 1. $z \cdot \bar{z}$; 2. $\frac{\bar{z}}{ z }$; 3. $z + \bar{z}$; 4. $z - \bar{z}$. A) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ B) 2 C) $2\sqrt{3}i$ D) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ E) 4 <u>Решение.</u> 1) $z \cdot \bar{z} = (1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i) = 1 + \sqrt{3}i - \sqrt{3}i - (\sqrt{3}i)^2 = 1 + 3 = 4$ 2) $\frac{\bar{z}}{ z } = \frac{1 - \sqrt{3}i}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 3) $z + \bar{z} = (1 + \sqrt{3}i) + (1 - \sqrt{3}i) = 2$ 4) $z - \bar{z} = (1 + \sqrt{3}i) - (1 - \sqrt{3}i) = 2\sqrt{3}i$ <u>Ответ.</u> (1) ↔ E; (2) ↔ A; (3) ↔ B; (4) ↔ C
§3 Функция комплексного переменного	
<i>Элементарные функции</i> 1) $e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ 2) $\operatorname{Ln} z = \ln z + i(\varphi + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$ Главное значение логарифма, если $k = 0$ $\ln z = \ln z + i\varphi$ 3) $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ 4) $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ 5) $\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$	Задача. Найти $e^{1+i\pi}$ <u>Решение.</u> $e^{1+i\pi} = e(\cos \pi + i \sin \pi) = e(-1 + i0) = -e$ Задача. Вычислить $\operatorname{sh}\left(i \frac{\pi}{2}\right)$. <u>Решение.</u> $\operatorname{sh}\left(i \frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{i \frac{\pi}{2}} - e^{-i \frac{\pi}{2}}}{2} =$

$$6) \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$7) z^a = e^{\operatorname{Ln} z^a} = e^{a \operatorname{Ln} z}$$

$$= \frac{\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) - \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right)}{2} =$$

$$= \frac{(0 + i) - (0 - i)}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

Задача.

Образом точки $z_0 = \frac{1+i}{2}$ при отображении $W = (z - i)^2$ является

1) $1 - \frac{i}{2}$ 2) $\frac{i}{2}$ 3) $-2 - \frac{3}{2}i$ 4) $-\frac{i}{2}$

Решение.

$$W = (z - i)^2 = \left(\frac{1+i}{2} - i \right)^2 = \left(\frac{1+i-2i}{2} \right)^2 = \left(\frac{1-i}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}(1-i)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(1 - 2i + (i)^2) = \frac{1}{4}(1 - 2i - 1) = -\frac{2}{4}i = -\frac{i}{2}$$

Ответ. №4.

Задача.

Установите соответствие между функцией комплексного переменного и ее значением в точке $z_0 = 1 + 3i$

1. $f(z) = z - 1$ 2. $f(z) = 5 - 2z$ 3. $f(z) = 4z + 3$
 A) 3 B) $7 + 12i$ C) $3i$ D) $3 - 6i$ E) $3 + 6i$

Решение.

	1) $f(z) = z - 1 = (1 + 3i) - 1 = 3i$ 2) $f(z) = 5 - 2z = 5 - 2(1 + 3i) = 5 - 2 - 6i = 3 - 6i$ 3) $f(z) = 4z + 3 = 4(1 + 3i) + 3 = 4 + 12i + 3 = 7 + 12i$ <u>Ответ.</u> (1) $\leftrightarrow C$; (2) $\leftrightarrow D$; (3) $\leftrightarrow B$
§4 Дифференцируемость функции комплексного переменного	
Функция $f(z) = u(x; y) + iv(x; y)$ <i>аналитическая</i>, если $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$ Функции $y = e^z$, $y = \sin z$, $y = \cos z$, $y = \operatorname{sh} z$, $y = \operatorname{ch} z$, $y = z^n$ ($n \in \mathbb{N}$) являются аналитическими на всей комплексной плоскости Произведение, сумма, разность двух аналитических функций является аналитической функцией.	Задача. Какие из функций являются аналитическими на всей комплексной плоскости 1) $y = z^2$ 2) $g = (\bar{z})^2$ 3) $f = ix - y$ 4) $h = z^2 \cdot e^z$ <u>Решение.</u> 1) функции $y = z^2$ и $h = z^2 \cdot e^z$ являются аналитическими 2) $g = (x - iy)^2 = x^2 - 2ixy + (iy)^2 = x^2 - y^2 + i(-2xy)$. $u = x^2 - y^2 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x$ $v = -2xy \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x$ $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow g(z) \text{ не является аналитической}$ 3) $f = ix - y$ $u = -y \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ $v = x \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -1 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1$ Следовательно, $f(z)$, $y(z)$, $h(z)$ являются аналитическими
При вычислении производной используется обычная таблица производных	Задача. Найти производную $f(z) = z^5$ в точке $z = 1 + i$.

Решение.

$$f'(z) = 5 \cdot z^4$$

$$\begin{aligned} f'(1+i) &= 5 \cdot (1+i)^4 = 5 \cdot ((1+i)^2)^2 = \\ &= 5 \cdot (1+2i+i^2)^2 = 5 \cdot (1+2i-1)^2 = 5 \cdot (2i)^2 = \\ &= 5 \cdot 4 \cdot i^2 = 5 \cdot 4 \cdot (-1) = -20 \end{aligned}$$

§5 Интеграл от функции комплексного переменного

Интегральная формула Коши и следствие.

Если $z = z_0$ - внутренняя точка области D , то

$$\oint_L \frac{f(z)dz}{z - z_0} = 2\pi i \cdot f(z_0)$$

$$\oint_L \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0), \text{ где}$$

L - граница замкнутой области D ;

$f(z)$ - аналитична в $\overline{D}$

Если $z = z_0$ не лежит внутри области D , то

$$\oint_L \frac{f(z)dz}{z - z_0} = 0 \quad \oint_L \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} = 0$$

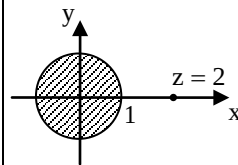
Задача.

Вычислить $\oint_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z - 2}$

Решение.

$|z| = 1$ - окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1.

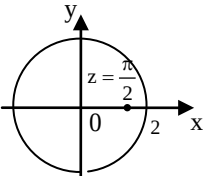
$z = 2$ не лежит внутри круга.



Следовательно, $\oint_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z - 2} = 0$.

Задача.

Вычислить $\oint_{|z|=2} \frac{\cos z dz}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2}$.

	<u>Решение.</u> $\oint_{ z =2} \frac{\cos z \, dz}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^{1+1}} = \left _{z_0 = \frac{\pi}{2}}^{n=1} \right = \frac{2\pi i}{1!} (\cos z)' \Big _{z=\frac{\pi}{2}} = 2\pi i (-\sin z) \Big _{z=\frac{\pi}{2}} =$ $= 2\pi i (-1) = -2\pi i$ 
--	--

§6 Операционное исчисление

Таблица оригиналов и изображений

$f(t)$	$F(p)$	Теоремы: Если $f(t) \leftarrow F(p)$ 1). $f(t-a) \leftarrow e^{-ap} F(p), \quad a > 0$ 2). $f(at) \leftarrow \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{p}{a}\right)$ 3). $e^{at} \cdot f(t) \leftarrow F(p-a)$ 4). $f'(t) \leftarrow pF(p) - f(0)$ $f''(t) \leftarrow p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$ $f'''(t) \leftarrow p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0)$
$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$	
t	$\frac{1}{p^2}$	
$\cos t$	$\frac{p}{p^2 + 1}$	
$\sin t$	$\frac{1}{p^2 + 1}$	
$\operatorname{ch} t$	$\frac{p}{p^2 - 1}$	
$\operatorname{sh} t$	$\frac{1}{p^2 - 1}$	

e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	5). $F^{(n)}(p) \rightarrow (-t)^n \cdot f(t)$ 6). $\int_0^t f(\tau) \leftrightarrow \frac{F(p)}{p}$ 7). $\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_p^\infty F(\rho) d\rho$ 8). $F_1(p) \cdot F_2(p) \rightarrow \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = f_1 \cdot f_2$
$\sin at$	$\frac{a}{p^2 + a^2}$	
$\cos at$	$\frac{p}{p^2 + a^2}$	
$\text{sh } at$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$	
$\text{ch } at$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$	
$e^{bt} \sin at$	$\frac{a}{(p-b)^2 + a^2}$	
$e^{bt} \cos at$	$\frac{p-b}{(p-b)^2 + a^2}$	
$e^{bt} \text{sh } at$	$\frac{a}{(p-b)^2 - a^2}$	
$e^{bt} \text{ch } at$	$\frac{p-b}{(p-b)^2 - a^2}$	
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	
$e^{at} \cdot t^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	

t sin at	$\frac{2pa}{(p^2 + a^2)^2}$	
t cos at	$\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$	
t sh at	$\frac{2pa}{(p^2 - a^2)^2}$	
t ch at	$\frac{p^2 + a^2}{(p^2 - a^2)^2}$	

Глава 22. Интерполирование

Интерполирование	Задача																												
Пусть дана таблица значений <table><tr><td>x</td><td>x₁</td><td>x₂</td><td>...</td><td>x_n</td></tr><tr><td>y</td><td>y₁</td><td>y₂</td><td>...</td><td>y_n</td></tr></table> Требуется составить полином $y = f(x)$ степени $m \leq n - 1$, график которого должен проходить через заданные точки $M_i(x_i; y_i)$. Обозначим через $\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$ вспомогательный многочлен n-й степени, в котором x_i - заданные табличные значения аргумента. Тогда $f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{y_k \cdot \varphi(x)}{\varphi'(x_k)(x - x_k)}$	x	x ₁	x ₂	...	x _n	y	y ₁	y ₂	...	y _n	Задача. Составить полином Лагранжа, удовлетворяющий таблице значений <table><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>y</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr></table> Решение. Вспомогательный многочлен имеет вид $\varphi(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$. Вычислим $\varphi'(x)$ последовательно при данных значениях x: $\varphi'(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 4) + (x - 1)(x - 3)(x - 4) + (x - 1)(x - 2)(x - 4) + (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ $\varphi'(x_1) = \varphi'(1) = -6, \quad \varphi'(x_2) = \varphi'(2) = 2, \quad \varphi'(x_3) = \varphi'(3) = -2, \quad \varphi'(x_4) = \varphi'(4) = 6.$ Тогда $f(x) = \frac{2}{-6}(x - 2)(x - 3)(x - 4) + \frac{3}{2}(x - 1)(x - 3)(x - 4) + \frac{4}{-2}(x - 1)(x - 2)(x - 4) + \frac{5}{6}(x - 1)(x - 2)(x - 3) =$ Таким образом, в данном случае интерполяционный полином есть линейная функция $f(x) = x + 1$. Это и есть интерполированный полином Лагранжа. Задача. График функции $y = f(x)$ проходит через точки <table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>y_i</td><td>5</td><td>7</td><td>11</td></tr></table> Тогда ее интерполяционный многочлен второго порядка равен... Варианты ответов: 1) $P(x) = x^2 - x + 5$ 2) $P(x) = x^2 - 3x + 7$ 3) $P(x) = x^2 - 4x + 8$ 4) $P(x) = x^2 - 2x + 6$	x	1	2	3	4	y	2	3	4	5	x _i	1	2	3	y _i	5	7	11
x	x ₁	x ₂	...	x _n																									
y	y ₁	y ₂	...	y _n																									
x	1	2	3	4																									
y	2	3	4	5																									
x _i	1	2	3																										
y _i	5	7	11																										

Решение.

Так как график функции $y = P(x)$ должен проходить через заданные точки, подставим координаты точек в каждый из многочленов.

$$1) P(x) = x^2 - x + 5$$

$$P(1) = 1^2 - 1 + 5 = 5 = y_1 \qquad P(2) = 2^2 - 2 + 5 = 7 = y_2$$

$$P(3) = 3^2 - 3 + 5 = 11 = y_3$$

Все равенства верные.

Проверив все остальные многочлены, убеждаемся, что их графики проходят не через все данные точки.

Ответ: №1.

Глава 23. Численные методы

Вычисление приближенного значения функции

$$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) \quad (*)$$

Задача.

Значение функции $y = \sqrt{x}$ в точке $x_0 + \Delta x$ можно вычислить по формуле...

Варианты ответов:

$$1) \sqrt{x_0 + \Delta x} = \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

$$2) \sqrt{x_0 + \Delta x} = \sqrt{x_0} - \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

$$3) \sqrt{x_0 + \Delta x} = \sqrt{x_0} + \frac{1}{\sqrt{x_0}} \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

$$4) \sqrt{x_0 + \Delta x} = \sqrt{x_0} - \frac{1}{\sqrt{x_0}} \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

Решение.

$$y(x_0) = \sqrt{x_0}$$

$$x = x_0 + \Delta x, \text{ тогда } y(x) = \sqrt{x} = \sqrt{x_0 + \Delta x}$$

$$\text{Найдем производную } y(x) = \sqrt{x}; \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\text{Тогда } y'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

$$x - x_0 = \Delta x$$

Подставим в формулу (*)

$$\sqrt{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot \Delta x$$

Ответ. №1

Приближенное решение уравнений

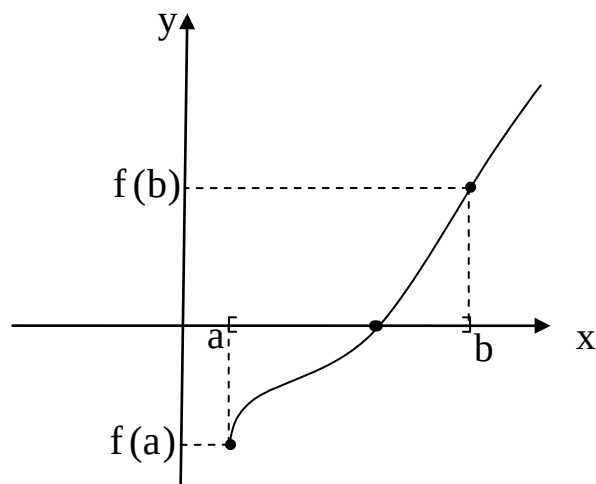
Если для уравнения $f(x) = 0$ известно, что

- 1) $f(x)$ - непрерывная функция на отрезке $[a; b]$
- 2) на отрезке $[a; b]$ уравнение имеет единственный корень.

Тогда функция $f(x)$ на концах отрезка $[a; b]$ принимает значения разных знаков, т.е.

$f(a) < 0$ и $f(b) > 0$ или наоборот $f(a) > 0$ и $f(b) < 0$.

С геометрической точки зрения.



Задача.

Действительный корень уравнения $x^3 + 3x - 2 = 0$ принадлежит интервалу...

- Варианты ответов: 1) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ 2) $\left(1; \frac{3}{2}\right)$
 3) $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ 4) $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$

Решение.

$$f(x) = x^3 + 3x - 2.$$

Рассмотрим первый интервал $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

$$f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0 - 2 = -2 < 0.$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \frac{1}{2} - 2 < 0.$$

Рассмотрим второй интервал $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

$$f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1 - 2 > 0.$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 3 \cdot \frac{3}{2} - 2 > 0.$$

Рассмотрим третий интервал $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 3 \cdot \frac{3}{2} - 2 > 0.$$

$$f(2) = 2^3 + 3 \cdot 2 - 2 > 0.$$

Рассмотрим четвертый интервал $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \frac{1}{2} - 2 < 0.$$

$$f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1 - 2 > 0.$$

Только на четвертом интервале на концах функция принимает значения разных знаков, следовательно, корень уравнения принадлежит четвертому интервалу.

Ответ. №4.

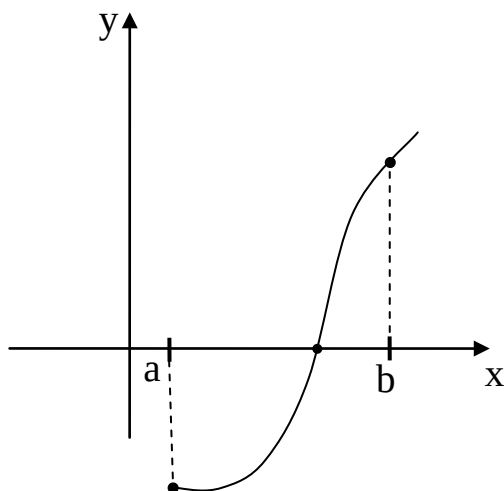
Задача.

Действительный корень уравнения $e^x + x - 1 = 0$ принадлежит интервалу...

Варианты ответов: 1) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ 2) $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$
3) $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ 4) $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

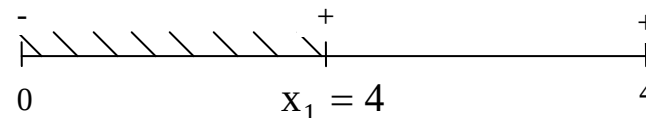
Решение.

	$f(x) = e^x + x - 1$ Рассмотрим первый интервал $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ $f\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} - 1 < 0$ $f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} - 1 > 0$ На концах отрезков функция принимает значения разных знаков. Следовательно, корень принадлежит данному интервалу. <u>Ответ.</u> №1.
Метод половинного деления Основан на утверждении: при делении отрезка пополам выбирается тот отрезок, на концах которого функция имеет разные знаки. Середина отрезка $[a; b]$ вычисляется по формуле $x = \frac{a + b}{2}$	<u>Задача.</u> Три итерации метода половинного деления при решении уравнения $x^2 - 2,4 = 0$ на отрезке $[0; 8]$ требуют последовательного вычисления значений функции $f(x) = x^2 - 2,4$ в точках... Варианты ответов: 1) $x_1 = 4, x_2 = 2; x_3 = 1$ 2) $x_1 = 4, x_2 = 1; x_3 = 2$ 3) $x_1 = 4, x_2 = 2; x_3 = 3$ 4) $x_1 = 3, x_2 = 2; x_3 = 1$ <u>Решение.</u> Найдем значения функции $f(x)$ на концах заданного отрезка $[0; 8]$. $f(0) = -2,4 < 0$ $f(8) = 8^2 - 2,4 > 0$



Середина отрезка $[0;8]$: $x_1 = \frac{0+8}{2} = 4$

Значение функции в середине $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 > 0$

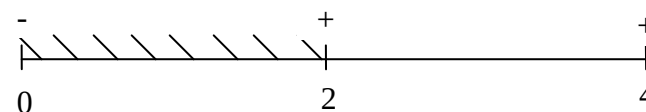


Выбираем отрезок с разными знаками. Это отрезок $[0;4]$.

Найдем середину этого отрезка $x_2 = \frac{0+4}{2} = 2$.

Значение функции в середине $f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 > 0$.

Выбираем отрезок с разными знаками. Это отрезок $[0;2]$.



Найдем середину отрезка $[0;2]$: $x_3 = \frac{0+2}{2} = 1$

Ответ. №1 $x_1 = 4, x_2 = 2; x_3 = 1$

Решение дифференциального уравнения с помощью разложения функции в степенной ряд

Степенной ряд для функции имеет вид

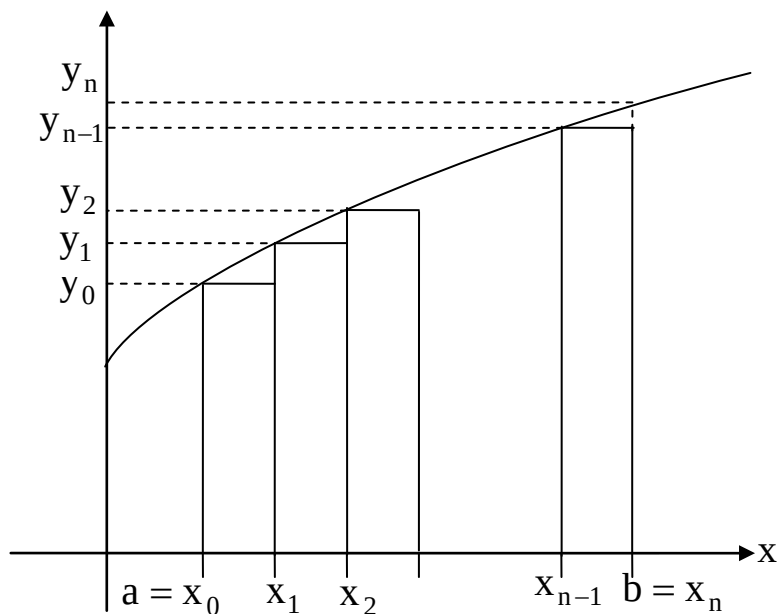
Задача.

Дано дифференциальное уравнение $y' = y^2 - x$ при $y(0) = 1$. Тогда первые три члена разложения его решения в степенной ряд имеют вид...

$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$ Если $x_0 = 0$, то $y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots \quad (**)$	Варианты ответов: 1) $1 + x + \frac{x^2}{2}$ 2) $-1 + x + \frac{x^2}{2}$ 3) $1 + x + \frac{x^5}{6}$ 4) $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ <u>Решение.</u> Из формулы (**) видно, что нужно найти $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$. По условию задачи $y(0) = 1$, т.е. $x = 0$; $y = 1$. Т.к. $y' = y^2 - x$, то $y'(0) = 1^2 - 0 = 1$. Найдем производную от обеих частей исходного уравнения $y' = y^2 - x$, получим $y'' = 2y \cdot y' - 1$. Подставим уже полученные $y = 1$, $y' = 1$. Тогда $y''(0) = 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 = 1$. Полученные значения y, y' и y'' подставим в степенной ряд (**) $y = 1 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \dots = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$ <u>Ответ.</u> №1.
Приближенное вычисление определенных интегралов С геометрической точки зрения, если на $[a; b]$ $f(x) \geq 0$, тогда $\int_a^b f(x)$ - площадь криволинейной трапеции,	<u>Задача.</u> Формула приближенного вычисления определенного интеграла, соответствующая рисунку, имеет вид...

ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox и графиком функции $y = f(x)$.

Метод прямоугольников



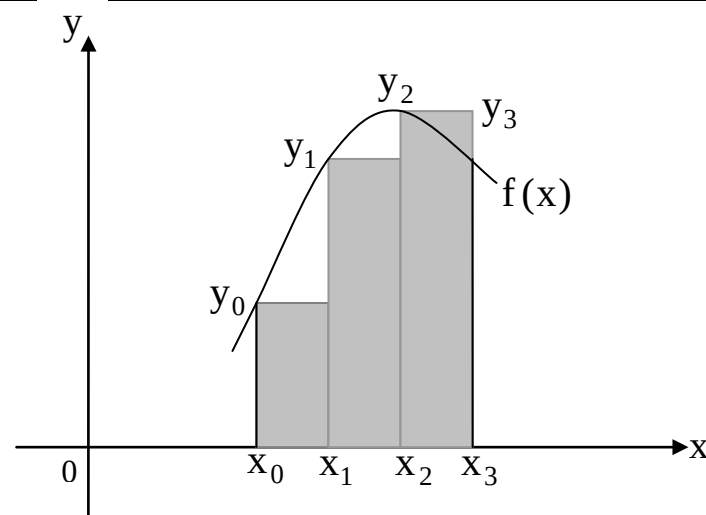
Имеют место следующие формулы

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \cdot y_0 + h \cdot y_1 + \dots + h \cdot y_{n-1} =$$

$$= h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) \quad \text{или}$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \cdot y_1 + h \cdot y_2 + \dots + h \cdot y_n =$$

$$= h(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$



Варианты ответов: 1) $\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \approx h(y_0 + y_1 + y_2 + y_3)$

2) $\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \approx h \left(y_0 + \frac{y_1 + y_2}{2} + y_3 \right)$

3) $\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \approx h(y_0 + y_1 + y_2)$

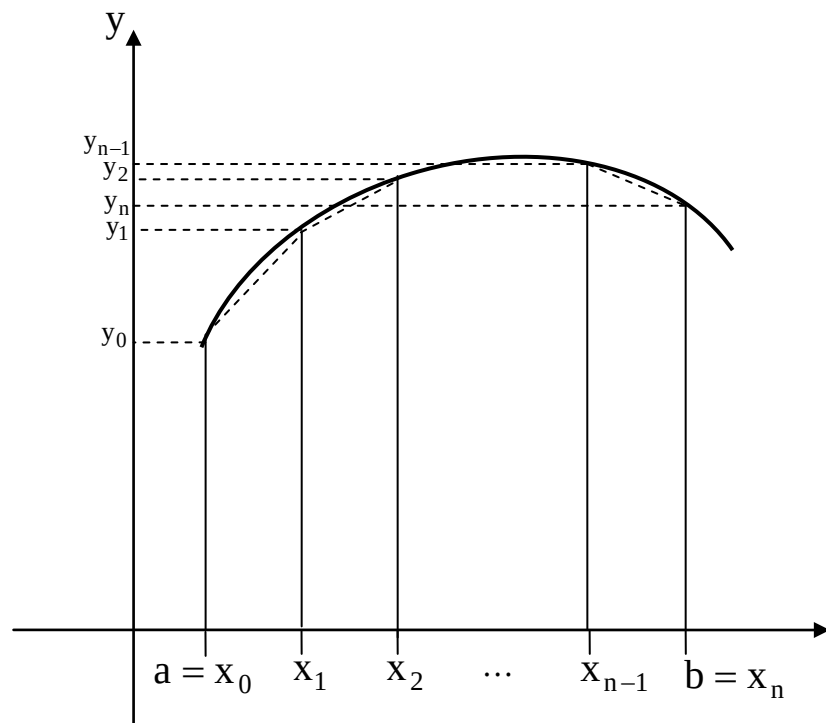
4) $\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \approx h(y_1 + y_2 + y_3)$

Решение.

Определенный интеграл приближенно равен сумме площадей заштрихованных прямоугольников

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \approx h \cdot y_0 + h \cdot y_1 + h \cdot y_2 = h \cdot (y_0 + y_1 + y_2)$$

Метод трапеций

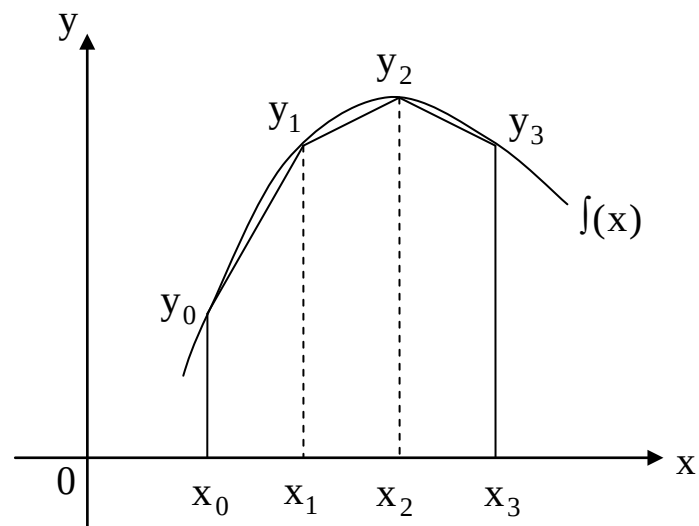


$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right)$$

Ответ. №3.

Задача.

Формула приближенного вычисления определенного интеграла, соответствующая рисунку, имеет вид...



Варианты ответов: 1) $\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \approx h \left(y_0 + \frac{y_1 + y_2}{2} + y_3 \right)$

2) $\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \approx h (y_0 + y_1 + y_2)$

3) $\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \approx h (y_1 + y_2 + y_3)$

4) $\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \approx h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \frac{y_3}{2} \right)$

Решение.

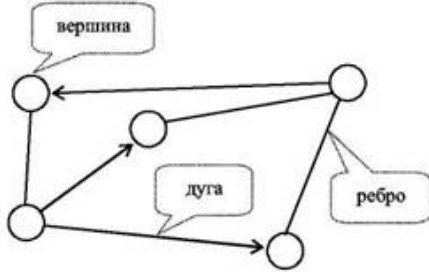
Определенный интеграл приближенно равен сумме

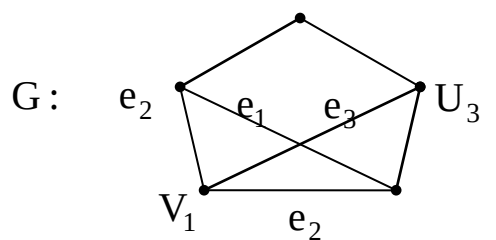
	площадей заштрихованных трапеций $\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2} \cdot h + \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot h + \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot h =$ $= h \cdot \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \frac{y_3}{2} \right)$ <u>Ответ.</u> №4.
<i>Метод Эйлера решения дифференциального уравнения</i> Решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$ можно приближенно определить в точках $x_1 = x_0 + h$; $x_2 = x_1 + h$ и т.д., где h - шаг изменения аргумента $\left. \begin{aligned} y(x_1) &\approx y(x_0) + h \cdot f(x_0; y_0) \\ y(x_2) &\approx y(x_1) + h \cdot f(x_1; y_1) \text{ и т.д.} \end{aligned} \right\}$ (***)	<u>Задача.</u> Найти, используя метод Эйлера, значения функции y, определяемой дифференциальным уравнением $y' = \frac{y-x}{y+x}$ при начальных условиях $y(0) = 1$, принимая $h = 0,1$. Ограничиться отысканием первых трех значений y. Варианты ответов: 1) $y_0 = 0$; $y_1 = 1$; $y_2 = 1,1$ 2) $y_0 = 1$; $y_1 = 1,1$; $y_2 = 1,183$ 3) $y_0 = 0$; $y_1 = 0,1$; $y_2 = 0,2$ <u>Решение.</u> 1) Из начального условия $x_0 = 0$; $y_0 = 1$. Найдем $f(x_0; y_0) = \frac{1-0}{1+0} = 1$. 2) $x_1 = 0 + h = 0 + 0,1 = 0,1$ Для вычисления y_1 воспользуемся формулой (***) $y(x_1) = 1 + 0,1 \cdot 1 = 1,1$

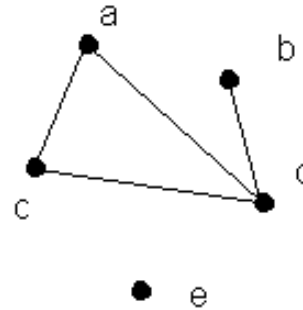
$f(x_1; y_1) = \frac{1,1 - 0,1}{1,1 + 0,1} \approx 0,8333$ $3) x_2 = x_1 + h = 0,1 + 0,1 = 0,2$ $y(x_2) \approx 1,1 + 0,1 \cdot 0,833 \approx 1,183.$ <u>Ответ.</u> №2.
--

Глава 24. Дискретная математика

§1 Теория графов

1. Определение графа	<i>Графом</i> называется совокупность двух множеств: множества точек V и множество линий E - подмножество $V \times V$. Ясно, что $E = \{(v_i, v_j) v_i, v_j \in V\}$. Множество V - множество вершин графа, E - множество ребер. Обозначение: $G=(V, E)$.  <i>Граф</i> есть упорядоченная пара (V, E), где V - непустое множество, называемое множеством вершин; E - бинарное отношение на V. Если E - неупорядоченное бинарное отношение на V (т.е. $(U \& V) \in V \& V$, то $(U \& V) = (V \& U)$), то E - множество ребер, и граф является неориентированным. <i>Ориентированный граф</i> есть упорядоченная пара (V, E), где V - множество вершин, а E - упорядоченное отношение на V (т.е. $(V \times V)$). В этом случае E называется множеством дуг. Первая и вторая вершины дуги называется соответственно начальной и конечной вершинами.
2. Отношение инцидентности	Между множествами V и E устанавливается отношение <i>инцидентности</i>: двум элементам из множества V ставится в соответствие один элемент из множества E.
3. Смежные вершины	Два ребра, инцидентные одной вершине, называются <i>смежными</i>. Задача. V_1, V_2 - смежные вершины; U_2, U_3 - не являются смежными; ребра e_1 и e_2 смежные ребра, а e_1 и e_3 нет.

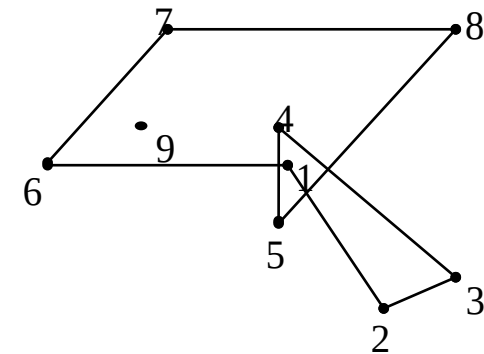
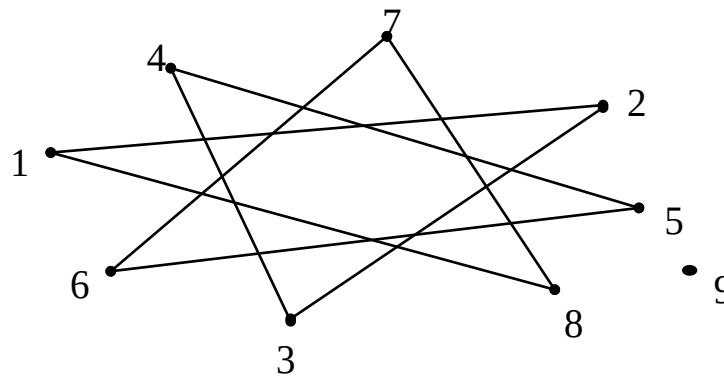
	Если два смежные различных ребра инциденты одной и той же вершине, то они называются смежными. <i>Смешные вершины.</i> Если две вершины инциденты одному ребру, то они называются <i>смежными</i>.	G: 
4. Петля	Если ребро инцидентно только одной вершине, то это <i>петля</i>. Ребро, инцидентное только одной вершине, называется петлей.	
5. Кратные ребра	Два ребра, инцидентные одной паре вершин, называются <i>кратными</i> <i>Кратность</i> пары вершин называется число соединяющих их ребер.	
6. Безреберный граф	Если множество E пустое, то граф называется <i>пустым (безреберным)</i>, все его вершины <i>голые</i>.	
7. Полный граф	Если все вершины графа попарно смежны, то граф <i>полный</i>.	
8. Дополнительный граф	Граф, дополняющий данный граф до полного, называется <i>дополнительным</i>.	
9. Ориентированный (орграф), неориентированный граф	Если ребра имеют направления, то граф <i>ориентированный</i> или <i>орграф</i>, иначе граф <i>неориентированный</i>. Геометрическая (графическая) интерпретация графа $G=(V,E)$, где множество вершин $V=\{a,b,c,d,e\}$, а множество ребер $E=\{(a,c),(a,d),(b,d),(c,d)\}$, приведена на рисунке	



Неориентированный конечный граф.

10. Изоморфные графы

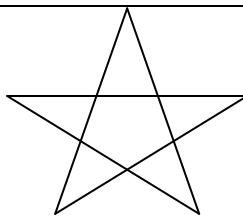
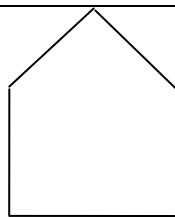
Графы, отличающиеся только нумерацией вершин, но сохраняющие при этом множества V и E и соответственные инцидентности, называются изоморфными.



Графы изоморфны

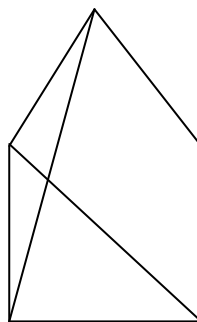
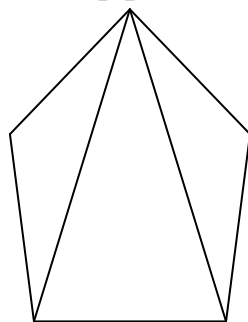
Задача.

Изоморфны ли пары графов?



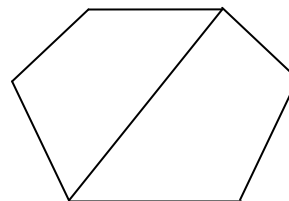
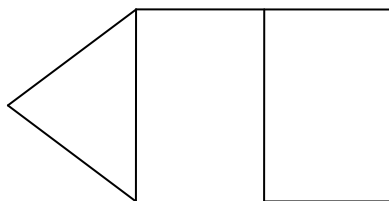
а)

а) Изоморфны. Каждый из них состоит из одного простого цикла длины 5.



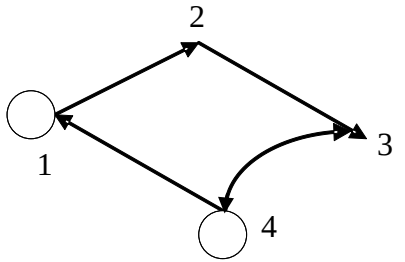
б)

б) Неизоморфны. У одного есть вершина степени 4, а у второго нет.

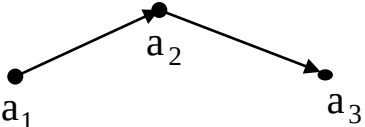


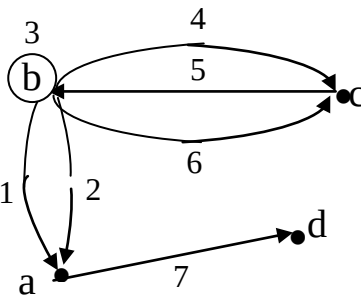
г)

г) Несмотря на полное совпадение наборов степеней вершин графы неизоморфны: в одном из них есть мост – ребро при удалении которого он теряет связность, а в другом моста нет.

11. Мультиграф. Псевдограф	Если у графа G имеется несколько дуг, исходящих из вершины a и заходящих в вершину b, то такие дуги называются кратными, а сам граф называется мультиграфом. <i>Псевдограф</i> – граф, в котором есть петли и/или кратные ребра. <i>Мультиграф</i> – псевдограф без петель.	Задача. На рисунке изображен мультиграф. Сколько исходящих дуг имеет вершина 4? Решение. Запишем вначале все дуги (исходящие и входящие), связанные с точкой 4. Это дуги: $(4; 1)$; $(4; 3)$; $(4; 4)$ и $(3; 4)$. Исходящими из точки 4 являются первые три дуги. Последняя дуга $(3; 4)$ – это входящая дуга в точку 4. Ответ. 3. 
12. Степень (валентность вершин)	Степенью (или валентностью) вершины называется суммарное количество входящих в эту вершину и выходящих из нее дуг. Если вершина изолированная, то ее степень равна нулю. Если вершина концевая, то ее степень равна единице. Степенью (валентностью) вершины называется число инцидентных ей ребер.	
13. Маршрут графа. Цепь/цикл графа	В неориентированном (ориентированном) графе последовательность из n ребер (дуг) $e_1, e_2, \dots, e_n$ называется маршрутом (ориентированным маршрутом) длины n, если существует соответствующая последовательность из $n+1$ (не обязательно различных вершин) $V_0, V_1, \dots, V_n$, таких, что e_i инцидентно $(V_{i-1} \& V_i)$, $i = \overline{1, n}$. <i>Маршрут</i> (ориентированный маршрут) называется замкнутым (незамкнутым), если $V_0 = V_n$ ($V_0 \neq V_n$). Если $e_i \neq e_j \quad \forall i, j \quad i \neq j$, то маршрут называется <i>цепью</i> (путем). Если $V_0 = V_n$, то цепь (путь) называется циклом (контуром). Если вершины различны,	

	получаем простую цепь.
14. Связный граф	Граф называется <i>связным</i> , если каждая пара вершин может быть соединена цепью.
15. Компоненты графа	Граф, который не является связным, может быть разбит на конечное число связных подграфов, называемых компонентами или частями.
16. Связность графа	<i>Связностью</i> графа называется наименьшее число вершин, удаление которых делает исходный граф несвязным.
17. Разрез графа	<i>Разрезом</i> графа называется минимальное множество ребер, удаление которых увеличивает число компонент.
18. Полный граф	Граф называется <i>полным</i> , если каждая вершина соединена ребром с каждой из всех других вершин.
На рисунке $e_1e_2e_3e_4e_2$ - маршрут; $e_1e_2e_3e_4$ - цепь; $e_1e_2e_3e_4e_8e_7$ - цикл; $e_1e_2e_3$ - простая цепь; $e_2e_3e_4$ - простой цикл; e_5 - разрез.	
19. Двудольный	Граф называется <i>двудольным</i> , если его вершины могут быть разбиты на два таких множества, что

граф	каждое ребро соединяет вершину одного множества с вершиной другого.	
20. Регулярный граф	Связный граф называется <i>регулярным</i> , если все его вершины имеют одинаковую степень.	
21. Эйлеров путь. Критерий Эйлера	Эйлеровым путем в графе G называется такой путь, в котором каждое из ребер встречается только один раз. Эйлер показал, что такой путь существует тогда и только тогда, когда граф содержит не более двух вершин нечетной степени и является связным. Эйлеров цикл существует тогда и только тогда, когда в нем все вершины четные. Теорема Эйлера. В любом конечном графе сумма степеней вершин равна <u>удвоенному числу его ребер</u>.	
22. Матрица смежности	<i>Матрица смежности</i> $M[i, j] = \begin{cases} 1, & \text{если } v_i \text{ смежна } v_j \\ 0, & \text{если } v_i \text{ не смежна } v_j \end{cases}$ данная матрица симметрична относительно главной диагонали, а главная диагональ состоит из нулей, за исключением петель.	<u>Задача.</u> Составить матрицу смежности для графа, изображенного на рисунке.  <u>Решение.</u> Граф, изображенный на рисунке $G = (A; R)$ состоит из трех ($n = 3$) вершин $A = \{a_1, a_2, a_3\}$. И двух дуг $R = \{(a_1; a_2); (a_2; a_3)\}$. Значит матрица смежности A_{ij} для нашего графа будет размером 3×3: $A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$ Поясним, как получена первая строка матрицы. Первая строка ($i = 1$) показывает связь точки a_1 с остальными

		точками: дуги (a_1, a_1), то есть петли, нет, значит 0; дуга (a_1, a_2) есть, значит 1; дуги (a_1, a_3) нет, значит – 0. Поясним вторую строку ($i = 2$). Она показывает связь точки a_2 с остальными точками: дуги (a_2, a_1) нет, значит – 0, дуги (a_2, a_2), то есть петли, нет, значит – 0; дуга (a_2, a_3) есть, значит 1. Третья строка полностью состоит из нулей, так как из точки a_3 к остальным точкам нет связи, значит нет дуг: (a_3, a_1); (a_3, a_2); (a_3, a_3). <u>Ответ.</u> $A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
23. Матрица инцидентности	<i>Матрица инцидентности</i> $M[i, j] = \begin{cases} 1, & \text{если } v_i \text{ инцидентна } e_j \\ 0, & \text{если } v_i \text{ не инцидентна } e_j \end{cases}$ в случае неориентированного графа $M[i, j] = \begin{cases} -1, & \text{если } v_i \text{ конец ребра } e_j \\ 1, & \text{если } v_i \text{ начало ребра } e_j \\ 0, & \text{если } v_i \text{ не инцидентна } e_j \end{cases}$ в случае ориентированного графа	<u>Задача.</u> Записать матрицу инцидентности для мультиграфа G, изображенного на рисунке.  <u>Решение.</u> Мультиграф, изображенный на рисунке $G = (A; R)$ - ориентирован, состоит из четырех ($n = 4$) вершин $A = \{a; b; c; d\}$ и семи ($k = 7$) дуг (на рисунке дуги дополнительно обозначены цифрами). Значит матрица будет размером $n \times k = 4 \times 7$, то есть четыре строки и семь столбцов:

		$B_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$ Поясним первую строку. Она показывает расположение всех семи дуг по отношению к точке а : дуга 1 в точку а входит, значит ставим (– 1); дуга 2 в точку а входит, значит ставим (– 1); дуги 3, 4, 5, 6 в точку а не входят и не выходят, поэтому в первой строке на месте 3, 4, 5 ,6 стоят нули; дуга 7 из точки а выходит, поэтому в первой строке на седьмом месте стоит единица. Поясним вторую строку матрицы. Она показывает расположение всех дуг по отношению к точке b: дуги 1, 2, 3, 4 и 6 выходят из точки b, поэтому во второй строке на первом, втором, третьем, четвертом и шестом местах стоят единицы. А вот дуга 5 в точку b входит, поэтому на пятом месте стоит (– 1). Дуга 7 в точку b не входит и не выходит, поэтому на седьмом месте стоит 0. Аналогично формируются третья строка (соответствующая точке с) и четвертая строка (соответствующая точке d). Предлагаем самостоятельно проанализировать эти строки.
24. Дерево	В неориентированном графе связный подграф, не имеющий циклов называется <i>деревом</i>. Если все вершины графа принадлежат дереву, то оно называется <i>покрывающим</i>.	

	Ориентированное дерево имеет корень в вершине V, если существует путь от V к каждой из других вершин. Ребра графа, принадлежащие покрывающему дереву, называются <i>ветвями</i>. Все остальные ребра называются <i>хордами</i>.
	Матрица инцидентий неориентированного графа обладает следующими очевидными свойствами: 1) в графе без петель каждый столбец этой матрицы имеет в точности две единицы, соответствующие паре вершин ребра; 2) если в графе имеются петли, то в столбцах, соответствующих петлям, имеется по одной единице, а в остальных – по две.

Глава 25. Теория вероятностей

§1 Комбинаторика

Рассмотрим множество, состоящее из n различных элементов. Число множеств, состоящих из k элементов, отбираемых из множества, содержащего n элементов

Выбор	Неупорядоченный	Упорядоченный
Без повтора	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
С повтором	$\overline{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$	$\overline{A}_n^k = n^k$

Требуется выбрать из них какие-нибудь k элементов и расположить эти k элементов в каком-либо порядке. Такие упорядоченные последовательности называются **размещениями** из n элементов по k элементов.

Если в последовательности нет одинаковых элементов, то говорят о размещении без повторений. Их количество $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Если в последовательности допускается наличие одинаковых элементов, то говорят о размещении с повторениями. Их количество $\overline{A}_n^k = n^k$

Любое подмножество (неупорядоченное), состоящее из k элементов, называется **сочетанием** из n элементов по

Задача.

В мастерской имеется материал 5 цветов. Поступил заказ на пошив флагов, состоящих из трех горизонтальных полос разного цвета каждый. Сколько таких различных флагов может сшить мастерская?

Решение.

Задача на число **размещений**, т.к. флаги отличаются друг от друга как цветом полос, так и их порядком, поэтому разных флагов можно сделать $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$ штук.

Задача.

Чемпионат, в котором участвуют 16 команд, проводится в два

k элементов. Различные сочетания отличаются друг от друга только самими входящими в них элементами, порядок их следования безразличен.

Число сочетаний без повторений $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Число сочетаний с повторениями $\bar{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$.

Количество способов переставить n элементов в заданном множестве (**количество перестановок**) вычисляется по формуле

$$P_n = n!$$

круга, т.е. каждая команда дважды встречается с любой другой. Определить, какое количество встреч следует провести.

Решение.

По условию задачи из 16 команд для каждой встречи требуется отобрать 2 команды. В данном случае отбор производится без повтора и порядок отбора не важен, т.е. число вариантов - C_{16}^2 . Так как команды должны играть дважды число вариантов удваивается, т.е. $2 \cdot C_{16}^2$.

Задача.

Количество **перестановок** букв в слове «цифра» равно...

Варианты ответов: 1) 25 2) 20 3) 120 4) 5

Решение.

Количество перестановок для n различных элементов (в данном случае - различных букв) равно n!. Таким образом, для слова «цифра» количество перестановок равно $5! = 120$.

Ответ. №3.

Задача.

Сколько различных **перестановок** можно составить из букв слова «задача»?

Решение.

Если бы все шесть букв слова были различны, то число перестановок было бы 6!. Но буква «а» встречается в данном слове три раза, и перестановки только этих трех букв «а» не дают новых способов расположения букв. Поэтому число перестановок букв слова «задача» будет не 6!, а в 3! раза меньше, то есть $\frac{6!}{3!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{3!} = 120$.

§2 Вычисление вероятности по классической формуле

Вероятность события A определяется формулой

Задача.

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих событию A ;

n – число всех возможных элементарных исходов испытания.

Предполагается, что элементарные исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу.

Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет **не более трех очков**, равна...

Варианты ответов: 1) $\frac{2}{3}$ 2) $\frac{1}{6}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) $\frac{1}{2}$

Решение.

Игральная кость содержит 6 граней, т.о. при ее бросании возможно 6 равновероятных исходов. Событие " выпадет **не более трех очков** " равносильно выпадению 1, 2 или 3 очков. Тогда по формуле классической вероятности получаем

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Ответ. №4.

§3 Геометрическое и статистическое определения вероятности

Если опыт сводится к бесконечному числу равновозможных случаев, то применяется геометрическое определение вероятности

$$P(A) = \frac{\text{mes } g}{\text{mes } G},$$

где $\text{mes } g$ равно длине отрезка, если точки множества g расположены на прямой; $\text{mes } g$ равно площади фигуры, если точки множества g расположены на плоскости; $\text{mes } g$ равно объему тела, если точки множества g расположены в пространстве.

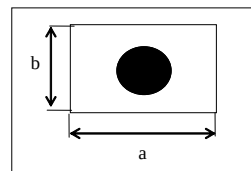
Задача.

Территория нефтебазы имеет форму прямоугольника со сторонами $a = 50$ м, $b = 30$ м. На территории имеется емкость диаметром 10 м. (см.рис.). Какова вероятность поражения емкости бомбой, попавшей на территорию нефтебазы, если попадание бомбы в любую точку равновероятное?

Решение.

Событие A - поражение емкости бомбой, попавшей на территорию нефтебазы

$P(A) = \frac{\text{mes } g}{\text{mes } G}$, где $\text{mes } g$ площадь заштрихованного круга; $\text{mes } G$ - площадь прямоугольника



$$P(A) = \frac{5^2 \cdot \pi}{50 \cdot 30} = \frac{\pi}{60}.$$

§4 Теоремы сложения и умножения вероятностей

Суммой двух событий A и B называется событие $C = A + B$, состоящее в появлении или события A , или события B , или обоих вместе. Ключевое слово «или» («либо»).

Произведением двух событий A и B называется событие $C = A \cdot B$, состоящее в совместном выполнении события A и события B . Ключевое слово «и».

Два события называются **несовместными**, если они не могут появиться одновременно.

Теорема сложения.

$P(A + B) = P(A) + P(B)$ – для несовместных событий;

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$ – для совместных событий.

Два события называются **независимыми**, если вероятность одного из них не зависит от появления или не появления другого.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B , вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Теорема умножения.

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ – для независимых событий;

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)$ – для зависимых событий.

Задача.

По оценкам экспертов вероятности банкротства для двух предприятий, производящих разнотипную продукцию, равны 0,2 и 0,35. Тогда вероятность банкротства обоих предприятий равна...

Варианты ответов: 1) 0,07 2) 0,55 3) 0,7 4) 0,52

Решение.

Рассмотрим события A - "банкротство I предприятия" и B - "банкротство II предприятия". По условию эти события независимы, тогда по **теореме о произведении** независимых событий получаем $P(AB) = P(A)P(B) = 0,2 \cdot 0,35 = 0,07$.

Ответ. №3.

Задача.

Два стрелка производят по одному выстрелу. Вероятности попадания в цель для первого и второго стрелков равны 0,9 и

0,4 соответственно. Тогда вероятность того, что в цель попадут оба стрелка, равна...

Варианты ответов: 1) 0,45 2) 0,5 3) 0,36 4) 0,4

Решение.

Рассмотрим события А - "в цель попал I стрелок" и В - " в цель попал II стрелок ". По условию эти события независимы, тогда по **теореме о произведении** независимых событий получаем $P(AB) = P(A)P(B) = 0,9 \cdot 0,4 = 0,36$.

Ответ. №3.

Задача.

Случайные события А и В - несовместны. Тогда выполнено ...

Варианты ответов: 1) $p(A)+p(B)=1$ 2) $p(A)+p(B)\leq 1$
3) $p(A+B)<1$ 4) $p(AB)=1$

Решение.

Разберем варианты ответов

1) $p(A)+p(B)=1$ - события А и В - несовместны и противоположны

2) $p(A)+p(B)\leq 1$ - события А и В - несовместны

	3) $p(A+B) < 1$ - события A и B могут быть совместны, могут быть несовместны 4) $p(AB) = 1$ - события A и B - совместны Ответ. №2.
§5 Формула полной вероятности. Формула Байеса	
Допустим, что предполагается провести опыт, об условиях которого можно сделать n исключаящих друг друга предположений (гипотез) $H_1, H_2, \dots, H_n$, причем $\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1$. Вероятность некоторого события A, которое может появиться только вместе с одной из гипотез, вычисляется по формуле $P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A)$ Эта формула носит название формулы полной вероятности. Если же событие A совершилось и необходимо найти вероятность того, что оно произошло совместно с некоторой гипотезой H_i, то необходимо воспользоваться формулой Байеса $P_A(H_i) = \frac{P_{H_i}(A) \cdot P(H_i)}{P(A)}.$	Задача. Событие A может наступить лишь при условии появления одного из двух несовместных событий B_1 и B_2, образующих полную группу событий. Известны вероятность $P(B_1) = \frac{1}{3}$ и условные вероятности $P(A/B_1) = \frac{1}{2}$, $P(A/B_2) = \frac{1}{4}$. Тогда вероятность $P(A)$ равна ... Варианты ответов: 1) $\frac{2}{3}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{3}{4}$ 4) $\frac{1}{3}$ Решение. Т.к. по условию несовместные события B_1 и B_2, образуют полную группу событий и известно, что вероятность $P(B_1) = \frac{1}{3}$, то вероятность $P(B_2) = 1 - P(B_1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Тогда по формуле полной вероятности получаем $P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}.$ Ответ. №4.
§6 Повторные испытания	

Пусть проводится n испытаний, причем выполняются следующие условия:

испытания независимы, то есть начальные условия перед каждым испытанием абсолютно одинаковы;

в каждом испытании интересующее нас событие A может произойти с вероятностью p .

Тогда вероятность того, что в n испытаниях событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), вычисляется по **формуле Бернулли**

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \text{ где } q = 1 - p$$

В случае, если n велико, то есть $npq \gg 1$ (значительно больше 1), то данную вероятность можно найти по асимптотической формуле (**локальная теорема Лапласа**):

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \text{ где } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функция $\varphi(x)$ определяется формулой

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}.$$

Таблица значений функции $\varphi(x)$ для положительных значений x приведена в приложении 1; для отрицательных значений x надо помнить, что $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Задача.

Монета брошена 4 раза. Тогда вероятность того, что орел выпадет хотя бы один раз, равна ...

Варианты ответов: 1) $1/16$ 2) $1/2$ 3) $3/4$ 4) $15/16$

Решение.

Так как в условии присутствует фраза “хотя бы один раз”, то решаем “от противного” и найдем вероятность того, что при 4 бросаниях орел не выпадет ни разу.

Применим формулу Бернулли, т.к. испытания независимы и вероятность события “выпадение орла” остается в каждом опыте неизменной и равной $1/2$.

Тогда искомая вероятность равна

$$P = 1 - C_4^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

Ответ. №4.

Задача.

В лаборатории проводится серия из 400 опытов по обнаружению микроба в растворе. Вероятность появления микроба в каждом отдельном опыте равно 0,2. Найти вероятность того, что микроб будет обнаружен в 80 опытах.

Решение.

Очевидно, что при $n = 400$ пользоваться формулой Бернулли практически невозможно из-за необходимости вычислять факториалы больших чисел. Воспользуемся **локальной теоремой Лапласа**. Итак, $n = 400$; $k = 80$;

$$p = 0,2; \quad q = 0,8; \quad x = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = \frac{0}{8} = 0.$$

Найдем значение функции $\varphi(0)$ по таблице: $\varphi(0) = 0,3989$.

В тех случаях, когда число испытаний n велико, а вероятность p мала пользуются **формулой Пуассона**:

$P_n(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где $\lambda = n \cdot p$ – среднее число появлений события в различных сериях испытаний.

Вероятность того, что в n независимых испытаниях (n велико) событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно равна

$$P_n(k_1; k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

$$\text{где } x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функция $\Phi(x)$ определяется формулой

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz. \text{ Функция Лапласа нечетная, то есть}$$

$$\Phi(-x) = -\Phi(x).$$

Последняя формула носит название **интегральной теоремы Лапласа**. Она тем точнее, чем больше значение n .

$$P_{400}(80) = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \cdot 0,3989 = 0,0498.$$

Задача.

Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равно 0,0002. Найти вероятность того, что на базу придут 3 негодных изделия.

Решение.

По условию $n = 5000$, $p = 0,0002$, $k = 3$ n – велико; p – мало. Найдем $\lambda = n \cdot p = 5000 \cdot 0,0002 = 1$.

По формуле Пуассона искомая вероятность приближенно равна $P_{5000}(3) = \frac{1^3 \cdot e^{-1}}{3!} = \frac{1}{6e} \approx 0,06$.

§7 Случайная величина и ее числовые характеристики

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять какое-либо числовое значение, заранее нам не известное.

Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Непрерывной называют случайную величину,

Задача.

Пусть X – дискретная случайная величина, заданная законом распределения вероятностей:

X	-1	5
p	0,4	0,6

Тогда математическое ожидание этой случайной величины равно...

которая может принимать все значения из некоторого промежутка.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями; его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

Существует универсальный способ задания закона распределения, который годится для случайных величин любого типа: **функцией распределения случайной величины** X называется функция $F(x)$, равная вероятности того, что X примет значение меньше, чем число x , то есть $F(x) = P(X < x)$. Иногда ее называют **интегральной функцией распределения**.

Из определения следует: $0 \leq F(x) \leq 1$ и $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

Непрерывную случайную величину можно также задать, используя другую функцию $f(x) = F'(x)$, которую называют **плотностью распределения вероятностей** (иногда ее называют **дифференциальной функцией**).

Из определения следует:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1; \quad P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Одна из числовых характеристик, фиксирующая положение случайной величины на числовой оси, то есть некоторое среднее, ориентировочное значение случайной величины, около которого группируются ее возможные значения – **математическое ожидание** $M(X)$.

Математическое ожидание вычисляется:

Варианты ответов: 1) 3,4 2) 2,6 3) 2 4) 4

Решение.

По определению $M(X) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i = (-1) \cdot 0,4 + 5 \cdot 0,6 = 2,6$.

Ответ. №2.

Задача.

Дискретная случайная величина задана законом распределения вероятностей

X	-1	2	4
P	0,1	a	b

Тогда ее математическое ожидание равно 3,3 если ...

Варианты ответов: 1) $a=0,1$; $b=0,8$ 2) $a=0,8$; $b=0,1$
3) $a=0,1$; $b=0,9$ 4) $a=0,2$; $b=0,7$

Решение.

Используем формулы $\sum_i p_i = 1$ и $M[x] = \sum_i x_i \cdot p_i$.

Составим систему

$$\begin{cases} 0,1 + a + b = 1; \\ -1 \cdot 0,1 + 2a + 4b = 3,3. \end{cases}$$

Решая ее, получаем $a=0,1$; $b=0,8$.

Ответ. №1

Задача.

График плотности распределения вероятностей $f(x)$ случайной величины приведен на рисунке.

$M(X) = \sum_i x_i \cdot p_i$ – для дискретной случайной величины;

$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$ – для непрерывной случайной величины.

Дисперсия $D(X)$ – есть характеристика рассеяния, разбросанности случайной величины около ее математического ожидания.

Дисперсия вычисляется:

$D(X) = \sum_i [x_i - M(X)]^2 \cdot p_i$ – для дискретной случайной величины;

$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 \cdot f(x) dx$ – для непрерывной случайной величины.

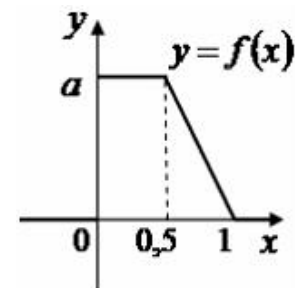
Иногда дисперсию удобно вычислять по следующей формуле: $D(X) = M(X^2) - \{M(X)\}^2$

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины, что не всегда удобно. Поэтому вводится еще одна характеристика рассеяния – **среднее квадратическое отклонение**

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1. $M(C) = C$, где $C = \text{const}$;
2. $M(CX) = C \cdot M(X)$, где $C = \text{const}$;



Варианты ответов: 1) $\frac{4}{3}$ 2) 1,2 3) 0,9 4) $\frac{3}{4}$

Решение.

Согласно свойствам функции $f(x)$, площадь фигуры, ограниченной графиком $f(x)$ и осью Ox , всегда равна 1. Вычисляем площадь трапеции

$$S = \frac{0,5 + 1}{2} \cdot a = 1 \Rightarrow a = \frac{4}{3}.$$

Ответ. №1.

3. $M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)$; 4. $M(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \dots \cdot M(X_n)$, если $X_1, X_2, \dots, X_n$ - взаимно независимые случайные величины. Дисперсия обладает следующими свойствами: 1. $D(C) = 0$, где $C = \text{const}$; 2. $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$, где $C = \text{const}$; 3. $D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n)$, если $X_1, X_2, \dots, X_n$ - независимые случайные величины.	
§8 Некоторые распределения дискретных случайных величин	
Биномиальным называют закон распределения дискретной случайной величины X – числа появлений события в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p. Возможные значения случайной величины: $0, 1, \dots, n$, а соответствующие вероятности вычисляются по формуле Бернулли: $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$ Случайная величина X, распределенная по биномиальному закону, имеет $M(X) = n \cdot p$; $D(X) = n \cdot p \cdot q$.	

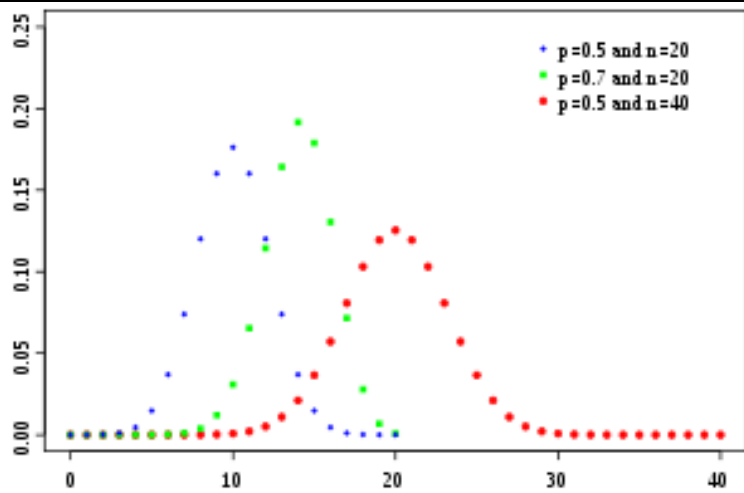


График функции плотности вероятности для биномиального распределения

Предельным для биномиального, когда число n неограниченно увеличивается (n – велико) и одновременно вероятность p неограниченно уменьшается (p – мало) является **закон Пуассона**. Возможные значения случайной величины, подчиненной закону Пуассона: $0, 1, \dots, n$, а соответствующие вероятности вычисляются по формуле:

$$P_n(k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}, \quad \text{где } \lambda = n \cdot p$$

Для данного закона распределения $M(X) = \lambda$;
 $D(X) = \lambda$.

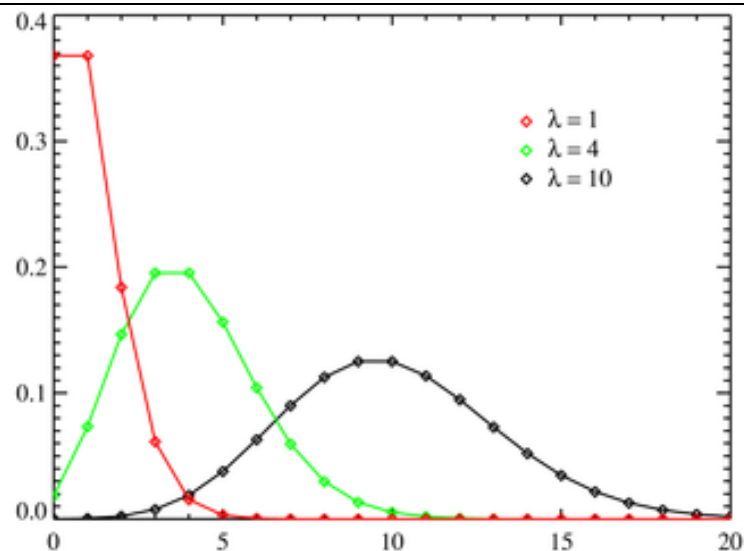


График функции плотности вероятности для закона Пуассона

Геометрическим называется закон распределения дискретной случайной величины X — числа испытаний, проводимых до тех пор, пока не наступит некоторое событие, причем вероятность появления этого события в каждом испытании остается постоянной и равна p ($0 < p < 1$). Ее возможные значения $1, 2, \dots$, а соответствующие вероятности

$$P(x = k) = q^{k-1} \cdot p.$$

Для геометрического распределения

$$M(X) = \frac{1}{p}; \quad D(X) = \frac{q}{p^2}.$$

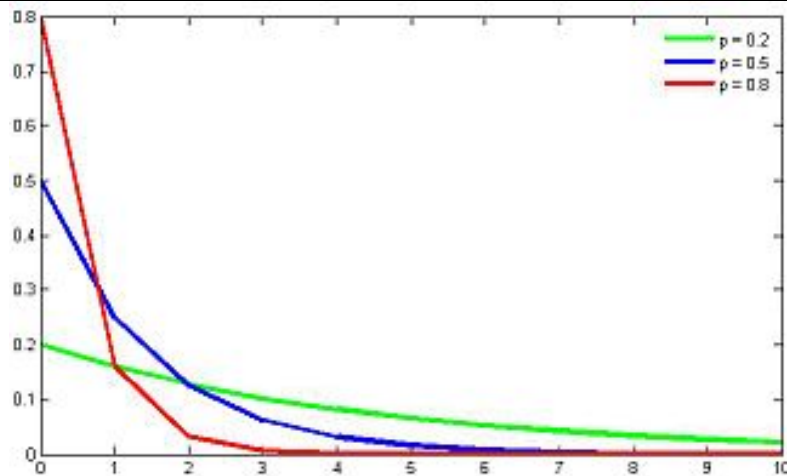


График функции плотности вероятности для геометрического распределения

Случайная величина X имеет **гипергеометрическое распределение** с параметрами a, b, n , если ее возможные значения $0, 1, \dots, a$ имеют вероятности:

$$P(X = k) = \frac{C_a^k \cdot C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}, \quad (k = 0, \dots, a).$$

Гипергеометрическое распределение возникает при следующих условиях: имеется урна, в которой a белых и b черных шаров, из нее вынимается n шаров. СВ X – число белых шаров среди вынутых.

Числовые характеристики случайной величины X , имеющей гипергеометрическое распределение, равны

$$M(X) = \frac{n \cdot a}{a + b};$$

$$D(X) = \frac{nab}{(a+b)^2} + n \cdot (n-1) \cdot \left[\frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{a+b-1} - \left(\frac{a}{a+b} \right)^2 \right].$$

Однако, для гипергеометрического распределения иногда числовые характеристики удобнее вычислять по определению.

§9 Некоторые распределения непрерывных случайных величин

Говорят, что СВ X имеет **равномерное распределение** на участке от a до b , если ее плотность $f(x)$ на этом участке постоянна, то есть

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{1}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 0, & x > b \end{cases}$$

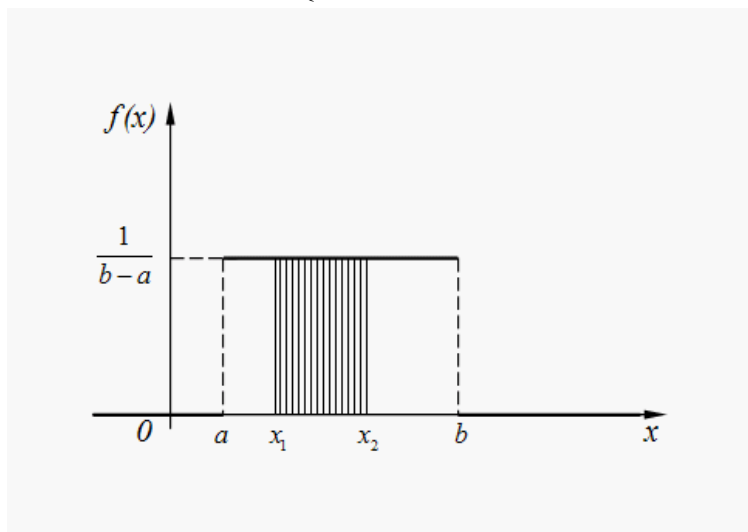


График функции плотности вероятности для равномерного распределения

Показательным (экспоненциальным) называют

распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

где λ – постоянная положительная величина. Примером непрерывной случайной величины, распределенной по показательному закону, может служить время между появлениями двух последовательных событий простейшего потока.

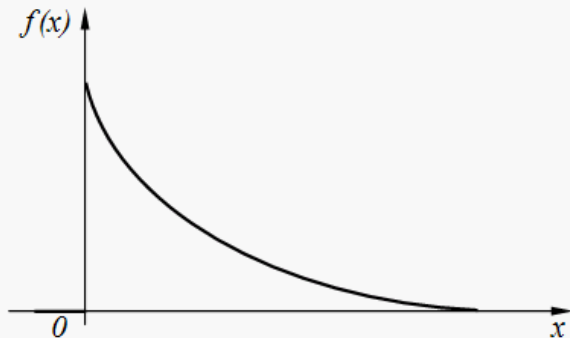


График функции плотности вероятности для показательного распределения

Часто длительность времени безотказной работы элементы T имеет показательное распределение, функция распределения которого

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad (\lambda > 0)$$

определяет вероятность отказа элемента за время длительностью t . λ – интенсивность отказов (среднее

Задача.

число отказов в единицу времени).

Нормальный закон распределения (закон Гаусса)

Плотность распределения нормального закона имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

где m – математическое ожидание,

σ – среднее квадратическое отклонение X .

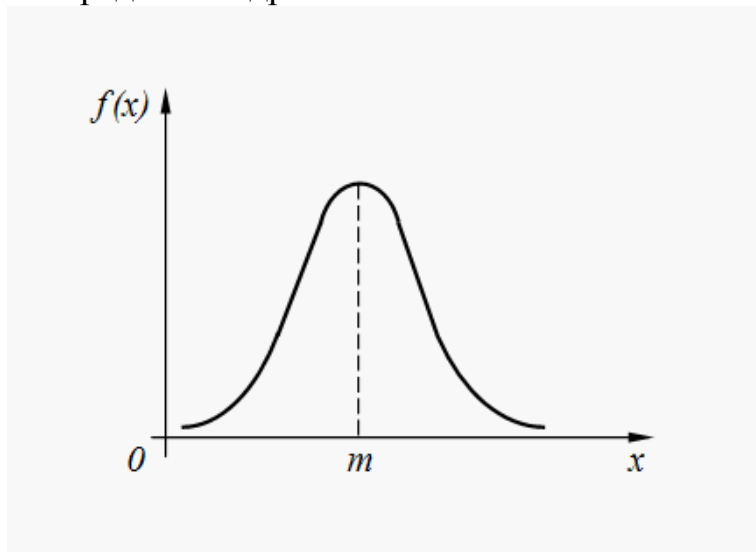


График функции плотности вероятности для нормального распределения

Вероятность того, что нормально распределенная СВ X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β) , вычисляется по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Непрерывная случайная величина X задана плотностью

распределения вероятностей $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-4)^2}{18}}$. Тогда

математическое ожидание этой нормально распределенной случайной величины равно ...

Варианты ответов: 1) 4 2) 9 3) 18 4) 3

Решение.

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Очевидно, что **нормальное распределение определяется двумя параметрами:** a и σ , где a есть математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение нормального распределения.

Поэтому $a=4$.

Ответ. №1.

Задача.

Математическое ожидание и среднее квадратического отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (12, 14).

Решение.

Для нормально распределенной величины

Вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины X от математического ожидания по абсолютной величине меньше заданного положительного числа δ , вычисляется по формуле

$$P(|X - m| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right).$$

Подставив $\alpha = 12$; $\beta = 14$; $m = 10$; $\sigma = 2$, получим

$$P(12 < X < 14) = \Phi\left(\frac{14 - 10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{12 - 10}{2}\right) = \Phi(2) - \Phi(1).$$

По таблице находим $\Phi(2) = 0,4772$; $\Phi(1) = 0,3413$.

Искомая вероятность $P(12 < X < 14) = 0,4772 - 0,3413 = 0,1359$.

§10 Функция одного случайного аргумента

Если каждому возможному значению случайной величины X соответствует одно возможное значение случайной величины Y , то Y называют **функцией случайного аргумента** X и записывают $Y = \varphi(X)$.

Рассмотрим правила для нахождения закона распределения СВ Y по известному закону распределения СВ X .

Пусть аргумент X - дискретная случайная величина, с законом распределения:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Если различным значениям СВ X соответствуют различные значения СВ Y , то вероятности соответствующих значений равны; если же различным значениям СВ X соответствуют значения СВ Y , среди которых есть равные между собой, то следует складывать вероятности повторяющихся значений Y .

Задача.

Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[1, 3]$. Тогда случайная величина $Y = 3X + 1$ имеет...

Варианты ответов:

- 1) нормальное распределение на отрезке $[3, 9]$
- 2) равномерное распределение на отрезке $[4, 10]$
- 3) другой (кроме равномерного и нормального) вид распределения
- 4) нормальное распределение на отрезке $[4, 10]$

Решение.

Т.к. линейное преобразование переменной не изменяет закона распределения случайной величины, а лишь изменяет область определения, то выбираем ответ №2.

Ответ. №2.

Задача.

Дискретная случайная величина X задана законом распределения

Математическое ожидание функции

$$M(Y) = M(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) p_i.$$

Пусть аргумент X - непрерывная случайная величина, заданная плотностью распределения $f(x)$.

Если функция $y = \varphi(x)$ - дифференцируемая строго монотонная, обратная функция которой $x = \psi(y)$, то плотность распределения $g(y)$ случайной величины Y находится по формуле

$$g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)|.$$

Если функция $y = \varphi(x)$ в интервале возможных значений X не монотонна, то следует разбить этот интервал на такие интервалы, в которых функция $\varphi(x)$ монотонна, и найти плотности распределений $g_i(y)$ для каждого из интервалов монотонности, а затем представить $g(y)$ в виде суммы $g(y) = \sum g_i(y)$.

Например, если функция $\varphi(x)$ монотонна в двух интервалах, в которых соответствующие обратные функции равны $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$, то

$$g(y) = f[\psi_1(y)] \cdot |\psi_1'(y)| + f[\psi_2(y)] \cdot |\psi_2'(y)|$$

Математическое ожидание и дисперсия функции непрерывного случайного аргумента $y = \varphi(x)$

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot g(y) dy \text{ или}$$

$$M(Y) = M(\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cdot f(x) dx$$

X	- 1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,4	0,3

Найти закон распределения случайной величины $Y = X^2 + 3$ и ее математическое ожидание.

Решение.

Найдем возможные значения Y :

$$(-1)^2 + 3 = 4; 0^2 + 3 = 3; 1^2 + 3 = 4; 2^2 + 3 = 7.$$

Возможному значению $Y = 4$, соответствуют возможные значения $X = -1$ и $X = 1$, поэтому $P(Y = 4) = P(X = -1) + P(X = 1) = 0,1 + 0,4 = 0,5$. Вероятности возможных значений

$$P(Y = 3) = P(X = 0) = 0,2; P(Y = 7) = P(X = 2) = 0,3.$$

Итак, искомый закон распределения функции

Y	3	4	7
P	0,2	0,5	0,3

$$M(y) = ((-1)^2 + 3) \cdot 0,1 + (0^2 + 3) \cdot 0,2 + (1^2 + 3) \cdot 0,4 + (2^2 + 3) \cdot 0,3 = 3 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,5 + 7 \cdot 0,3 = 0,4 + 0,6 + 1,6 + 2,1 = 4,7.$$

Задача.

Дана нормально распределенная случайная величина X с $m = 0$ и $\sigma = 1$. Найти закон распределения СВ $Y = -X + 2$.

Решение.

$$\text{По условию задачи } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Так как $Y = -X + 2$, то $\varphi(x) = -x + 2$. Найдем для $\varphi(x)$ обратную функцию $\psi(y) = x = 2 - y$; $\psi'(y) = -1$. Тогда

$$D(Y) = D(\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) \cdot f(x) dx - [M(\varphi(x))]^2.$$

плотность распределения случайной величины Y будет иметь вид

$$g(y) = f(2-y) \cdot |-1|; \quad g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(2-y)^2}{2}}.$$

Глава 26. Математическая статистика

§1 Выборка. Статистический ряд. Эмпирический закон распределения. Полигон и гистограмма

Выборочной совокупностью (выборкой) называется совокупность случайно отобранных однородных объектов.

Генеральной совокупностью называется совокупность всех однородных объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называется число объектов этой совокупности.

Способы отбора выборки:

1. Отбор, не требующий расчленения генеральной совокупности на части:

- а) простой случайный бесповторный;
- б) простой случайный повторный.

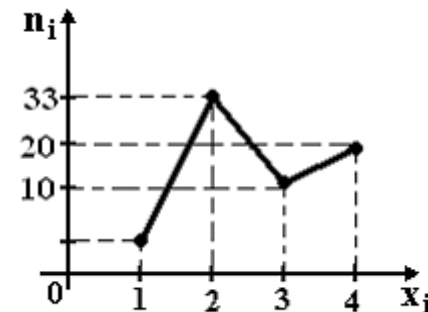
2. Отбор, при котором генеральная совокупность разбивается на части (если объем генеральной совокупности слишком большой):

а) типический отбор. Объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из ее «типичных» частей. Например, цех из тридцати станков производит одну и ту же деталь. Тогда отбор делается по одной или по две детали с каждого станка в случайные моменты времени;

б) механический отбор. Например, если нужно выбрать 5% деталей, то выбирают не случайно, а каждую двадцатую деталь;

Задача.

Из генеральной совокупности извлечена **выборка** объема $n=70$, полигон частот которой имеет вид



Тогда число вариант $x_i=1$ в выборке равно...

Варианты ответов: 1) 8 2) 6 3) 7 4) 70

Решение.

По определению объем выборки есть сумма частот всех вариант выборки. Тогда $n_1+10+20+33=70$, следовательно $n_1=7$.

Ответ. №3.

в) серийный отбор. Объекты выбирают не по одному, а сериями.

Итак, пусть из генеральной совокупности значений некоторого количественного признака произведена выборка объема N:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}.$$

Таблица вида

Таблица 1

№	1	2	3	...	N
X	x_1	x_2	x_3	...	x_N

называется **простым статистическим рядом**, являющимся первичной формой представления статистического материала.

Из данных таблицы 1 находят $x_{\min}$ и $x_{\max}$, соответственно наименьшее и наибольшее значения выборки. Затем данные таблицы 1 называемые **вариантами**, располагают в порядке возрастания. Тогда выборка $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$, записанная в порядке возрастания, называется **вариационным рядом**.

Размах выборки – это длина основного интервала $[x_{\min}; x_{\max}]$, в который попадают все значения выборки.

Вычисляется размах выборки следующим образом:

$$d = x_{\max} - x_{\min}.$$

Затем по формуле

$$k = 1 + 4 \cdot [\lg N], \quad (1)$$

где $[\lg N]$ - целая часть числа $\lg N$, определяется число k . Данное число задает количество подынтервалов (классов), на которые разбиваем основной интервал. Длины h подынтервалов и их границы $a_i (i = \overline{0, k})$ вычисляются по

$$\text{формулам } h = \frac{d}{k}, \quad (2)$$

$$a_0 = x_{\min}; \quad a_1 = a_0 + h; \dots; a_i = a_{i-1} + h; \dots; a_k = a_{\max}. \quad (3)$$

Далее находятся частоты $m_j (j = \overline{1, k})$ и

относительные частоты $\mu_j = \frac{m_j}{N} (j = \overline{1, k})$ попадания

значений выборки X в j -й подынтервал. Причем для

частот должно выполняться равенство $\sum_{j=1}^k m_j = N$, а для

относительных частот соответственно $\sum_{j=1}^k \mu_j = 1$.

Результаты проведенных расчетов сводятся в таблицы:

Таблица 2

x	$[a_0; a_1)$	$[a_1; a_2)$	$\dots$	$[a_{k-1}; a_k]$
m	m_1	m_2	$\dots$	m_k

Таблица 3

x	$[a_0; a_1)$	$[a_1; a_2)$	...	$[a_{k-1}; a_k]$
μ	μ_1	μ_2	...	μ_k

Далее находятся середины подынтервалов:

$$b_1 = \frac{a_1 + a_0}{2}; \quad b_2 = \frac{a_2 + a_1}{2}; \quad \dots; \quad b_k = \frac{a_k + a_{k-1}}{2}$$

и после этого составляется еще одна таблица (таблица 4), которая называется **статистическим рядом распределения**. Статистический ряд распределения является оценкой теоретического ряда распределения и сходится к нему по вероятности. Поскольку ряд распределения является одной из форм задания закона распределения дискретной случайной величины, то мы получили **эмпирический** закон распределения исследуемой дискретной случайной величины.

Таблица 4

x	b_1	b_2	...	b_k
μ	μ_1	μ_2	...	μ_k

Гистограммой относительных частот называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные подынтервалы

Задача.

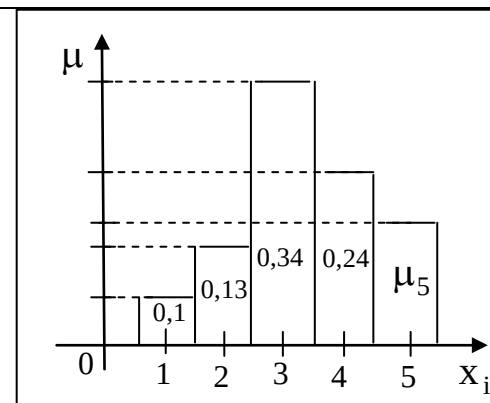
Выборка задана в виде гистограммы относительных частот. Найти относительную частоту μ_5 .

Варианты ответов: 1). 0,19 2). 0,18
3). нет правильного ответа 4). 0,2 5). 0,17

длины h , а высоты равны числам μ_j/h (плотности вероятностей) ($j = \overline{1, k}$). Аналогичным образом, по данным таблицы 2 строится гистограмма частот.

Для построения полигона относительных частот используются данные таблицы 4. В декартовой системе координат на оси OX находятся $x_{\min}$ и $x_{\max}$, то есть изображаются границы основного интервала. Затем наносятся значения середин подынтервалов b_j ($j = \overline{1, k}$). По оси OY откладываются значения, соответствующие относительным частотам μ_j ($j = \overline{1, k}$).

Полигоном относительных частот называется ломаная, отрезки которой соединяют точки $(b_1; \mu_1)$; $(b_2; \mu_2)$; ... ; $(b_k; \mu_k)$. Полигон относительных частот есть визуальное представление эмпирического закона распределения выборки.



Решение.

Как известно, площадь гистограммы относительных частот должна равняться 1. Поэтому $\mu_5 = 1 - 0,1 - 0,13 - 0,34 - 0,24 = 0,19$.

Ответ. №1

§2 Статистические оценки генеральных параметров.

Точечные и интервальные оценки для математического ожидания и дисперсии

Пусть θ_r - некоторый параметр генеральной совокупности, который невозможно вычислить. Но знать его значение (хотя бы приближенное, оценочное) надо. Поэтому по выборочным данным производят расчет статистических оценок данного генерального параметра.

Оценки параметров подразделяются на точечные и интервальные.

Точечной называется статистическая оценка генерального параметра θ_{Γ} , определяемая одним числом. **Интервальной** называется статистическая оценка генерального параметра θ_{Γ} , которая определяется двумя числами $\tilde{\theta}_B$ и $\tilde{\theta}_B$ - концами интервала, покрывающего оцениваемый генеральный параметр θ_{Γ} .

Несмещенной называют такую точечную оценку θ_B , математическое ожидание которой равно оцениваемому генеральному параметру при любом объеме выборки, то есть

$$M[\theta_B] = \theta_{\Gamma}. \quad (4)$$

Если равенство (4) нарушается, то в этом случае оценки θ_B называется **смещенной**.

Эффективной называется точечная оценка θ_B , которая (при заданном) объеме выборки) имеет наименьшую возможную дисперсию, то есть

$$M[(\theta_B - \theta_{\Gamma})^2] \Rightarrow \min. \quad (4a)$$

Состоятельной называется точечная оценка θ_B , которая (с увеличением объема выборки) стремится по вероятности к оцениваемому параметру θ_{Γ} , то есть для любого достаточно малого $\delta > 0$

Задача.

Точечная оценка математического ожидания нормального распределения равна 10. Тогда его **интервальная оценка** может иметь вид ...

Варианты ответов: 1) (8, 5; 11,5) 2) (8,6; 9,6)
3) (10; 10,9) 4) (8,4; 10)

Решение.

Согласно определения, интервальная оценка есть интервал, **содержащий** оцениваемый параметр. Данному утверждению соответствует лишь ответ №1.

Ответ. №1.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(|\theta_{\Gamma} - \theta_B| < \delta) = 1. \quad (46)$$

Несмещенной оценкой генеральной средней (генерального математического ожидания $M_{\Gamma}[X]$) служит выборочная средняя (**выборочное математическое ожидание**):

$$M_B[X] = \sum_{j=1}^k b_j \cdot \mu_j, \quad (5)$$

где $b_j, \mu_j (j = \overline{1, k})$ - варианты и их относительные частоты. Кроме того, $M_B[X]$ является состоятельной оценкой. Если случайная величина X подчинена нормальному закону распределения, то $M_B[X]$ является и эффективной оценкой.

Смещенной оценкой генеральной дисперсии $D_{\Gamma}[X]$ служит **выборочная дисперсия**:

$$D_B[X] = \sum_{j=1}^k (b_j - M_B[X])^2 \cdot \mu_j, \quad (6)$$

где $M_B[X]$ - рассчитывается по формуле (5), b_j, μ_j -

Задача.

Дана выборка объема n . Если каждый элемент выборки увеличить в 5 раз, то **выборочное среднее** $\bar{x}$...

Варианты ответов: 1) увеличится в 25 раз 2) уменьшится в 5 раз
3) не изменится 4) увеличится в 5 раз

Решение.

Выборочная средняя:

$$\bar{x} = M_B[X] = \sum_{j=1}^k x_j \cdot \frac{m_j}{N} = \sum_{j=1}^k x_j \cdot \mu_j.$$

Поэтому, если каждый элемент выборки увеличить в 5 раз, то выборочное среднее $\bar{x}$

$$\sum_{j=1}^k (x_j \cdot 5) \cdot \frac{m_j}{N} = 5 \sum_{j=1}^k x_j \cdot \mu_j = 5 \cdot \bar{x},$$

т.е увеличится в 5 раз.

Ответ. №4.

Задача.

Для выборки объема $n = 10$ вычислена **выборочная дисперсия** $D_B = 180$. Тогда исправленная дисперсия S^2 для этой выборки равна ...

Варианты ответов: 1) 324 2) 200 3) 162 4) 400

Решение.

Поскольку $D_B[X]$ является смещенной оценкой, то ее

данные из таблицы 4.

Иногда удобнее пользоваться другой формулой для вычисления выборочной дисперсии:

$$D_B[x] = \sum_{j=1}^k b_j^2 \cdot \mu_j - (M_B[x])^2. \quad (6a)$$

Замечание. Поскольку $D_B[x]$ является смещенной оценкой, то ее «исправляют» следующим образом:

$$\sigma_B^2 = \frac{N \cdot D_B[x]}{N-1}. \quad (7)$$

Полученная оценка σ_B^2 - это состоятельная несмещенная выборочная дисперсия, а σ_B - выборочное среднее квадратичное отклонение.

При выборке малого объема ($N < 30$) точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого генерального параметра, то есть приводит к грубым ошибкам. Поэтому при небольшом объеме выборки следует пользоваться интервальными оценками.

Пусть найденная (по данным выборки) статистическая оценка θ_B является оценкой неизвестного генерального параметра θ_Γ . Ясно, что θ_B тем точнее определяет θ_Γ , чем меньше значение разности $|\theta_\Gamma - \theta_B|$. То есть при $|\theta_\Gamma - \theta_B| < \delta$ ($\delta > 0$) чем меньше δ , тем оценка θ_Γ точнее. Значит, положительное число δ характеризует

«исправляют» следующим образом: $s_B^2 = \frac{N \cdot D_B[x]}{N-1}$. Тогда

$$s_B^2 = \frac{10 \cdot 180}{10-1} = 200.$$

Ответ. №2.

Задача.

В результате измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 11, 13, 15. тогда **несмещенная оценка дисперсии** измерений равна ...

Варианты ответов: 1) 4 2) 3 3) 8 4) 0

Решение.

Несмещенной оценкой генеральной средней (математического ожидания $M_\Gamma[x]$) служит выборочная средняя:

$$M_B[x] = \sum_{j=1}^k x_j \cdot \frac{m_j}{N} = \sum_{j=1}^k x_j \cdot \mu_j.$$

Смещенной оценкой генеральной дисперсии $D_\Gamma[x]$ служит выборочная дисперсия:

$$D_B[x] = \sum_{j=1}^k x_j^2 \cdot \mu_j - (M_B[x])^2,$$

Замечание. Поскольку $D_B[x]$ является смещенной оценкой, то ее «исправляют» следующим образом:

$$\sigma_B^2 = \frac{N \cdot D_B[x]}{N-1}.$$

точность оценки.

Надежностью (доверительной вероятностью) оценки $\theta_{\text{в}}$ называется вероятность γ , с которой осуществляется событие $|\theta_{\text{г}} - \theta_{\text{в}}| < \delta$, то есть

$$\gamma = P(|\theta_{\text{г}} - \theta_{\text{в}}| < \delta). \quad (8)$$

Обычно надежность оценки (доверительная вероятность γ) задается. Причем в качестве γ берут число, близкое к единице (0,95; 0,99; 0,999).

Доверительным называется интервал, который с заданной надежностью γ покрывает оцениваемый генеральный параметр. В соотношении (8), если раскрыть модуль, получается $P(-\delta < \theta_{\text{г}} - \theta_{\text{в}} < \delta) = \gamma$ или $P(\theta_{\text{в}} - \delta < \theta_{\text{г}} < \theta_{\text{в}} + \delta) = \gamma$.

Тогда интервал $(\theta_{\text{в}} - \delta; \theta_{\text{в}} + \delta)$ и есть доверительный интервал. Из общих соображений ясно, что длина доверительного интервала будет зависеть от объема выборки N и доверительной вероятности γ .

Для оценки математического ожидания $M_{\text{г}}[X]$ нормально распределенной генеральной совокупности X по выборочной средней $M_{\text{в}}[X]$ при известном среднем квадратическом отклонении $\sigma_{\text{г}} = \sqrt{D_{\text{г}}[X]}$ служит доверительный интервал:

$$M_{\text{в}}[X] - t \cdot \frac{\sigma_{\text{г}}}{\sqrt{N}} < M_{\text{г}}[X] < M_{\text{в}}[X] + t \cdot \frac{\sigma_{\text{г}}}{\sqrt{N}}, \quad (9)$$

Полученная оценка $\sigma_{\text{в}}^2$ – это несмещенная дисперсия, а $\sigma_{\text{в}}$ – выборочное среднее квадратическое отклонение.

Таким образом,

$$M_{\text{в}}[x] = \sum_{j=1}^k x_j \cdot \frac{m_j}{N} = \frac{11+13+15}{3} = 13,$$

$$\sigma_{\text{в}}^2 = \frac{N \cdot D_{\text{в}}[x]}{N-1} = \frac{N}{N-1} \left(\sum_{j=1}^k x_j^2 \cdot \mu_j - (M_{\text{в}}[x])^2 \right) =$$

$$= \frac{3}{3-1} \left(\frac{11^2 + 13^2 + 15^2}{3} - 13^2 \right) = 4$$

Ответ. №1.

Задача.

Мода вариационного ряда 1, 4, 4, 5, 6, 8, 9 равна...

Варианты ответов: 1) 5 2) 1 3) 9 4) 4

Решение.

По определению, мода есть варианта имеющая наибольшую частоту. В данном случае это есть варианта 4, т.к. она повторяется два раза, а все остальные - лишь по 1 разу.

Ответ. №4.

где $t \cdot \frac{\sigma_{\Gamma}}{\sqrt{N}} = \delta$ - точность оценки; N - объем выборки; t - такое значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$, при котором $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$.

Для оценки математического ожидания $M_{\Gamma}[x]$ нормально распределенной генеральной совокупности X по выборочной средней $M_{\text{в}}[x]$ при неизвестном среднем квадратическом отклонении $\sigma_{\Gamma} = \sqrt{D_{\Gamma}[x]}$ (при объеме выборки $N > 30$) служит доверительный интервал:

$$M_{\text{в}}[x] - t_{\gamma} \cdot \frac{\sigma_{\text{в}}}{\sqrt{N}} < M_{\Gamma}[x] < M_{\text{в}}[x] + t_{\gamma} \cdot \frac{\sigma_{\text{в}}}{\sqrt{N}}, \quad (10)$$

где t_{γ} находим по таблице по заданным N и γ .

Для оценки среднего квадратического отклонения σ_{Γ} нормально распределенной генеральной совокупности X с доверительной вероятностью γ служат доверительные интервалы:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{в}}(1-q) < \sigma_{\Gamma} < \sigma_{\text{в}}(1+q) \quad (\text{при } q < 1); \\ 0 < \sigma_{\Gamma} < \sigma_{\text{в}}(1+q) \quad (\text{при } q > 1), \end{aligned} \quad (11)$$

где q – находим по таблице при заданных N и γ .

§3 Проверка статистической гипотезы о законе распределения генеральной совокупности

Статистической **гипотезой** H_0 называется любое предположение относительно закона распределения исследуемой случайной величины X .

ПРИМЕР 1. Гипотеза H_0 о том, что математическое ожидание нормальной величины равно $M_{\text{в}}[x]$ при условии, что

Гипотезы бывают простые и сложные. Простая гипотеза полностью определяет закон распределения величины X в отличие от сложной.

Гипотезы бывают параметрическими и непараметрическими. В первом случае мы имеем предположение о параметрах распределения при известном законе, а во втором – о самом виде закона распределения.

Наряду с выдвинутой гипотезой H_0 рассматривают противоречащую ей гипотезу H_1 . Если выдвинутая гипотеза H_0 будет отвергнута, то имеет место противоречащая ей гипотеза H_1 .

Критерием проверки статистической гипотезы называется некоторое правило, позволяющее принять ее или отвергнуть. Причем критерии строятся с помощью случайной величины K (часто именно ее называют критерием), для которой известно распределение. Наблюдаемым значением критерия $K_{\text{набл.}}$ называют значение критерия, вычисленное по данным выборки.

В случае проверки гипотез возможны ошибки:

Ошибка 1-го рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза. Вероятность ошибки первого рода α называется уровнем значимости критерия, по которому производится проверка.

Ошибка 2-го рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза. Если β - вероятность ошибки второго рода, то величина $1 - \beta$ называется мощностью

дисперсия $D_r[x]$ известна, является простой параметрической. Если же дисперсия $D_r[x]$ неизвестна, то гипотеза будет сложной параметрической.

ПРИМЕР 2. Гипотеза H_0 о том, что случайная величина распределена по нормальному (или по какому-то другому) закону, является сложной непараметрической.

Задача.

Если основная гипотеза имеет вид $H_0: a=20$, то конкурирующей может быть гипотеза ...

Варианты ответов: 1) $H_1: a \geq 20$ 2) $H_1: a \geq 10$
3) $H_1: a > 20$ 4) $H_1: a \leq 20$

Решение.

Конкурирующая гипотеза должна **противоречить** выдвинутой, поэтому верный ответ №3.

Ответ. №3.

критерия. Параметрические гипотезы проверяются с помощью критериев значимости, а непараметрические – с помощью критериев согласия. Критической областью называется совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают. Если уровень значимости α уже выбран и задан объем выборки, то критическую область следует строить так, чтобы мощность критерия была максимальной. Выполнение этого требования должно обеспечить минимальную ошибку второго рода, что более желательно. Основной принцип проверки статистических гипотез: если $K_{\text{набл.}}$ принадлежит критической области – гипотезу H_0 отвергают, если же $K_{\text{набл.}}$ принадлежит области принятия гипотезы, то гипотезу H_0 принимают.	
§4 Статистическая и корреляционная зависимости. Эмпирическая и теоретическая линии регрессии	
Две случайные величины могут быть связаны между собой функциональной зависимостью, либо зависимостью другого рода, называемой статистической, либо быть независимыми. Статистической называют зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение распределения другой. Если при изменении одной из величин изменяется среднее значение другой, то в этом случае статистическую зависимость называют	

корреляционной. Значит, корреляционная зависимость есть частный случай статистической зависимости.

Корреляционной зависимостью Y от X называют функциональную зависимость условной средней $\bar{Y}_x$ от X :

$$\bar{Y}_x = f(X). \quad (12)$$

Уравнение (1) называется уравнением **регрессии** Y на X ; функция $f(X)$ называется **регрессией** Y на X ; график функции $f(X)$ - **линей регрессии** Y на X .

Корреляционной зависимостью X от Y называется функциональная зависимость $\bar{X}_y$ от Y :

$$\bar{X}_y = \varphi(Y). \quad (13)$$

Уравнение (13) называется **уравнением регрессии** X на Y ; функция $\varphi(Y)$ называется **регрессией** X на Y ; график функции $\varphi(Y)$ - **линей регрессии** X на Y .

Наиболее простой и важный случай корреляционной зависимости - линейная регрессия. В этом случае теоретическое уравнение линейной регрессии Y на X (формула (12) имеет вид

$$\bar{Y}_x = aX + b. \quad (14)$$

Коэффициент a в уравнении (14) называют **коэффициентом регрессии** Y на X и обозначают $\rho \cdot YX$ ($a = \rho \cdot YX$).

Уравнение линейной регрессии X на Y

Задача.

Выборочное уравнение парной регрессии имеет вид $y = -3 + 2x$. Тогда выборочный коэффициент корреляции может быть равен ...

$$\bar{X}_y = a_1 Y + b_1. \quad (15)$$

Коэффициент a_1 называют **коэффициентом регрессии** X на Y и обозначают ρ_{XY} ($a_1 = \rho_{XY}$).

В случае линейной регрессии задача определения тесноты связи сводится к вычислению эмпирического (выборочного) коэффициента корреляции, который можно вычислить по одной из формул:

$$r_B = \rho_{YX} \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \quad \text{или} \quad r_B = \rho_{XY} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}, \quad (16)$$

где σ_X, σ_Y - значения средних квадратических отклонений.

Свойства выборочного коэффициента корреляции

$$1. |r_B| \leq 1 \quad \text{или} \quad -1 \leq r_B \leq 1.$$

2. Если $r_B = 0$, тогда X и Y не связаны линейной корреляционной зависимостью (но могут быть связаны нелинейной корреляционной или даже функциональной зависимостью).

3. С возрастанием абсолютной величины выборочного коэффициента корреляции линейная корреляционная зависимость становится более тесной и при $|r_B| = 1$ переходит в линейную функциональную зависимость.

4. Если $r_B = 1$ ($r_B = -1$), тогда X и Y связаны прямой (обратной) линейной функциональной

Варианты ответов: 1) 0,6 2) -0,6 3) -3 4) -2

Решение.

По свойству 1, оставляем как возможные, ответы № 1, 2. Т.к. по условию уравнение парной регрессии имеет вид $y = -3 + 2x$, т.е. с ростом x возрастает в среднем и y , то $r_B > 0$, т.е. выбираем ответ № 1.

Ответ. №1.

зависимостью.	
---------------	--