МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
"УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЯНОЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ"
(УГНТУ)

Кафедра математики

УЧЕБНО – МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

дисциплины «Математика»

РАЗДЕЛ 9 «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Теоретические основы
Методические указания для студентов
Материалы для самостоятельной работы студентов

Уфа 2010

АВТОРЫ:

Бахтизин Р.Н., Янчушка А.П., Хайбуллин Р.Я., АкмадиеваТ.Р., Аносова Е.П., Байрамгулова Р.С., Галиуллин М.М., Галиева Л.М., Галиакбарова Э.В., Гимаев Р.Г., Гудкова Е.В., Егорова Р.А., Жданова Т.Г., Зарипов Э.М., Зарипов Р.М., Исламгулова Г.Ф., Ковалева Э.А., Майский Р.А., Мухаметзянов И.З., Нагаева З.М., Савлучинская Н.М., Сахарова Л.А., Степанова М.Ф., Сокова И.А., Сулейманов И.Н., Умергалина Т.В., Фаткуллин Н.Ю., Хакимов Д.К., Хакимова З.Р., Чернятьева М.Р., Юлдыбаев Л.Х., Шамшович В.Ф., Якубова Д.Ф., Якупов В.М., Яфаров Ш.А.

8 – (347)2428715

E-mail: kafedra-matematiki@rambler.ru

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Кафедра программирования и вычислительной математики Башкирского государственного педагогического университета.

Заведующий кафедрой д. ф.-м. наук, профессор Р.М. Асадуллин.

Кафедра вычислительной математики Башкирского государственного университета.

Заведующий кафедрой д. ф.-м. наук, профессор Н.Д. Морозкин.

АННОТАЦИЯ

Учебно-методический комплекс дисциплины «Математика». Раздел 9 «Дифференциальные уравнения». Теоретические основы. Методические указания для студентов. Материалы для самостоятельной работы студентов.

В разделе «Теоретические основы» и «Методические указания для студентов» содержатся необходимые для изучения дисциплины «Математика», в объеме, предусмотренном ГОС для технических вузов, теоретический материал, способы и методы решения практических задач.

Раздел «Материалы для самостоятельной работы студентов» включает в себя: контрольные вопросы, задачи и упражнения для самостоятельной работы, расчетные задания, лабораторные работы, литературу.

Представлен перечень контрольных вопросов для контроля знаний, полученных студентами при изучении теоретических и методических основ дисциплины. Задачи и упражнения для самостоятельной работы студентов позволяют учащимся индивидуально во внеурочное время контролировать уровень усвоения материала по данной дисциплине.

Расчетные задания содержат задания для студентов, позволяющих отработать навыки решения задач практического содержания.

В разделе «Лабораторная работа» представлен теоретический материал, последовательность проведения лабораторной работы и данные для проведения лабораторной работы по вариантам.

При изучении дисциплины обеспечивается фундаментальная подготовка студента в области применения математики, происходит знакомство со стержневыми проблемами прикладной математики, базовыми приложениями, навыками и понятиями, обязательными для прочного усвоения последующих дисциплин и практического использования полученных знаний в решении конкретных задач, которые ставятся перед инженером.

Учебно-методический комплекс разработан для студентов, обучающихся по всем формам обучения по направлениям подготовки и специальностям, реализуемым в ГОУ ВПО УГНТУ.

УЧЕБНО - МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

РАЗДЕЛ 9 «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

1. Теоретические основы

1.1 ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Дифференциальные уравнения занимают особое место в математике и имеют многочисленные приложения во многих науках. Исследования природных процессов и изучение закономерностей общественных процессов приводят к построению математических моделей, основой которых являются дифференциальные уравнения (ДУ). Теория **обыкновенных ДУ** исследует случай, когда неизвестная функция и её производные, входящие в ДУ, зависят от одной переменной.

Пусть тело, имеющее температуру θ_0 в момент времени t=0, помещено в среду температуры α $(\theta_0 > \alpha)$. Если температура тела $\theta(t)$, то требуется найти закон изменения температуры этого тела в зависимости от времени. Из физики известно, что скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Учитывая, что функция $\theta(t)$ убывающая, в силу механического смысла производной получаем

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -k[\theta(t) - \alpha], \tag{1.1}$$

где k - коэффициент пропорциональности.

Соотношение (1.1) является математической моделью данного физического процесса. Оно называется **дифференциальным уравнением**, т.к. в него входит неизвестная функция $\theta(t)$ и её производная. Решением ДУ (1.1) является функция $\theta(t) = Ce^{-kt} + \alpha$, где C - произвольная постоянная. Её значение можно найти из условия $\theta(0) = \theta_0$, из которого следует, что $\theta_0 = C + \alpha$. Таким образом, искомое решение имеет вид

$$\theta(t) = (\theta_0 - \alpha)e^{-kt} + \alpha.$$

1.2 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 Уравнение связывающее независимую переменную x, функцию y(x) и её производные $y', y'', \ldots, y^{(n)}$, называется **обыкновенным дифференциальным уравнением.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2 Наивысший порядок производной, входящей в ДУ, называется **порядком дифференциального уравнения.**

ПРИМЕР 1.1

$$y' = x^2 \cdot \sin y \text{ - обыкновенное ДУ 1-го порядка;}$$

$$y'' + xy' = e^x \text{ - обыкновенное ДУ 2-го порядка.}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3 Уравнение вида $F(x, y, y') = 0$ или $y' = f(x, y)$ называется ДУ **первого порядка.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4 **Решение ДУ 1-го порядка** $F(x, y, y') = 0$ называется определенная и дифференцируемая на некотором интервале (a,b) функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

ПРИМЕР 1.2 Функция $y=x^2$, представляет собой решение ДУ $xy' - 2x^2 = 0$, т.к. при подстановке $y=x^2$ и её производной $y' = 2x$ в уравнение получается тождество.

Процесс отыскания решения ДУ называется **интегрированием ДУ**. График решения ДУ называется **интегральной кривой**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5 Условие, что при $x=x_0$ функция y(x) должна быть равна заданному числу y_0, называется **начальным условием**. Начальное условие записывается в виде $y(x_0)=y_0$ или $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6 **Общим решением** ДУ 1-го порядка $y' = f(x, y)$ в области $\mathcal{D}$ называется функция $y = \varphi(x, c)$, удовлетворяющая условиям:

1. Функция $y = \varphi(x, c)$ является решением ДУ при любом значении c из некоторого множества.

2. Каково бы ни было начальное условие $y(x_0)=y_0$, где $(x_0,y_0) \in \mathcal{D}$, существует единственное значение $c = c_0$, что решение $y = \varphi(x, c_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Геометрически общее решение $y = \varphi(x, c)$ представляет на плоскости XOY **семейство интегральных кривых**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7 Всякое решение $y = \varphi(x, c_0)$, полученное из общего решения $y = \varphi(x, c)$ при конкретном значении $c = c_0$, называется **частным решением.**

Геометрически частному решению $y = \varphi(x, c_0)$ на плоскости XOY соответствует одна кривая из семейства интегральных кривых, проходящая через точку (x_0,y_0).

Если общее решение ДУ найдено в неявном виде, т.е. в виде уравнения $\Phi(x, y, c,) = 0$, то такое решение называется **общим интегралом ДУ.** Уравнение $\Phi(x, y, c_0,) = 0$ в этом случае называется **частным интегралом ДУ.**

Задача отыскания частного решения ДУ $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0)=y_0$, называется **задачей Коши.**

Теорема 1.1 (существования и единственности решения задачи Коши). Если в уравнении $y' = f(x, y)$ и функция $f(x,y)$ её частная производная $f_y'(x, y)$ непрерывны в некоторой области $\mathcal{D}$, содержащей точку (x_0,y_0), то существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$ (без доказательства).

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что при выполнении её условий существует единственная интегральная кривая ДУ, проходящая через точку (x_0,y_0).

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8</u> Особым решением ДУ $y' = f(x, y)$ называется такое решение, что в окрестности каждой его точки (x,y) существуют более чем одна интегральная кривая, проходящая через эту точку.

Геометрически особое решение есть огибающая семейства интегральных кривых (если она существует), т.е. линия, которая в каждой своей точке касается не менее одной интегральной кривой.

ДУ 1-го порядка $y' = f(x, y)$ устанавливают связь между координатами точки (x,y) и угловым коэффициентом y' касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Таким образом, $y' = f(x, y)$ дает совокупность направлений **(поле направлений)** на плоскости XOY. В этом состоит геометрическая интерпретация ДУ 1-го порядка.

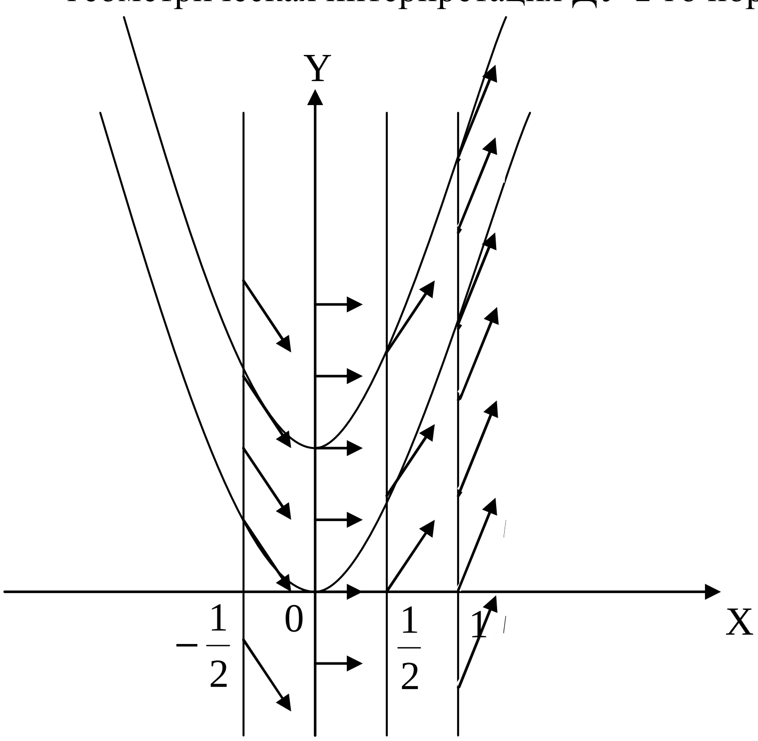


Рис.1.1

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9</u> **Изоклиной** называется кривая $f(x,y,)=c$, во всех точках которой направление поля одинаково.

ПРИМЕР 1.3 С помощью изоклин начертить вид интегральных кривых уравнения $y' = 2x$

Уравнение изоклин данного ДУ имеет вид $2x=c$, т.е. изоклинами будут прямые, параллельные оси OY $\left(x = \frac{c}{2}\right)$. В точках прямых проведем отрезки, образующие с осью OX один и тот же угол α, тангенс которого равен c.

Так, при c=0 имеем x=0, $\mathrm{tg}\alpha = 0$, поэтому $\alpha = 0$. При c=1 уравнение изоклины $x=\frac{1}{2}$, поэтому $tg\alpha=1$ и $\alpha=45^\circ$. При $c=-1$ уравнение изоклины $x=-\frac{1}{2}$, поэтому $tg\alpha=-1$ и $\alpha=-45^\circ$ и т.д.

Построив четыре изоклины ($x=-\frac{1}{2}, x=0, x=\frac{1}{2}, x=1$) и отметив на каждой из них ряд стрелок, наклоненных к оси ОХ под определенным углом (рис. 1.1), по их направлениям строим линии. Они представляют семейство парабол $y=x^2+C$. Это и будут интегральные кривые.

Рассмотрим теперь методы интегрирования ДУ первого порядка.

1.3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.10 Дифференциальное уравнение первого порядка называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если оно может быть представлено в виде

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y) \tag{1.2}$$

или в виде

$$M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0, \tag{1.3}$$

где $f(x)$, $g(y)$, $M_1(x)$, $N_1(y)$, $M_2(x)$, $N_2(y)$ - непрерывные функции, отличные от нуля.

Для нахождения решения уравнения (1.3) надо разделить обе его части на произведение $N_1(y)\cdot M_2(x)$

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=0,$$

полученное уравнение с разделенными переменными проинтегрировать

$$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=c. \tag{1.4}$$

Полученное соотношение (1.4) является общим интегралом для уравнения (1.3).

ПРИМЕР 1.4 Найти частное решение уравнения $y' \cdot \sin x - y \cdot \ln y \cdot \cos x = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = e$.

Решение. Разделяем переменные в данном уравнении $\frac{dy}{dx} \cdot \sin x = y \ln y \cdot \cos x$, $\frac{dy}{y \ln y} = \frac{\cos x \cdot dx}{\sin x}$, затем интегрируем $\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{\cos dx}{\sin x}$, $\int \frac{d(\ln y)}{\ln y} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$, $\ln|\ln y| = \ln|\sin x| + \ln c$. После упрощения получим $\ln y = c \cdot \sin x$ – общий интеграл уравнения. Подставим в него начальное условие $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = e$; $\ln e = c \sin \frac{\pi}{6}$, $1 = \frac{c}{2}$. Найденное c=2 подставим в общий интеграл, получим $\ln y = 2 \sin x$ или $y = e^{2 \sin x}$ – частное решение ДУ с разделяющимися переменными с заданным начальным условием.

1.4 ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРИВОДЯЩИЕСЯ К НИМ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.11 Функция f(x,y) называется **однородной функцией n-го порядка** (измерения) относительно x и y, если для любого значения λ выполняется равенство $\mathbf{f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n \cdot f(x, y)}$.

ПРИМЕР 1.5 Функция $f(x, y) = x^2 + 5xy$ является однородной второго порядка, т.к. $f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + 5 \cdot \lambda x \cdot \lambda y = \lambda^2 (x^2 + 5xy) = \lambda^2 \cdot f(x, y)$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.12 Функция f(x,y) называется **однородной нулевого порядка** (измерения) относительно x и y, если для любого значения λ выполняется равенство $\mathbf{f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 \cdot f(x, y)}$ или $\mathbf{f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)}$.

ПРИМЕР 1.6 Функция $f(x, y) = tg \frac{y}{x} + \frac{x^3}{y^3}$ является однородной нулевого прядка, т.к. $f(\lambda x, \lambda y) = tg \frac{\lambda y}{\lambda x} + \frac{(\lambda x)^3}{(\lambda y)^3} = tg \frac{y}{x} + \frac{x^3}{y^3} = f(x, y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.13 Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x, y)$ называется **однородным** относительно x и y, если f(x,y) является однородной функцией нулевого порядка.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.14</u> Дифференциальное уравнение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ называется **однородным,** если функции P(x,y), Q(x,y)- однородные одного порядка.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.15</u> Дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ называется **однородным**, если f(x,y)можно представить как функцию только одного отношения переменных $\frac{y}{x}$, т.е. $\mathbf{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$.

Однородное уравнение с помощью подстановки $\frac{y}{x} = t$, где $t = t(x)$ - новая неизвестная функция сводится к уравнению с разделяющимися переменными. Для этого $y = xt$ и $y' = t + xt'$ $(x' = 1)$ подставляем в уравнение $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, получаем $t + xt' = f(t)$ или $xt' = f(t) - t$, где $t' = \frac{dt}{dx}$. Разделяя переменные $\frac{dt}{f(t)-t} = \frac{dx}{x}$, интегрируя $\int \frac{dt}{f(t)-t} = \ln|x| + C$, получаем общий интеграл. В окончательном решении необходимо t заменить на выражение $\frac{y}{x}$.

ПРИМЕР 1.7 Решить дифференциальное уравнение
$\left(x^2 + y^2\right)dx - 2xy\,dx = 0$.

<u>Решение.</u> Разрешая уравнение относительно производной $\frac{dy}{dx} = y' = \frac{x^2+y^2}{2xy} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}} = f\left(\frac{y}{x}\right)$, устанавливаем, что y' является функцией только отношения переменных $\frac{y}{x}$. Т.е. данное уравнение является однородным.

Далее вводим новую функцию $t = \frac{y}{x}$, тогда $y = xt$, а $y' = t + xt'$ $(x' = 1)$. После подстановки y и y' в уравнение $y' = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}}$, оно преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными $t + xt' = \frac{1+t^2}{2t}$ или $xt' = \frac{1-t^2}{2t}$, где $t' = \frac{dt}{dx}$.

Разделяем переменные $\dfrac{2t\,dt}{1-t^2}=\dfrac{dx}{x}$, интегрируем

$$-\ln\left|1-t^2\right|=\ln|x|-\ln C \text{ или } \ln|x|+\ln\left|1-t^2\right|=\ln C, \text{ тогда } x\left(1-t^2\right)=\pm C.$$

Обозначим $C_1=\pm C$. Исключая вспомогательную функцию $t\left(t=\dfrac{y}{x}\right)$, окончательно получим общий интеграл $y^2=x^2-c_1x$.

<u>**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.16**</u> Уравнение вида $\mathbf{y'=\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}}$ называется **уравнением, приводящимся к однородному,** если определитель, составленный из коэффициентов при x и y не равен нулю, $\mathbf{\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0}$, т.е. $a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1\neq 0$.

Если же $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$, т.е. $a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1=0$, то уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки $z(x)=a_2x+b_2y$ или $z(x)=a_2x+b_2y+c_2$ или $z(x)=a_1x+b_1y+c_1$.

Рассмотрим эти два случая более подробно.

1) Пусть в уравнении $y'=\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$ $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$. Сделаем подстановку $x=x_1+\alpha$, $y=y_1+\beta$, где x_1 и y_1 - новые переменные вместо x и y, α и β - неизвестные числа, подбираемые так, чтобы уравнение стало однородным. Так как $dx=dx_1$, $dy=dy_1$, а $y'=\dfrac{dy}{dx}$, то $y'=\dfrac{dy_1}{dx_1}$ и уравнение примет вид:

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{a_1(x_1+\alpha)+b_1(y_1+\beta)+c_1}{a_2(x_1+\alpha)+b_2(y_1+\beta)+c_2} \quad \text{или}$$

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{a_1x_1+b_1y_1+(a_1\alpha+b_1\beta+c_1)}{a_2x_1+b_2y_1+(a_2\alpha+b_2\beta+c_2)}.$$

Это уравнение будет однородным, если числа α и β подобрать так, чтобы выражения в скобках были равны нулю, т.е. $\begin{cases} a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0, \\ a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0. \end{cases}$ Получаем однородное уравнение $\dfrac{dy_1}{dx_1}=\dfrac{a_1x_1+b_1y_1}{a_2x_1+b_2y_1}$, которое в дальнейшем с помощью подстановки $t=\dfrac{y_1}{x_1}$ сводится к уравнению с разделяющимися переменными. Решив его, следует заменить x_1 на $x-\alpha$ и y_1 на $y-\beta$.

2) Пусть в уравнении $y'=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$, т.е. $a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1=0$ или $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$. Обозначим последнее через k, тогда $\dfrac{a_1}{a_2}=k$, $\dfrac{b_1}{b_2}=k$ или $a_1=ka_2$, $b_1=kb_2$. Введем замену $z(x)=a_2x+b_2y$, тогда

$a_1x+b_1y+c_1=ka_2x+kb_2y+c_1=k(a_2x+b_2y)+c_1=kz+c_1$,

$a_2x+b_2y+c_2=z+c_2$.

$z'=(a_2x+b_2y)'=a_2+b_2y'$, отсюда $y'=\dfrac{1}{b_2}\cdot(z'-a_2)$ и уравнение $y'=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ примет вид $\dfrac{1}{b_2}\cdot(z'-a_2)=f\left(\dfrac{kz+c_1}{z+c_2}\right)$. После несложных преобразований получим $\dfrac{dz}{dx}=b_2\cdot f\left(\dfrac{\frac{b_1}{b_2}z+c_1}{z+c_2}\right)+a_2$. Решив это уравнение с разделяющимися переменными, следует заменить z на a_2x+b_2y.

ПРИМЕР 1.8 Найти общий интеграл уравнения $(x+2y+1)\cdot dx-(2x+y-1)\cdot dy=0$.

Решение. Запишем уравнение в виде $y'=\dfrac{x+2y+1}{2x+y-1}$. Вычислим определитель, составленный из коэффициентов при x и y $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-3\neq 0$. Следовательно, уравнение сводится к однородному. Введем замену $x=x_1+\alpha$, $y=y_1+\beta$, где x_1 и y_1 - новые переменные вместо x и y, α и β - неизвестные числа. Так как $dx=dx_1$, $dy=dy_1$, а $y'=\dfrac{dy}{dx}$, то $y'=\dfrac{dy_1}{dx_1}$ и уравнение примет вид:

$\dfrac{dy_1}{dx_1}=\dfrac{(x_1+\alpha)+2(y_1+\beta)+1}{2(x_1+\alpha)+(y_1+\beta)-1}$ или $\dfrac{dy_1}{dx_1}=\dfrac{x_1+2y_1+(\alpha+2\beta+1)}{2x_1+y_1+(2\alpha+\beta-1)}$. Оно станет однородным, если числа α и β подобрать так, чтобы выражения в скобках были равны нулю. Решая систему $\begin{cases}\alpha+2\beta+1=0,\\ 2\alpha+\beta-1=0,\end{cases}$ находим $\alpha=1,\ \ \beta=-1$. Уравнение примет вид $\dfrac{dy_1}{dx_1}=\dfrac{x_1+2y_1}{2x_1+y_1}$. Оно является однородным. Сделав подстановку $y_1=t\cdot x_1$ $\left(y_1'=t'x_1+t,\ \text{где}\ t'=\dfrac{dt}{dx_1}\right)$, приведем его к уравнению с разделяющимися переменными и решим: $t'\cdot x_1+t=\dfrac{x_1+2tx_1}{2x_1+tx_1}$,

$$t'\cdot x_1=\frac{1+2t}{2+t}-t,\qquad \frac{dt}{dx_1}\cdot x_1=\frac{1-t^2}{2+t},\qquad \frac{2+t}{1-t^2}\cdot dt=\frac{dx_1}{x_1},$$

$$\int\left(\frac{2}{1-t^2}+\frac{t}{1-t^2}\right)dt=\int\frac{dx_1}{x_1},\qquad \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|1-t^2\right|=\ln|x_1|+\ln|c|,$$

$\dfrac{1+t}{(1-t)\sqrt{1-t^2}}=x_1c$. Заменяем t на $\dfrac{y_1}{x_1}$, имеем $\dfrac{1+\dfrac{y_1}{x_1}}{\left(1-\dfrac{y_1}{x_1}\right)\sqrt{1-\left(\dfrac{y_1}{x_1}\right)^2}}=x_1\cdot c$,

$$\frac{(x_1+y_1)\cdot x_1}{(x_1-y_1)\sqrt{x_1^{\,2}-y_1^{\,2}}}=x_1\cdot c,\quad \sqrt{x_1+y_1}=c(x_1-y_1)\sqrt{x_1-y_1},$$

$x_1+y_1=c^2\cdot(x_1-y_1)^2(x_1-y_1)$, $\qquad x_1+y_1=c^2(x_1-y_1)^3$. Пусть $c^2=c_1$. Заменяем x_1 на $x-\alpha=x-1$, y_1 на $y-\beta=y+1$, тогда $x+y=c_1(x-y-2)^3$ - общий интеграл данного уравнения.

1.5 ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.17 Дифференциальное уравнение называется **линейным,** если оно линейно (т. е. первой степени) относительно искомой функции $\mathbf{y}$ и ее производной $\mathbf{y'}$. Общий вид линейного уравнения

$$\mathbf{y'+P(x)y=Q(x)}. \tag{1.4}$$

Если $Q(x)\neq 0$, уравнение называется **линейным неоднородным**, если Q(x)=0 – **линейное однородное.**

Рассмотрим два метода решения линейного неоднородного уравнения.

I метод. Метод подстановки или метод И.Бернулли.

Линейное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными. Искомую функцию y заменяем произведением двух вспомогательных функций u=u(x) и v=v(x), т.е. y=uv. Тогда $y' = u'v + uv'$ и данное уравнение (1.4) примет вид $u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$ или

$$u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x). \qquad (1.5)$$

Пользуясь тем, что одну из вспомогательных функций, например $v(x)$, можно выбрать произвольно, подберем её так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль, т.е.

$$v' + P(x)v = 0, \quad \text{где} \quad v' = \frac{dv}{dx}.$$

В качестве v возьмем одно из частных решений v=v(x) этого уравнения с разделяющимися переменными. Подставляя найденное $v = v(x)$ в уравнение (1.5), и, учитывая, что $v' + P(x)v = 0$, получим уравнение относительно второй вспомогательной функции u:

$$u'v = Q(x), \quad \text{где} \quad u' = \frac{du}{dx}, \qquad (1.6)$$

которое также является уравнением с разделяющимися переменными. Находим общее решение уравнения (1.6) в виде u=u(x,C). Затем, перемножив найденные u и v, запишем общее решение линейного уравнения (1.4):

$$y = u(x, C) \cdot v(x).$$

ПРИМЕР 1.9 Найти общее решение уравнения $y' - y\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x}$.

Решение. Это уравнение линейно относительно y и y'. Здесь $P(x) = -\operatorname{ctg}x$, $Q(x) = \frac{1}{\sin x}$. Полагаем y=uv; тогда $y' = u'v + uv'$ и данное уравнение примет вид $u'v + uv' - uv\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x}$ или

$$u'v + u(v' - v\operatorname{ctg} x) = \frac{1}{\sin x}. \qquad (1.7)$$

Решая уравнение $v' - v\,\mathrm{ctg}\,x = 0$, найдем его простейшее частное решение $v = v(x)$: $\frac{dv}{dx} = v\,\mathrm{ctg}\,x$; $\frac{dv}{v} = \mathrm{ctg}\,x\,dx$; $\ln|v| = \ln|\sin x|$, откуда v=sin x. Подставляя v в уравнение (1.7), получим уравнение $u'\sin x = \frac{1}{\sin x}$, из которого находим $u = u(x, c)$: $\frac{du}{dx} \cdot \sin x = \frac{1}{\sin x}$; $du = \frac{dx}{\sin^2 x}$, $u = -\mathrm{ctg}\,x + C$. Итак, искомое общее решение $y = uv$, $y = (-\mathrm{ctg}\,x + C)\sin x$ или $y = -\cos x + C\sin x$.

II метод. Метод вариации произвольной постоянной или метод Лагранжа.

Сформулируем этапы решения линейного неоднородного уравнения $y' + P(x)y = Q(x)$.

1) Составляется соответствующее однородное уравнение

$$y' + P(x)y = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx} = -P(x)y$. Разделяя переменные и интегрируя $\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx$, получим

$$y = c \cdot e^{-\int P(x)dx}$$

- это общее решение однородного уравнения.

2) Произвольную постоянную c заменяем функцией $c(x)$ и ищем общее решение неоднородного уравнения (1.4) в виде

$$y = c(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}.$$

Функцию $c(x)$ находим, подставляя y и y' в неоднородное уравнение (1.4). Рассмотрим более подробно. Находим производную: $y' = \left(c(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} \right)'$, $y' = c'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} + c(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot (-p(x))$. Подставим y и y' в неоднородное уравнение (1.4): $c'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} - c(x) \cdot p(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} + c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} = Q(x)$, откуда $c'(x)e^{-\int p(x)dx} = Q(x)$ или $\frac{dc(x)}{dx} = Q(x)e^{\int p(x)dx}$. Разделяя переменные и интегрируя $\int dc(x) = \int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx$, находим искомую функцию

$$c(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} + c_1.$$

Подставляя найденное $c(x)$ в равенство $y = c(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}$, получаем общее решение линейного неоднородного уравнения

$$y = (\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + c_1) \cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

ПРИМЕР 1.10 Решить уравнение $y' + 2xy = 2x$.

<u>Решение.</u>

1. Запишем соответствующее линейное однородное уравнение $y' + 2xy = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Тогда $\frac{dy}{dx} = -2xy$, $\frac{dy}{y} = -2xdx$, $\int \frac{dy}{y} = -2\int xdx$, $\ln|y| = -x^2 + \ln c$, $\frac{y}{c} = e^{-x^2}$,

$y = c \cdot e^{-x^2}$ - общее решение однородного линейного уравнения.

2. Полагаем c=c(x) и ищем решение неоднородного уравнения $y' + 2xy = 2x$ в виде $y = c(x) \cdot e^{-x^2}$. Найдем функцию $c(x)$. Для этого y и y': $y' = c'(x) \cdot e^{-x^2} + c(x) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x)$ подставим в неоднородное уравнение $c'(x)e^{-x^2} - 2x \cdot c(x)e^{-x^2} + 2x \cdot c(x)e^{-x^2} = 2x$, отсюда $c'(x)e^{-x^2} = 2x$, или $c'(x) = 2x \cdot e^{x^2}$. Интегрируя, получим функцию $c(x)$: $c(x) = \int e^{x^2} \cdot 2xdx$, $c(x) = \int e^{x^2} \cdot d(x^2)$. Подставляя найденное $c(x) = e^{x^2} + c_1$ в равенство $y = c(x) \cdot e^{-x^2}$, запишем общее решение линейного неоднородного уравнения $y = \left(e^{x^2} + c_1\right) \cdot e^{-x^2}$ или $y = 1 + c_1 \cdot e^{-x^2}$.

<u>*Замечание*</u> Дифференциальное уравнение $\mathbf{x' + P(y) \cdot x = Q(y)}$ линейно относительно **x, x′**. Замена $\mathbf{x = u \cdot v}$, где $u = u(y)$, $v = v(y)$.

1.6 УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

<u>**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.18**</u> Уравнение вида

$$\mathbf{y'' + P(x)y = Q(x) \cdot y^{\alpha}}, \quad \alpha \in R \ (\alpha \neq 0, \alpha \neq 1) \qquad (1.8)$$

называется **уравнением Бернулли.**

При $\alpha = 0$ уравнение является линейным, при $\alpha = 1$ - с разделяющимися переменными. Рассмотрим 2 способа решения:

I способ. Разделив обе части уравнения на $y^{\alpha} \neq 0$, получаем:

$$y^{-\alpha} \cdot y' + P(x) \cdot y^{-\alpha+1} = Q(x).$$

Обозначим $y^{-\alpha+1} = z$. Найдем z' как производную сложной функции $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha} \cdot y'$, откуда $y^{-\alpha} \cdot y' = \dfrac{z'}{1-\alpha}$. Тогда уравнение (1.8) примет вид

$$\frac{1}{1-\alpha} \cdot z' + P(x)z = Q(x).$$

Оно является линейным относительно z и z' и решается одним из приведенных в параграфе 1.5 способов.

ПРИМЕР 1.11 Решить уравнение $y' - \dfrac{1}{2x} y = \dfrac{x^2}{2y}$.

Решение. Это уравнение Бернулли. Здесь $P(x) = -\dfrac{1}{2x}$, $Q(x) = \dfrac{x^2}{2}$, $\alpha = -1$.

Разделим обе части на y^{-1}: $yy' - \dfrac{1}{2x} y^2 = \dfrac{x^2}{2}$. Сделаем замену $z = y^2$, тогда $z' = 2yy'$, откуда $yy' = \dfrac{z'}{2}$ и уравнение примет вид $\dfrac{z'}{2} - \dfrac{1}{2x} z = \dfrac{x^2}{2}$ или $z' - \dfrac{1}{x} z = x^2$. Оно является линейным относительно z и z'. Сделаем замену $z = u \cdot v$, где $u = u(x,c)$, $v = v(x)$. Подставим z и $z' = u'v + uv'$ в уравнение $z' - \dfrac{1}{x} z = x^2$: $u'v + uv' - \dfrac{1}{x} uv = x^2$, $u'v + u\left(v' - \dfrac{1}{x} v\right) = x^2$. Оно распадается на два уравнения с разделяющимися переменными $v' - \dfrac{1}{x} v = 0$ (1) $u'v = x^2$ (2). Из уравнения (1) найдем частное решение $v = v(x)$: $\dfrac{dv}{v} = \dfrac{dx}{x}$, $\ln|v| = \ln|x|, v = x$. Из уравнения (2) найдем общее решение $u = u(x,c)$: $u' \cdot x = x^2$, $u' = x$, $u = \dfrac{x^2}{2} + c$. Так как $z = uv$, то $z = \dfrac{x^3}{2} + cx$, но $z = y^2$, тогда $y = \pm\sqrt{z}$. Окончательно, общее решение уравнения Бернулли: $y = \pm\sqrt{\dfrac{x^3}{2} + cx}$.

II способ. Уравнение Бернулли, не приводя его предварительно к линейному, можно сразу решать методами Бернулли или Лагранжа, описанными в предыдущем параграфе 1.5.

ПРИМЕР 1.12 Решить уравнение $x^2y^2y' + xy^3 = 1$.

Решение. Разделив обе части уравнения на x^2y^2:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{y^2},$$

убеждаемся, что это уравнение Бернулли, где $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = \frac{1}{x^2}$, $\alpha = -2$. Применив замену $y=uv$, $y' = u'v + v'u$, имеем $u'v + v'u + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x^2u^2v^2}$ или $u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{1}{x^2u^2v^2}$. Получаем два уравнения с разделяющимися переменными: 1) $v' + \frac{v}{x} = 0$ и 2) $u'v = \frac{1}{x^2u^2v^2}$. Из первого уравнения, находим $v(x)$ – частное решение: $\frac{dv}{v} + \frac{dx}{x} = 0$; $\ln v + \ln x = 0$; $vx = 1$; $v = \frac{1}{x}$. Найденное v подставляем во второе уравнение, находим $u(x, c)$ - общее решение. $\frac{u'}{x} = \frac{1}{u^2}$, где $u' = \frac{du}{dx}$. Разделяя переменные $u^2du = xdx$, интегрируя $\frac{u^3}{3} = \frac{x^2}{2} + \frac{C}{3}$ получим $u = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + C}$. Так как $y = u \cdot v$, то $y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + C} \cdot \frac{1}{x}$ или $y = \sqrt[3]{\frac{3}{2x} + \frac{C}{x^3}}$ - общее решение заданного уравнения Бернулли.

1.7 УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.19 Если левая часть уравнения

$$\mathbf{P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0} \tag{1.9}$$

представляет собой полный дифференциал некоторой функции U(x,y), то уравнение (1.9) называется **уравнением в полных дифференциалах.** В этом случае его можно переписать в виде **dU(x,y)=0**. Отсюда

$$\mathbf{U(x,y)=C.} \tag{1.10}$$

Это общий интеграл данного уравнения.

Для того, чтобы уравнение (1.9) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области D, в которой функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ определены, непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, было выполнено условие

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{x}}. \tag{1.11}$$

В том случае, когда условие (1.11) выполнено, общий интеграл уравнения (1.9) можно записать в виде

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q\,(x_{\mathbf{0}},y)dy = C \tag{1.12}$$

или

$$\int_{x_{\mathbf{0}}}^{x} P\,(x,y_{\mathbf{0}})dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C \tag{1.13}$$

где $(x_0;y_0)$ - фиксированная точка области D, в которой функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны.

Если же условие (1.11) не выполнено, то уравнение (1.9) не является уравнением в полных дифференциалах. Однако в некоторых случаях его можно привести к уравнению в полных дифференциалах умножением на функцию $\mu(x,y)$, которая называется **интегрирующим множителем.**

Интегрирующий множитель легко находится в следующих двух случаях: 1) когда он зависит только от x, т.е. $\mu=\mu(x)$; 2) когда он зависит только от y, т.е. $\mu=\mu(y)$. Первый из этих случаев имеет место, если отношение

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \varphi(x)$$

является функцией только от x; тогда интегрирующий множитель находится по формуле

$$\mu(x) = e^{\int \varphi(x)dx} \quad \text{или} \quad \mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx} \tag{1.14}$$

Второй случай имеет место, если отношение

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} = \Psi(y)$$

является функцией только от y; тогда интегрирующий множитель определяется по формуле

$$\mu(y) = e^{-\int \Psi(y)dy} \quad \text{или} \quad \mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} dy}. \tag{1.15}$$

ПРИМЕР 1.13 Найти общий интеграл уравнения

$$2x\cos^2 y dx + \left(8\sqrt[3]{y} - x^2 \sin 2y\right)dy = 0$$

Решение. Здесь $P(x, y) = 2x\cos^2 y$, $Q(x, y) = 8\sqrt[3]{y} - x^2 \sin 2y$; находим $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 2x(-2\sin y\cos y) = -2x\sin 2y$, $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = -2x\sin 2y$. Следовательно, это уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Его общий интеграл находим по формуле (1.12) $\int\limits_{x_0}^{x} 2x\cos^2 y dx + \int\limits_{y_0}^{y}\left(8\sqrt[3]{y} - x_0 \sin 2y\right)dy = c$. Возьмем в качестве точки $(x_0; y_0)$ начало координат $(0;0)$: $\int\limits_0^x 2x\cos^2 y dx + \int\limits_0^y 8\sqrt[3]{y}dy = C$, или $x^2\cos^2 y + 6y\sqrt[3]{y} = C$.

ПРИМЕР 1.14 Найти общий интеграл уравнения

$$ydx + x\left(\ln x - y^3\right)dy = 0.$$

Решение. Здесь P(x,y)=y, $Q(x, y) = x(\ln x - y^3)$. Так как $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + \ln x - y^3$, то условие полного дифференциала не выполняется. Проверим, не допускает ли это уравнение интегрирующего множителя. Поскольку

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\frac{1-1-\ln x+y^3}{x\left(\ln x-y^3\right)}=-\frac{1}{x}=\varphi(x),$$ приходим к выводу, что данное уравнение имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x. Найдем его: $\mu(x)=e^{\int\varphi(x)dx}=e^{-\int\frac{dx}{x}}=e^{-\ln x}=e^{\ln\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{x}.$ Умножая обе части исходного уравнения на найденный интегрирующий множитель $\mu=1/x$, получаем уравнение $\dfrac{y}{x}dx+\left(\ln x-y^3\right)dy=0,$ которое, как нетрудно проверить, уже будет уравнением в полных дифференциалах. Решим это уравнение по формуле (1.12): $\int\limits_{x_0}^{x}\dfrac{y}{x}dx+\int\limits_{y_0}^{y}\left(\ln x_0-y^3\right)dy=C$. Взяв в качестве точки $(x_0;y_0)$ точку (1;0), имеем

$\int\limits_{1}^{x}\dfrac{y}{x}dx+\int\limits_{0}^{y}\left(-y^3\right)dy=C,\ \left(\ln 1=0\right)$ $\qquad y\ln|x|\,\Big|_1^x-\dfrac{y^4}{4}\Big|_0^y=C,$ следовательно,

$y\ln|x|-\dfrac{y^4}{4}=C.$ Это и есть общий интеграл данного уравнения.

1.8 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.20 Дифференциальное уравнение вида

$$F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0 \qquad (1.16)$$

называется **дифференциальным уравнением n-го порядка.**
Уравнение, **разрешенное относительно старшей производной,** имеет вид

$$y^{(n)}=f\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)}\right). \qquad (1.17)$$

Все ДУ порядка выше первого называются ДУ высших порядков.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.21</u> Решением ДУ (1.16**)** называется любая n - раз дифференцируемая функция $y=\varphi(x)$, которая обращает это уравнение в тождество.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.22</u> Общим решением ДУ (1.16) называется функция $y=\varphi(x,c_1,C_2,...,C_n)$, где C_1, $C_2,\ldots,C_n$ - произвольные, не зависящие от x постоянные, удовлетворяющая условиям:

1. $y=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_n)$ является решением ДУ для каждого фиксированного значения C_1, $C_2,\ldots,C_n$.

3. Каковы бы ни были начальные условия

$$y\big|_{x=x_0}=y_0,\quad y'\big|_{x=x_0}=y_0',\ ...,\ y^{(n)}\big|_{x=x_0}=y_0^{(n)} \tag{1.18}$$

существуют единственные значения постоянных $C_1=C_1^{\,0},C_2=C_2^{\,0},...,$ $C_n=C_n^{\,0}$ такие, что функция $y=\varphi(x,C_1^{\,0},C_2^{\,0},...,C_n^{\,0})$ является решением уравнения (1.16) и удовлетворяет начальным условиям (1.18).

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.23</u> Всякое решение $y=\varphi(x,C_1^{\,0},C_2^{\,0},...,C_n^{\,0})$ уравнения (1.16), получающееся из общего решения $y=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_n)$ при конкретных значениях постоянных $C_1=C_1^{\,0},C_2=C_2^{\,0},...,C_n=C_n^{\,0}$, называется **частным решением.**

Задача нахождения частного решения ДУ (1.16), удовлетворяющего начальным условиям (1.18), называется **задачей Коши.**

Теорема 1.2 (существования и единственности задачи Коши).

Если в уравнении (1.17) функция $f(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)})$ и её частные производные $f_y',f_{y'}',f_{y''}',...,f_{y^{(n-1)}}'$ непрерывны в некоторой области D изменения переменных $x,y,y',...,y^{(n-1)}$, то для всякой точки $(x_0,y_0,y_0',...,y_0^{(n-1)})\in D$ существует единственное решение $y=\varphi(x)$ уравнения (1.17), удовлетворяющее начальным условиям (1.18). Без доказательства.

Проинтегрировать (решить) ДУ n-го порядка означает следующее: найти его общее или частное решение (интеграл) в зависимости от того, заданы начальные условия или нет.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию решения ДУ на примере ДУ 2-го порядка $F(x,y,y',y'')=0$. График всякого решения такого ДУ называется **интегральной кривой.** Общее решение есть множество интегральных кривых; частное решение - одна интегральная кривая этого множества, проходящая через точку (x_0,y_0) и имеющая в ней касательную с заданным угловым коэффициентом $y'(x_0)=y'_0$ и кривизной $y''_0=y''(x_0)$.

Рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений n -го порядка.

1.9 УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

Суть метода решения состоит в том, что с помощью замены переменной (подстановки) данное ДУ сводится к уравнению, порядок которого меньше.

Рассмотри три типа уравнений, допускающих понижение порядка.

1. Уравнение вида

$$\mathbf{y^{(n)}=f(x)}$$

решается последовательным n - кратным интегрированием. При каждом интегрировании получается одна произвольная постоянная, а в окончательном результате - n произвольных постоянных.

Уравнение второго порядка $\mathbf{y''=f(x)}$ решается последовательным интегрированием 2 раза.

$$y'=\int f(x)dx+c_1 \qquad \text{или} \quad y'=F_1(x)+c_1,$$

$$y=\int(F_1(x)+c_1)dx+c_2 \ \text{или} \quad y=\int F_1(x)dx+c_1x+c_2.$$

ПРИМЕР 1.15 Решить уравнение $y'''=\dfrac{1}{x^3}$.

<u>Решение.</u> Последовательно интегрируя данное уравнение, имеем

$$y''=\int\frac{dx}{x^3} \ \text{или} \ y''=-\frac{1}{2x^2}+C_1, \ y'=\int\left(-\frac{1}{2x^2}+C_1\right)dx \ \text{или} \ y'=\frac{1}{2x}+C_1x+C_2,$$

$y=\displaystyle\int\left(\frac{1}{2x}+C_1x+C_2\right)dx=\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$. Обозначим $\overline{C}_1=\dfrac{C_1}{2}$, тогда

$y=\dfrac{1}{2}\ln|x|+\overline{C}_1x^2+C_2x+C_3$ - общее решение.

2. Дифференциальные уравнения n-го порядка

$$\mathbf{F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},...,y^{(n)})=0,} \tag{1.19}$$

не содержащее явно искомой функции y и ее младших производных до $(\mathbf{k}-1)$ порядка включительно, допускает понижение порядка на k единиц с помощью подстановки $\mathbf{y^{(k)}=p(x)}$. Тогда $p'(x)=y^{(k+1)}$,

$p''(x)=y^{(k+2)},...,p^{(n-k)}(x)=y^{(n)}$ и уравнение (1.19) приводится к $F\left(x,p,p',p'',...,p^{(n-k)}\right)=0$.

Например, ДУ второго порядка $\mathbf{F(x,y',y'')}=0$, **не содержащее явно искомой функции** $\mathbf{y}$, при помощи подстановки $\mathbf{y'=p(x)}$, откуда $y''=p'$ или $y''=\dfrac{dp}{dx}$ преобразуется в уравнение первого порядка $F(x,p,p')$ или $F\left(x,p,\dfrac{dp}{dx}\right)=0$. Здесь x - независимая переменная, p - новая искомая функция.

ПРИМЕР 1.16 Решить уравнение $xy''=y'\cdot\left(\ln\dfrac{y'}{x}+1\right)$.

<u>Решение.</u> Данное уравнение не содержит искомой функции y. Положим $y'=p(x)$, тогда $y''=p'$, где $p'=\dfrac{dp}{dx}$ и уравнение примет вид $xp'=p\left(\ln\dfrac{p}{x}+1\right)$, или $p'=\dfrac{p}{x}\left(\ln\dfrac{p}{x}+1\right)$. Таким образом, мы получили однородное уравнение первого порядка. Введем вспомогательную функцию $t(x)$: $t=\dfrac{p}{x}$, откуда $p=tx$, $p'=t'x+t$ $(x'=1)$ и, следовательно, приходим к уравнению $t'x+t=t(\ln t+1)$ или $t'x=t\ln t$, где $t'=\dfrac{dt}{dx}$. Интегрируя, имеем $\ln|C_1x|=\ln|\ln t|$, откуда $C_1x=\ln t$ или $t=e^{C_1x}$. Возвращаясь к переменной p, т.е. заменяя t на $\dfrac{p}{x}$, получим $\dfrac{p}{x}=e^{C_1x}$. Так как $p=y'$, то $y'=xe^{C_1x}$. Проинтегрировав это уравнение первого порядка $y=\int xe^{C_1x}dx$, найдем общее решение исходного уравнения $y=\dfrac{1}{C_1}xe^{C_1x}-\dfrac{1}{C_1^2}e^{C_1x}+C_2$.

3. Дифференциальные уравнения n-го порядка

$$\mathbf{F\left(y,y',y'',...,y^{(n)}\right)=0,} \tag{1.20}$$

не содержащее явно независимой переменной x.

Здесь порядок уравнения понижается на единицу путем замены двух переменных: в качестве новой искомой функции мы выбираем $\mathbf{p = y'}$, где $\mathbf{p = p(y)}$, а за новую независимую переменную - y. Тогда $\mathbf{y'' = p \cdot p'}$ или $\mathbf{y''' = p \cdot \frac{dp}{dy}}$.

Если ДУ не содержит явно независимой переменной x, искомой функции y и её первых (k-1) производных, то есть, если ДУ имеет вид $F\left(y^{(k)}, y^{(k+1)},..., y^{(n)}\right) = 0$, то порядок уравнения можно понизить на (k+1) единиц, применяя сначала подстановку $y^{(k)} = z(x)$, а затем $z' = p(y)$.

Например, ДУ второго порядка, не содержащее независимой переменной x, т.е. $\mathbf{F(y, y', y'') = 0}$ при помощи подстановки $\mathbf{p = y'}$, где $\mathbf{p = p(y)}$ $\mathbf{y'' = p \cdot p' = p \cdot \frac{dp}{dy}}$ сводится к уравнению первого порядка $F(y, p, p \cdot p') = 0$.

ПРИМЕР 1.17 Найти частное решение уравнения $2yy'^3 + y'' = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0,\ y'(0) = -3$.

<u>Решение.</u> Полагая $y' = p(y)$, откуда $y'' = p\frac{dp}{dy}$, преобразуем данное уравнение к виду $2yp^3 + p\frac{dp}{dy} = 0$, или $\frac{dp}{p^2} = -2y\,dy$. Интегрируя, имеем $\frac{1}{p} = y^2 + C_1$, $p = \frac{1}{y^2 + C_1}$, так как $p = y' = \frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2 + C_1}$. Используя начальные условия: $\mathbf{y} = 0$, $y' = -3$, получим $-3 = 1/C_1$, т.е. $C_1 = -1/3$. Следовательно, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2 - 1/3}$, или $\left(y^2 - 1/3\right)dy = dx$. Интегрированием находим $\left(y^3 - y\right)/3 = x + C_2$. Используя теперь начальное условие $y(0) = 0$, найдем $C_2 = 0$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y^3 - y = 3x$.

1.10. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБЩИЕ СВОЙСТВА

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.24</u> ДУ n-го порядка называется **линейным**, если оно первой степени относительно совокупности искомой функции y и ее производных $y', y',..., y^{(n)}$, т.е. имеет вид

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = f(x), \tag{1.21}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n, f(x)$ заданные функции от x или постоянные, причем $a_0 \neq 0$ для всех значений x из области, в которой рассматривается уравнение (1.21).

Функция f(x), стоящая в правой части уравнения, называется **правой частью уравнения.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.25 Если $f(x) \neq 0$, уравнение (1.21) называется **неоднородным линейным** уравнением или уравнением с правой частью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.26 Если f(x)=0, уравнение называется **однородным линейным** или без первой части и имеет вид

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_n \cdot y = 0. \tag{1.22}$$

Установим некоторые основные свойства линейных однородных уравнений, ограничиваясь в доказательствах уравнениями второго порядка

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0. \tag{1.23}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.27 Два решения уравнения (1.23) $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются **линейно независимыми** на отрезке $[a;b]$, если их отношение не является постоянным на этом отрезке, т.е. $\mathbf{\frac{y_1}{y_2} \neq const}$.

В противном случае решения называются **линейно зависимыми.**

ПРИМЕР 1.18 Рассмотрим линейное однородное уравнение 2-го порядка $y'' - y = 0$. Функции $e^x, e^{-x}, 3e^x$ являются решениями данного уравнения, это легко проверяется подстановкой их в уравнение. При этом функции e^x и e^{-x} линейно независимы, т.к. отношение $\frac{e^x}{e^{-x}} = e^x \cdot e^x = e^{2x} \neq \text{const}$ при изменении x. Функции же e^x и $3e^x$ линейно зависимы, т.к. $\frac{e^x}{3e^x} = \frac{1}{3} = \text{const}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.28 Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$-функции от x, то определитель

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

называется **определителем Вронского** или **вронскианом.**

Для функций y_1 и y_2 вронскиан имеет вид $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1'$.

Теорема 1.3 Если функции y_1 и y_2 линейно зависимы на отрезки $[a;b]$, то определитель Вронского на этом отрезке равен нулю.

Доказательство. Т.к. y_1 и y_2 - линейно зависимы на $[a;b]$, то $y_2 = \lambda \cdot y_1$, где $\lambda = \text{const}$, и $y_2' = \lambda y_1'$, тогда

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0.$$

Теорема 1.4 Если решения y_1 и y_2 уравнения (1.23) линейно независимы на отрезке $[a;b]$, то определить Вронского $W(y_1,y_2)$, составлений для этих решений, не обращается в ноль ни в одной точке указанного отрезка.

Доказательство. Предварительно заметим следующее. Функция $y=0$ есть решение (его называют **нулевым** или **тривиальным**) уравнения (1.23) на отрезке $[a;b]$, удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=x_0} = 0,\ y'\big|_{x=x_0} = 0$, где x_0 - любая точка отрезка $[a;b]$. Из теоремы существования и единственности (1.2), которая применима к уравнению (1.23), следует, что не существует другого решения уравнения (1.23), удовлетворяющего начальным условиям $y\big|_{x=x_0} = 0,\ y'\big|_{x=x_0} = 0$.

Из этой теоремы также следует, что если решение уравнения (1.23) тождественно равно нулю на некотором отрезке или интервале (α, β), принадлежащем отрезку $[a;b]$, то это решение тождественно равно нулю на всем отрезке $[a;b]$. Действительно, в точке $x = \beta$ (и в точке $x = \alpha$) решение удовлетворяет начальным условиям $y\big|_{x=\beta} = 0,\ y'\big|_{x=\beta} = 0$.

Следовательно, по теореме единственности оно равно нулю в некотором интервале $\beta - d < x < \beta + d$, где d определяется величиной коэффициентов уравнения (1.23). Таким образом, расширяя интервал каждый раз на величину d, где $y \equiv 0$, мы докажем, что $y=0$ на всем отрезке $[a;b]$.

Теперь приступим к доказательству самой теоремы (1.4). Допустим, что $W(y_1,y_2)=0$ в некоторой точке отрезка $[a;b]$. Тогда по теореме (1.3) $W(y_1,y_2)$ будет равен нулю во всех точках отрезка $[a;b]$: $W=0$ или $y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1' = 0$.

Допустим, что $y_1 \neq 0$ на отрезке $[a;b]$. Тогда на основании последнего равенства можно написать $\dfrac{y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1'}{y_1^2} = 0$ или $\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)' = 0$, откуда следует

$\frac{y_2}{y_1} = \alpha = \text{const};$ т.е. решения y_1 и y_2 линейно зависимы, что противоречит предположению об их линейной независимости.

Допустим далее, что $y_1=0$ в точках $x_1,x_2,\ldots,x_k$, принадлежащих отрезку $[a;b]$. Рассмотрим интервал (a,x_1). На этом интервале $y_1 \neq 0$. Следовательно, на основании только что доказанного следует, что на интервале (a,x_1)

$$\frac{y_2}{y_1} = \lambda = \text{const}, \text{ или } y_2 = \lambda \cdot y_1.$$

Рассмотрим функцию $y = y_2 - \lambda y_1$. Так как y_2 и y_1 есть решения уравнения (1.23), то $y = y_2 - \lambda y_1$ - решение уравнения (1.23) и $y \equiv 0$ на интервале $(a;x_1)$. Следовательно, на основании замечания в начале доказательства следует, что $y = y_2 - \lambda y_1 \equiv 0$ на отрезке $[a;b]$, или $\frac{y_2}{y_1} = \lambda$ на $[a;b]$, т.е. y_2 и y_1 - линейно зависимы.

Но это противоречит предположению о линейной независимости решений y_2 и y_1. Мы доказали, что определитель Вронского не обращается в ноль ни в одной из точек отрезка $[a;b]$.

Теорема 1.5 (о структуре общего решения линейного однородного уравнения). Если $y_1,y_2,\ldots y_n$ - линейно независимые частные решения однородного линейного уравнения $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$, то $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$ - общее решение этого уравнения ($C_1,C_2,\ldots,C_n$ - произвольные постоянные).

Доказательство. Докажем теорему на примере линейного однородного уравнения 2-го порядка (n=2). Сначала покажем, что $y=C_1y_1+C_2y_2$ - решение уравнения (1.23), т.е. $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$. Подставим функцию $y=C_1y_1+C_2y_2$ и её производные $y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$, $y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2''$ в уравнение (1.23):

$$(C_1 y_1 + c_2 y_2)'' + a_1 (C_1 y_1 + c_2 y_2)' + a_2 (C_1 y_1 + c_2 y_2) = 0,$$
$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + a_1 C_1 y_1' + a_1 C_2 y_2' + a_2 C_1 y_1 + a_2 C_2 y_2 = 0,$$
$$C_1 \left(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1\right) + C_2 \left(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2\right) = 0.$$

Т.к. y_1 и y_2 - частные решения (1.23), тогда $y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0$ и $y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0$. Имеем $C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0$ - верное равенство, таким образом $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ - решение уравнения (1.23) для любых C_1 и C_2.

Теперь докажем, что каковы бы ни были начальные условия $y\big|_{x=x_0} = y_0$, $y'\big|_{x=x_0} = y_0'$, можно так подобрать значение произвольных постоянных C_1 и C_2, чтобы соответствующее частное решение $C_1y_1+C_2y_2$ удовлетворяло заданным начальным условиям.

Подставляя начальные условия в равенство $y=C_1y_1+C_2y_2$, имеем

$$\begin{cases} y_0 = C_1(y_1)_0 + c_2(y_2)_0 \\ y_0{}' = C_1\cdot(y_1')_0 + c_2\cdot(y_2')_0, \end{cases} \tag{1.24}$$

где обозначено $y_1\big|_{x=x_0}=(y_1)_0$, $y_2\big|_{x=x_0}=(y_2)_0$, $y_1'\big|_{x=x_0}=(y_1')_0$, $y_2'\big|_{x=x_0}=(y_2')_0$.

Из системы (1.24) можно определить c_1 и c_2, т.к. определитель этой системы $\begin{vmatrix}(y_1)_0 & (y_2)_0\\ (y_1')_0 & (y_2')_0\end{vmatrix}=(y_1)_0\cdot(y_2')_0-(y_2)_0\cdot(y_1')_0$ есть определитель Вронского при $x=x_0$ и, следовательно, не равен нулю (в силу линейной независимости решений y_1 и y_2). Частное решение, которое получится из семейства $y=C_1y_1+C_2y_2$ при найденных значениях C_1 и C_2, удовлетворяет начальным условиям. Теорема доказана.

Теорема 1.6 Если известно одно частное решение y_1 линейного однородного уравнения (1.23), то второе его решение y_2, линейно независимое с первым, можно найти интегрированием первого по формуле

$$y_2 = y_1\cdot\int\frac{e^{-\int a_1dx}}{y_1^2}dx \tag{1.25}$$

(без доказательства).

Формула (1.25) дает возможность интегрировать линейные однородные уравнения 2-го порядка сразу, не прибегая к понижению порядка.

ПРИМЕР 1.19 Записать общее решение уравнения $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$, если известно его частное решение $y_1=\frac{\sin x}{x}$.

Решение. Найдем второе частное решение y_2, линейно независимое с первым

$$y_2=\frac{\sin x}{x}\cdot\int\frac{e^{-\int\frac{2}{x}dx}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}dx=\frac{\sin x}{x}\int\frac{e^{-2\ln|x|}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}dx=\frac{\sin x}{x}\int\frac{e^{\ln\frac{1}{x^2}}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}dx=$$

$$=\frac{\sin x}{x}\int\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}dx=\frac{\sin x}{x}\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\frac{\sin}{x}\cdot(-\operatorname{ctg}x)=-\frac{\cos x}{x}.$$

Запишем общее решение:

$$Y=C_1y_1+C_2y_2=C_1\cdot\frac{\sin x}{x}-C_2\cdot\frac{\cos x}{x}.$$

1.11 ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ n-ГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.29 **Линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) n-го порядка с постоянными коэффициентами** называется уравнение вида

$$\mathbf{y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}\cdot y''+a_n\cdot y=0,} \qquad (1.26)$$

где $a_1,a_2,\ldots,a_n$ - постоянные.

Общее решение уравнения (1.26) имеет структуру

$$\mathbf{\overline{Y}=C_1\cdot y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n}, \qquad (1.27)$$

где $y_1,y_2,\ldots,y_n$ – линейно независимые частные решения однородного уравнения (1.26) или функции, вронскиан которых не равен нулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.30 Совокупность n решений ЛОДУ n - го порядка, определенных и линейно независимых на промежутке (a,b) называется **фундаментальной системой решений** этого уравнения.

ПРИМЕР 1.20 Дано уравнение $y'''-y'=0$. Составляют ли функции e^x, e^{-x}, $\operatorname{ch} x$ фундаментальную систему решений?

Решение. Для проверки линейной независимости этих решений вычислим вронскиан:

$$W(y_1,y_2,y_3)=\begin{vmatrix}y_1 & y_2 & y_3\\ y_1' & y_2' & y_3'\\ y_1''' & y_2''' & y_3'''\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e^x & e^{-x} & \operatorname{ch}x\\ e^x & -e^{-x} & \operatorname{sh}x\\ e^x & e^{-x} & \operatorname{ch}x\end{vmatrix}=0. \qquad (1.28)$$

Определитель равен нулю, так как соответствующие элементы первой и третьей строк равны. Так как W=0, то данные функции $e^x, e^{-x}, \operatorname{ch} x$ - линейно зависимы и не составляют фундаментальную систему решений данного ДУ.

Решим задачу о нахождении общего решения ЛОДУ (1.26). Будем искать частные решения в виде функции

$$y=e^{kx}, \quad \text{где } k=\text{const}, \tag{1.29}$$

тогда $y' = k \cdot e^{kx}$, $y'' = k^2 \cdot e^{kx}$, ..., $y^{(n)} = k^n \cdot e^{kx}$.
Подставляя полученные выражения в уравнение (1.26), получим

$$e^{kx} \cdot \left(k^n + a_1 \cdot k^{n-1} + a_2 \cdot k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot k + a_n\right) = 0.$$

Так как $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^n + a_1 \cdot k^{n-1} + a_2 \cdot k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot k + a_n = 0. \tag{1.30}$$

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.31</u> Уравнение вида (1.30) называется **характеристическим уравнением.**

Если число k удовлетворяет характеристическому уравнению (1.30), то функция e^{kx} будет решением однородного уравнения (1.26).

Для простоты сначала рассмотрим частный случай (n=2): линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\mathbf{y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.} \tag{1.31}$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\mathbf{k^2 + a_1 k + a_2 = 0.} \tag{1.32}$$

Возможны следующие случаи.

1. $D > 0$. Характеристическое уравнение имеет действительные различные корни $k_1 \neq k_2$. Тогда частные решения уравнения (1.31) $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$. Общее решение $\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ уравнения (1.31) имеет вид

$$\overline{Y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{1.33}$$

Убедимся, что функции y_1 и y_2 образуют фундаментальную систему решений (линейно независимы). Для этого покажем, что их вроскиан не равен нулю.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = k_2 e^{k_1 x} e^{k_2 x} - k_1 e^{k_1 x} e^{k_2 x} = (k_2 - k_1) e^{(k_1 + k_2)x}$$

$W(y_1, y_2) \neq 0$, т.к. $k_1 \neq k_2$.

2. $D = 0$. Характеристическое уравнение имеет действительные кратные корни k, кратность m=2. Частные решения $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = x \cdot e^{kx}$. Общее решение $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ уравнения (1.31) имеет вид

$$\overline{Y} = C_1 e^{kx} + C_2 x \cdot e^{kx}. \tag{1.34}$$

Покажем, что $y_2 = x \cdot e^{kx}$ является решением уравнения (1.31). Для этого подставим y_2 в уравнение (1.31) $\left(x \cdot e^{kx}\right)'' + a_1 \left(x \cdot e^{kx}\right)' + a_2 \left(x \cdot e^{kx}\right) = 0$. После несложных вычислений получим $\left(k^2 + a_1 k + a_2\right)x + \left(a_1 + 2k\right) = 0$. $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$, т.к. $k -$корень характеристического уравнения (1.32); $a_1 + 2k = 0$, т.к. по условию $D = 0$, следовательно, корень характеристического уравнения вычисляется по формуле $k = -\frac{a_1}{2}$ $\left(k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}\right)$. Убедимся, что y_1 и y_2 линейно независимы, т.е. $\frac{y_1}{y_2} \neq \mathrm{const}$. Действительно, $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{kx}}{xe^{kx}} = \frac{1}{x} \neq \mathrm{const}$.

3. D<0. Характеристическое уравнение имеет пару комплексно - сопряженных корней $k_1 = \alpha + \beta i,\ k_2 = \alpha - \beta i.$ Частные решения $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$. Общее решение $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ уравнения (1.31) имеет вид

$$\overline{Y} = C_1 e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x. \tag{1.35}$$

Убедимся, что y_1 и y_2 - решения уравнения (1.31).

Так как функции $e^{k_1 x}$ и $e^{k_2 x}$ - частные решения (1.31) (см. формулу (1.29)), то по теореме (1.5) их линейная комбинация так же является решением уравнения (1.31). Покажем, что y_1 и y_2 есть линейная комбинация функций $e^{k_1 x}$ и $e^{k_2 x}$.

Действительно, $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x = \frac{1}{2}\left(e^{k_1 x} + e^{k_2 x}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{(\alpha + \beta i)x} + e^{(\alpha - \beta i)x}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)\right) = \frac{1}{2}e^{\alpha x}(2\cos\beta x)$. Аналогично, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x = \frac{1}{2i}\left(e^{k_1 x} - e^{k_2 x}\right)$.

Теперь убедимся, что y_1 и y_2 линейно независимы, т.е. $\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const}$. Действительно, $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x} = \text{ctg}\,\beta x \neq \text{const}$.

Вернемся к линейным однородным дифференциальным уравнениям n-го порядка (1.26).

Сформулируем необходимые утверждения (уже без доказательств), а затем рассмотрим примеры.

Для корней характеристического уравнения (1.30) возможны следующие случаи.

1. Уравнение (1.30) имеет n простых (кратности 1) действительных корней. Каждому корню $k_i\left(i = \overline{1, n}\right)$ соответствует одно частное решение $y_i = e^{k_i x}$. Общее решение ЛОДУ (1.26) согласно (1.27) имеет вид

$$\overline{Y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n \cdot e^{k_n x}. \qquad (1.36)$$

2. Уравнение (1.30) имеет m действительных кратных корней k. Каждому корню k кратности m соответствует m линейно независимых частных решений $e^{kx}, \quad x \cdot e^{kx}, \quad x^2 \cdot e^{kx}, \quad \ldots, \quad x^{m-1} \cdot e^{kx}$.

3. Уравнение (1.30) имеет комплексно сопряженные корни. Каждой паре простых комплексно - сопряженных корней $k_1 = \alpha + \beta i$ и $k_2 = \alpha - \beta i$ соответствуют функции $e^{\alpha x} \cdot \cos x$ и $e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$.

4. Уравнение (1.30) имеет комплексно - сопряженные кратные корни $k_1 = \alpha + \beta i$ и $k_2 = \alpha - \beta i$ кратности $m > 1$. Каждой такой паре соответствует 2m частных решений

$$\begin{aligned} &e^{\alpha x}\cos\beta x, \ x \cdot e^{\alpha x}\cos\beta x, \ x^2 \cdot e^{\alpha x}\cos\beta x, \ \ldots, \ x^{m-1} \cdot e^{\alpha x}\cos\beta x; \\ &e^{\alpha x}\sin\beta x, \ x \cdot e^{\alpha x}\sin\beta x, \ x^2 \cdot e^{\alpha x}\sin\beta x, \ \ldots, \ x^{m-1} \cdot e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{aligned} \qquad (1.37)$$

ПРИМЕР 1.21 Найти общее решение уравнения

$$y''' - y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Решение. Запишем характеристическое уравнение. Для этого заменим формально функцию y и ее производные y', y'' и y''' соответствующими степенями

k. y заменяем на $k^0=1$, y' на k^1, y'' на k^2, y''' на k^3. Тогда получим $k^3-k^2-4k+4=0$, откуда, раскладывая левую часть уравнения на множители, имеем $k^2(k-1)-4(k-1)=0$, или $(k-1)(k+2)(k-2)=0$. Следовательно, $k_1=1, k_2=-2, k_3=2$. Так как корни характеристического уравнения действительные и различные, то общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид $\overline{Y}=C_1e^x+C_2e^{-2x}+C_3e^{2x}$.

ПРИМЕР 1.22 Найти общее решение уравнения

$$y'''-5y''+3y'+9y=0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^3-5k^2+3k+9=0$ или $k^3+k^2-6k^2-6k+9k+9=0$, $(k+1)(k^2-6k+9)=0$, $(k+1)(k-3)^2=0$. Таким образом, характеристическое уравнение имеет один простой $k_1=-1$ и двукратный корень $k_{2,3}=3$. Им соответствует фундаментальная система решений $y_1=e^{-x}$, $y_2=e^{3x}$, $y_3=x\cdot e^{3x}$. Общее решение дифференциального уравнения по формуле (1.27) запишется как их линейная комбинация:

$$\overline{Y}=C_1e^{-x}+(C_2+C_3x)e^{3x}.$$

ПРИМЕР 1.23 Найти общее решение уравнения

$$y^{IV}+y'''+4y''+4y'=0.$$

Решение. Этому уравнению соответствует характеристическое уравнение $k^4+k^3+4k^2+4k=0$ или $k^2(k^2+4)+k(k^2+4)=0$, $k(k+1)(k^2+4)=0$. Характеристическое уравнение имеет два действительных $k_1=0$, $k_2=-1$ и два комплексных корня $k_{3,4}=\pm 2i$. (все они являются простыми). Таким образом, общее решение данного дифференциального уравнения запишется в виде

$$\overline{Y}=C_1+C_2e^{-x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x.$$

ПРИМЕР 1.24 Найти общее решение уравнения

$$y^{IV}+18y''+81y=0.$$

Решение. Данному уравнению соответствует характеристическое уравнение $k^4+18k^2+81=0$ или $(k^2+9)^2=0$, имеющее двукратные комплексные корни $k_{1,2,3,4}=\pm 3i$. Им соответствуют четыре частных решения $y_1=\cos 3x$, $y_2=\sin 3x$, $y_3=x\cdot\cos 3x$, $y_4=x\cdot\sin 3x$. Тогда общее решение однородного уравнения запишется по формуле (1.27) как их линейная комбинация

$$\overline{Y}=(C_1+C_2x)\cos 3x+(C_3+C_4x)\sin 3x.$$

1.12 ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ n - ГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ) n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + a_2 \cdot y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} \cdot y' + a_n y = f(x). \qquad (1.38)$$

Теорема 1.7 (о структуре общего решения ЛНДУ). Общее решение Y ЛНДУ (1.38) представляет собой сумму какого-нибудь частного решения Y^* этого уравнения и общего решения $\overline{Y}$ соответствующего однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + a_2 \cdot y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n \cdot y = 0, \qquad (1.39)$$

т.е.

$$Y = \overline{Y} + Y^*. \qquad (1.40)$$

Доказательство. Для простоты, доказательство теоремы проведем для ЛНДУ 2 - го порядка

$$y'' + a_1 y' + a_1 y = f(x). \qquad (1.41)$$

Докажем сначала, что функция (1.40) есть решение уравнения (1.41).
Подставляя сумму $\overline{Y} + Y^*$ в уравнение (1.41) вместо y, имеем

$$\left(\overline{Y} + Y^*\right)'' + a_1\left(\overline{Y} + Y^*\right)' + a_2\left(\overline{Y} + Y^*\right) = f(x) \quad \text{или}$$

$$\left(\overline{Y}'' + a_1 \cdot \overline{Y}' + a_2 \overline{Y}\right) + \left(Y^{*''} + a_1 Y^{*'} + a_2 Y^*\right) = f(x). \qquad (1.42)$$

Так как $\overline{Y}$ есть решение однородного уравнения

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \qquad (1.43)$$

то выражение, стоящее в первых скобках, тождественно равно нулю. Так как Y^* есть решение уравнения (1.41), то выражение, стоящее во вторых скобках, равно f(x). Следовательно, равенство (1.42) является тождеством, функция $\overline{Y} + Y^*$ является решением уравнения (1.41). Первая часть теоремы доказана.

Докажем теперь, что (1.40) есть **общее** решение уравнения (1.41), т.е. докажем, что входящие в решение $Y=\overline{Y}+Y^*=C_1y_1+C_2y_2+Y^*$ произвольные постоянные можно подобрать так, чтобы удовлетворялись начальные условия

$$\begin{cases} y\,(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y'_0. \end{cases} \tag{1.44}$$

Продифференцировав функцию

$$Y=C_1y_1+C_2y_2+Y^* \tag{1.45}$$

и подставив начальные условия (1.44) в функцию (1.45) и её производную, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1\cdot y_1(x_0)+C_2\cdot y_2(x_0)=y_0-Y(x_0), \\ C_1\cdot y'_1(x_0)+C_2\cdot y'_2(x_0)=y'_0-\left(Y(x_0)\right)', \end{cases} \tag{1.46}$$

где $y_0=y(x_0)$, $y'_0=y'(x_0)$, с неизвестными C_1 и C_2.
Определителем этой системы является определитель Вронского $W(x_0)$ для функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в точке $x=x_0$. Так как эти функции по условию линейно независимы (образуют фундаментальную систему решений), то $W(x_0)\neq 0$. Следовательно система (1.46) имеет единственное решение: $C_1=C_1^0$ и $C_2=C_2^0$.

Решение $Y=Y^*+C_1^0\cdot y_1(x)+C_2^0\cdot y_2(x)$ является частным решением уравнения (1.41). Теорема доказана.

1.13 МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ

Рассмотрим универсальный метод нахождения частного решения Y^* неоднородного уравнения (1.38) на примере уравнения 2-го порядка (1.41).

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) состоит в следующем: пусть $\overline{Y}=C_1\cdot y_1(x)+C_2y_2(x)$ - общее решение однородного уравнения (1.43).

Будем искать частное решение Y^* неоднородного уравнения (1.41) в виде

$$Y^*=C_1(x)\cdot y_1(x)+C_2(x)\cdot y_2(x). \tag{1.47}$$

Найдем производную

$$\left(Y^*\right)' = C_1'(x)\cdot y_1(x) + C_1(x)\cdot y_1'(x) + C_2'(x)\cdot y_2(x) + C_2(x)\cdot y_2'(x).$$

Подберем функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$C_1'(x)\cdot y_1(x) + C_2'(x)\cdot y_2(x) = 0. \tag{1.48}$$

Тогда $\left(Y^*\right)' = C_1(x)\cdot y_1'(x) + C_2(x)\cdot y_2'(x),$

$$\left(Y^*\right)'' = C_1'(x)\cdot y_1'(x) + C_1(x)\cdot y_1''(x) + C_2'(x)\cdot y_2'(x) + C_2(x)\cdot y_2''(x).$$

Подставляя выражения для $Y^*, \left(Y^*\right)', \left(Y^*\right)''$ в уравнение (1.41), получим:

$$C_1'(x)\cdot y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)\cdot y_2'(x) + c_2(x)\cdot y_2''(x) +$$
$$+ a_1\left[C_1(x)\cdot y_1'(x) + C_2(x)\cdot y_2'(x)\right] + a_2\left[C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)\right] = f(x)$$

или $C_1(x)\cdot\left[y_1''(x) + a_1\cdot y_1'(x) + a_2\cdot y_1(x)\right] + C_2(x)\cdot\left[y_2''(x) + a_1\cdot y_2'(x) + a_2\cdot y_2(x)\right] +$

$$+ C_1'(x)\cdot y_1'(x) + C_2'(x)\cdot y_2'(x) = f(x).$$

Так как $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - решения уравнения (1.43), то выражения в квадратных скобках равны нулю, а потому

$$C_1'(x)\cdot y_1'(x) + C_2'(x)\cdot y_2'(x) = f(x). \tag{1.49}$$

Таким образом, функция Y^* (1.47) будет частным решением уравнения (1.41), если функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений, составленной из уравнений (1.48) и (1.49):

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot y_1(x) + C_2'(x)\cdot y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)\cdot y_1'(x) + C_2'(x)\cdot y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{1.50}$$

Определитель системы $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$, так как это определитель Вронского для фундаментальной системы частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (1.43). Поэтому система (1.50) имеет единственное решение: $C_1'(x) = \alpha_1(x)$ и $C_2'(x) = \alpha_2(x)$. Проинтегрировав функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$., находим $C_1(x)$ и $C_2(x)$, и по формуле (1.47) записываем частное решение неоднородного уравнения (1.41).

ПРИМЕР 1.25 Найти общее решение уравнения $y'' + 4y = tg2x$.

<u>Решение.</u> Для нахождения общего решения уравнения воспользуемся методом вариации произвольных постоянных.

Соответствующее однородное уравнение $y'' + 4y = 0$; характеристическое уравнение $k^2+4=0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm 2i$. Следовательно, $y_1=\cos 2x$ и $y_2=\sin 2x$ - два линейно независимых частных решения однородного уравнения, общее решение ЛОДУ есть $\overline{Y} = C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \sin 2x$ и частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$Y^* = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x, \tag{1.51}$$

где функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются из системы уравнений вида

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0, \\ -2C_1'(x)\sin 2x + 2C_2'(x)\cos 2x = tg2x. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$C_1'(x) = -\frac{1}{2}\frac{\sin^2 2x}{\cos 2x}, \qquad C_2'(x) = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Интегрируя полученные равенства, имеем

$$C_1(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x}dx + C_1 = \frac{1}{2}\int\left(\cos 2x - \frac{1}{\cos 2x}\right)dx + C_1 =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\ln\left|tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C_1;$$

$$C_2(x) = \frac{1}{2}\int \sin 2x dx + C_2 = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_2.$$

Подставляя $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в соотношение (1.51), находим общее решение данного уравнения:

$$Y = \left(\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\ln\left|tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C_1\right)\cos 2x + \left(-\frac{1}{4}\cos 2x + C_2\right)\sin 2x =$$

$$= C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x \ln\left|tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

<u>*Замечание 1.1.*</u> Метод вариации произвольных постоянных имеет место и для линейных неоднородных уравнений с переменными коэффициентами, т.е. для уравнений вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\cdot y = f(x).$$

1.14 МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Для ЛНДУ (1.38) с постоянными коэффициентами существует более простой способ нахождения частного решения Y^*, не требующий интегрирования. Если правая часть f(x) уравнения (1.38) имеет так называемый “специальный вид” (иногда в таком случае f(x) называют “специальной правой частью”):

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right), \tag{1.52}$$

где α и β - действительные числа, а $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - многочлены соответственно n-ой и m-й степени с действительными коэффициентами, то частное решение Y^* уравнения (1.38) ищется в виде

$$Y^* = x^r \cdot e^{\alpha x}\left(M_s(x)\cos\beta x + N_s(x)\sin\beta x\right). \tag{1.53}$$

Здесь $M_s(x)$ и $N_s(x)$ - многочлены s-й степени (s -наибольшая из степеней n и m) с неопределенными буквенными коэффициентами, а r - кратность, с которой комплексное число $\alpha + \beta i$ входит в число корней характеристического уравнения, соответствующего однородному дифференциальному уравнению (1.39).

ПРИМЕР 1.26 Найти общее решение уравнения

$$y'' + 2y' = e^x\left(3x^2 + 2x + 9\right). \tag{1.54}$$

<u>Решение.</u> 1. Найдем общее решение $\overline{Y}$ соответствующего однородного уравнения $y'' + 2y' = 0$. Решая отвечающее ему характеристическое уравнение $k^2+2k=0$, получаем корни $k_1=0$, $k_2=-2$. Следовательно,

$$\overline{Y} = C_1 + C_2 e^{-2x}.$$

2. Перейдем к отысканию частного решения Y^* данного уравнения (1.54). Здесь правая часть $f(x) = e^x\left(3x^2 + 2x + 9\right)$ имеет вид (1.52): n=2, $P_2(x)=3x^2+2x+9$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Так как $\alpha + \beta i = 1$ не является корнем характеристического уравнения, то r = 0. Следовательно, частное решение Y^* нужно искать в виде

$$Y^* = \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^x,$$

где A, B и C -некоторые коэффициенты, подлежащие определению. Для их отыскания воспользуемся тем, что Y^* должно быть решением данного уравнения. Найдем $Y^{*\prime}$ и $Y^{*\prime\prime}$:

$$Y^{*'} = \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^x + (2Ax + B)e^x = \left(Ax^2 + 2Ax + Bx + B + C\right)e^x;$$

$$Y^{*''} = \left(Ax^2 + 2Ax + Bx + B + C\right)e^x + (2Ax + 2A + B)e^x,$$

$$Y^{*''} = \left(Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B + C\right)e^x.$$

Теперь подставим выражения для $Y^{*'}$ и $Y^{*''}$ в исходное уравнение (1.54):

$$\left(Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B + C\right)e^x + 2\left(Ax^2 + 2Ax + Bx + B + C\right)e^x =$$

$$= e^x\left(3x^2 + 2x + 9\right).$$

Сокращая обе части полученного равенства на e^x и группируя члены при одинаковых степенях x, имеем

$$3Ax^2 + (8A + 3B)x + 2A + 4B + 3C = 3x^2 + 2x + 9.$$

Это равенство выполняется тождественно только тогда, когда коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих его частях равны между собой. Итак, для отыскания коэффициентов A, B и C запишем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} x^2 &:\ 3A &&= 3,\\ x^1 &:\ 8A + 3B &&= 2,\\ x^0 &:\ 2A + 4B + 3C &&= 9. \end{aligned}$$

Решив эту систему, найдем $A = 1$, $B = -2$, $C = 5$. Таким образом, получаем искомое частное решение $Y^* = \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^x$:

$$Y^* = \left(x^2 - 2x + 5\right)e^x.$$

Теперь можно записать общее решение данного уравнения $y = \overline{Y} + Y^*$:

$$y = C_1 + C_2e^{-2x} + \left(x^2 - 2x + 5\right)e^x.$$

ПРИМЕР 1.27 Найти общее решение уравнения $y'' + 8y' + 16y = -10e^{-4x}$.

Решение. 1. Находим $\overline{Y}$. Характеристическое уравнение $k^2+8k+16=0$ имеет корни $k_1=k_2=-4$. Следовательно,

$$\overline{Y} = (C_1 + C_2x)e^{-4x}.$$

2. Найдем теперь Y^*. Здесь правая часть имеет вид (1.52): n=0, $P_0=-10$, $\alpha = -4$, $\beta = 0$. Так как $\alpha + \beta i = -4$ служит двукратным корнем характеристического уравнения, то r=2 и частное решение Y^* надо искать в виде

$$Y^* = Ax^2e^{-4x},$$

где A - коэффициент, подлежащий определению. Вычислим производные $Y^{*'}$ и $Y^{*''}$:

$$Y^{*'} = \left(-4Ax^2 + 2Ax\right)e^{-4x},$$

$$Y^{*''} = \left(16Ax^2 - 16Ax + 2A\right)e^{-4x}.$$

Подставляя выражения для $Y^*, Y^{*'}$ и $Y^{*''}$ в данное уравнение, сокращая обе его части на e^{-4x} и приводя подобные члены, в итоге получим 2A= –10, откуда A= –5. Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$Y^* = -5x^2e^{-4x},$$

а общее решение данного уравнения $y = \overline{Y} + Y^*$

$$y = \left(C_1 + C_2x\right)e^{-4x} - 5x^2e^{-4x}.$$

Замечание 1.2. Форма записи для частного решения ЛНДУ с постоянными коэффициентами сохраняется в виде (1.53) и в тех случаях, когда «специальная» правая часть $f(x)$ уравнения (1.38) имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x) \cdot \cos\beta x \quad (\text{т.е. } Q_m(x) \equiv 0) \quad \text{или}$$

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot Q_m(x) \cdot \sin\beta x \quad (\text{т.е. } P_n(x) \equiv 0).$$

ПРИМЕР 1.28 Найти общее решение уравнения $y'' + 4y = 3x\cos x$.

Решение. 1. Находим $\overline{Y}$. Характеристическое уравнение $k^2+4=0$ имеет Корни $k_{1,2}=\pm 2i$. Следовательно,

$$\overline{Y} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

2. Переходим к отысканию Y^*. Здесь правая часть имеет вид: $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P_1(x) = x$, $Q(x) = 0$. Число $\alpha + \beta i = i$ не является корнем характеристического уравнения; поэтому r = 0 и частное решение Y^* следует искать в виде

$$Y^* = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x,$$

где A, B, C и D - неопределенные коэффициенты. Дифференцируя, находим

$$Y^{*'} = (Cx + D + A)\cos x + (-Ax + C - B)\sin x,$$

$$Y^{*''} = (-Ax + 2C - B)\cos x + (-Cx - 2A - D)\sin x.$$

Подставим теперь выражения для $Y^{*''}$ и Y^* в данное уравнение и сгруппируем члены при cos x и sin x; тогда получим

$$(3Ax + 3B + 2C)\cos x + (3Cx + 3D - 2A)\sin x = 3x\cos x.$$

Сравнивая коэффициенты при x cos x, cos x, x sin x и sin x, имеем

$$\begin{aligned} x\cdot\cos x:&\quad 3A \qquad\quad = 3,\\ \cos x:&\quad 3B+2C = 0,\\ x\cdot\sin x:&\quad 3C \qquad\quad = 0,\\ \sin x:&\quad 3D-2A = 0, \end{aligned}$$

откуда A=1, B=0, C=0, D=2/3. Таким образом,

$$Y^* = x\cos x + \frac{2}{3}\sin x.$$

Итак, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = \overline{Y} + Y^* = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + x\cos x + \frac{2}{3}\sin x.$$

ПРИМЕР 1.29 Найти общее решение уравнения

$$y'' + 9y = 9\cos 3x + 16\sin 3x.$$

<u>Решение.</u> 1. Сначала находим $\overline{Y}$. Характеристическое уравнение $k^2+9=0$ имеет корни $k_{1,2}=\pm 3i$. Следовательно,

$$\overline{Y} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x. \qquad (1.52)$$

2. Найдем теперь Y^*. В данном случае правая часть имеет вид: $\alpha=0$, $\beta=3$, $P_0(x)=9$, $Q_0(x)=16$. Так как число $\alpha+\beta i=3i$ служит однократным корнем характеристического уравнения, то $r=1$ и частное решение надо искать и виде

$$Y^* = x(A\cos 3x + B\sin 3x),$$

где A и B-неопределенные коэффициенты. Находим

$${Y^*}' = (3Bx + A)\cos 3x + (-3Ax + B)\sin 3x,$$

$${Y^*}'' = (-9Ax + 6B)\cos 3x + (-9Bx - 6A)\sin 3x.$$

Подставляя ${Y^*}''$ и Y^* в данное уравнение и приводя подобные члены, получим

$$6B\cos 3x - 6A\sin 3x = 9\cos 3x + 16\sin 3x,$$

откуда 6B=9, – 6A=16, т.е. B=3/2, A= –8/3. Следовательно,

$$Y^* = x\left(-\frac{8}{3}\cos 3x + \frac{3}{2}\sin 3x\right).$$

Итак, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = \overline{Y} + Y^* = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x - \frac{8}{3}x\cos 3x + \frac{3}{2}x\sin 3x.$$

Замечание 1.3. Если правая часть уравнения (1.38) есть сумма функций вида (1.52), т.е.

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x), \tag{1.55}$$

нужно предварительно найти частные решения $Y_1^*, Y_2^*, \ldots, Y_m^*$, соответствующие функциям $f_1(x)$, $f_2(x)$,…, $f_m(x)$. Тогда частное решение запишется в виде

$$Y^* = Y_1^* + Y_2^* + \ldots + Y_m^*, \tag{1.56}$$

а общее решение уравнения (1.38) примет вид

$$Y = \overline{Y} + Y_1^* + Y_2^* + \ldots + Y_m^*. \tag{1.57}$$

ПРИМЕР 1.30 Найти общее решение уравнения

$$y'' - 4y' = 4x - 5 + 10e^x \cos x.$$

Решение. 1. Находим сначала $\overline{Y}$. Характеристическое уравнение k^2–$4k=0$ имеет корни $k_1=0$ и $k_2=4$. Следовательно

$$\overline{Y} = C_1 + C_2 e^{4x}.$$

2. Переходим к нахождению Y^*. Здесь правая часть f(x) данного уравнения представляет собой сумму функции $f_1(x)=4x-5$ и $f_2(x)=10e^x\cos x$. Будем искать частные решения Y_1^* и Y_2^* для каждой из этих функций в отдельности.

Функция $f_1(x)=4x-5$ имеет вид (1.52): n=1, $P_1(x)=4x-5$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, причем $\alpha + \beta i = 0$ является однократным корнем характеристического уравнения (т.е. r =1). Следовательно,

$$Y_1^* = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx.$$

Дифференцируя, находим

$$Y_1^{*\prime} = 2Ax + B, \quad Y_1^{*\prime\prime} = 2A.$$

Подставляя $Y_1^{*\prime}$ и $Y_1^{*\prime\prime}$ в левую часть данного уравнения и приравнивая полученное выражение к $f_1(x) = 4x - 5$, имеем

$$2A - 4(2Ax + B) = 4x - 5,$$

откуда $-8A = 4,\ 2A - 4B = -5,$ или $A = -1/2,\ B = 1.$ Таким образом,

$$Y_1^* = -\frac{x^2}{2} + x.$$

Функция $f_2(x)=10e^x\cos x$ также имеет вид (1.52): $\alpha=1$, $\beta=1$, $P_0(x)=1$, $Q_0(x)=0$. Так как число $\alpha+\beta i=1+i$ не является корнем характеристического уравнения, то r=0 и частное решение Y_2^* ищем в форме

$$Y_2^*=e^x(C\cos x+D\sin x).$$

Дифференцируя, находим

$$Y_2^{*\prime}=e^x((C+D)\cos x+(D-C)\sin x),$$

$$Y_2^{*\prime\prime}=e^x(2D\cos x-2C\sin x).$$

Подставляя $Y_2^{*\prime}$ и $Y_2^{*\prime\prime}$ в левую часть данного уравнения и приравнивая полученное выражение к $f_2(x)=10e^x$, имеем

$$e^x((-4C-2D)\cos x+(2C-4D)\sin x)=10e^x\cos x,$$

откуда

$$\begin{cases}-4C-2D=10,\\ \;\;2C-4D=0,\end{cases}$$

т. е. C= –2, D= –1. Следовательно,

$$Y_2^*=-2e^x\cos x-e^x\sin x.$$

Итак, общее решение данного уравнения запишется следующим образом:

$$y=\overline{Y}+Y_1^*+Y_2^*=C_1+C_2e^{4x}-\frac{x^2}{2}+x-2e^x\cos x-e^x\sin x.$$

1.15 СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для решения многих технических и экономических задач требуется определить несколько функций. Нахождение этих функций может привести к нескольким ДУ, образующим систему.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.32 **Системой ДУ** называется совокупность ДУ, каждое из которых содержит независимую переменную x, искомые функции $y_1, y_2,\ldots,y_n$ и их производные.

Общий вид системы ДУ первого порядка, содержащей n искомых функций $y_1, y_2,\ldots,y_n$

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0, \\ F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0. \end{cases}$$

<u>**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.33**</u> **Нормальной системой ДУ** называется система ДУ первого порядка, разрешенных относительно производной

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases} \tag{1.58}$$

Число уравнений системы равно числу искомых функций. Системы ДУ и ДУ высших порядков во многих случаях можно привести к нормальной системе ДУ (1.58).

Например, система трех ДУ второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = F_1(x, y, z, t, x', y', z'), \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = F_2(x, y, z, t, x', y', z'), \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = F_3(x, y, z, t, x', y', z'), \end{cases}$$

путем введения новых переменных $\dfrac{dx}{dt} = u$, $\dfrac{dy}{dt} = v$, $\dfrac{dz}{dt} = w$ приводится к нормальной системе ДУ:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=u, \dfrac{dy}{dt}=v, \dfrac{dz}{dt}=w, \\ \dfrac{du}{dt}=F_1(x,y,z,t,u,v,w), \\ \dfrac{dv}{dt}=F_2(x,y,z,t,u,v,w), \\ \dfrac{dw}{dt}=F_3(x,y,z,t,u,v,w). \end{cases}$$

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.34</u> Решением системы (1.58) называется совокупность из n функций $y_1(x), y_2(x), y_3(x),..., y_n(x)$, которые после подстановки в систему обращают каждое её уравнение в верное равенство.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.35</u> Начальными условиями для системы (1.58) называется условия вида

$$y_1(x_0)=y_1^0,\ \ y_2(x_0)=y_2^0,\ \ ...,\ \ y_n(x_0)=y_n^0. \tag{1.59}$$

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.36</u> Решением задачи Коши для системы (1.58) называется такое решение, которое удовлетворяет начальным условиям (1.59).

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.37</u> Общим решением системы (1.58) в области D называется набор функций $y_1(x, C_1, C_2,..., C_n)$, $y_2(x, C_1, C_2,..., C_n)$,....., $y_n(x, C_1, C_2,..., C_n)$, которые для любых $C_1, C_2,..., C_n \in D \subset R$ являются решением (1.58) и для любых начальных условий (1.59) из области определения системы существует набор $C_1^*, C_2^*,..., C_n^*$, при котором функции $y_1(x, C_1^*, C_2^*,..., C_n^*)$, $y_2(x, C_1^*, C_2^*,..., C_n^*)$,....., $y_n(x, C_1^*, C_2^*,..., C_n^*)$ удовлетворяют начальным условиям (1.59).

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.38</u> Всякое решение

$$y_1(x, C_1^*, C_2^*,..., C_n^*),\ y_2(x, C_1^*, C_2^*,..., C_n^*),.....,\ y_n(x, C_1^*, C_2^*,..., C_n^*), \tag{1.60}$$

полученное из общего решения

$$y_1(x, C_1, C_2,..., C_n),\ y_2(x, C_1, C_2,..., C_n),.....,\ y_n(x, C_1, C_2,..., C_n) \tag{1.61}$$

при начальных условиях (1.59), называется **частным решением.**

Одним из методов решения нормальной системы ДУ является **метод сведения системы к одному ДУ высшего порядка.**

Пусть задана система (1.58). Продифференцируем по x любое, например первое, уравнение:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\cdot\frac{dy_1}{dx}+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\cdot\frac{dy_2}{dx}+...+\frac{\partial f_1}{\partial y_n}\cdot\frac{dy_n}{dx}. \qquad (1.62)$$

Подставив в это равенство производные $\frac{dy_1}{dx},\frac{dy_2}{dx},...,\frac{dy_n}{dx}$ из системы (1.58), получим $\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\cdot f_1+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\cdot f_2+...+\frac{\partial f_1}{\partial y_n}\cdot f_n$, или

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=F_2(x,y_1,y_2,...,y_n). \qquad (1.63)$$

Продифференцировав равенство (1.63) ещё раз и заменив $\frac{dy_1}{dx},\frac{dy_2}{dx},...,\frac{dy_n}{dx}$ из (1.58), получим

$$\frac{d^3y_1}{dx^3}=F_3(x,y_1,y_2,...,y_n) \qquad (1.64)$$

и так далее.
Продифференцировав (1.63) в последний раз, получаем

$$\frac{d^ny_1}{dx^n}=F_n(x,y_1,y_2,...,y_n). \qquad (1.65)$$

Система из полученных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases}\frac{dy_1}{dx}=f_1(x,y_1,y_2,...,y_n),\\ \frac{d^2y_1}{dx^2}=F_2(x,y_1,y_2,...,y_n),\\ \frac{d^3y_1}{dx^3}=F_3(x,y_1,y_2,...,y_n),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{d^ny_1}{dx^n}=F_n(x,y_1,y_2,...,y_n).\end{cases} \qquad (1.66)$$

Из первых (n-1) уравнений системы (1.66) выразим функции $y_2, y_3, \ldots, y_n$ через x, функцию y_1 и её производные $y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}$.
Получим:

$$\begin{cases} y_2 = \Psi_2\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right), \\ y_3 = \Psi_3\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \Psi_n\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right). \end{cases} \tag{1.67}$$

Найденные значения $y_2, y_3, \ldots, y_n$ подставим в последнее уравнение системы (1.67). Получим одно ДУ n-го порядка относительно искомой функции y_1:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right). \tag{1.68}$$

Пусть его общее решение есть функция

$$y_1 = \varphi_1(x, c_1, c_2, \ldots, c_n). \tag{1.69}$$

Продифференцировав его (n-1) раз и подставив значения производных $y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}$ в уравнения системы (1.67), найдем функции $y_2, y_3, \ldots, y_n$:

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \\ y_3 = \varphi_3(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \end{cases} \tag{1.70}$$

ПРИМЕР 1.31 Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 5y_1 + 4y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 4y_1 + 5y_2. \end{cases}$$

<u>Решение.</u> Дифференцируем первое уравнение по x:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = 5\frac{dy_1}{dx} + 4\frac{dy_2}{dx}. \quad (1.71)$$

Из первого уравнения системы определяем $y_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{dy_1}{dx} - 5y_1\right)$. Тогда из второго уравнения системы имеем

$$\frac{dy_2}{dx} = 4y_1 + 5 \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{dy_1}{dx} - 5y_1\right), \quad \text{т.е.} \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{5}{4}\frac{dy_1}{dx} - \frac{9}{4}y_1$$

Подставляя полученное для $\frac{dy_2}{dx}$ выражение в соотношение (1.71), имеем

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = 5 \cdot \frac{dy_1}{dx} + 4\left(\frac{5}{4} \cdot \frac{dy_1}{dx} - \frac{9}{4}y_1\right).$$

Таким образом, приходим к уравнению второго порядка с одной неизвестной функцией y_1:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} - 10\frac{dy_1}{dx} + 9y_1 = 0.$$

Решая его, находим

$$y_1 = C_1e^x + C_2e^{9x}.$$

Тогда

$$y_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{dy_1}{dx} - 5y_1\right) = \frac{1}{4}\left(C_1e^x + 9C_2e^{9x} - 5C_1e^x - 5C_2e^{9x}\right) = -C_1e^x + C_2e^{9x}$$

Итак, общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = C_1e^x + C_2e^{9x}, \\ y_2 = -C_1e^x + C_2e^{9x}. \end{cases}$$

Рассмотрим еще один метод решения нормальной системы ДУ (1.58), когда она представляет собой **систему линейных однородных ДУ с постоянными коэффициентами**, т.е. систему вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{cases} \tag{1.72}$$

Для простоты рассмотрим систему трех уравнений с тремя неизвестными функциями y_1, y_2, y_3:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3, \end{cases} \tag{1.73}$$

где $a_{ij}(i, j = 1,2,3)$ - постоянные коэффициенты.

Будем искать частное решение системы (1.73) в виде

$$y_1 = \alpha \cdot e^{kx},\ y_2 = \beta \cdot e^{kx},\ y_3 = \gamma \cdot e^{kx}, \tag{1.74}$$

где α, β, γ, k - постоянные, которые надо подобрать так, чтобы функции (1.74) удовлетворяли системе (1.73).

Подставив эти функции в систему (1.73) и сократив на множитель $e^{kx} \neq 0$, получаем:

$$\begin{cases} \alpha \cdot k = a_{11} \cdot \alpha + a_{12} \cdot \beta + a_{13} \cdot \gamma, \\ \beta \cdot k = a_{21} \cdot \alpha + a_{22} \cdot \beta + a_{23} \cdot \gamma, \\ \gamma \cdot k = a_{31} \cdot \alpha + a_{32} \cdot \beta + a_{33} \cdot \gamma \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (a_{11}-k)\alpha + a_{12}\cdot\beta + a_{13}\cdot\gamma = 0, \\ a_{21}\cdot\alpha + (a_{22}-k)\cdot\beta + a_{23}\cdot\gamma = 0, \\ a_{31}\cdot\alpha + a_{32}\cdot a_{32}\cdot\beta + (a_{33}-k)\gamma = 0. \end{cases} \qquad (1.75)$$

Система (1.75) – однородная система линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными α, β, γ имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k \end{vmatrix} = 0. \qquad (1.76)$$

<u>**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.39**</u> Уравнение (1.76) называется **характеристическим уравнением** системы (1.73).

Уравнение (1.76) является уравнением третьей степени относительно k. Рассмотрим возможные случаи.

<u>СЛУЧАЙ 1</u>. Корни (1.76) действительные и различные $k_1 \neq k_2 \neq k_3$. Для каждого корня $k_i\,(i=1,2,3)$ напишем систему (1.75) и определим коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ (один из коэффициентов можно считать равным единице).

Получаем частные решения системы (1.73):

для корня k_1: $y_1^{(1)} = \alpha_1 \cdot e^{k_1 x}$, $y_2^{(1)} = \beta_1 \cdot e^{k_1 x}$, $y_3^{(1)} = \gamma_1 \cdot e^{k_1 x}$;

для корня k_2: $y_1^{(2)} = \alpha_2 \cdot e^{k_2 x}$, $y_2^{(2)} = \beta_2 \cdot e^{k_2 x}$, $y_3^{(2)} = \gamma_2 \cdot e^{k_2 x}$;

для корня k_3: $y_1^{(3)} = \alpha_3 \cdot e^{k_3 x}$, $y_2^{(3)} = \beta_3 \cdot e^{k_3 x}$, $y_3^{(3)} = \gamma_3 \cdot e^{k_3 x}$.

Эти функции образуют фундаментальную систему решений и общее решение системы (1.73) записываются в виде:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1\alpha_1 e^{k_1 x} + C_2\cdot\alpha_2\cdot e^{k_2 x} + C_3\cdot\alpha_3\cdot e^{k_3 x}, \\ y_2 &= C_1\beta_1 e^{k_1 x} + C_2\cdot\beta_2\cdot e^{k_2 x} + C_3\cdot\beta_3\cdot e^{k_3 x}, \\ y_3 &= C_1\gamma_1 e^{k_1 x} + C_2\cdot\gamma_2\cdot e^{k_2 x} + C_3\cdot\gamma_3\cdot e^{k_3 x}. \end{aligned} \qquad (1.77)$$

<u>СЛУЧАЙ 2.</u> Характеристическое уравнение (1.76) имеет корень k кратности m (m=2;3). Решение системы, соответствующее кратному корню, ищем в виде:

а) если m=2, то $y_1 = (A+Bx)e^{kx}$, $y_2 = (C+Dx)e^{kx}$, $y_3 = (E+Fx)e^{kx}$;

б) если m=3, то $y_1 = \left(A + Bx + Cx^2\right)e^{kx}$, $y_2 = \left(D + Ex + Fx^2\right)e^{kx}$, $y_3 = \left(G + Hx + Nx^2\right)e^{kx}$.

Это решение зависит от m произвольных постоянных A, B, C,…, N, которые определяются методом неопределенных коэффициентов. Выразив все коэффициенты через m из них, полагаем поочередно один из них равным единице, а остальные равными нулю. Получим m линейно независимых частных решений системы (1.73).

СЛУЧАЙ 3. Корни характеристического уравнения различные, но среди них есть комплексные: $k_1 = a + b_i, k_2 = a - b_i, k_3$. Вид частных решений:

для k_1: $y_1^{(1)} = \alpha_1 \cdot e^{ax} \cdot \cos bx$, $y_2^{(1)} = \beta_1 \cdot e^{ax} \cdot \cos bx$, $y_3^{(1)} = \gamma_1 \cdot e^{ax} \cdot \cos bx$;

для k_2: $y_1^{(2)} = \alpha_2 \cdot e^{ax} \cdot \sin bx$, $y_2^{(2)} = \beta_2 \cdot e^{ax} \cdot \sin bx$, $y_3^{(2)} = \gamma_2 \cdot e^{ax} \cdot \sin bx$;

для k_3: $y_1^{(3)} = \alpha_3 \cdot e^{k_3 x}$, $y_2^{(3)} = \beta_3 \cdot e^{k_3 x}$, $y_3^{(3)} = \gamma_3 \cdot e^{k_3 x}$.

Общее решение имеет вид:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 \cdot \alpha_1 \cdot e^{ax} \cdot \cos bx + C_2 \cdot \alpha_2 \cdot e^{ax} \cdot \sin bx + C_3 \cdot \alpha_3 \cdot e^{k_3 x}, \\ y_2 &= C_1 \cdot \beta_1 \cdot e^{ax} \cdot \cos bx + C_2 \cdot \beta_2 \cdot e^{ax} \cdot \sin bx + C_3 \cdot \beta_3 \cdot e^{k_3 x}, \\ y_3 &= C_1 \cdot \gamma_1 \cdot e^{ax} \cdot \cos bx + C_2 \cdot \gamma_2 \cdot e^{ax} \cdot \sin bx + C_3 \cdot \gamma_3 \cdot e^{k_3 x}. \end{aligned} \tag{1.78}$$

ПРИМЕР 1.32 Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -4y_1 + y_2. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ -4 & 1-k \end{vmatrix} = 0$, его корни $k_1 = -1$, $k_2 = 3$.

Частные решения ищем в виде $y_1^{(1)} = \alpha_1 \cdot e^{k_1 x}$, $y_2^{(1)} = \beta_1 \cdot e^{k_1 x}$ и $y_1^{(2)} = \alpha_2 \cdot e^{k_2 x}$, $y_2^{(2)} = \beta_2 \cdot e^{k_2 x}$. Найдем α_i и β_i $(i = 1,2)$.

При $k_1 = -1$ система (1.75) имеет вид

$$\begin{cases} (1-(-1))\alpha_1 - \beta_1 = 0, \\ -4\alpha_1 + (1-(-1))\beta_1 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2\alpha_1 - \beta_1 = 0, \\ -4\alpha_1 + 2\beta_1 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет бесчисленное множество решений. Пусть $\alpha_1 = 1$, тогда $\beta_1 = 2$. Получаем частные решения $y_1^{(1)} = e^{-x}$, $y_2^{(1)} = 2e^{-x}$.

При k_2=3 система (1.75) имеет вид $\begin{cases} -2\alpha_2 - \beta_2 = 0 \\ -4\alpha_2 - 2\beta_2 = 0. \end{cases}$

Пусть $\alpha_2 = 1$, тогда $\beta_2 = -2$. Тогда корню k_2=3 соответствуют частные решения: $y_1^{(2)} = e^{3x}$ и $y_2^{(2)} = -2e^{3x}$.

Общее решение исходной системы $\begin{matrix} y_1 = C_1 \cdot y_1^{(1)} + C_2 \cdot y_1^{(2)} \\ y_2 = C_1 \cdot y_2^{(1)} - C_2 \cdot y_2^{(2)} \end{matrix}$ имеет вид:

$$y_1 = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{3x}$$
$$y_2 = 2 \cdot C_1 \cdot e^{-x} - 2C_2 e^{3x}.$$

1.16 ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Составить ДУ – значит найти математическую зависимость между переменными величинами и их приращениями.

При решении **геометрических задач** на составление ДУ прежде всего строят чертеж, обозначают искомую кривую через y=y(x) и выражают все входящие в задачу величины через x,y, и y'. При этом обычно используется геометрический смысл производной ($y'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной к кривой y=y(x) в точке x_0). Затем, используя указанную в условии зависимость между этими величинами, получают ДУ $f(x, y, y') = 0$, из которого находят искомую функцию y(x).

Опыт решения **физических, механических и инженерно – технических задач** показывает, что процесс их решения включает общие моменты, что позволяет привести общую схему составления ДУ по условиям прикладных задач:

1. По возможности составить чертеж, поясняющий суть поставленной задачи.
2. Установить, какая из переменных является функцией, какая – её аргументом. Например, y=y(x).
3. Для определения приращения функции Δy задать аргументу приращение Δx.
4. Исследовать конкретный смысл производной искомой функции.
5. Установить, каким законам (механики, физики и др.) подчиняется течение изучаемого процесса.
6. Найти соотношение между дифференциалом dy искомой функции, дифференциалом dx и самим аргументом x. При этом можно делать упрощающие допущения, например, заменить криволинейный элемент прямолинейным, неравномерное движение точки за малый промежуток времени – равномерным.

Следует помнить при этом, что замена одних бесконечно малых другими требует обязательного соблюдения эквивалентности заменяющего и заменяемого бесконечно малых элементов.

7. Выделить в постановке задачи те условия, согласно которым нужно решить полученное ДУ (например, начальные и граничные условия).

8. Определить, по мере необходимости, вспомогательные параметры (например, коэффициент пропорциональности) на основании дополнительных данных в условии задачи.

Приведенная схема может быть сокращена или расширена в процессе решения конкретных задач физики, механики, химии, теплотехники, теории упругости, экономики.

Решение таких задач подробно рассмотрено в следующем разделе.

1.17 ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Многие задачи механики и физики могут быть сведены к дифференциальным уравнениям в частных производных. Математическими моделями реальных процессов являются краевые задачи для дифференциальных уравнений при определенных граничных и начальных условиях. При этом оказывается, что одно и то же уравнение может описывать совершенно различные по своей природе явления и процессы. Поэтому при исследовании довольно широкого круга задач механики и физики требуется сравнительно небольшое число различных видов дифференциальных уравнений. Изучением таких уравнений, методами их решения занимается раздел математики «Уравнения математической физики».

В нашем курсе мы будем заниматься уравнениями второго порядка. С помощью этих уравнений можно исследовать в первом приближении основные физические процессы: колебания, теплопроводность, диффузию, течение жидкостей и газа, электростатические явления.

Для решения своих проблем теория «Уравнений математической физики» использует различный математический аппарат: ряды Фурье, интегралы Фурье, интегральные преобразования (Лапласа, Фурье), функции комплексного переменного и др.

Специфическим для уравнений математической физики является то, что здесь постановка задач для уравнений в частных производных делается исходя из физических соображений. Процесс получения решения этих задач основывается на математических методах, но в каждом конкретном случае само решение той или иной задачи должно иметь определенную физическую интерпретацию.

1.18 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОНЯТИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.40 Уравнение, связывающее неизвестную функцию нескольких переменных и ее частные производные, называется **дифференциальным уравнением в частных производных.**

Порядок высшей частной производной, входящей в уравнение, определяет **порядок уравнения.**

Для функции $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ n независимых переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ уравнение k-го порядка имеет вид

$$F\left(x_1, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}}\right) = 0. \qquad (1.79)$$

$$k_1 + k_2 + ... + k_n = k.$$

Обычно приходится иметь дело с уравнениями для функций двух, трех, четырех переменных.

Общий вид уравнений первого и второго порядков для функции $u = u(x, y)$ двух переменных соответственно таков:

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \qquad (1.80)$$

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0, \qquad (1.81)$$

где

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Решением уравнения в частных производных (1.79) называется всякая функция $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ ($u = u(x, y)$ для уравнений (1.80), (1.81)), которая, будучи подставлена в уравнение вместо неизвестной функции и ее частных производных, обращает это уравнение в тождество по независимым переменным.

Познакомимся (без доказательства) с простейшими свойствами уравнений в частных производных на примерах некоторых их видов для функции двух переменных.

Рассмотрим для функции $u(x, y)$ уравнение первого порядка вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \qquad (1.82)$$

Ясно, что искомая функция $u(x,y)$ не зависит от переменной x, но может быть любой функцией от y:

$$u = u(x,y) = \varphi(y), \tag{1.83}$$

поскольку, дифференцируя $\varphi(y)$ по x, мы получим нуль, а это значит, что равенство (1.82) выполняется. Следовательно, решение (1.83) содержит одну произвольную функцию $\varphi(y)$. В этом и заключается коренное отличие решения уравнения в частных производных первого порядка от общего решения обыкновенного дифференциального уравнения того же порядка, которое содержит лишь произвольную постоянную. По аналогии решение (1.83), содержащее одну произвольную функцию, будем называть **общим решением уравнения** (1.82).

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(y), \tag{1.84}$$

где $f(y)$ - заданная функция. Все функции $u(x,y)$, удовлетворяющие уравнению (1.84), имеют вид

$$u(x,y) = \int f(y)dy + \psi(x), \tag{1.85}$$

где $\psi(x)$ - произвольная функция от x. Это можно проверить, дифференцируя обе части равенства (1.85) по y. Найденное решение данного уравнения зависит от одной произвольной функции $(\psi(x))$, т.е. является общим.

Рассмотрим теперь уравнение второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0. \tag{1.86}$$

Положим, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = v$, после чего уравнение (1.86) примет вид $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$. Однако, как установлено, общее решение уравнения $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$ имеет вид (1.83), т.е. $v = f(y)$, где $f(y)$ - произвольная функция. Исходное уравнение (1.86) перепишем так:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(y).$$

Согласно (1.85) его общим решением будет функция

$$u(x,y)=\int f(y)dy+\psi(x).$$

Так как $f(y)$ - произвольная функция, то интеграл от нее будет также произвольной функцией y, которую обозначим через $\varphi(y)$. В результате решение принимает вид

$$u(x,y)=\psi(x)+\varphi(y), \tag{1.87}$$

где $\psi(x)$, $\varphi(y)$ - произвольные дифференцируемые функции. Легко проверить, что функция вида (1.87) удовлетворяет уравнению (1.86).

Итак, решение (1.87) уравнения (1.86) второго порядка содержит уже две произвольные функции. Такое решение называется **общим.**

Приведенные уравнения дают основание сделать заключение: общее решение уравнения первого порядка в частных производных содержит одну произвольную функцию, а общее решение уравнения второго порядка – две произвольные функции.

Позже будет выяснено, какие дополнительные условия надо задать, чтобы с их помощью можно было выделить частное решение, т.е. функцию, удовлетворяющую как уравнению, так и дополнительным условиям.

1.19 ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА И СВОЙСТВА ИХ РЕШЕНИЙ

Многие задачи физики, механики и техники приводят к дифференциальным уравнениям в частных производных второго порядка, причем линейных относительно искомой функции и ее частных производных.

Общий вид **линейного дифференциального уравнения второго порядка** при условии, что функция u зависит от двух переменных x и y, таков:

$$\begin{aligned}&A(x,y)u_{xx}+2B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}+D(x,y)u_x+\\&+E(x,y)u_y+F(x,y)\cdot u=f(x,y),\end{aligned} \tag{1.88}$$

где A, B, C, D, E, F, f - данные непрерывные функции, определяемые в некоторой области G переменных x и y, причем A, B, C имеют непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно.

Чаще всего коэффициенты перед искомой функцией $u(x,y)$ и ее производными – числа.

Если в уравнении (1.88) $f(x,y)\equiv 0$, то уравнение называется **однородным**; если $f(x,y)\neq 0$, то уравнение называется **неоднородным.**

Обсудим особенность решений однородного уравнения

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F \cdot u = 0. \qquad (1.89)$$

Решения линейных однородных уравнений вида (1.89) обладают следующим свойством.

Если каждая из функций $u_1(x, y), u_2(x, y), \ldots, u_k(x, y)$ является решением уравнения (1.89), то и их линейная комбинация

$$C_1 u_1(x, y) + C_2 u_2(x, y) + \ldots + C_k u_k(x, y), \qquad (1.90)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_k$ - произвольные постоянные, также является решением этого уравнения.

Это утверждение легко проверить, подставив в уравнение (1.89) вместо $u(x, y)$ выражение (1.90) и производные $u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx}, u_{yy}$ указанной линейной комбинации.

Такое же свойство, как известно, имеет место для обыкновенных дифференциальных уравнений, но $n-$го порядка.

Уравнение же в частных производных может иметь бесконечное множество линейно независимых частных решений, т.е. такое множество решений, любое конечное число которых является функциями линейно независимыми. (Напомним, система функций $u_1(x, y), \ldots, u_n(x, y)$ называется **линейно независимой**, если ни одна из этих функций не является линейной комбинацией остальных). В соответствии с этим имеют дело с рядами, членами которых служат произведения произвольных постоянных на частные решения:

$$C_1 u_1(x, y) + C_2 u_2(x, y) + \ldots + C_n u_n(x, y) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x, y). \qquad (1.91)$$

Будем рассматривать только такие ряды, суммы которых есть непрерывные функции

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x, y).$$

Кроме того, будем предполагать, что эти ряды можно дважды почленно дифференцировать. При таких предположениях функция $u(x, y)$, которая есть сумма ряда (1.91), так же как и члены ряда, является решением уравнения (1.89).

1.20 КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ПРИВЕДЕНИЕ ИХ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Линейные уравнения второго порядка в частных производных делят на три класса, в каждом из которых есть простейшие уравнения, называемые каноническими. Решения уравнений одного и того же класса имеют много общих свойств. Для изучения этих свойств достаточно рассмотреть канонические уравнения, так как другие уравнения данного типа могут быть приведены к каноническому виду.

Запишем линейное относительно производных второго порядка уравнение (1.88) в более краткой форме:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \qquad (1.92)$$

Классификация уравнений вида (1.92) проводится в соответствии со знаком дискриминанта $\Delta = B^2 - AC$.

Если в некоторой области $G_1 \subset G$ выражение $B^2 - AC$ сохраняет знак, то уравнение (1.92) в этой области принадлежит:

а) к гиперболическому типу, если $B^2 - AC > 0$;

б) параболическому типу, если $B^2 - AC = 0$;

в) эллиптическому типу, если $B^2 - AC < 0$.

ПРИМЕР. Определить тип уравнения

$$y^2 u_{xx} + xyu_{xy} + x^2 u_{yy} = 0.$$

<u>Решение.</u> Здесь $A = y^2$, $B = xy$, $C = x^2$ и $B^2 - AC = x^2y^2 - x^2y^2 = 0$ для любых x и y. Значит, на всей плоскости, а следовательно и в некоторой области задания, данное уравнение является уравнением параболического типа.

Если уравнение рассматривается в области задания G, то указанные три типа не всегда дают исчерпывающую классификацию, так как выражение $B^2 - AC$ может не сохранять знак во всей области. Тогда должна существовать кривая L, вдоль которой выражение $B^2 - AC = 0$; эта кривая называется **линией параболического вырождения.** При этом возможны два случая:

1) во всех точках G, кроме L, $B^2 - AC$ сохраняет знак, тогда уравнение (1.92) называется уравнением гиперболического или эллиптического типа с линией вырождения L;
2) выражение $B^2 - AC$ меняет знак в области G, тогда уравнение (1.92) называется уравнением смешанного типа.

ПРИМЕР. Определить тип уравнения

$$(1 - x^2)u_{xx} - 2xyu_{xy} - (1 + y^2)u_{yy} - 2xu_x - 2yu_y = 0.$$

Решение. Здесь $A = 1 - x^2$, $B = -xy$, $C = -(1 + y^2)$ и, следовательно, $\Delta = B^2 - AC = x^2y^2 + (1 - x^2)(1 + y^2) = 1 - x^2 + y^2$. Дискриминант Δ равен нулю, когда $1 - x^2 + y^2 = 0$. Значит, гипербола $x^2 - y^2 = 1$ является линией параболического вырождения, а данное уравнение относится к смешанному типу, причем области G_1, где $\Delta > 0$ $(x^2 - y^2 < 1)$, и G_2, где $\Delta < 0$ $(x^2 - y^2 > 1)$, являются областями гиперболичности и эллиптичности.

Уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{1.93}$$

называется **каноническим уравнением гиперболического типа.**

Второй канонический вид уравнения гиперболического типа таков:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{1.94}$$

Уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{1.95}$$

называется **каноническим уравнением параболического типа.**

Уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{1.96}$$

называется **каноническим уравнением эллиптического типа.**

Уравнение (1.92) в каждой из областей, где сохраняется знак дискриминанта Δ, может быть приведено к уравнению, эквивалентному данному, а именно к каноническому, путем введения вместо x и y новых переменных ξ и η с помощью зависимостей

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y). \tag{1.97}$$

При этом от функций $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ требуется, чтобы они были дважды непрерывно дифференцируемыми и чтобы якобиан D, т.е. функциональный определитель

$$D = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$$

в рассматриваемой области G. Выражая производные, входящие в уравнение (1.92), по старым переменным через производные по новым переменным, приходят к уравнению

$$\begin{gathered} \overline{A}(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\overline{B}(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \overline{C}(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \\ + \overline{F}_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0, \end{gathered} \tag{1.98}$$

где

$$\overline{A}(\xi,\eta) = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2,$$

$$\overline{B}(\xi,\eta) = A\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + C\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\overline{C}(\xi,\eta) = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2.$$

Непосредственной подстановкой нетрудно проверить, что

$$\overline{B}^2 - \overline{A}\cdot\overline{C} = \left(B^2 - AC\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2.$$

Из последнего соотношения следует инвариантность типа уравнения при преобразовании переменных, если только якобиан $D = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x$ отличен от нуля.

В преобразовании (1.97) две функции $\xi(x,y)$ и $\eta(x,y)$ можно выбрать так, чтобы выполнялось только одно из условий: 1) $\overline{A} = 0,\ \overline{C} = 0$, 2) $\overline{A} = 0,\ \overline{B} = 0$, 3) $\overline{A} = \overline{C},\ \overline{B} = 0$. Другими словами, функции $\xi(x,y)$ и $\eta(x,y)$ подбираются такими, чтобы в уравнении гиперболического типа исчезли члены с производными u_{xx}, u_{yy}, в уравнении параболического типа исчезли члены с производными u_{xx}, u_{xy}, в уравнении эллиптического типа - u_{xy}. Тогда, очевидно, преобразованное уравнение (1.98) примет наиболее простой вид – канонический.

Обоснование процедуры канонизации уравнения вида (1.92) мы не приводим; читатель может познакомиться с ним в книгах /1,3/. Здесь же излагается формальная сторона этой процедуры.

Для приведения уравнения (1.92) к каноническому виду надо составить вспомогательное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$A(dy)^2 - 2Bdxdy + C(dx)^2 = 0, \tag{1.99}$$

которое называется **характеристическим** для данного уравнения (1.92).

Характеристическое уравнение (1.99) распадается на два уравнения:

$$Ady - \left(B + \sqrt{B^2 - AC}\right)dx = 0 \ \ (\text{или } \frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}), \tag{1.100}$$

$$Ady - \left(B - \sqrt{B^2 - AC}\right)dx = 0 \ \ (\text{или } \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}). \tag{1.101}$$

Общие интегралы уравнений (1.100) и (1.101)

$$\varphi(x, y) = C_1 \ \text{ и } \ \psi(x, y) = C_2$$

называют **характеристиками** данного уравнения (1.92) или характеристическими кривыми. (В связи с этим рассматриваемый метод упрощения уравнения (1.92) называют **методом характеристик**).

Через каждую точку области G, где уравнение имеет один и тот же тип, проходят две характеристики, причем для уравнений гиперболического типа характеристики действительны и различны, для уравнений эллиптического типа – комплексны и различны, а для уравнений параболического типа обе характеристики действительны и совпадают.

Разберем каждый из этих случаев в отдельности.

СЛУЧАЙ 1. Для уравнений гиперболического типа $B^2 - AC > 0$ и правые части уравнений (1.100) и (1.101) действительны и различны. Общие интегралы их $\varphi(x, y) = C_1$ и $\psi(x, y) = C_2$ определяют два различных семейства действительных кривых – характеристик уравнения (1.92).

В этом случае, как установлено, для приведения уравнения (1.92) к каноническому виду следует сделать замену переменных, положив

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \varphi(x, y),$$

в результате чего исходное уравнение преобразуется в уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \Phi_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

Таким образом, получается каноническая форма уравнения гиперболического типа.

Отметим, что с помощью дополнительной замены ($\alpha = \dfrac{\xi + \eta}{2}$, $\beta = \dfrac{\xi - \eta}{2}$, где α и β - новые переменные) уравнение (1.92) может быть приведено к другой канонической форме:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}=\overline{\Phi}_1\left(\alpha,\beta,u,u_\alpha,u_\beta\right).$$

СЛУЧАЙ 2. Для уравнений параболического типа $B^2-AC=0$, поэтому уравнения (1.100), (1.101) совпадают и результатом их решения является один действительный интеграл $\varphi(x,y)=C$.

В этом случае для приведения уравнения (1.92) к каноническому виду в качестве одной из переменной, например, ξ, берут

$$\xi=\varphi(x,y),$$

другая же переменная выбирается произвольно:

$$\eta=\eta(x,y)$$

(например, $\eta=x$), лишь бы только якобиан

$$D=\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}\neq 0.$$

При таком выборе новых переменных ξ и η уравнение (1.92) принимает канонический вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=\Phi_2\left(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta\right).$$

СЛУЧАЙ 3. Для уравнений эллиптического типа $B^2-AC<0$. В этом случае правые части уравнений (1.100) и (1.101) комплексны, а интегралы их будут комплексно-сопряженные. Они определяют два семейства мнимых характеристик.

Пусть общий интеграл уравнения (1.100) имеет вид

$$\varphi(x,y)\equiv\varphi_1(x,y)+i\varphi_2(x,y)=C_1,$$

где $\varphi(x,y)$ - функция, принимающая комплексные значения, а функции $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ - действительные функции действительных переменных. Другой общий интеграл (уравнения (1.101) будет комплексно - сопряженным с указанным.

Если положить

$$\xi=\varphi_1(x,y),\quad \eta=\varphi_2(x,y),$$

то уравнение (1.92) принимает канонический вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=\Phi_3\left(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta\right).$$

Примечание. После выбора новых переменных ξ и η требуется преобразовать производные, входящие в данное уравнение, к новым переменным. Напомним, что первые производные по старым переменным x и y выражаются через производные по новым переменным ξ и η по известным формулам дифференцирования сложной функции:

$$u_x=u_\xi\cdot\xi_x+u_\eta\cdot\eta_x,\quad u_y=u_\xi\cdot\xi_y+u_\eta\cdot\eta_y.$$

Вторые производные находятся путем дифференцирования выражений для u_x и u_y, так как

$$u_{xx} = (u_x)_x,\ u_{xy} = (u_x)_y = (u_y)_x = u_{yx},\ u_{yy} = (u_y)_y;$$

при этом при отыскании $(u_x)_x$, $(u_x)_y$, $(u_y)_y$ опять применяется правило дифференцирования сложной функции.

ПРИМЕР. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Решение. Здесь $A = x^2$, $B = xy$, $C = y^2$ и $B^2 - AC = x^2y^2 - x^2y^2 = 0$. Значит данное уравнение является уравнением параболического типа всюду.

Составим характеристическое уравнение

$$x^2(dy)^2 - 2xydxdy + y^2(dx)^2 = 0,$$

которое можно записать в виде

$$(xdy - ydx)^2 = 0,$$

откуда получаем

$$xdy - ydx = 0.$$

Разделяя переменные в этом уравнении $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$, после интегрирования его найдем

$$\ln y - \ln x = \ln C \ \text{ или } \ \frac{y}{x} = C_1.$$

В соответствии с рассмотренным СЛУЧАЕМ 2 делаем замену переменных следующим образом:

$$\xi = \frac{y}{x},\ \eta = y.$$

Так как функция $\eta = y$ выбиралась произвольно, то надо проверить выполнимость условия

$$D = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Найдем $\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \eta}{\partial y} = 1$.

Тогда

$$D = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{y}{x^2} \neq 0.$$

Выразим u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} через новые переменные ξ и η.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi}+0\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}=-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=\frac{2y}{x^3}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=$$

$$=\frac{2y}{x^3}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{y^2}{x^4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi}+1\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}=\frac{1}{x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot 1\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot 1+\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}=$$

$$=\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{2}{x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=$$

$$=-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{y}{x^3}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}.$$

Значения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ подставим в данное уравнение:

$$\frac{2y}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{y^2}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{y}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{2y^2}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{2y^2}{x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{y^2}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+$$

$$+2\frac{y^2}{x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0,$$

откуда получаем

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0.$$

1.21 ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

К основным уравнениям математической физики относятся следующие уравнения в частных производных второго порядка, которые являются частными случаями уравнения (1.88).

1. Волновое и телеграфное уравнения

Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x, y, z, t), \qquad (1.102)$$

где c - скорость распространения волны в данной среде, называется **волновым уравнением.**

В приведенном уравнении x, y, z обозначают декартовы координаты точки, t - время.

Для двумерного пространства (плоский случай) волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x, y, t). \qquad (1.103)$$

В одномерной области уравнение (1.102) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t). \qquad (1.104)$$

Волновое уравнение описывает процессы распространения упругих, звуковых, световых, электромагнитных волн, а также другие колебательные явления. Например, волновое уравнение может описать:

а) малые поперечные колебания струны (при этом под $u = u(x, t)$ понимают поперечное отклонение точки x струны от положения равновесия в момент времени t; при каждом фиксированном значении t график струны $u = u(x, t)$ на плоскости xOu дает форму струны в этот момент времени);

б) продольные колебания упругого стержня (u - продольное отклонение частицы от ее положения при отсутствии деформации);

в) малые упругие колебания плоской пластины, мембраны;

г) течение жидкости или газа в коротких трубах, когда трением о стенки трубы можно пренебречь (u - давление или расход).

Уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B\frac{\partial u}{\partial t} + C \cdot u \qquad (1.105)$$

называется **телеграфным уравнением.** Оно описывает электрические колебания в проводах (u - сила тока или напряжение), неустановившееся течение жидкости или газа в трубах (u - давление или скорость).

Волновое и телеграфное уравнения входят в группу уравнений гиперболического типа.

2. Уравнение теплопроводности

Уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{1.106}$$

где a - параметр, учитывающий физические свойства изучаемой среды, называется **уравнением теплопроводности.**

Оно имеет вид для плоского случая

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{1.107}$$

для одномерного

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.108}$$

Уравнением теплопроводности описываются процессы нестационарного массо- и теплообмена. В частности, к этим уравнениям приводят задачи о неустановившемся режиме распространения тепла (при этом a^2 означает коэффициент температуропроводности, а u - температуру в любой точке исследуемой области в любой момент времени t); о фильтрации упругой жидкости в упругой пористой среде, например, фильтрация нефти и газа в подземных песчаниках ($a^2=\chi$ - коэффициент пьезопроводности, u - давление в любой точке среды); о неустановившейся диффузии ($a^2=D$ - коэффициент диффузии, u - концентрация); о течении жидкости в магистральных трубопроводах (u - давление или скорость жидкости).

Если при рассмотрении этих задач окажется, что в исследуемой области функционируют внутренние источники и стоки массы или тепла, то процесс описывается неоднородным уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t}+f(x,y,z,t)=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{1.109}$$

где функция $f(x,y,z,t)$ характеризует интенсивность функционирующих источников.

Уравнения (1.106)…(1.109) являются простейшими уравнениями параболического типа.

3. Уравнения Лапласа и Пуассона
Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,y,z) \qquad (1.110)$$

называется **уравнением Пуассона** в трехмерном пространстве. Если в этом уравнении $f(x,y,z)\equiv 0$, то оно называется **уравнением Лапласа:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \qquad (1.111)$$

Если ввести оператор $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, называемый **оператором Лапласа**, то уравнения (1.110) и (1.111) запишутся соответственно

$$\Delta u=f(x,y,z) \qquad \text{и} \qquad \Delta u=0.$$

К исследованию уравнений Лапласа и Пуассона приводит рассмотрение задач о стационарном процессе: это задачи гидродинамики, диффузии, фильтрации, распределения температуры, электростатики и др.

Эти уравнения относятся к уравнениям эллиптического типа.

Те задачи, которые приводят к уравнениям, содержащим время, называются **динамическими** или **нестационарными** задачами математической физики; задачи, приводящие к уравнениям, не содержащим время, называются **стационарными** или **статическими.**

1.22 О ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ЕЕ КОРРЕКТНОСТИ

Как было показано, уравнения математической физики имеют бесчисленное множество решений, зависящее от двух произвольных функций (речь идет об уравнениях второго порядка для функции двух переменных). Для того, чтобы из множества решений выделить определенное, характеризующее процесс, необходимо на искомую функцию наложить дополнительные условия, которые диктуются физическими соображениями. Тут можно провести аналогию с обыкновенными дифференциальными уравнениями, когда для выделения из общего решения частного, удовлетворяющего некоторым дополнительным условиям, отыскивались по этим условиям произвольные постоянные. Таковыми условиями для уравнений в частных производных являются, чаще всего, начальные и граничные условия. **Граничные условия** – это условия, заданные на границе рассматриваемой среды; **начальные условия** – условия, относящиеся к какому-нибудь моменту времени, с которого начинается изучение данного физического явления. Дополнительные условия, так же как и само дифференциальное уравнение, должны вводиться на основе физических соображений, связанных с самим процессом. Вместе с тем дополнительные условия должны быть такими, чтобы обеспечить выделение из всего множества решений единственного решения. Число граничных и начальных условий определяется типом уравнения, а их вид – заданным исходным состоянием на границе объекта и внешней среды. Для рассматриваемых нами уравнений число начальных условий равно порядку старшей производной по времени, входящей в уравнение, а число граничных условий – порядку старшей производной по координате.

Совокупность дифференциального уравнения и дополнительных условий представляет собой математическую формулировку физической задачи и называется задачей математической физики.

Физическая задача решается по схеме:

1) реальный физический процесс (явление, объект) заменяется некоторым идеальным процессом (явлением, объектом) так, что последний значительно проще первого и вместе с тем сохраняет его основные черты (идеализация процесса);
2) выбирается величина (функция), характеризующая процесс, и используются законы, по которым он происходит;
3) на основании выбранных законов выводится дифференциальное уравнение для величины, характеризующей процесс;
4) выводятся дополнительные условия – начальные и граничные – также в соответствии с выбранными законами.

Итак, задача математической физики состоит в отыскании решений уравнений в частных производных, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, скажем, граничным и начальным.

Задача математической физики считается поставленной корректно, если решение задачи, удовлетворяющее всем ее условиям, существует, единственно и устойчиво; последнее означает, что малые изменения любого из данных задачи вызывают малое изменение решения. Требование устойчивости необходимо по следующей причине. В данных любой конкретной задачи, особенно если они получены из опыта, всегда содержится некоторая погрешность, и нужно, чтобы малая погрешность в исходных данных приводила к малой неточности в решении. Это требование выражает физическую определенность поставленной задачи.

1.23 УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВЫВОД УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

Рассмотрим натянутую струну, закрепленную на концах. Если струну вывести из положения равновесия (например, оттянуть ее или ударить по ней), то струна начнет колебаться.

Будем рассматривать только поперечные колебания, т.е. такие, когда движение всех точек струны происходит в одной плоскости и в направлении, перпендикулярном положению равновесия. Если положение равновесия принять за ось Ox, то процесс будет характеризоваться одной скалярной величиной $u = u(x, t)$ - отклонением от положения равновесия точки струны x в момент времени t. Поэтому, чтобы знать положение любой точки x струны в произвольный момент времени t, нужно найти зависимость u от x и t, т.е. найти функцию $u(x, t)$.

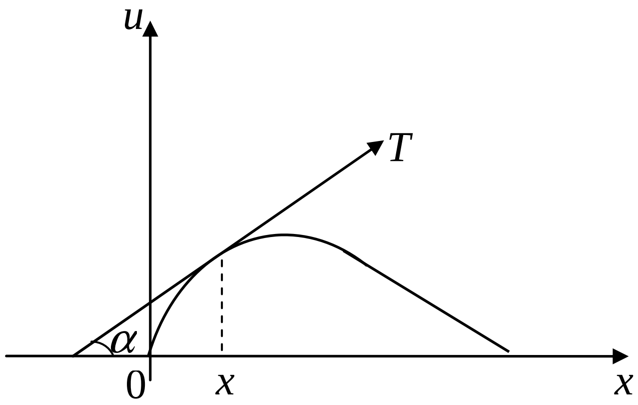


Рис. 1.2

При каждом фиксированном значении t график функции $u(x, t)$ представляет форму струны в этот момент времени. Частная производная $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x(x, t)$ дает при этом угловой коэффициент касательной в точке с абсциссой x (рис. 1.2). При постоянном значении x функция $u(x, t)$ дает закон движения точки с абсциссой x вдоль прямой, параллельной оси Ou, производная $\frac{\partial u}{\partial t} = u'_x(x, t)$ - скорость этого движения, а вторая производная $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ - ускорение. Задача состоит в том, чтобы составить уравнение, которому должна удовлетворять функция $u(x, t)$.

Для решения данной задачи сделаем несколько предположений.

А. Будем считать струну абсолютно гибкой, т.е. не сопротивляющейся изгибу; это означает, что если удалить часть струны, лежащую по одну сторону от какой-либо ее точки, то сила натяжения T, заменяющая действие удаленной части, всегда будет направлена по касательной к струне (рис. 1.2).

Б. Струна упругая, вследствие чего возникают лишь силы натяжения, которые подчинены закону Гука: натяжение струны пропорционально ее удлинению.

В. Пренебрегаем толщиной струны, т.е. считаем ее нитью.

Г. На струну в плоскости колебания действуют силы, параллельные оси Ou, которые могут меняться вдоль струны со временем. Будем считать, что эти силы непрерывно распределены вдоль струны. Величину силы, направленной вверх, условимся считать положительной, а вниз – отрицательной. Плотность распределения этих сил обозначим через $g(x, t)$. Если единственной внешней силой является вес струны, то $g(x, t) = -\rho g$, где ρ - плотность струны, а g - ускорение силы тяжести. Силами сопротивления среды, в которой колеблется струна, пренебрегаем.

Д. Будем рассматривать только малые колебания струны. Математически это означает, что отклонения $u(x, t)$ малы и, следовательно, угловой коэффициент струны $u'_x(x, t) = tg\alpha$ (угол $\alpha = \alpha(x, t)$) в любой момент времени t столь мал, что квадратом углового коэффициента $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ можно пренебречь в сравнении с единицей).

Е. Величину силы натяжения T можно считать постоянной, не зависящей ни от точки x ее приложения, ни от времени t.

Дадим обоснование этому допущению. Выделим произвольный участок (x_1, x_2) струны, который при колебании струны деформируется в участок $\overset{\cup}{M_1M_2}$ (рис. 1.3). Длина S' дуги $\overset{\cup}{M_1M_2}$ в момент времени t равна:

$$S' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx \approx \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1 = S.$$

Следовательно, при предположении п. Д в процессе колебания удлинения участков струны не происходит. Отсюда, в силу закона Гука, следует, что величина натяжения T в каждой точке остается неизменной во времени. Покажем также, что натяжение не зависит и от x, т.е. $T(x) = T_0 = \text{const}$. Действительно, на участок струны M_1M_2 действуют силы натяжения $\overline{T}(x_1)$ и $\overline{T}(x_2)$, направленные по касательным к струне в точках M_1 и M_2, внешние силы и силы инерции. Воспользуемся принципом кинетостатики, на основании которого все силы должны уравновешиваться (принцип Даламбера). Согласно принципу Даламбера сумма проекций на ось Ox всех сил равна нулю. Так как рассматриваются только поперечные колебания, то внешние силы и силы инерции направлены по оси Ou и потому сумма проекций сил запишется так:

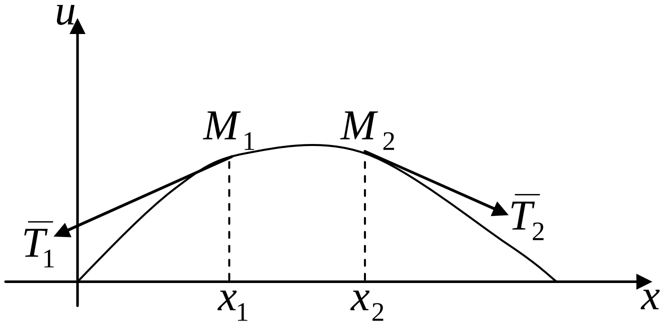


Рис. 1.3

$$\text{Пр}_{Ox}\overline{T}(x_1) + \text{Пр}_{Ox}\overline{T}(x_2) = 0.$$

Но $\text{Пр}_{Ox}\overline{T}(x_1) = -T(x_1)\cos\alpha(x_1)$, $\text{Пр}_{Ox}\overline{T}(x_2) = T(x_2)\cos\alpha(x_2)$, где $\alpha(x)$ - угол между касательной в точке с абсциссой x к струне в момент t с положительным направлением оси Ox. Итак, имеем

$$T(x_2)\cos\alpha(x_2) - T(x_1)\cos\alpha(x_1) = 0.$$

Учитывая малость колебаний, $\cos\alpha(x)$ можно заменить:

$$\cos\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx 1.$$

Тогда получим, что $T(x_1) \approx T(x_2)$. Отсюда, ввиду произвольности x_1 и x_2, следует, что величина натяжения не зависит от x. Таким образом, можно считать, что $T \approx T_0$ при всех значениях x и t.

Перейдем теперь к выводу уравнения колебания струны при сделанных допущениях (см. пп. А – Е).

Составим сумму проекций всех сил на ось Ou: сил натяжения, внешних сил и сил инерции.

Сумма проекций на ось Ou сил натяжения, действующих в точках M_1 и M_2, запишется в виде

$$Y = T(x_2)\sin\alpha(x_2) - T(x_1)\sin\alpha(x_1) \approx T_0(\sin\alpha(x_2) - \sin\alpha(x_1)).$$

Вследствие предположения п. Д

$$\sin\alpha(x) = \frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha(x)}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Следовательно, $Y = T_0\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1}\right)$.

Замечая, что $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$,

окончательно получаем

$$Y = T_0 \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx. \tag{1.112}$$

Обозначим через $g(x,t)$ внешнюю силу, действующую на струну параллельно оси Ou и рассчитанную на единицу длины. Тогда проекция на ось Ou внешней силы, действующей на участок M_1M_2, будет равна

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} g(x,t)dx. \tag{1.113}$$

Обозначим через $\rho(x)$ линейную плотность струны; тогда на участок M_1M_2 будет действовать сила инерции, равная

$$-\int\limits_{x_1}^{x_2} \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx. \tag{1.114}$$

Приравнивая к нулю сумму проекций всех сил (1.112), (1.113), (.114), получим

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+g(x,t)\right]dx=0. \tag{1.115}$$

Если подынтегральная функция непрерывна, то из равенства нулю интеграла следует, что функция тождественно равна нулю в этой области. Предполагая существование и непрерывность вторых производных функции $u(x,t)$, а также непрерывность функций $\rho(x)$ и $g(x,t)$, заключаем, что в силу произвольности x_1 и x_2, подынтегральная функция должна равняться нулю для всех x и t:

$$T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+g(x,t)=0$$

или

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(x,t). \tag{1.116}$$

Это и есть искомое уравнение колебаний струны.

Если струна однородная, т.е. $\rho=\mathrm{const}$, то уравнение (1.116) обычно записывается в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), \tag{1.117}$$

где $a=\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho}}$, $f(x,t)=\dfrac{1}{\rho}g(x,t)$.

Неоднородное уравнение (1.117) называется уравнением **вынужденных колебаний** струны; если $f(x,t)\equiv 0$, т.е. внешняя сила отсутствует, то уравнение (1.117) становится однородным:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.118}$$

Уравнение (1.118) описывает свободные колебания струны без воздействия внешних усилий.

Уравнение (1.117) – одно из простейших уравнений гиперболического типа и в то же время одно из важнейших дифференциальных уравнений математической физики. К нему сводится не только рассмотренная задача, но и многие другие.

1.24 ФОРМУЛИРОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. ГРАНИЧНЫЕ И НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Одного уравнения движения (1.116) при математическом описании физического процесса недостаточно. Надо сформулировать условия, достаточные для однозначного определения процесса. При рассмотрении задачи о колебании струны дополнительные условия могут быть двух видов: начальные и граничные (краевые).

Сформулируем дополнительные условия для струны с закрепленными концами. Так как концы струны длины l закреплены, то их отклонения $u(x,t)$ в точках $x=0$ и $x=l$ должны быть равны нулю при любых t:

$$u(0;t)=0, \quad u(l,t)=0$$

или

$$u\big|_{x=0}=0, \quad u\big|_{x=l}=0. \qquad (1.119)$$

Условия (1.119) называются **граничными** условиями; они показывают, что происходит на концах струны на протяжении процесса колебания.

Очевидно, процесс колебаний будет зависеть от того, каким способом струна выводится из состояния равновесия. Удобнее считать, что струна начала колебаться в момент времени $t=0$. В начальный момент времени $(t=0)$ всем точкам струны сообщаются некоторые смещения и скорости:

$$u(x,0)=f(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=F(x)$$

или

$$u\big|_{t=0}=f(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x), \qquad (1.120)$$

где $f(x)$ и $F(x)$ - заданные функции.

Условия (1.120) называются **начальными** условиями.

Итак, физическая задача о колебаниях струны свелась к следующей математической задаче: найти такое решение уравнения (1.116) (или (1.117) или (1.118)), которое удовлетворяло бы граничным условиям (1.119) и начальным условиям (1.120). Эта задача называется смешанной краевой задачей, так как включает в себя и граничные и начальные условия. Доказано, что при некоторых ограничениях, наложенных на функции $f(x)$ и $F(x)$, смешанная задача имеет единственное решение.

Оказывается, что к задаче (1.116), (1.119), (1.120), помимо задачи о колебаниях струны, сводятся многие другие физические задачи: продольные колебания упругого стержня, крутильные колебания вала, колебания жидкостей и газа в трубе и др.

Помимо граничных условий (1.119) возможны граничные условия других типов. Наиболее распространенными являются следующие:

I. $u\big|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u\big|_{x=l} = \mu_2(t);$

II. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \nu_1(t), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \nu_2(t);$

III. $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + h_1 u\right)_{x=0} = \omega_1(t), \quad \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + h_2 u\right)_{x=l} = \omega_2(t),$

где $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ - известные функции, а h_1, h_2 - известные постоянные.

Приведенные граничные условия называют соответственно граничными условиями первого, второго, третьего рода. Условия I имеют место в том случае, если концы объекта (струна, стержень и т.д.) перемещаются по заданному закону; условия II – в случае, если к концам приложены заданные силы; условия III – в случае упругого закрепления концов.

Если функции, заданные в правой части равенств, равны нулю, то граничные условия называются **однородными.** Так, граничные условия (1.119) – однородные.

Комбинируя различные перечисленные типы граничных условий, получим шесть типов простейших краевых задач.

Для уравнения (1.116) может быть поставлена и другая задача. Пусть струна достаточно длинная и нас интересует колебание ее точек, достаточно удаленных от концов, причем в течение малого промежутка времени. В этом случае режим на концах не будет оказывать существенного влияния и поэтому его не учитывают; струну же при этом считают бесконечной. Вместо полной задачи ставят предельную задачу с начальными условиями для неограниченной области: найти решение уравнения (1.116) для $-\infty < x < \infty$ при $t > 0$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$u\big|_{t=0} = f(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x).$$

Эту задачу называют **задачей Коши.**

Если изучается процесс вблизи одной границы и влияние граничного режима на второй границе не имеет существенного значения на протяжении интересующего нас промежутка времени, то мы приходим к постановке задачи на полуограниченной прямой $0 \le x < \infty$. В этом случае задаются начальные условия и одно из граничных условий I-III при $x = 0$.

1.25 КОЛЕБАНИЯ ОДНОРОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ СТРУНЫ. ФОРМУЛА ДАЛАМБЕРА

Изучение методов построения решений краевых задач для уравнений гиперболического типа начнем с более простой задачи – задачи о свободных колебаниях однородной бесконечной струны. Это задача, как было показано в п. 1.24, сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.121}$$

при начальных условиях

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = f(x), \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x), \tag{1.122}$$

где функции $f(x)$ и $F(x)$ заданы на всей числовой оси. Никакие граничные условия на искомую функцию $u(x,t)$ не накладываются. Такая задача называется задачей с начальными условиями или **задачей Коши.**

Для решения поставленной задачи преобразуем уравнение (1.121) к каноническому виду, содержащему смешанную производную (см. (1.93)). Для чего составим уравнение характеристик

$$(dx)^2 - a^2 (dt)^2 = 0,$$

которое распадается на два уравнения:

$$dx - a dt = 0 \quad \text{и} \quad dx + a dt = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$x - at = C_1 \quad \text{и} \quad x + at = C_2.$$

Согласно общей теории о замене переменных полагаем

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at.$$

Тогда уравнение (1.121) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Как было показано в п.1.18 (см. формулу (1.87)), общее решение такого уравнения имеет вид

$$u(\xi,\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta),$$

где $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$ - произвольные функции. Возвращаясь к старым переменным x и t, получим общее решение волнового уравнения (1.121)

$$u(x,t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at). \tag{1.123}$$

Определим функции φ и ψ таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия (1.122)

$$u(x,0)=\varphi(x)+\psi(x)=f(x),$$
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=-a\varphi'(x)+a\psi'(x)=F(x).$$

Интегрируя последнее равенство по x, получим

$$-\varphi(x)+\psi(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}F(z)dz+C,\ \text{где}\ \ C=\text{const}.$$

Из равенств

$$\varphi(x)+\psi(x)=f(x),$$
$$-\varphi(x)+\psi(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}F(z)dz+C$$

находим

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}F(z)dz-\frac{C}{2}, \tag{1.124}$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}F(z)dz+\frac{C}{2}. \tag{1.125}$$

Таким образом, мы определили функции φ и ψ через заданные функции $f(x)$ и $F(x)$, причем равенства (1.124) и (1.125) имеют место для любого значения $x(-\infty<x<\infty)$. Заменяя аргумент x в (1.124) на $x-at$, а в (1.125) на $x+at$ и подставляя найденные функции $\varphi(x-at)$ и $\psi(x+at)$ в (1.123), получим

$$u(x,t)=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\left(\int_{x_0}^{x+at}F(z)dz-\int_{x_0}^{x-at}F(z)dz\right)$$

и окончательно

$$u(x,t)=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(z)dz. \tag{1.126}$$

Формулу (1.126) называют **формулой Даламбера.**

Нетрудно проверить непосредственным дифференцированием, что полученное выражение для $u(x,t)$ есть решение для волнового уравнения (1.121), удовлетворяющее начальным условиям (1.122). Для этого достаточно предположить, что функция $F(x)$ дифференцируема, а функция $f(x)$ - дважды дифференцируема. Способ вывода формулы (1.126) доказывает как единственность, так и существование решения задачи Коши. Из формулы (1.126) непосредственно видно также, что задача поставлена корректно – при любом конечном значении t малому изменению функций $f(x)$ и $F(x)$ соответствует малое изменение решения.

1.26 ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФОРМУЛЫ ДАЛАМБЕРА

Для того, чтобы выяснить физический смысл решения (1.126), запишем функцию $u(x,t)$ в виде суммы двух слагаемых

$$u_1(x,t) = \varphi^*(x - at) \text{ и } u_2(x,t) = \psi^*(x + at),$$

где $\varphi^*(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2a} \int\limits_{x_0}^{x} F(z)dz$,

$$\psi^*(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a} \int\limits_{x_0}^{x} F(z)dz.$$

И выясним смысл $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ в отдельности.

Начнем с функции $u_1(x,t) = \varphi^*(x - at)$. Независимые переменные x и t изменяются так, что разность остается постоянной, т.е. $x - at = C$. В таком случае $dx - adt = 0$ и $\frac{dx}{dt} = a$. Отсюда можно заключить следующее. Если точка x движется с постоянной скоростью a в положительном направлении оси Ox, то смещение u_1 струны в этой точке во все время движения будет равно $\varphi^*(C)$, оставаясь, таким образом, постоянным. Другими словами, значение смещения $u_1 = \varphi^*(x - at)$ в точке x_1 в момент t_1 такое же, какое было в момент $t = t_0$ в точке x_0. Построим графики этой функции для возрастающих значений t: $t = t_0 = 0$, $t = t_1$, $t = t_2$ (рис. 1.4). Второй график $(t = t_1)$ будет сдвинут относительно первого $(t = t_0)$ на величину at_1, третий $(t = t_2)$ – на величину at_2 и т.д. Если по очереди проектировать эти рисунки на неподвижный экран, то зритель увидит, что график, изображенный на верхнем рисунке, «побежит» вправо. (Этот способ изображения движения положен, между прочим, в основу съемки мультипликационных фильмов).

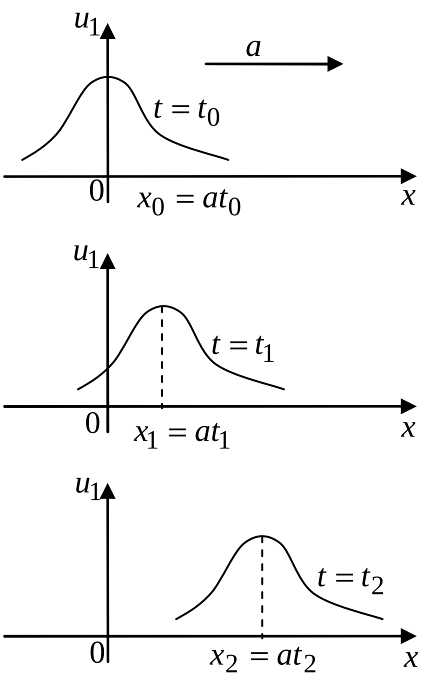


Рис. 1.4

Смещение, распространяющееся в фиксированном направлении с некоторой скоростью, называется **бегущей волной.** Бегущую волну, распространяющуюся в направлении, выбранном за положительное, слева направо будем называть **прямой волной.**

Итак, прямая бегущая волна характеризуется решением $u_1 = \varphi^*(x - at)$.

Решению $u_2 = \psi^*(x + at)$ будет соответствовать движение смещения $\psi^*(C)$, аналогичное указанному, но совершаемое влево. Это движение называют **обратной бегущей волной.**

Если взять длинную натянутую веревку и слегка качнуть ее в середине, то по веревке влево и вправо побегут волны.

Постоянное число $a = \sqrt{\dfrac{T_0}{\rho}}$ является **скоростью распространения волн по струне.**

Таким образом, решение (1.126) задачи Коши для бесконечной струны есть сумма (суперпозиция) двух волн $\varphi^*(x - at) + \psi^*(x + at)$, одна из которых распространяется направо со скоростью a, а вторая – налево с той же скоростью. Это приводит к следующему графическому методу решения задачи о колебаниях бесконечной струны. Вычерчиваем кривые $u_1 = \varphi^*(x)$ и $u_2 = \psi^*(x)$, изображающие прямую и обратную волны в начальный момент времени $t = 0$, и затем, не изменяя их формы, передвигаем их одновременно со скоростью a в разные стороны: $u_1 = \varphi^*(x)$ - вправо, $u_2 = \psi^*(x)$ - влево. Чтобы получить график струны, достаточно построить алгебраические суммы ординат передвинутых кривых.

Формула (1.126) дает полное решение задачи. Исследуем эту формулу в одном простом случае, когда отсутствуют начальные скорости, т.е. когда $F(x) = 0$. Из формулы (1.126) получаем

$$u(x,t) = \frac{1}{2} f(x - at) + \frac{1}{2} f(x + at). \qquad (1.127)$$

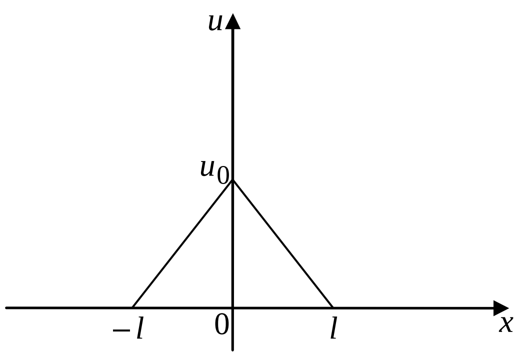


Рис. 1.5

Так как функция $f(x)$ известна, то мы можем вычислить $u(x,t)$ для любых x и t.

Пусть, например, струна в начальный момент времени имеет форму равнобедренного треугольника на интервале $(-l; l)$, вне этого интервала $f(x) \equiv 0$, а $F(x) \equiv 0 \ \forall x \in (-\infty; \infty)$ (рис. 1.5). Эти условия означают, что струна оттянута на участке $(-l; l)$ и в момент $t = 0$ без толчка отпущена. Покажем последовательные положения струны через промежутки времени $\Delta t = \dfrac{l}{2a}$. Согласно сказанному, колебания $u(x,t)$ складываются из двух волн: прямой $u_1 = \dfrac{1}{2} f(x + at)$ и обратной $u_2 = \dfrac{1}{2} f(x + at)$. Сначала вычертим графики прямой и обратной волны, а затем проследим за геометрией профиля струны через указанные промежутки времени. В начальный момент $t = 0$ профили прямой и обратной волны совпадают (рис. 1.6), что следует из формулы (1.127): $u_1\big|_{t=0} = u_2\big|_{t=0} = \dfrac{1}{2} f(x) = \dfrac{1}{2} u_0$, где $u_0 = u\big|_{t=0}$.

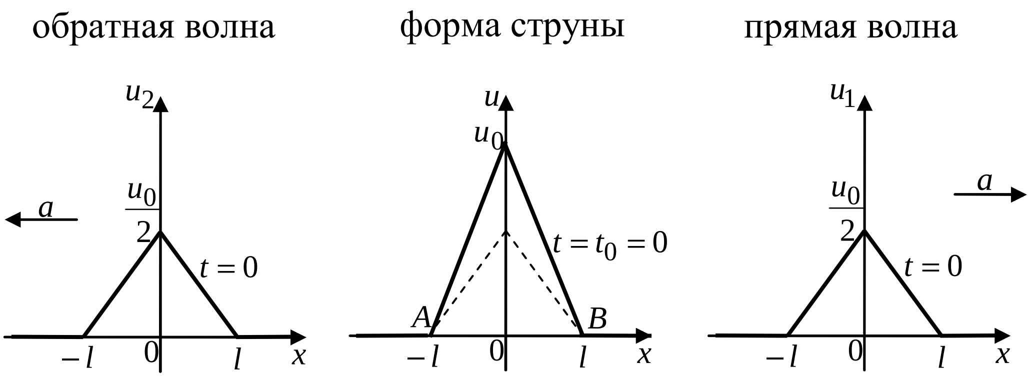


Рис. 1.6

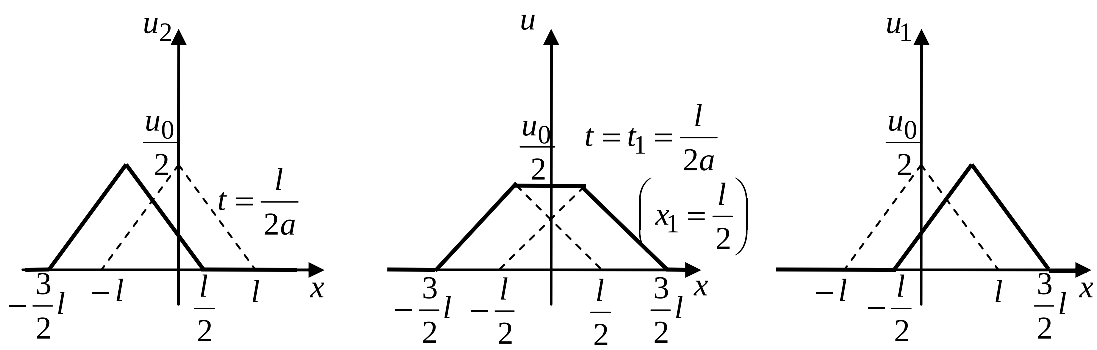


Рис. 1.7

Передвинем теперь графики u_1 и u_2 вправо и влево на расстояние $\dfrac{l}{2}$. Тогда в результате сложения ординат этих графиков будем иметь форму u струны в момент времени $t = \dfrac{l}{2a}$ (рис. 1.7)

Передвинем графики u_1 и u_2 еще раз на расстояние $\dfrac{l}{2}$, в результате будем иметь форму струны в момент времени $t = \dfrac{l}{a}$ (рис. 1.8).

При дальнейшем перемещении графиков u_1 и u_2 струна будет иметь форму, показанную на рис. 1.9, причем смещение u струны вдвое меньше, чем соответствующее смещение на участке AB.

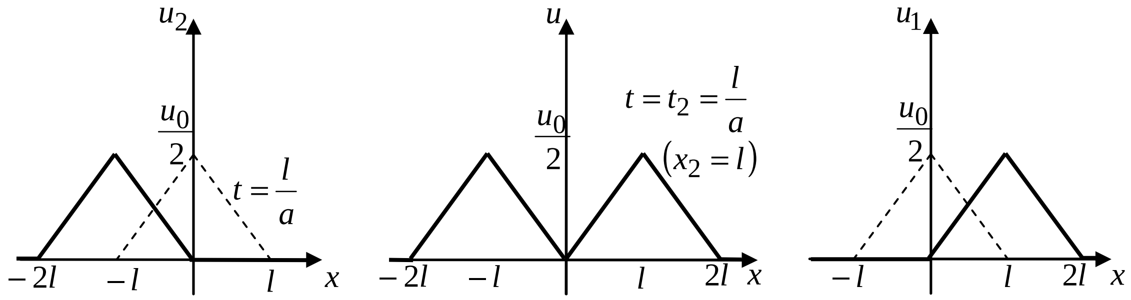


Рис. 1.8

До тех пор, пока $t < \frac{l}{a}$, имеется участок струны, где волны накладываются друг на друга, начиная с $t = \frac{l}{a}$, волны начинают расходиться. В каждой точке струны после прохождения обеих волн (а для точек, лежащих вне области начального возмущения, после прохождения только одной волны) наступает покой. Такой процесс может наблюдаться в очень длинной струне до тех пор, пока волны, бегущие по струне, не дойдут до ее концов.

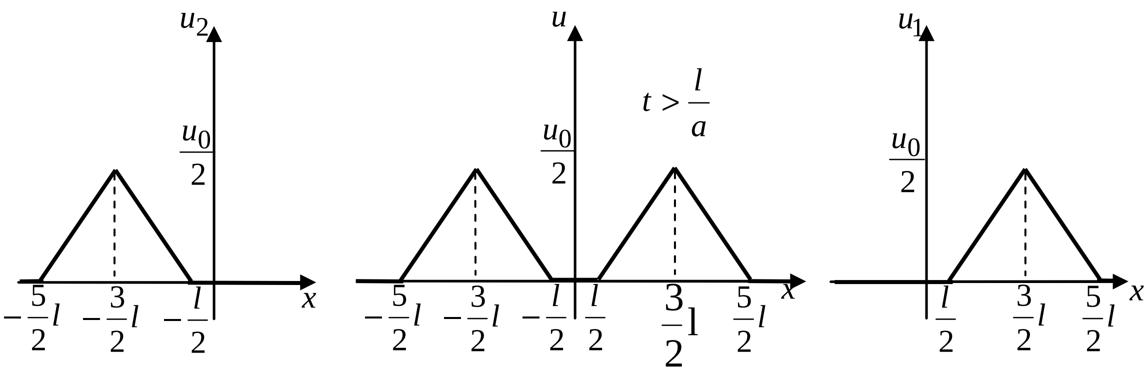


Рис. 1.9

1.27 ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ СТРУНЫ

Метод решения задачи Коши для бесконечной струны легко применить к случаю полубесконечной струны. Пусть струна находится в состоянии покоя на положительной оси Ox и ее конец, совпадающий с началом координат, неподвижно закреплен. Тогда к уравнению колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.128}$$

и начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = F(x), \tag{1.129}$$

заданным при $x \ge 0$, необходимо добавить еще одно граничное условие

$$u\big|_{x=0} = 0. \tag{1.130}$$

Из условий (1.129), (1.130) следует, что $f(0) = 0$.

Решение уравнения (1.128) при условиях (1.129), (1.130) может быть получено из формулы Даламбера (1.126) следующим образом. Допустим, что функции $f(x)$ и $F(x)$, определенные сначала только для $x \ge 0$, доопределены нами произвольным образом и для $x < 0$. Напишем выражение $u(0,t)$:

$$u(0,t) = \frac{f(-at) + f(at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} F(z)dz. \tag{1.131}$$

Чтобы $u(0,t)$ было равно нулю при всех значениях t, нужно функции $f(x)$ и $F(x)$ при $x < 0$ определить так:

$$f(-x) = -f(x), \quad F(-x) = -F(x),$$

т.е. функции продолжить в область отрицательных значений нечетным образом. Тогда, очевидно, первое слагаемое формулы (1.131) равно нулю; второе слагаемое также обращается в нуль, потому что берется интеграл от нечетной функции в интервале, симметричном относительно начала координат. Продолжив таким образом функции $f(x)$ и $F(x)$ на всю числовую ось, напишем формулу Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)dz. \tag{1.132}$$

Теперь это выражение определено для всех точек x и t и при $x \ge 0$ дает решение поставленной задачи. Действительно, функция (1.132) удовлетворяет уравнению (1.128), условиям (1.129) и, в силу доказанного, граничному условию (1.130).

1.28 МЕТОД ФУРЬЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

Метод Фурье или метод разделения переменных является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений в частных производных. Изложение этого метода мы проведем для задачи о свободных колебаниях струны, закрепленной на концах. Эта задача, как было показано в п. 1.24, сводится к решению однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.132}$$

при однородных граничных условиях

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0 \tag{1.133}$$

и начальных условиях

$$u\big|_{t=0} = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x), \quad (0 \le x \le l). \tag{1.134}$$

Выделим две части метода Фурье. Первая часть заключается в отыскании частных решений уравнения (1.132), удовлетворяющих граничным условиям (1.133). Вторая часть - нахождение общего решения и удовлетворение начальным условиям (1.134).

Будем искать частные решения (1.132), не равные тождественно нулю, в виде произведения двух функций

$$u(x,t) = X(t)T(t), \tag{1.135}$$

удовлетворяющие граничным условиям (1.133).

Дифференцируя дважды выражение (1.135) по x и по t, получим

$$u_{tt} = T''(t)X(x), \quad u_{xx} = X''(x)T(t).$$

Подставляя найденные производные в уравнение (1.132), получим

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$$

или, деля обе части равенства на a^2XT,

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Последнее равенство, левая часть которого зависит от t, а правая - только от x, возможно лишь в том случае, когда обе части его не зависят ни от x ни от t, т.е. представляют собой одну и ту же постоянную. Обозначим эту постоянную через $-\lambda$ (Знак числа λ будет обоснован ниже). Итак, имеем

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(t)}{X(t)} = -\lambda. \tag{1.136}$$

Из равенства (1.136) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0, \tag{1.137}$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0. \tag{1.138}$$

Таким образом, уравнение (1.132) распалось на два уравнения, из которых одно содержит функцию только от t, а другое - функцию только от x или, как говорят, в уравнении (1.132) переменные разделились.

Поскольку мы ищем решения вида (1.135), удовлетворяющие граничным условиям (1.133), то при любом значении t должны соблюдаться равенства

$$u|_{x=0}=X(0)T(t)=0, \quad u|_{x=l}=X(l)T(t)=0.$$

Если бы обращался в нуль второй сомножитель ($T(t)\equiv 0$), то функция $u(x,t)$ равнялась бы нулю при всех значениях x и t. Такой случай интереса не представляет. Поскольку мы ищем нетривиальные решения, т.е. не равные тождественно нулю, то мы должны считать, что

$$X(0)=0 \text{ и } x(\ell)=0. \tag{1.139}$$

Для определения функции $X(x)$ мы пришли к следующей краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения: найти такие значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения (1.138), удовлетворяющие граничным условиям (1.139). Эту задачу называют **задачей Штурма-Лиувилля.**

Те значения параметра λ, при которых задача (1.138) - (1.139) имеет нетривиальные решения, называются **собственными значениями**, а сами эти решения - **собственными функциями.**

Найдем теперь собственные значения и собственные функции задачи (1.138) - (1.139). Нужно рассмотреть три случая, когда $\lambda<0$, $\lambda=0$ и $\lambda>0$.

Уравнение (1.138) есть линейное однородное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Для его решения надо составить характеристическое уравнение

$$k^2+\lambda=0;$$

отсюда $k_{1,2}=\pm\sqrt{-\lambda}$, следовательно, вид решения зависит от знака λ.

А. Пусть $\lambda<0$. Тогда корни характеристического уравнения действительны и различны и общее решение уравнения (1.138) имеет вид

$$X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda x}}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda x}}.$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.139), получим

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,l} = 0. \end{cases}$$

Так как определитель этой однородной системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\,l} & e^{-\sqrt{-\lambda}\,l} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{-\lambda}\,l} - e^{\sqrt{-\lambda}\,l} \neq 0,$$

то, как известно, система имеет единственное решение $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$. Следовательно, $X(x) \equiv 0$.

Таким образом, в этом случае решений, отличных от нуля, не существует.

Б. Пусть $\lambda = 0$. Тогда оба корня характеристического уравнения равны нулю и

$$X(x) = C_1 + C_2 x.$$

Граничные условия (1.139) дают:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \cdot 0 = 0 \\ C_1 + C_2 \cdot l = 0. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ и, следовательно, $X(x) \equiv 0$.

В. Пусть $\lambda > 0$. Корни характеристического уравнения мнимые ($k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\,i$) и решение уравнения (1.138) имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\,x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\ .$$

Удовлетворяя условиям (1.139), получим

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0 \\ C_1 \cos\sqrt{\lambda}\,l + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,l = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $C_1 = 0$, а из второго следует, что $C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,l = 0$. Последнее равенство возможно, когда $C_2 \neq 0$, ибо в противном случае $X(x) \equiv 0$. Поэтому

$$\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0,$$

откуда определяем $\sqrt{\lambda} = \dfrac{n\pi}{l}$, где n - любое целое число $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.

Следовательно, нетривиальные решения задачи (1.138) - (1.139) возможны лишь при значениях

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2. \tag{1.140}$$

Решение, отвечающее фиксированному значению n, обозначим через $X_n(x)$. Оно имеет вид

$$X_n(x) = C_2 \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Для дальнейшего можем положить $C_2 = 1$.

Итак, собственным значениям $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ соответствуют собственные функции

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}, n = 1, 2, \ldots . \tag{1.141}$$

Заметим, что в соотношениях (1.140), (1.141) мы ограничились только положительными значениями для n, так как отрицательные значения n не дают новых решений.

Обратимся теперь к отысканию функций $T(t)$. Каждому собственному числу λ_n будет соответствовать свое решение уравнения (1.137), которое обозначим через $T_n(t)$. Для функции $T_n(t)$ имеем уравнение

$$T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 T_n(t) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$T_n(t) = a_n \cos\frac{n\pi at}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi at}{\ell},$$

где a_n, b_n - произвольные постоянные.

Таким образом, функция

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(a_n \cos\frac{n\pi at}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell}, \tag{1.142}$$

$n = 1, 2, \ldots,$ удовлетворяет уравнению (1.132) и граничным условиям (1.133) при любых a_n и b_n.

Перейдем ко второй части метода Фурье.

При помощи собственных функций построим решения, удовлетворяющие начальным условиям (1.134).

Возьмем общее решение уравнения (1.142) в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad (1.144)$$

Если ряд (1.144) сходится равномерно в области $0\le x\le l$, $0\le t\le T$, то сумма его является непрерывной функцией в этой области. В силу однородности и линейности уравнения (1.132) ряд (1.144) будет также решением, если его можно почленно дифференцировать по X и по t. Действительно, при указанных условиях получим

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_{n_{tt}}-a^2u_{n_{xx}}\right)=0,$$

так как функции $u_n(x,t)$ удовлетворяют уравнению (1.132).

Далее, поскольку каждое слагаемое в (1.144) удовлетворяет граничным условиям (1.133), то этим условиям будет удовлетворять и сумма ряда, т.е. функция $u(x,t)$. Остается определить постоянные a_n и b_n так, чтобы функция (1.144) удовлетворяла начальным условиям.

Продифференцируем ряд (1.144) по t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{\ell}\left(-a_n\sin\frac{n\pi at}{\ell}+b_n\cos\frac{n\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell}. \qquad (1.145)$$

Подставляя $t=0$ в (1.144) и (1.145), получим в силу начальных условий (1.134):

$$\left.\begin{array}{r}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}=f(x)\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{\ell}b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}=F(x),\\ 0\le x\le l\end{array}\right\} \qquad (1.146)$$

Формулы (1.146) представляют собой разложение заданных функций $f(x)$ и $F(x)$ в ряд Фурье по синусам на интервале $[0;\ell]$.

Из теории рядов Фурье известно, что всякая функция $\Phi(x)$, непрерывная на отрезке $[0;\ell]$ вместе со своей производной первого порядка и удовлетворяющая условию $\Phi(0)=\Phi(\ell)=0$, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по синусам:

$$\Phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{\ell},$$

где

$$a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\Phi(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx.$$

Предполагая, что функции $f(x)$ и $F(x)$ удовлетворяют указанным условиям, мы можем утверждать, что a_n и b_n - коэффициенты Фурье, которые вычисляются по известным формулам:

$$a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx, \tag{1.147}$$

$$\frac{n\pi a}{\ell}b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}F(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx,$$

откуда

$$b_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}F(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx. \tag{1.148}$$

Таким образом, ряд (1.144), в котором a_n и b_n вычисляются по формулам (1.147), (1.148), дает решение смешанной краевой задачи (1.132)…(1.134).

1.29 РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ НУЛЕВЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Рассмотрим вынужденные колебания однородной струны, закрепленной на концах, под действием внешней силы $P(x,t)$. Математически задача заключается в решении неоднородного уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(x,t)\quad\left(g=\frac{P}{\rho}\right) \tag{1.149}$$

при однородных граничных условиях

$$u\big|_{x=0}=0,\ \ u\big|_{x=l}=0 \tag{1.150}$$

и начальных условиях

$$u\big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = F(x). \tag{1.151}$$

Будем искать решение смешанной задачи (1.149)… (1.151) в виде суммы

$$u(x,t) = v(x,t) + \omega(x,t), \tag{1.152}$$

где функция $v(x,t)$ есть решение неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g(x,t), \tag{1.153}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$v\big|_{x=0} = 0, \quad v\big|_{x=l} = 0 \tag{1.154}$$

и начальным условиям

$$v\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \tag{1.155}$$

а функция $\omega(x,t)$ есть решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \tag{1.156}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\omega\big|_{x=0} = 0, \quad \omega\big|_{x=l} = 0 \tag{1.157}$$

и начальным условиям

$$\omega\big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial \omega}{\partial t}\bigg|_{t=0} = F(x). \tag{1.158}$$

Решение $v(x,t)$ представляет вынужденные колебания струны, т.е. такие, которые совершаются под действием внешней силы, когда начальные возмущения отсутствуют.

Решение $\omega(x,t)$ представляет свободные колебания, т.е. такие колебания, которые происходят только вследствие начального возмущения.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что вследствие линейности уравнения, граничных и начальных условий сумма $v+\omega$ является решением исходной задачи.

Метод нахождения функции $\omega(x,t)$, т.е. решения задачи (1.156)… (1.158), рассмотрен в п. 1.28. Поэтому необходимо найти лишь функцию $v(x,t)$. Будем искать решение $v(x,t)$ в виде ряда

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{1.159}$$

Для этой функции граничные условия (1.154) выполняются автоматически. Определим теперь функцию $T_n(t)$ так, чтобы ряд (1.159) удовлетворял уравнению (1.153) и начальным условиям (1.155).

Подставляя ряд (1.159) в уравнение (1.153), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n''(t)\sin\frac{n\pi x}{\ell}=-a^2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2\sin\frac{n\pi x}{\ell}+g(x,t).$$

Для удобства введем обозначение $K_n=\frac{an\pi}{\ell}$, тогда последнее уравнение можно переписать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t)+K_n^2T_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{\ell}=g(x,t). \tag{1.160}$$

Функция $g(x,t)$, рассматриваемая как функция от x при фиксированном t, может быть разложена в ряд Фурье по синусам:

$$g(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(t)\sin\frac{n\pi x}{\ell}, \tag{1.161}$$

причем

$$g_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}g(x,t)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx. \tag{1.162}$$

Сравнивая разложения (1.160) и (1.161), получим

$$T_n''(t)+K_n^2 T_n(t)=g_n(t) \quad (n=1,2,\ldots) \tag{1.163}$$

Далее, из первого начального условия (1.155) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{\ell}=0,$$

откуда

$$T_n(0)=0 \quad (n=1,2,\ldots). \tag{1.164}$$

Точно так же из второго начального условия (1.155) вытекает, что

$$T_n'(0)=0 \quad (n=1,2,\ldots). \tag{1.165}$$

Таким образом, для определения $T_n(t)$ нужно решить обыкновенное дифференциальное уравнение (1.163) с условиями (1.164) и (1.165).

Применяя к уравнению (1.163) метод вариации произвольных постоянных, найдем

$$T_n(t)=\frac{1}{K_n}\int_0^t g_n(\tau)\sin K_n(t-\tau)d\tau.$$

Или подставляя вместо $g_n(\tau)$ его выражение (1.162), получим

$$T_n(t)=\frac{2}{\ell K_n}\int_0^t d\tau\int_0^{\ell} g(\xi,\tau)\sin K_n(t-\tau)\cdot\sin\frac{n\pi\xi}{\ell}d\xi. \tag{1.166}$$

Подставляя найденное выражение для $T_n(t)$ в ряд (1.159), получим искомое решение $v(x,t)$.

Итак, решение задачи (1.149)…(1.151) выражается в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{\ell}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell}, \tag{1.167}$$

где коэффициенты $T_n(t)$ определяются по формулам (1.166), а a_n и b_n - по формулам (1.147) и (1.148).

1.30 РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ НЕОДНОРОДНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ. (ОБЩАЯ ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА)

Рассмотрим вынужденные колебания ограниченной струны под действием внешней силы, причем концы ее не закреплены, а двигаются по заданному закону. Эта задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t) \qquad (1.168)$$

с граничными условиями

$$u\big|_{x=0} = \mu_1(t), \ \ u\big|_{x=l} = \mu_2(t) \qquad (1.169)$$

и начальными условиями

$$u\big|_{t=0} = f(x), \ \ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = F(x) \ \ (0 \le x \le l). \qquad (1.170)$$

Сформулированная задача (1.168)…(1.170) называется **общей краевой задачей** для уравнения колебаний. К решению этой задачи нельзя применить метод Фурье, так как граничные условия (1.169) неоднородны. Но эта задача может быть сведена к задаче с нулевыми граничными условиями.

Будем искать решение задачи (1.168)…(1.170) при помощи некоторой вспомогательной функции $v(x,t)$ в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + \omega(x,t), \qquad (1.171)$$

где $\omega(x,t)$ подберем таким образом, чтобы задача нахождения функции $v(x,t)$ была с однородными граничными условиями.

Дифференцируя (1.171) по x и t дважды и подставляя в (1.168), получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right) + g(x,t).$$

Отсюда получаем, что функция $v(x,t)$ будет определяться как решение уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g_1(x,t), \qquad (1.172)$$

где

$$g_1(x,t) = g(x,t) - \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right),$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$v(0,t) = \mu_1(t) - \omega(0,t), \quad v(\ell,t) = \mu_2(t) - \omega(\ell,t) \qquad (1.173)$$

и начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} &v(x,0) = f(x) - \omega(x,0), \\ &\frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = F(x) - \frac{\partial \omega(x,0)}{\partial t} \end{aligned}\right\} \qquad (1.174)$$

Подберем функцию $\omega(x,t)$ так, чтобы

$$v(0,t) = 0, \quad v(\ell,t) = 0,$$

откуда находим, что

$$\omega(0,t) = \mu_1(t), \quad \omega(\ell,t) = \mu_2(t). \qquad (1.175)$$

В качестве $\omega(x,t)$ можно взять любую непрерывную дважды дифференцируемую функцию, удовлетворяющую условиям (1.175). Например, $\omega(x,t)$ может быть линейной относительно x функцией вида

$$\omega(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{\ell}[\mu_2(t) - \mu_1(t)]. \qquad (1.176)$$

Таким образом, общая первая краевая задача для функции $u(x,t)$ сведена к краевой задаче для функции $v(x,t)$ при нулевых граничных условиях. Для нахождения функции $v(x,t)$ имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g_1(x,t), \qquad (1.177)$$

где

$$g_1(x,t) = g(x,t) - \mu_1''(t) - [\mu_2''(t) - \mu_1''(t)]\frac{x}{\ell},$$

с граничными условиями

$$v\big|_{x=0} = 0, \quad v\big|_{x=l} = 0 \qquad (1.178)$$

и начальными условиями

$$\left.\begin{aligned} v\big|_{t=0} &= f(x) - \left(\mu_1(0) + \frac{x}{\ell}[\mu_2(0) - \mu_1(0)]\right), \\ \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} &= F(x) - \left(\mu_1'(0) + \frac{x}{\ell}[\mu_2'(0) - \mu_1'(0)]\right). \end{aligned}\right\} \tag{1.179}$$

Метод решения задачи (1.177)…(1.179) изложен в п. 1.29.

1.31 УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ (ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ)

Уравнения параболического типа наиболее часто встречаются при изучении процессов теплопроводности и диффузии. К этим уравнениям приводятся также задачи о движении вязкой жидкости, например, нефти.

Обсудим процесс распространения тепла в неравномерно нагретом твердом теле. Если тело нагрето неравномерно, то в нем происходит передача тепла из мест с более высокой температурой в места с более низкой температурой. Процесс может быть описан функцией $u = u(x, y, z, t)$, дающей температуру u в каждой точке $M(x, y, z)$ тела и в любой момент времени t. Примем следующую модель процесса: происходит механический перенос тепла от более нагретых частей тела к менее нагретым; все тепло идет на изменение температуры тела; свойства тела от температуры не зависят. Идеализация явления состоит в том, что мы будем изучать процесс, не касаясь его молекулярной природы, а также иных проявлений. Опишем процесс математически для одномерного тела.

Рассмотрим однородный стержень длины ℓ, теплоизолированный с боков (через поверхность не происходит теплообмена с окружающей средой) и достаточно тонкий, чтобы в любой момент времени температуру во всех точках поперечного сечения можно было считать одинаковой. Расположим ось Ox так, чтобы один конец стержня совпадал с точкой $x = 0$, а другой - с точкой $x = \ell$ (рис. 1.10).

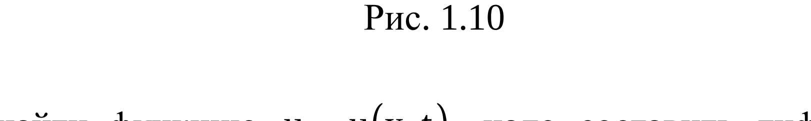


Рис. 1.10

Чтобы найти функцию $u = u(x, t)$, надо составить дифференциальное уравнение, которому она удовлетворяет.

При выводе дифференциального уравнения теплопроводности воспользуемся следующими физическими закономерностями, связанными с распространением тепла.

1. Количество тепла ΔQ, которое необходимо сообщить однородному телу, чтобы повысить его температуру на Δu, равно

$$\Delta Q = cm\Delta u,$$

где c - удельная теплоемкость, m - масса тела.

Для стержня имеем

$$\Delta Q = c\rho S\Delta x\Delta u, \tag{1.180}$$

где ρ - плотность материала стержня; S - площадь его поперечного сечения.

2. Перенос тепла в теле подчиняется эмпирическому закону Фурье: количество тепла ΔQ, протекающее за время Δt через площадку ΔS в направлении нормали $\overline{n}$ к этой площадке, равно

$$\Delta Q = -k\frac{\partial u}{\partial n}\Delta S\Delta t,$$

где k - коэффициент внутренней теплопроводности (зависит от точки и не зависит от направления, если тело изотропно).

Для стержня имеем

$$\Delta Q = -kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t, \tag{1.181}$$

где коэффициент k будем считать постоянным в силу предположения о его однородности. Если стержень неоднороден, то $k = k(x)$.

3. Если внутри тела есть источники тепла, то выделение тепла можно характеризовать плотностью тепловых источников, т.е. количеством выделяемого (или поглощаемого) тепла в единицу времени в единице объема. Обозначим через $F(x,t)$ плотность источников в точке x рассматриваемого стержня в момент t. Тогда в результате действия этих источников на участке $(x, x+\Delta x)$ за промежуток Δt будет выделено количество тепла

$$\Delta Q = F(x,t)S\Delta x\Delta t. \tag{1.182}$$

И, наконец, воспользуемся законом сохранения энергии.

Итак, приступим к выводу уравнения. Выделим элементарный участок стержня, заключенный между сечениями $x = x_1$ и $x = x_2$ $(x_2 - x_1 = \Delta x)$, и составим уравнение теплового баланса на отрезке $[x_1, x_2]$. Так как боковая поверхность стержня теплоизолирована, то элемент стержня может получать тепло только через поперечные сечения. Согласно (1.181) количество тепла, прошедшее через сечение $x = x_1$, равно

$$\Delta Q_1 = -k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1} S\Delta t\,;$$

через сечение $x = x_2$:

$$\Delta Q_2 = -k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2} S\Delta t\,.$$

Найдем приток тепла $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$ в элемент стержня:

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = -k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1} S\Delta t + k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2} S\Delta t =$$

$$= k\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1}\right) S\Delta t \approx k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x S\Delta t.$$

(К разности частных производных применена теорема Лагранжа).

Кроме того, в результате действия внутренних источников тепла на этом участке в течение времени Δt выделится количество тепла согласно (1.182)

$$\Delta Q_3 = F(x,t) S\Delta x\Delta t\,.$$

Все тепло $\Delta Q = \Delta Q_1 - \Delta Q_2 + \Delta Q_3$ за время Δt пойдет на изменение температуры выделенного элемента стержня на величину Δu. И поэтому сообщенное количество тепла ΔQ, с другой стороны, может быть найдено согласно формуле (1.180):

$$\Delta Q = c\rho S\Delta x\left(u(x,t_2) - u(x,t_1)\right) \approx c\rho S\Delta x\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t\,.$$

В силу закона сохранения энергии имеем равенство

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x S\Delta t. + F(x,t) S\Delta x\Delta t = c\rho S\Delta x\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t\,.$$

Сокращая на общий множитель $S\Delta x\Delta t$, получим уравнение

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,.$$

Введя обозначения $\dfrac{k}{c\rho} = a^2$, $\dfrac{F(x,t)}{c\rho} = f(x,t)$, придем к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t). \qquad (1.183)$$

Это и есть искомое дифференциальное уравнение распространения тепла в однородном стержне. Уравнение (1.183) называют уравнением теплопроводности, в котором постоянную a^2 называют *коэффициентом температуропроводности*. Коэффициент a^2 имеет размерность $м^2$/с.

Уравнение (1.183) является *линейным неоднородным уравнением параболического типа*.

Вывод дифференциального уравнения распространения тепла внутри тела, отнесенного к пространственной системе координат, основан на тех же физических законах. Поэтому, ограничившись выводом уравнения для простейшего случая – одномерного, лишь приведем уравнение для трехмерного пространства.

Процесс распределения температуры $u = u(x, y, z, t)$ в изотропном теле описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x, y, z, t), \tag{1.184}$$

которое кратко записывается так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t), \tag{1.185}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

Уравнение (1.185) описывает также процессы диффузии, где u - концентрация диффундирующего вещества, и другие (п.1.21).

Частные случаи уравнения теплопроводности

1. **Распространение тепла без тепловыделения**. Если внутри рассматриваемой области нет источников тепла, т.е. $f = 0$, то уравнение (1.185) принимает более простой вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u. \tag{1.186}$$

Уравнение (1.186) называется *уравнением свободного теплообмена*.

2. **Установившийся поток тепла**. Для стационарного процесса теплообмена, т.е. когда температура в каждой точке тела не меняется со временем $\left(\frac{\partial u}{\partial t} = 0\right)$, уравнение приобретает форму уравнения Пуассона:

$$\Delta u = -\rho, \tag{1.187}$$

где $\rho = \dfrac{f}{a^2}$.

3. **Установившийся поток тепла без тепловыделения**. В этом случае $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ и $f = 0$, поэтому распределение температуры подчиняется уравнению Лапласа:

$$\Delta u = 0. \qquad (1.188)$$

С помощью уравнения (1.188) можно ответить на вопрос: каково должно быть распределение температуры $u = u(x, y, z)$ внутри тела, чтобы дальнейшего теплообмена не происходило. Поясним: последнее возможно, если на границе области поддерживать постоянную температуру (различную в различных точках границы). Но это уже связано с вопросом о граничных и начальных условиях, к которому мы и переходим.

1.32 НАЧАЛЬНОЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ, ИХ ФИЗИЧЕСКОЕ ТОЛКОВАНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Чтобы определить температуру внутри тела в любой момент времени, недостаточно одного уравнения (1.185). Необходимо, как следует из физических соображений, знать еще распределение температуры внутри тела в начальный момент времени (начальное условие) и тепловой режим на границе тела (граничное условие).

Начальное условие в отличие от уравнения гиперболического типа задается только одно, т.к. исходное уравнение содержит лишь первую производную по времени.

Граничные или краевые условия могут быть различны в зависимости от температурного режима на границе тела. Основными видами тепловых режимов являются следующие: I – на границе поддерживается определенная температура; II – на границу подается определенный тепловой поток; III – происходит теплообмен с внешней средой, температура которой известна. Им соответствуют граничные условия первого, второго, третьего рода.

Сформулируем прежде условия для одномерного уравнения теплопроводности.

Начальное условие состоит в задании функции $u = u(x, t)$ в начальный момент времени $(t = 0)$:

$$u(x,0) = u\big|_{t=0} = \varphi(x). \qquad (1.189)$$

Выведем граничные условия в случаях I – III.

1. На концах стержня (или на одном конце) задается температура

$$u\big|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u\big|_{x=\ell} = \mu_2(t), \tag{1.190}$$

где $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ - функции, заданные в некотором промежутке $t_0 \le t \le T$, причем T есть промежуток времени, в течении которого изучается процесс. В частности, $\mu_1(t) = u_1 = \text{const}$, $\mu_2(t) = u_2 = \text{const}$, т.е. на концах поддерживается постоянная температура u_1 и u_2.

2. На одном из концов (или на обоих) задано значение производной искомой функции. Например, для сечения $x = 0$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \nu_1(t). \tag{1.191}$$

Дадим физическое толкование этому условию. Пусть $q_1(t)$ - величина теплового потока, т.е. количество тепла, протекающего через торцевое сечение $x = 0$ в единицу времени. Тогда уравнение теплового баланса для элемента стержня $(0;\Delta x)$ в период времени $t_2 - t_1 = \Delta t$, как и при выводе уравнения (1.183) запишется в виде

$$q_1(t)\Delta t + k\frac{\partial u(\Delta x, t)}{\partial x} S\Delta t = c\rho S\Delta x \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t.$$

Сократив на Δt и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $u'_x(0,t) = -\frac{q_1(t)}{k\cdot S}$. Таким образом, имеем условие (1.192), в котором $\nu_1(t)$ - известная функция, выражающаяся через заданный поток тепла $q_1(t)$ по формуле $\nu_1(t) = -\frac{q_1(t)}{k\cdot S}$.

Аналогично для сечения $x = l$, через которое протекает количество тепла $q_2(t)$, найдем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \frac{q_2(t)}{k\cdot S}.$$

Следовательно, условие $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \nu_1(t)$ или $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\ell} = \nu_2(t)$ имеет место в случае, когда на соответствующем конце стержня задан тепловой поток, втекающий или вытекающий. В частности, если концевое сечение теплоизолировано, то $q_1(t) = 0$ или $q_2(t) = 0$, и следовательно,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \text{ или } \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\ell} = 0.$$

3. На одном из концов (или на обоих) задается линейное соотношение между функцией и ее производной. Например, для сечения $x = \ell$

$$\left(u + h\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=\ell} = \nu_3(t). \tag{1.192}$$

Условие типа (1.192) используется в случае процесса теплоотдачи, т.е. переноса тепла от тела к окружающей среде. Закон теплообмена сложен; но для упрощения задачи он может быть принят в виде закона Ньютона. Согласно эмпирическому закону Ньютона количество тепла, отдаваемого в единицу времени с единицы площади поверхности тела в окружающую среду, температура θ которой известна, пропорционально разности температур поверхности тела и окружающей среды:

$$q = \alpha(u - \theta),$$

где α - коэффициент теплообмена (или внешней теплопроводности).

Можно определить тепловой поток через сечение стержня, воспользовавшись двумя выражениями в силу закона сохранения энергии. Согласно закону Ньютона тепловой поток $q(t)$, вытекающий через сечение $x = l$, равен

$$q(t) = \alpha(u(\ell, t) - \theta(t)).$$

С другой стороны, такой же тепловой поток должен подводиться изнутри путем теплопроводности. Поэтому согласно закону Фурье

$$q(t) = -k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=\ell}.$$

Приравнивая правые части этих выражений, найдем

$$\frac{\partial u(\ell, t)}{\partial x} = -\frac{\alpha}{k}(u(\ell, t) - \theta(t)).$$

Отсюда получаем математическую формулировку условия в виде

$$\frac{\partial u(\ell, t)}{\partial x} + hu(\ell, t) = \nu_3(t),$$

в котором положено $h = \dfrac{\alpha}{k}$, $\nu_3(t) = h\theta(t)$.

Заметим, что граничные условия, наложенные на значения функции $u(x, t)$, называют условиями первого рода. Граничные условия, наложенные на значение производной $u'_x(x, t)$, называют условиями второго рода. А условия, наложенные как на значение функции $u(x, t)$, так и на значение производной $u'_x(x, t)$, называют условиями третьего рода.

В случае граничных условий вида (1.190), (1.191), (1.192) говорят соответственно о первой, второй, третьей краевых задачах для уравнения теплопроводности. Начальное условие для всех указанных краевых задач остается тем же самым и дается равенством (1.189).

Так, первая краевая задача состоит в отыскании решения $u = u(x, t)$ уравнения

$$u'_t = a^2 u''_{xx} + f(x,t) \text{ при } 0 < x < \ell,\ 0 < t \le T,$$

удовлетворяющего условиям

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le \ell,$$

$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(\ell,t) = \mu_2(t),\ 0 \le t \le T.$$

Аналогично ставятся другие краевые задачи с различными комбинациями граничных условий при $x = 0$ и $x = \ell$.

Кроме названных задач довольно часто встречаются предельные случаи – вырождения основных краевых задач. Одним из таких случаев является задача Коши, которая состоит в отыскании решения $u(x,t)$ в неограниченной области, удовлетворяющего только начальному условию.

Если процесс теплопроводности изучается в очень длинном стержне, таком что влияние температурного режима, заданного на границе, в центральной части стержня оказывается весьма слабым в течение небольшого промежутка времени и определяется в основном лишь начальным распределением температуры, то тогда считают, что стержень имеет бесконечную длину и ставят задачу Коши.

ЗАДАЧА КОШИ для «бесконечного» стержня (идеализация достаточно длинного стержня) математически формулируется так: найти решение $u = u(x,t)$ уравнения теплопроводности в области $-\infty < x < \infty$, $t \ge 0$, удовлетворяющее начальному условию

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x) \quad (-\infty < x < \infty),$$

где $\varphi(x)$ - заданная функция.

Если участок стержня, температура которого нас интересует, находится вблизи одного конца и далеко от другого, то в этом случае температура практически определяется температурным режимом близкого конца и начальным условием. При этом стержень считают полубесконечным. Приведем в качестве примера формулировку первой краевой задачи для «полубесконечного» стержня: найти решение $u = u(x,t)$ уравнения теплопроводности в области $0 < x < \infty$, $t \ge 0$, удовлетворяющее условиям

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ (0 < x < \infty),$$

$$u\big|_{x=0} = \mu(t),\quad t \ge 0,$$

где $\varphi(x)$ и $\mu(t)$ - заданные функции.

Для уравнения (1.185) теплопроводности в пространстве V, ограниченном поверхностью S, начальное условие записывают в виде

$$u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z),$$

а на границе S области V функция $u = u(x,y,z,t)$ должна удовлетворять одному из условий:

1) $u(x,y,z,t)\big|_S = f_1(M,t)$ (граничное условие 1-го рода);

2) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \bar{n}}\right|_S = f_2(M,t)$ (граничное условие 2-го рода);

где $\overline{n}$ - внешняя нормаль к поверхности S; в частности, если поверхность S теплоизолирована, то $\left.\frac{\partial u}{\partial \overline{n}}\right|_S = 0$;

3) $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \overline{n}} + hu\right)\right|_S = f_3(M, t)$ (граничное условие 3-го рода).

Здесь $M(x, y, z)$ - текущая точка поверхности S.

Если распределение температуры внутри тела стационарно, то для однозначного определения функции $u(x, y, z)$ не надо задавать начальное условие, т.к. в начальный и во все последующие моменты времени распределение температуры одно и то же, а достаточно знать лишь тепловой ражим на границе S тела. Разыскание закона стационарного распределения температуры сводится к решению уравнения Пуассона (1.187) или уравнения Лапласа (1.188) по одному из граничных условий, в которых функции f_1, f_2 и f_3 не зависят от t. Задача для уравнений Пуассона и Лапласа с граничным условием $u(x, y, z)|_S = f_1(x, y, z)$ называется задачей Дирихле, а с условием $\left.\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial \overline{n}}\right|_S = f_2(x, y, z)$ - задачей Неймана.

Доказано, что решение каждой из одномерных краевых задач первой, второй и третьей единственно в классе функций, непрерывно дифференцируемых в области $x_1 \le x \le x_2$, $t \ge 0$. Для трехмерных и двумерных краевых задач решение единственно в классе функций, удовлетворяющих условиям применимости соответственно формулы Остроградского и формулы Грина. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности в классе функций, ограниченных во всем пространстве, единственно и устойчиво.

1.33 РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В СТЕРЖНЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ. РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ ФУРЬЕ

Проведем решение общей первой краевой задачи методом Фурье. Этот метод был рассмотрен достаточно подробно при решении краевых задач для гиперболических уравнений. Схема применения его к уравнениям параболического типа остается прежней. Интересующее нас решение будет получено на основе решений вспомогательных задач – частных случаев указанной задачи.

1.33.1. Однородное уравнение теплопроводности

Пусть однородный стержень длины ℓ теплоизолирован по всей длине, причем в нем нет источников тепла. На концах этого стержня поддерживается постоянная или меняющаяся с течением времени температура. Начальное распределение температуры в стержне известно.

1.33.1А. Распространение тепла в стержне, концы которого поддерживаются при нулевой температуре

Задача состоит в отыскании решения однородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.193}$$

при граничных условиях

$$u\big|_{x=0} = 0, \ \ u\big|_{x=\ell} = 0 \tag{1.194}$$

и начальном условии

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x). \tag{1.195}$$

Для непрерывности $u(x,t)$ в точках $(0;0)$ и $(\ell,0)$ необходимо потребовать, чтобы

$$\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0. \tag{1.196}$$

Согласно методу Фурье ищем частные решения уравнения (1.193), удовлетворяющие граничным условиям (1.194), в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{1.197}$$

Подставляя (1.197) в (1.193), имеем

$$X(x)T'(t) = a^2 T(t)X''(x).$$

Разделение переменных дает

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \ \ \lambda = \text{const},$$

откуда получаем два уравнения:

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \tag{1.198}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{1.199}$$

Из граничных условий (1.194) имеем

$$X(0) = 0, \quad X(\ell) = 0. \tag{1.200}$$

Чтобы получить нетривиальное решение уравнения (1.193) вида (1.197), необходимо найти нетривиальное решение уравнения (1.199), удовлетворяющее условиям (1.200). Таким образом, для определения функций $X(x)$ мы пришли к задаче Штурма – Лиувилля (задаче о собственных значениях), которая исследовалась в задаче о свободных колебаниях ограниченной струны (п.1.28). Там было установлено, что для значений параметра λ, равных

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

существуют нетривиальные решения задачи (1.199) – (1.200):

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{\ell}. \tag{1.201}$$

Подставляя значения $\lambda = \lambda_n$ в (1.198), получим уравнение

$$T'(t) + \left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 T(t) = 0,$$

общее решение которого есть

$$T_n(t) = a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t},$$

где a_n - произвольные постоянные.

Таким образом, уравнению (1.196) и граничным условиям (1.197) удовлетворяют функции

$$u_n(x,t) = a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

при любых a_n. Мы получили множество решений, сумма которых также будет решением уравнения (1.193) (в силу его линейности), удовлетворяющим условию (3.15). Составим формально ряд

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{\ell}. \qquad (1.202)$$

Функция $u(x,t)$ в виде (1.202) удовлетворяет граничным условиям, т.к. им удовлетворяют все члены ряда. Требуя выполнения начального условия (1.195), получаем

$$u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}.$$

Написанный ряд представляет собой разложение заданной функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по синусам в промежутке $(0;\ell)$. Коэффициенты a_n определяются по известной формуле

$$a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx. \qquad (1.203)$$

Итак, решением задачи (1.193) – (1.195) является функция $u(x,t)$, представленная рядом (1.202), коэффициенты которого определяются по формулам (1.203).

1.33.1Б. Распространение тепла в стержне, на концах которого поддерживается меняющаяся с течением времени температура

Задача сводится к решению уравнения (1.193) при граничных условиях

$$u\big|_{x=0}=\mu_1(t),\ \ u\big|_{x=\ell}=\mu_2(t), \qquad (1.204)$$

и начальном условии

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x), \qquad (1.205)$$

где $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $\varphi(x)$ - заданные функции. Будем искать решение этой задачи в виде ряда Фурье по собственным функциям (1.201)

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{\ell}, \qquad (1.206)$$

где

$$T_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}u(x,t)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx, \qquad (1.207)$$

считая при этом t параметром. Возьмем этот интеграл по частям дважды:

$$T_n(t)=\begin{vmatrix}\bar{u}=u(x,t) & d\bar{v}=\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx\\ d\bar{u}=\frac{\partial u}{\partial x}dx & \bar{v}=-\frac{\ell}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\ell}\left[-\frac{\ell}{n\pi}u(x,t)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\bigg|_0^{\ell}+\frac{\ell}{n\pi}\int_0^{L}\frac{\partial u}{\partial x}\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx\right]=$$

$$=\frac{2}{\ell}\left[-\frac{\ell}{n\pi}\Big(u(\ell,t)(-1)^n-u(0,t)\Big)+\frac{\ell}{n\pi}\int_0^{L}\frac{\partial u}{\partial x}\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx\right].$$

Последний интеграл берем по частям, положив $\bar{u}_1=\frac{\partial u}{\partial x}$, $d\bar{v}_1=\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx$. Тогда $d\bar{u}_1=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$, $\bar{v}_1=\frac{\ell}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{\ell}$.

Поэтому имеем

$$T_n(t)=-\frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n u(\ell,t)-u(0,t)\right]-\frac{2\ell}{(n\pi)^2}\int_0^{\ell}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx.$$

Так как $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.193) и граничным условиям (1.204), то

$$T_n(t)=\frac{2}{n\pi}\left[\mu_1(t)-(-1)^n\mu_2(t)\right]-\frac{2\ell}{(n\pi)^2}\int_0^{\ell}\frac{\partial u}{\partial t}\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx. \qquad (1.208)$$

Дифференцируя теперь выражение (1.207) по t, найдем

$$\frac{dT_n(t)}{dt}=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\frac{\partial u}{\partial t}\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx. \qquad (1.209)$$

Исключая интеграл из равенства (1.208) и (1.209), получим следующее уравнение для определения коэффициентов $T_n(t)$ разложения (1.206):

$$\frac{dT_n(t)}{dt}+\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 T_n(t)=\frac{2n\pi a^2}{\ell^2}\left[\mu_1(t)-(-1)^n\mu_2(t)\right]. \qquad (1.210)$$

Решим это уравнение методом вариации произвольной постоянной

$$\frac{dT_n(t)}{dt}+\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 T_n(t)=0 \Rightarrow \frac{dT_n}{T_n}=-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 dt \Rightarrow \ln\frac{T_n}{C_n}=-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 \ell \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_n(t)=C_n(t)e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}. \tag{1.211}$$

Тогда

$$T_n'(t)=C_n'(t)e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 C_n(t)e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}.$$

Подставляя найденные выражения $T_n(t)$ и $T_n'(t)$ в линейное неоднородное уравнение (1.210), получим дифференциальное уравнение относительно $C_n(t)$:

$$C_n'(t)e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}=\frac{2n\pi a^2}{\ell^2}\left[\mu_1(t)-(-1)^n\mu_2(t)\right],$$

откуда

$$C_n'(t)=\frac{2n\pi a^2}{\ell^2}e^{\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}\left[\mu_1(t)-(-1)^n\mu_2(t)\right].$$

Интегрируя, находим

$$C_n(t)=\frac{2n\pi a^2}{\ell^2}\int_0^t e^{\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 \tau}\left[\mu_1(\tau)-(-1)^n\mu_2(\tau)\right]d\tau+C_n.$$

Таким образом, общее решение уравнения (1.210) имеет вид

$$T_n(t)=e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}\left[C_n+\frac{2n\pi a^2}{\ell^2}\int_0^t e^{\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 \tau}\left[\mu_1(\tau)-(-1)^n\mu_2(\tau)\right]d\tau\right]. \tag{1.212}$$

Определим постоянные C_n. Очевидно, $C_n=T_n(0)$.

Чтобы удовлетворить начальному условию (1.205), потребуем выполнения равенства

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{\ell}=\varphi(x)$$

и, следовательно,

$$T_n(0)=C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx. \tag{1.213}$$

Итак, решением задачи (1.193), (1.204) – (1.205) является ряд (1.206), в котором функции $T_n(t)$ определяется равенствами (1.212) и (1.213).

1.33.2 Неоднородное уравнение теплопроводности

Пусть внутри стержня имеются источники или поглотители тепла с известной плотностью распределения их. В этом случае процесс распространения тепла описывается неоднородным уравнением (1.183). Определим закон изменения температуры в стержне для граничных условий первого рода.

1.33.2А Однородная краевая задача

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

с нулевыми (однородными) граничными условиями

$$u\big|_{x=0} = 0,\ \ u\big|_{x=l} = 0, \tag{1.214}$$

и начальным условием

$$u\big|_{t=0} = 0. \tag{1.215}$$

Будем искать решение этой задачи в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{n\pi x}{\ell}. \tag{1.216}$$

Тогда граничные условия удовлетворяются автоматически.

Предположим, что функция $f(x,t)$, рассматриваемая как функция от x при фиксированном t, может быть разложена в ряд Фурье

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \tag{1.217}$$

где

$$f_n(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x,t) \sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx. \tag{1.218}$$

Подставляя в уравнение (1.183) ряд (1.216) (предполагаемое решение) и принимая во внимание (1.217), будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t)-f_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{\ell}=0,$$

откуда получим

$$T_n'(t)+\omega_n^2 T_n(t)=f_n(t),\ \text{где}\ \ \omega_n=\frac{n\pi a}{\ell}. \tag{1.219}$$

Пользуясь начальным условием (1.214)

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{\ell}=0,$$

получаем начальное условие для $T_n(t)$:

$$T_n(0)=0. \tag{1.220}$$

Найдем решение обыкновенного дифференциального уравнения (1.219), удовлетворяющее условию (1.220), воспользовавшись методом вариации. Решение соответствующего однородного уравнения имеет вид (1.211)

$$T_n(t)=C_n(t)e^{-\omega_n^2 t}.$$

Подставив в (1.219) выражения $T_n(t)$ и $T_n'(t)$, получим дифференциальное уравнение относительно $C_n(t)$:

$$C_n'(t)e^{-\omega_n^2 t}=f_n(t),$$

откуда находим

$$C_n(t)=\int_0^t f_n(\tau)e^{\omega_n^2\tau}d\tau+C_n.$$

Следовательно, $T_n(t)=\left[C_n+\int_0^t f_n(\tau)e^{\omega_n^2\tau}d\tau\right]e^{-\omega_n^2 t}$

и в силу (1.220)

$$T_n(0)=C_n=0.$$

Итак,

$$T_n(t)=\int_0^t e^{-\omega_n^2(t-\tau)}f_n(\tau)d\tau. \tag{1.221}$$

Подставляя в ряд (1.216) выражение (1.221), получим решение однородной краевой задачи (1.183), (1.214) – (1.215) в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2(t-\tau)} f_n(\tau)d\tau\right]\sin\frac{n\pi x}{\ell}. \qquad (1.222)$$

Если начальное условие неоднородно $\left(u|_{t=0}=\varphi(x)\right)$, то к решению (1.222) нужно прибавить решение однородного уравнения теплопроводности с заданным начальным условием $u|_{t=0}=\varphi(x)$ и граничными условиями (1.214), которое получено в п.1.33.1А.

1.33.2Б Общая первая краевая задача

Наконец рассмотрим общую первую краевую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности, т.е. тот случай, когда начальное и граничные условия неоднородные:
найти решение уравнения (1.183)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0}=\mu_1(t),\ \ u|_{x=l}=\mu_2(t), \qquad (1.223)$$

и начальном условии

$$u|_{t=0}=\varphi(x). \qquad (1.224)$$

Задача сводится к задачам, рассмотренным в пп. 1.33.1Б, 1.33.2А. А именно, вводится функция вида

$$u(x,y)=v(x,y)+\omega(x,y), \qquad (1.225)$$

где функция $v(x,y)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \qquad (1.226)$$

граничным условиям

$$v|_{x=0}=\mu_1(t),\ \ v|_{x=l}=\mu_2(t) \qquad (1.227)$$

и начальному условию

$$v\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad (1.228)$$

а функция $\omega(x, t)$ удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + f(x, t), \qquad (1.229)$$

граничным условиям

$$\omega\big|_{x=0} = 0, \omega\big|_{x=l} = 0 \qquad (1.230)$$

и начальному условию

$$\omega\big|_{t=0}. \qquad (1.231)$$

Легко доказать, что сумма (1.225) является решением общей краевой задачи.

1.34 РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В БЕСКОНЕЧНОМ СТЕРЖНЕ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ

Рассмотрим задачу о распределении температуры в однородном неограниченном стержне, теплоизолированном по всей длине, при известном начальном (при $t = 0$) распределении температуры.

Математическая постановка задачи: найти функцию $u(x, t)$, ограниченную в области $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < \infty,\ t > 0) \qquad (1.232)$$

и начальному условию

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ -\infty < x < \infty. \qquad (1.233)$$

Сформулированная задача есть задача Коши.

Применим метод разделения переменных и суперпозиции частных решений.

Ищем частные решения уравнения (1.232) в виде произведения двух функций одной переменной

$$u(x,t)=T(t)X(x). \tag{1.234}$$

Подставляя (1.234) в (1.232) и разделяя переменные, получим

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\mu,\ \ \mu=\text{const}.$$

Откуда следует

$$T'(t)+a^2\mu T(t)=0, \tag{1.235}$$

$$X''(x)+\mu X(x)=0. \tag{1.236}$$

Из уравнения (1.235) находим

$$T(t)=Ce^{-\mu a^2 t}. \tag{1.237}$$

Функции $T(t)$ и $X(x)$ должны быть ограниченными, т.к. температура $u=X(x)T(t)$ не может неограниченно возрастать в результате свободного теплообмена. Из (1.236) видно, что параметр разделения μ не может быть отрицательным; если $\mu<0$, то $e^{-\mu a^2 t}\to\infty$ при $t\to\infty$, а это не имеет физического смысла. Следовательно, $\mu\ge 0$. Обозначим для удобства последующих выкладок $\mu=\lambda^2$. В выражении (1.237) положим $C=1$. Тогда

$$T(t)=e^{-\lambda^2a^2t}.$$

Как известно, для линейного уравнения (1.236) общее решение имеет вид

$$X(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x.$$

Так как граничные условия отсутствуют, то параметр λ остается совершенно произвольным. Произвольные постоянные A и B для каждого λ имеют определенные значения. Поэтому A и B можно считать функциями от λ. Согласно (1.234) каждому значению λ соответствует частное решение

$$u_\lambda(x,t)=e^{-\lambda^2a^2t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\right]. \tag{1.238}$$

В случае стержня конечной длины ℓ мы определили из граничных условий дискретное множество возможных значений параметра λ: $\lambda_n=n\dfrac{\pi}{\ell}$, где каждому n соответствуют некоторые коэффициенты A_n и B_n. Чем длиннее стержень, тем гуще множество значений λ_n (расстояние между λ_n и λ_{n+1} равно $\frac{\pi}{\ell}$ и стремится к нулю, когда $\ell \to \infty$). Поэтому для бесконечного стержня λ может иметь любое значение от 0 до ∞. Таким образом, первая часть метода – построение частных решений – завершена.

Вторая часть метода Фурье – суперпозиция частных решений $u_\lambda(x,t)$, $0 < \lambda < \infty$. Уравнение (1.232) линейное и однородное; оно имеет, как мы только что установили, бесчисленное множество частных решений, зависящих от непрерывно меняющегося параметра λ. Поэтому общее решение получается из частных (1.238) не суммированием по счетному множеству значений λ_n, а интегрированием по параметру λ:

$$u(x,t) = \int_0^\infty u_\lambda(x,t)d\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda^2 a^2 t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda. \qquad (1.239)$$

Для того чтобы убедиться, что функция (1.239) действительно является решением уравнения (1.232), надо продифференцировать (1.239) по x и по t и результаты дифференцирования подставить в уравнение. Не проводя эту операцию, которая требует определенных знаний об интегралах по параметру, будем исходить из доказанного в литературе утверждения: интеграл (1.239) является решением уравнения (1.232) при любых абсолютно интегрируемых функциях $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$. Подберем функции $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ так, чтобы решение (1.239) удовлетворяло начальному условию (1.233). Полагая в (1.239) $t = 0$, получим в силу (1.233)

$$u(x,0) = \varphi(x) = \int_0^\infty \left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda. \qquad (1.240)$$

Интеграл, стоящий справа, есть интеграл Фурье (одна из его форм), который является обобщением понятия ряда Фурье.

В теории интеграла Фурье доказывается, что любая непрерывная функция $f(x)$, абсолютно интегрируемая, т.е. удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty,$$

может быть представлена в виде интеграла от гармонических функций $\cos\lambda x$ и $\sin\lambda x$, частоты которых λ приобретают непрерывную совокупность значений:

$$f(x) = \int_0^\infty \left[a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda, \qquad (1.241)$$

где

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x dx, \quad b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x dx. \qquad (1.242)$$

В равенстве (1.241) нетрудно усмотреть сходство с рядом Фурье для функции $f(x)$, а в выражениях (1.242) – сходство с коэффициентами Фурье.

Сравнивая равенства (1.240) и (1.241), получаем выражения

$$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\cos\lambda x dx, \quad B(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\sin\lambda x dx \qquad (1.243)$$

в предположении, что заданная функция $\varphi(x)$непрерывна и абсолютно интегрируема.

Найдя таким образом коэффициенты $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ по формулам (1.243) и подставив их в интеграл (1.240), получим

$$u(x,t)=\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t}\left[\cos\lambda x\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi d\xi+\sin\lambda x\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi d\xi\right]d\lambda.$$ Внесем $\cos\lambda x$ и $\sin\lambda x$ под знак внутренних интегралов, тогда

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)(\cos\lambda\xi\cdot\cos\lambda x+\sin\lambda\xi\cdot\sin\lambda x)d\xi\right]d\lambda.$$

Учитывая, что выражение в круглых скобках есть косинус разности, приходим к следующему представлению:

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda(\xi-x)d\xi.$$

Последний интеграл можно еще преобразовать, изменив порядок интегрирования:

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)d\xi\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t}\cos\lambda(\xi-x)d\lambda. \qquad (1.244)$$

По существу задача решена. Построенная функция $u(x,t)$ есть решение данного уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию. Можно только преобразовать полученное выражение к более удобному виду, который позволит придать физический смысл решению задачи теплопроводности в бесконечном стержне.

Займемся вычислением внутреннего интеграла; положим в нем $a\lambda\sqrt{t}=z$, $\lambda(\xi-x)=\beta z$, откуда найдем $d\lambda=\dfrac{dz}{a\sqrt{t}}$, $\beta=\dfrac{\xi-x}{a\sqrt{t}}$. В результате имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos\lambda(\xi - x)d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos\beta z dz.$$

Последний интеграл может быть вычислен следующим специальным приемом. Обозначим

$$K(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos\beta z dz. \tag{1.245}$$

Дифференцируя интеграл $K(\beta)$ по параметру β, найдем, что

$$K'(\beta) = -\int_0^{\infty} e^{-z^2} z \sin\beta z dz.$$

Преобразуем $K'(\beta)$, проинтегрировав по частям:

$$K'(\beta) = \begin{vmatrix} \bar{u} = \sin\beta z, & d\bar{v} = -e^{-z^2} z dz \\ d\bar{u} = \beta\cos\beta z dz, & \bar{v} = \frac{1}{2} e^{-z^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-z^2} \sin\beta z \Big|_0^{\infty} - \frac{\beta}{2} \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos\beta z dz = -\frac{\beta}{2} K(\beta).$$

Таким образом, имеем дифференциальное уравнение

$$K'(\beta) = -\frac{\beta}{2} K(\beta).$$

Интегрируя его, получим

$$\frac{K'(\beta)}{K(\beta)} = -\frac{\beta}{2} \Rightarrow \ln\frac{K(\beta)}{C} = -\frac{\beta^2}{4}.$$

Откуда находим

$$K(\beta) = Ce^{-\frac{\beta^2}{4}}.$$

Определим C. Из (1.245) имеем $K(0) = \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz$ - интеграл Пуассона. Как известно, $\int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. В силу этого

$$K(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos\beta z dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\beta^2}{4}}$$

и

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos\lambda(\xi - x)d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}}.$$

Подставляя это выражение интеграла в решение (1.244), найдем

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\frac{1}{a\sqrt{t}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi$$

и окончательно

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi. \qquad (1.246)$$

Заметим, что полученный интеграл (1.246), называемый **интегралом Пуассона,** довольно труден для вычисления: он не берется в элементарных функциях. Однако задача считается решенной, если удается выразить этот интеграл через табулированную функцию Erf, известную в теории вероятностей под названием ***интеграла ошибок.***

Функцию

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}, \qquad (1.247)$$

зависящую от x, t и произвольного параметра ξ, часто называют **фундаментальным решением уравнения теплопроводности.** Функция $G(x,\xi,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности и начальному условию, в чем нетрудно убедиться. Она имеет определенный физический смысл.

Пусть начальное распределение температуры в стержне задано функцией $\varphi(x)$, равной нулю всюду, кроме окрестности точки $x=x_0$, где $u=u_0=\mathrm{const}$, т.е.

$$\varphi(x)=\varphi_\delta(x)=\begin{cases}u_0, & \text{если } x_0-\delta<x<x_0+\delta\\ 0, & \text{если } |x-x_0|>\delta\end{cases}$$

(см. рис. 1.11). Это так называемый **физический тепловой импульс.** Такое начальное распределение можно истолковать следующим образом: до момента $t=0$ весь стержень находился при нулевой температуре и в момент $t=0$ малому интервалу $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$, т.е. элементу длины 2δ стержня, сообщили некоторое количество тепла $Q_0=2\delta\rho c u$ (здесь ρ - плотность материала стержня, c - его теплоемкость, $2\delta\rho$ - масса выделенного участка), которое вызвало мгновенное повышение температуры на этом участке на величину u_0. Практически температура, конечно, не может представляться разрывной функцией $\varphi_\delta(x)$, но график температуры (он будет иметь примерно вид пунктирной линии) тем меньше отличается от графика $\varphi_\delta(x)$, чем резче и кратковременнее будет подогрев.

При таком тепловом импульсе решение (1.247) задачи теплопроводности будет иметь вид

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}u_0 e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi=\frac{Q}{4a\delta c\rho\sqrt{\pi t}}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi. \qquad (1.248)$$

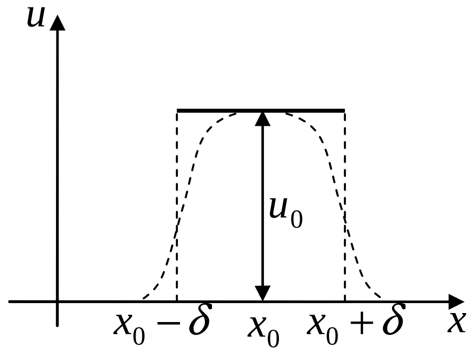


Рис. 1.11

Будем теперь уменьшать длину интервала, на которой было подано тепло Q_0. Устремляя δ к нулю, т.е. переходя к мгновенному точечному источнику тепла, находящемуся в момент $t=0$ в точке x_0, получим из интеграла (1.248), используя теорему о среднем,

$$u(x,t)=\frac{Q}{c\rho\left(2a\sqrt{\pi t}\right)}\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\delta}e^{-\frac{(x_0-x)^2}{4a^2t}}\cdot 2\delta=u_0\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x_0-x)^2}{4a^2t}}. \qquad (1.249)$$

В частности, если количество тепла $Q_0=c\rho$, то решение (1.249) превратится в функцию

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x_0-x)^2}{4a^2t}}=G(x,x_0,t),$$

т.е. в фундаментальное решение (1.247) при значении параметра $\xi=x_0$.

Следовательно, точечный источник тепла с количеством тепла $Q_0=c\rho$, действовавший в точке x_0 в момент $t=0$, передаст в точку x к моменту t такое количество тепла, что температура в этой точке становится равной фундаментальному решению $G(x,x_0,t)$ уравнения теплопроводности.

Применим теперь физический смысл фундаментального решения к физическому толкованию решения (1.246). Для того чтобы придать сечению $x=\xi$ стержня температуру $\varphi(\xi)$ в начальный момент, надо распределить на малом элементе $d\xi$ около этой точки количество тепла $dQ=c\rho\varphi(\xi)d\xi$ или, что то же самое, поместить в точке ξ мгновенный точечный источник тепла мощности dQ. Тогда, согласно (1.249), распределение температуры, вызываемое этим тепловым импульсом, будет таково:

$$\varphi(\xi)d\xi\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}.$$

Общее же воздействие, обусловленное начальной температурой $\varphi(\xi)$ во всех точках стержня, может быть получено суммированием тех воздействий, которые произошли от отдельных элементов, т.е. от каждого импульса в отдельности, что и даст полученное выше решение

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi.$$

Другими словами, решение (1.246) есть результат суперпозиции (наложения) температур, возникающих в точке x в момент времени t вследствие воздействия непрерывно распределенных по стержню тепловых импульсов «интенсивности» $\varphi(\xi)$ в точке ξ, приложенных в момент $t=0$.

Формула Пуассона (1.246) обобщается в задачу Коши для уравнения теплопроводности с двумя и тремя пространственными координатами. Так, в случае распространения тепла в неограниченном пространстве уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

при начальном условии

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z)$$

имеет решение

$$u(x,y,z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi,\eta,\varsigma)\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^3}e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\varsigma-z)^2}{4a^2t}}d\xi d\eta d\varsigma.$$

1.35 ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В ШАРЕ

Решение задачи теплопроводности в пространстве двух и трех измерений связано с большими трудностями математического характера. Возможности использования математического аппарата в настоящем курсе сильно ограничены. Поэтому рассмотрим краевую задачу для трехмерного пространства, решение которой можно привести к одномерному случаю.

Пусть имеем однородный шар радиуса R, центр которого находится в начале координат. Предположим, что как в начальный, так и в последующие моменты времени температура одна и та же во всех точках, находящихся на одинаковой расстоянии r от центра шара. Во все время наблюдения внешняя поверхность шара поддерживается при нулевой температуре. Определим температуру любой точки внутри сферы в момент времени $t>0$.

Преобразуем уравнение теплопроводности в пространстве трех координат

$$u_t=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\right) \tag{1.250}$$

к уравнению с одной пространственной координатой, т.к. температура u в точке $M(x, y, z)$ для $t > 0$ по условию зависит от ее расстояния r до начала координат.

Значит,

$$u = u(r, t), \quad \text{где} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{1.251}$$

Из (1.250) найдем

$$u_x = u_r \cdot r_x = u_r \cdot \frac{x}{r},$$

$$u_{xx} = (u_r)'_x \cdot r_x + u_r \cdot r_{xx} = u_{rr} \cdot r_x^2 + u_r \cdot r_{xx} = u_{rr}\left(\frac{x}{r}\right)^2 + u_r \frac{r^2 - x^2}{r^3}.$$

Аналогично определяются u_{yy}, u_{zz}. После подстановки в (1.250) найденных выражений для частных производных u_{xx}, u_{yy}, u_{zz} уравнение примет вид

$$u_t = a^2\left(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r\right). \tag{1.252}$$

Тогда начальное условие запишется в виде

$$u\big|_{t=0} = \varphi(r), \tag{1.253}$$

где $\varphi(r)$ - заданная функция в интервале $0 \le r \le R$, а граничное условие

$$u\big|_{r=R} = 0. \tag{1.254}$$

Если ввести новую неизвестную функцию

$$V(r, t) = ru(r, t), \tag{1.255}$$

то задача легко сводится к решенной ранее одномерной краевой задаче с однородными граничными условиями. В самом деле, из (1.255) найдем

$$V_t = ru_t, \quad V_r = u + ru_r, \quad V_{rr} = 2u_r + ru_{rr}.$$

Выразим отсюда u_t, u_r, u_{rr} и подставим их значения в (1.252). Уравнение (1.252) преобразуется к виду

$$V_t = a^2 V_{rr},$$

а условия для новой функции $V(r, t)$ таковы:

$$V\big|_{t=0} = r\varphi(r),$$

$$V\big|_{r=0}=0,\ \ V\big|_{r=R}=0.$$

В результате мы пришли к задаче о теплопроводности в конечном стержне длины R, на концах которого поддерживается температура, равная нулю, а начальное распределение температуры задается функцией $r\varphi(r)$. Эта задача решена в п. 1.33.1А. Согласно формулам (1.202) и (3.203) имеем

$$V(r,t)=\sum_{i=1}^{\infty}a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{R}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi r}{R},$$

где

$$a_n=\frac{2}{R}\int_0^R r\varphi(r)\sin\frac{n\pi r}{R}dr.$$

Искомая же температура $u(r,t)=\dfrac{V(r,t)}{r}$.

1.36 УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К УРАВНЕНИЯМ ПУАССОНА И ЛАПЛАСА

Исследование стационарных процессов различной физической природы приводит к уравнениям эллиптического типа. Простейшими и наиболее распространенными уравнениями этого типа являются уравнения Пуассона и Лапласа.

К уравнениям Пуассона и Лапласа, помимо задачи о распределении температуры в стационарном тепловом поле, что было установлено в п. 1.31, приводятся многие задачи из электростатики, магнитостатики, гидродинамики и других разделов естествознания. Остановимся на некоторых из них.

Основное уравнение электростатики

Пусть в некоторой однородной среде имеется стационарное, т.е. не зависящее от времени, электрическое поле, образованное электрическими зарядами. $\overline{E}$ - напряженность электрического поля; ρ - плотность зарядов; диэлектрическую постоянную среды примем равной единице.

Основным законом электростатического поля является теорема Гаусса: поток напряженности $\overline{E}$ через произвольную замкнутую поверхность S равен (в абсолютной системе единиц) алгебраической сумме зарядов, находящихся внутри этой поверхности, умноженной на 4π:

$$\oiint_S E_n dS=4\pi\sum_i e_i.$$

В общем случае электрические заряды распределены по объему V с некоторой плотностью $\rho=\rho(x,y,z)$. Заряд ρdV, помещенный в элементе объема dV, можно рассматривать как точечный заряд, а данное электрическое поле напряженности $\overline{E}$ - как поле, образованное наложением точечных зарядов. Поэтому сумма $\sum_i e_i$ должна быть заменена на $\iiint_V \rho dV$. Итак, в силу основного закона

$$\oiint_S E_n dS = 4\pi \iiint_V \rho dV. \tag{1.256}$$

Применив к поверхностному интегралу формулу Остроградского-Гаусса

$$\oiint_S E_n dS = 4\pi \iiint_V \operatorname{div}\overline{E}\, dV,$$

из (1.256) получаем

$$\iiint_V \operatorname{div}\overline{E}\, dV = 4\pi \iiint_V \rho\, dV$$

или

$$\iiint_V \left(\operatorname{div}\overline{E} - 4\pi\rho\right) dV = 0.$$

Отсюда, ввиду произвольности объема V, следует, что равно нулю подынтегральное выражение. Таким образом, перешли к дифференциальной форме теоремы Гаусса

$$\operatorname{div}\overline{E} = 4\pi\rho. \tag{1.257}$$

Из электродинамики известно, что электростатическое поле является безвихревым, или потенциальным, т.е. существует такая скалярная функция $\varphi(x, y, z)$, для которой

$$\overline{E} = -\operatorname{grad}\varphi,$$

где φ - электрический потенциал.

В векторном анализе было установлено, что

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) \equiv \Delta\varphi.$$

С учетом этого уравнение (1.257) примет вид

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \tag{1.258}$$

В системе единиц СИ уравнение (1.258) записывается проще:

$$\Delta\varphi = -\rho.$$

Отсюда заключаем, что потенциал φ электрического поля удовлетворяет уравнению Пуассона. Если объемных зарядов нет $(\rho = 0)$, то потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0.$$

Основное уравнение гидродинамики

Пусть внутри некоторой области T с границей S имеет место течение несжимаемой жидкости (плотность $\rho = \text{const}$), характеризуемое вектором скорости $\bar{v}$. Будем предполагать, что координаты v_x, v_y, v_z вектора $\bar{v}$ не зависят от времени t. Такое движение называют **стационарным** или **установившимся**. Как известно из векторного анализа, стационарное поле скоростей движущейся несжимаемой жидкости является соленоидальным, т.е.

$$\operatorname{div}\bar{v} = 0. \tag{1.259}$$

(Напомним: в силу условия несжимаемости, количество жидкости, поступающей внутрь поверхности S за единицу времени, равно количеству жидкости, удаляющейся за это время из области, ограниченной этой поверхностью. Следовательно, поток через произвольную замкнутую поверхность в этом поле равен нулю, а это означает, что дивергенция поля равна нулю во всех точках (формула Остроградского-Гаусса)).

Уравнение (1.259) называется уравнением движения несжимаемой жидкости. Оно еще не дает возможности определить скорость $\bar{v}$, поскольку надо знать три скалярные функции v_x, v_y, v_z, а уравнение для их определения только одно. В гидродинамике выводятся из физических соображений еще несколько уравнений и из полученной системы уравнений находятся координаты вектора $\bar{v}$. Мы не будем составлять этих уравнений; вместо этого наложим на движение дополнительное требование и тогда, в этом частном случае, нам удастся обойтись одним уравнением (1.259). Ограничимся рассмотрением потенциального движения жидкости. Если течение невихревое ($\operatorname{rot}\bar{v} = 0$), то скорость $\bar{v}$ есть градиент некоторой скалярной функции u, называемой **потенциалом скорости:**

$$\bar{v} = -\operatorname{grad} u.$$

Подставляя это выражение в (1.259), получим

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = 0$$

или

$$\Delta u = 0.$$

Как видим, потенциал $u(x, y, z)$ скорости течения жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа.

В задачах фильтрации можно принять

$$\bar{v} = -k \operatorname{grad} P,$$

где P - давление; $k - \text{const}$. Тогда установившийся режим фильтрации описывается уравнением Лапласа относительно давления $P(x, y, z)$ пласта:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0.$$

1.37 ПОСТАНОВКА ОСНОВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА

Для решения уравнения Лапласа или Пуассона, как и вообще для решений стационарных задач, естественно, не задается начальный режим. Задаются лишь условия на границе области.

Математически задача для уравнений Лапласа (Пуассона) ставится так: найти функцию $u(x,y,z)$, удовлетворяющую внутри области V, ограниченной замкнутой поверхностью S, уравнению

$$\Delta u = 0 \quad (\Delta u = -f(x,y,z))$$

и граничному условию, которое может быть взято в одном из следующих видов:

I. $u\big|_S = f_1(P)$ (граничное условие 1-го рода);

II. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \overline{n}}\right|_S = f_2(P)$ (граничное условие 2-го рода);

III. $\left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial \overline{n}} + hu\right)\right|_S = f_3(P)$ (граничное условие 3-го рода),

где f_1, f_2, f_3 - заданные непрерывные функции; $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{n}}$ - производная по внешней нормали $\overline{n}$ к поверхности S; $P(x,y,z)$ - текущая точка поверхности.

Как отмечалось в п. 1.32, задача интегрирования уравнения Лапласа с граничным условием первого рода называется первой граничной задачей или задачей Дирихле, а с условием второго рода – второй граничной задачей или задачей Неймана. Если задана линейная комбинация неизвестной функции и ее нормальной производной, то задачу интегрирования называют третьей граничной задачей. В некоторых задачах на разных участках границы задаются условия разных типов, тогда говорят о смешанной граничной задаче.

В частности, если уравнение Лапласа описывает установившийся режим фильтрации, а функция u определяет давление в каждой точке пласта, то граничное условие первого рода означает, что в точках поверхности S задается давление (например, давление на забое скважины или на контуре питания при плоско-параллельном течении); задание граничного условия второго рода равносильно заданию потока фильтрующейся жидкости, т.е. дебита в каждой точке границы S. Граничное условие третьего рода задается, когда имеет место переток жидкости в выше – или нижележащие пласты.

Если решение ищется в области V, внутренней (или внешней) по отношению к поверхности S, то соответствующую задачу называют внутренней (или внешней) граничной задачей.

1.38 РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ (ГРАНИЧНЫХ) ЗАДАЧ ДЛЯ ПРОСТЕЙШИХ ОБЛАСТЕЙ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Для областей произвольной формы метод Фурье для решения уравнения Лапласа (или Пуассона) неприменим. Этот метод для уравнения Лапласа проходит лишь в случае некоторых простейших областей, где возможно разделение переменных в граничных условиях (прямоугольник, круг, кольцо, сектор, шар, цилиндр и др.) Получающиеся при этом задачи на собственные значения (задачи Штурма-Лиувилля) приводят к различным специальным функциям. Мы рассмотрим задачи Дирихле в плоской области, при решении которых используются только тригонометрические функции (круговые и гиперболические).

1.38.1. Решение задачи Дирихле (внутренней и внешней) для круга. Интеграл Пуассона

Прежде напомним определение: функция u называется **гармонической** в некоторой области T, если она непрерывна в этой области вместе со своими частными производными до второго порядка включительно и удовлетворяет уравнению Лапласа в этой области. Решим первую граничную задачу (внутреннюю и внешнюю) для круга. Имея в виду, что различные физические процессы с математической точки зрения могут быть совершенно подобными, мы не будем интерпретировать рассматриваемую задачу в терминах того или иного физического явления, а ограничимся математической постановкой и разберем метод решения, единый для аналогичных проблем.

Внутренняя задача Дирихле: найти функцию u, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta u = 0 \tag{1.260}$$

внутри круга $x^2 + y^2 < a^2$, непрерывную в замкнутой области $x^2 + y^2 \le a^2$ и принимающую заданные значения на границе круга:

$$u\big|_C = f(x, y). \tag{1.261}$$

Внешняя задача Дирихле: найти функцию, гармоническую в области $x^2 + y^2 > a^2$ (внешность круга), ограниченную в области $x^2 + y^2 \ge a^2$ и удовлетворяющую граничному условию (1.261).

Обе задачи будем решать одновременно. Задачу проще решать в полярной системе координат (ρ, φ), где

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi. \tag{1.262}$$

После замены переменных (1.262) уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

в полярных координатах принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{1.263}$$

(Читателю предоставляется выполнить это самостоятельно). Соответственно граничное условие (1.262) запишется так:

$$u(\rho, \varphi)\big|_C = u(a, \varphi) = f(\varphi), \;\; 0 \le \varphi \le 2\pi. \tag{1.264}$$

Причем $f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi)$, т.к. увеличение φ на 2π возвращает точку (ρ, φ) в исходное положение.

Согласно методу Фурье ищем решение уравнения (1.263) при условии (1.264) в виде

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi). \tag{1.265}$$

Подставляя (1.265) в (1.263), получим

$$R''(\rho)\Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho}R'(\rho)\Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho^2}R(\rho)\Phi''(\varphi) = 0.$$

Разделяем переменные

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\frac{\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho)}{R(\rho)} = -\lambda.$$

Поскольку по обе стороны знака равенства стоят функции от различных независимых переменных, то такое равенство возможно только тогда, когда обе части равны одной и той же постоянной, которую обозначим через λ. Тогда приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0, \tag{1.266}$$

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0. \tag{1.267}$$

Общее решение линейного уравнения (1.267) есть

$$\Phi(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\varphi. \tag{1.268}$$

При изменении угла φ на величину 2π однозначная функция $u(\rho,\varphi)$, как и ограниченная функция $f(\varphi)$, должна вернуться к исходному значению, т.е. должно быть выполнено условие периодичности:

$$u(\rho,\varphi+2\pi)=u(\rho,\varphi).$$

Отсюда следует, что функция $\Phi(\varphi)$ является периодической с периодом 2π:

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi). \qquad (1.269)$$

Решение (1.268) будет удовлетворять условию периодичности лишь тогда, когда $\sqrt{\lambda}=n$, где $n=0,\ 1,\ 2,\ldots$ Отрицательные n можно отбросить, т.к. знак n влияет только на знак произвольной постоянной B. Значит, отрицательные n не дают новых решений.

Таким образом, собственные числа и собственные функции задачи (1.268), (1.269) есть

$$\lambda_n=n^2,\ \ \Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi,\ \ n=0,\ 1,\ 2,\ldots \qquad (1.270)$$

Подставим теперь $\lambda_n=n^2$ в уравнение (1.266):

$$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)-n^2R(\rho)=0. \qquad (1.271)$$

В литературе уравнение (1.271) известно под названием уравнения Эйлера. Его решение ищут в виде

$$R(\rho)=\rho^{\mu}. \qquad (1.272)$$

Подставляя (1.272) в (1.271), найдем

$$\mu(\mu-1)\rho^{\mu-2}\rho^2+\rho\mu\rho^{\mu-1}-n^2\rho^{\mu}=0$$

или, сокращая на ρ^{μ},

$$\mu^2-n^2=0\text{, откуда }\ \mu=\pm n\quad(n>0).$$

Таким образом, для каждого значения $n\ (n>0)$ имеется два линейно независимых решения ρ^n и ρ^{-n}, которые определяют свое общее решение $R_n(\rho)$ уравнения (1.271):

$$R(\rho)=C_n\rho^n+D_n\rho^{-n}, \qquad (1.273)$$

где C_n, D_n - постоянные. Перемножая теперь $R_n(\rho)$ и $\Phi_n(\varphi)$, согласно (1.265), получим дискретную совокупность функций

$$u_n(\rho,\varphi)=(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)\left(C_n\rho^n+D_n\rho^{-n}\right). \qquad (1.274)$$

Для внутренней задачи Дирихле надо положить $R_n(\rho)=C_n\rho^n$, т.к. если $D_n\neq 0$, то функция (1.274) обращается в бесконечность при $\rho=0$ и не является гармонической внутри круга $\rho<a$. Для решения внешней задачи, наоборот, надо взять $R_n(\rho)=D_n\rho^{-n}$, иначе, положить $C_n=0$, т.к. решение (1.274) должно быть ограниченным в области $\rho\geq a$. Тогда частными решениями уравнения (1.263) являются функции

$$u_n(\rho,\varphi)=\rho^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi) \text{ для } \rho\leq a,$$

$$u_n(\rho,\varphi)=\frac{1}{\rho^n}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi) \text{ для } \rho\geq a,$$

$$n=0,1,2,\ldots.$$

(Постоянные C_n и D_n включены в A_n и B_n). В силу линейности и однородности уравнения Лапласа суммы частных решений

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi),\quad \rho\leq a, \qquad (1.275)$$

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\rho^n}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi),\quad \rho\geq a \qquad (1.276)$$

также будут решением уравнения Лапласа (при условии сходимости рядов).

Подберем произвольные постоянные A_n и B_n так, чтобы удовлетворялось условие (1.264)

$$u(a,\varphi)=f(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi),\quad 0\leq\varphi\leq 2\pi. \qquad (1.277)$$

Напишем ряд Фурье для периодической функции $f(\varphi)$ на отрезке $[0;\,2\pi]$:

$$f(\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\varphi+\beta_n\sin n\varphi), \qquad (1.278)$$

где

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)d\psi,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\psi)\cos n\psi \, d\psi, \tag{1.279}$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\psi)\sin n\psi \, d\psi.$$

Сопоставляя (1.277) и (1.278), заключаем, что для выполнения граничного условия (1.277) нужно положить A_0, $a^n A_n$, $a^n B_n$ равными коэффициентам Фурье:

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \; a^n A_n = \alpha_n, \; a^n B_n = \beta_n.$$

Следовательно, для внутренней задачи

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \; A_n = \frac{\alpha_n}{a^n}, \; B_n = \frac{\beta_n}{a^n},$$

для внешней задачи

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \; A_n = \alpha_n a^n, \; B_n = \beta_n a^n.$$

Таким образом, решение внутренней задачи Дирихле для круга представим в виде ряда

$$u(\rho,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \tag{1.280}$$

а решение внешней задачи Дирихле в виде ряда

$$u(\rho,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{\rho}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \tag{1.281}$$

где α_0, α_n, β_n определяются как коэффициенты ряда Фурье для функции $f(\varphi)$ по формулам (1.279).

Установлено, что так построенные функции (1.280) и (1.281) удовлетворяют всем условиям задачи.

Преобразуем формулы (1.280), (1.281) к более простому виду. Рассмотрим подробно внутреннюю задачу, а для внешней задачи получим результат по аналогии. Преобразуем ряд (1.280), подставив выражения для коэффициентов Фурье (1.279) и произведя затем перестановку порядка суммирования и интегрирования

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)d\psi+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\left[\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\cos n\psi\, d\psi\right)\cos n\varphi+\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\sin n\psi\, d\psi\right)\sin n\varphi\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n(\cos n\psi\cos n\varphi+\sin n\psi\sin n\varphi)\right\}d\psi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\cos n(\varphi-\psi)\right\}d\psi. \qquad (1.282)$$

Произведем тождественные преобразования в фигурных скобках, обозначив для краткости $\frac{\rho}{a}=t$, $\varphi-\psi=\omega$; при этом воспользуемся формулой

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right),$$

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\cos n(\varphi-\psi)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}t^n\cos n\omega=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}t^n\left(e^{in\omega}+e^{-in\omega}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(te^{i\omega}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(te^{-i\omega}\right)^n\right).$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(te^{i\omega}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}q^n=\frac{q}{1-q}$ является бесконечной геометрической прогрессией со знаменателем $q=\frac{\rho}{a}e^{i(\varphi-\psi)}$, модуль которого $|q|=\frac{\rho}{a}<1$. В силу этого имеем следующее представление:

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}t^n\cos n\omega=\frac{1}{2}\left(1+\frac{te^{i\omega}}{1-te^{i\omega}}+\frac{te^{-i\omega}}{1-te^{-i\omega}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-t^2}{1-te^{i\omega}-te^{-i\omega}+t^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-t^2}{1-2t\cos\omega+t^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{\rho}{a}\right)^2}{1-2\frac{\rho}{a}\cos(\varphi-\psi)+\left(\frac{\rho}{a}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2-\rho^2}{a^2-2a\rho\cos(\varphi-\psi)+\rho^2}.$$

Подставляя полученный результат в (1.282), получаем

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\frac{a^2-\rho^2}{a^2-2a\rho\cos(\varphi-\psi)+\rho^2}d\psi. \qquad (1.283)$$

Эта формула называется **формулой Пуассона,** а интеграл справа – **интегралом Пуассона**. Формула (1.283) позволяет записать искомое решение внутренней задачи Дирихле в форме интеграла, зависящего от параметров φ и ρ. Он существует для всех значений φ и ρ, $0\le\rho<a$ и удовлетворяет уравнению (1.263), а также граничному условию (1.264). Заметим, однако, что интеграл (1.283) теряет смысл при $\rho=a$. Когда говорят, что функция (1.283) удовлетворяет граничному условию, то под этим подразумевают, что $\lim\limits_{\rho\to a-0} u(\rho,\varphi)=f(\varphi)$. Поэтому решение внутренней задачи записывается так:

$$u(\rho,\varphi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\psi)\frac{a^2-\rho^2}{\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\psi)+a^2}d\psi & \text{при } \rho<a,\\ f(\varphi) & \text{при } \rho=a.\end{cases} \qquad (1.284)$$

По аналогии решение внешней задачи имеет вид

$$u(\rho,\varphi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\psi)\frac{\rho^2-a^2}{\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\psi)+a^2}d\psi & \text{при } \rho>a,\\ f(\varphi) & \text{при } \rho=a.\end{cases} \qquad (1.285)$$

Замечание. Интеграл Пуассона дает решение плоской задачи Дирихле для круга. Но он может служить решением и пространственной задачи Дирихле в случае цилиндрической симметрии области, т.е. когда область есть бесконечный цилиндр, а искомая функция $u=u(x,y,z)$, например, температура или электрический потенциал, не зависит от z. Тогда температура или потенциал в любом сечении, перпендикулярном к оси Oz, зависит только от ρ и φ. Следовательно, здесь имеет место плоская задача Дирихле.

1.38.2. Решение задачи Дирихле для прямоугольника

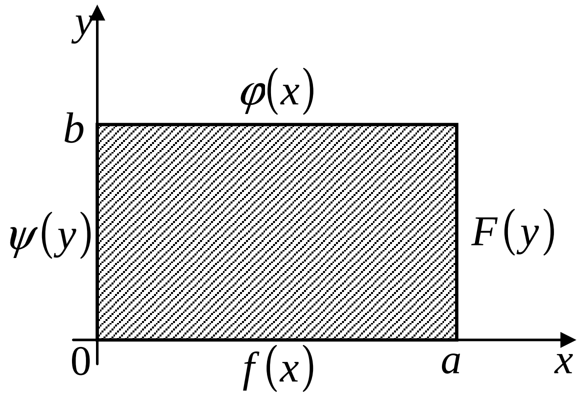


Рис. 1.12

Поставим задачу Дирихле для прямоугольника $0\le x\le a$, $0\le y\le b$ (рис. 1.12) при произвольных граничных условиях: найти функцию $u=u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{1.286}$$

$$0<x<a,\ 0<y<b$$

и двум парам граничных условий

$$u(0,y)=\psi(y),\ u(a,y)=F(y),\ 0\le y\le b, \tag{1.287}$$

$$u(x,0)=f(x),\ u(x,b)=\varphi(y),\ 0\le x\le a, \tag{1.288}$$

причем

$$\psi(b)=f(0),\ \psi(b)=\varphi(0),$$

$$F(0)=f(a),\ F(b)=\varphi(a). \tag{1.289}$$

Последние условия (1.289) обеспечивают непрерывность граничной функции в вершинах прямоугольника.

Не нарушая общности, можно предположить, что все ее значения в (1.289) равны нулю, т.к. к этому случаю можно привести любую задачу. Для этого надо представить решение в виде

$$u(x,y)=v(x,y)+\omega(x,y),$$

где $\omega(x,y)=A+Bx+Cy+Dxy$

при $A=f(0),\ B=\frac{1}{a}[f(a)-f(0)],\ C=\frac{1}{b}[\psi(b)-\psi(0)],$

$$D=\frac{1}{ab}\{[\varphi(a)-\varphi(0)]-[f(a)-f(0)]\}.$$

Для функции $v(x,y)$ получим задачу Дирихле при нулевых значениях в вершинах прямоугольника. Итак, будем решать задачу (1.286) – (1.289), предполагая, что все значения в (1.289) есть нули.

Представим решение в виде

$$u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y), \tag{1.290}$$

где $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ удовлетворяют уравнению Лапласа и следующим граничным условиям:

$$u_1(0,y)=\psi(y),\quad u_1(a,y)=F(y), \tag{1.291}$$

$$u_1(x,0)=0,\quad u_1(x,b)=0, \tag{1.292}$$

$$u_2(0,y)=0,\quad u_2(a,y)=0, \tag{1.293}$$

$$u_2(x,0)=f(x),\quad u_2(x,b)=\varphi(x). \tag{1.294}$$

(При сделанном предположении непрерывность граничных значений сохранена).

Функции $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ можно найти методом разделения переменных. Проведем решение для функции $u_2(x,y)$.

Ищем частные решения уравнения (1.286), удовлетворяющие условиям (1.293), в виде

$$u_2(x,y)=X(x)Y(y). \tag{1.295}$$

Подстановка (1.295) в (1.286) дает

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda,\ \ \lambda=\mathrm{const},$$

откуда имеем

$$Y''-\lambda Y=0, \tag{1.296}$$

$$X''+\lambda X=0. \tag{1.297}$$

Подстановка граничных условий (1.293) по переменной x в (1.295) приводит к соотношениям

$$X(0)=0,\ \ X(a)=0. \tag{1.298}$$

Для определения функции $X(x)$ имеем задачу (1.297), (1.298) – задачу Штурма-Лиувилля, которая, как нам известно (см. п. 1.33.1А), имеет решение вида

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2,\quad X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{a}x,\quad n=1,\ 2,\ldots$$

Общее решение уравнения (1.296) при $\lambda=\lambda_n$ можно записать в виде

$$Y_n(y)=A_n\mathrm{ch}\frac{n\pi}{a}y+B_n\mathrm{sh}\frac{n\pi}{a}y.$$

Перемножив теперь $X_n(x)$ и $Y_n(y)$, находим совокупность функций $u_{2n}(x,y)$, удовлетворяющих уравнению (1.286) и граничным условиям (1.293):

$$u_{2n}(x,y)=\left(A_n\mathrm{ch}\frac{n\pi}{a}y+B_n\mathrm{sh}\frac{n\pi}{a}y\right)\sin\frac{n\pi x}{a},\quad n=1,\ 2,\ldots$$

Общее решение задачи ищем, как обычно, в виде ряда

$$u_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}y+B_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}y\right)\sin\frac{n\pi x}{a}. \qquad (1.299)$$

Удовлетворим теперь граничным условиям (1.294), которые содержат заданные произвольные функции

$$u_2(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n \sin\frac{n\pi}{a}x=f(x),$$

$$u_2(x,b)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}b+B_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}b\right)\sin\frac{n\pi x}{a}=\varphi(x).$$

Отсюда видно, что постоянные множители A_n и $A_n \operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}b+B_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}b$ должны являться коэффициентами разложения функций соответственно $f(x)$ и $\varphi(x)$ в ряд Фурье по синусам:

$$A_n=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx=f_n,$$

$$A_n \operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}b+B_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}b=\frac{2}{a}\int_0^a \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx=\varphi_n.$$

Откуда определяем

$$A_n=f_n, \quad B_n=\frac{1}{\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{a}}\left(\varphi_n-f_n \operatorname{ch}\frac{n\pi b}{a}\right).$$

Подстановка этих значений постоянных A_n и B_n в (1.299) приводит функцию $u_2(x,y)$ после несложных преобразований к виду

$$u_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(f_n \operatorname{sh}\frac{n\pi(b-y)}{a}+\varphi_n \operatorname{sh}\frac{n\pi y}{a}\right)\frac{\sin\frac{n\pi x}{a}}{\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{a}}. \qquad (1.300)$$

Совершенно аналогично найдем

$$u_1(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi_n \operatorname{sh}\frac{n\pi(a-x)}{b}+F_n \operatorname{sh}\frac{n\pi x}{b}\right)\frac{\sin\frac{n\pi y}{b}}{\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{b}}, \qquad (1.301)$$

где

$$\psi_n = \frac{2}{b}\int_0^b \psi(y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy,$$

$$F_n = \frac{2}{b}\int_0^b F(y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy.$$

Окончательное решение задачи: $u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)$.

1.39 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сделаем некоторые общие замечания относительно области применения метода разделения переменных. В основе применимости метода лежит линейность как самих дифференциальных уравнений, так и краевых условий. Коэффициенты исходных дифференциальных уравнений должны быть постоянными либо представляться в виде функций, каждая из которых содержит лишь одну из переменных (такие уравнения нами были исключены из рассмотрения). Краевые условия должны быть однородными. Если в исходной задаче они неоднородны, то надо привести их к однородным. Метод Фурье использует технику разложения искомого решения по собственным функциям. Метод приводит к цели, если только удастся найти подходящую для заданных границ систему координат, допускающую разделение переменных в рассматриваемом уравнении. В случае двумерных задач граница рассматриваемой области должна состоять из координатных линий (в трехмерных задачах – из координатных плоскостей). Если используется декартова система координат, то границы области – отрезки прямых, параллельных осям координат (куски плоскостей, параллельных координатным плоскостям); при использовании полярной системы координат границы области – дуги окружностей с центрами в полюсе и отрезки лучей, выходящих из полюса, и.т.д.

Эти обстоятельства сильно ограничивают применимость метода Фурье. Есть множество задач, где разделение переменных не удается либо потому что граница тела достаточно сложна, либо потому что коэффициенты в исходном дифференциальном уравнении не являются постоянными, либо потому что уравнение не является линейным. Поэтому разработаны и другие методы решения задач математической физики, такие, например, как метод конечных разностей, метод интегральных уравнений, метод Ритца-Галеркина, метод физического моделирования, рассмотрение которых выходит за рамки настоящего курса.

УЧЕБНО - МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

РАЗДЕЛ 9 «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

2. Методические указания для студентов

2.1 ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Уравнение, связывающее независимую переменную, функцию и ее производные называется **обыкновенным дифференциальным уравнением.**

$$F\left(x, y, y', \ldots y^{(n)}\right) = 0$$

Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения.**

Например:

1) $y' + xy - x^2 = 0 -$ обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка;
2) $y'' - y' = 1 -$ обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка;
3) $y^2 - y''' + x^5 = 0 -$ обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка.

Рассмотрим обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, то есть уравнения $F(x, y, y') = 0$ или в разрешенном относительно y' виде, $y' = f(x, y)$.

Решением дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$ называется такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции обращает его в тождество.

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется **интегрированием дифференциального уравнения.**

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$ в области D называется функция $y = \varphi(x, C)$, обладающая следующими свойствами: 1) она является решением данного уравнения при любых значениях произвольной постоянной, принадлежащих некоторому множеству; 2) для любого начального условия $y(x_0) = y_0$, такого, что $(x_0; y_0) \in D$, существует единственное значение $C = C_0$, при котором решение $y = \varphi(x; C_0)$ удовлетворяет заданному начальному условию.

С геометрической точки зрения общему решению $y = \varphi(x, C)$ на плоскости XOY соответствует семейство интегральных кривых, зависящее от одного параметра - произвольной постоянной C.

Равенство $\Phi(x, y, C) = 0$, неявно задающее общее решение называется **общим интегралом уравнения** $y' = f(x, y)$.

Всякое решение $y = \varphi(x; C_0)$, полученное из общего решения $y = \varphi(x; C)$ при конкретном значении $C = C_0$, называется **частным решением.**

Частному решению удовлетворяющему начальному условию $y|_{x=x_0} = y_0$, на плоскости $X0Y$ соответствует линия $y_0 = y_0(x_0)$, проходящая через точку $M_0(x_0; y_0)$ Аналогично определяются частные интегралы.

Задача, в которой требуется найти частное решение уравнения $y' = f(x,y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$ называется **задачей Коши.**

Теорема Коши. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в некоторой области D плоскости $X0Y$ и имеет в этой области непрерывную частную производную по y, $f'_y(x,y)$, то, какова бы ни была точка (x_0, y_0) области D, существует, и притом единственное, решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y' = f(x,y)$, определенное в некотором интервале, содержащем точку x_0.

Особым решением называется такое решение, во всех точках которого условие единственности не выполняется, т.е. в любой окрестности каждой точки $(x;y)$ особого решения существует по крайней мере две интегральные кривые, проходящие через эту точку.

Особые решения не получаются из общего решения дифференциального уравнения ни при каких значениях произвольной постоянной C (в том числе и при $C = \pm\infty$).

С геометрической точки зрения особое решение есть огибающая семейства интегральных кривых (если она существует), т.е. линия, которая в каждой своей точке касается, по меньшей мере, одной интегральной кривой.

Например, общее решение уравнения $y' = \pm\sqrt{1-y^2}$ записывается в виде $y = \sin(x+C)$, $-\infty < C < \infty$. Это семейство имеет две огибающие: $y = 1$ и $y = -1$, которые будут особыми решениями данного уравнения.

2.2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЕННЫМИ И РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными,** если его правая часть есть произведение двух функций, одна из которых зависит от y, а другая от x. $y' = f(x) \cdot g(y)$.

Предположим, что функции $f(x)$ и $g(y)$ непрерывны на интервале $a < x < b$, $c < y < d$ и что $g(y) \neq 0$.

Умножая обе части уравнения $y' = f(x) \cdot g(y)$ на dx и деля на $g(y)$, запишем его в виде: $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx$.

Почленное интегрирование последнего уравнения приводит к соотношению $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$, которое представляет собой общий интеграл данного уравнения в указанной области.

Дифференциальное уравнение $M_1(x)\cdot N_1(y)dx + M_2(x)\cdot N_2(y)dy = 0$ называется **дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными** в симметричной относительно x и y дифференциальной форме.

Функции $M_1(x),\ N_1(y), M_2(x), N_2(y)$ непрерывны соответственно в интервалах $a < x < b,\ c < y < d$ и не равны тождественно нулю.

Для нахождения всех решений такого уравнения достаточно разделить обе части уравнения на произведение $M_2(x)\cdot N_1(y)$ и проинтегрировать полученное соотношение: $\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$. Полученное соотношение является общим интегралом данного уравнения, где $C -$ произвольная постоянная.

Уравнение вида $M(x)dx + N(y)dy = 0$ называется **дифференциальным уравнением с разделенными переменными.**

Почленное интегрирование данного уравнения приводит к соотношению $\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$, которое определяет (в неявной форме) решение исходного уравнения.

Уравнение вида $y' = f(ax + by + c)$ $(a, b, c$ - числа) приводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $z(x) = ax + by$ или $z(x) = ax + by + c$. Тогда $z'(x) = a + by'$, а $y' = \frac{1}{b}(z' - a)$ и уравнение $y' = f(ax + by + c)$ примет вид $\frac{1}{b}(z' - a) = f(z)$ или $z' = a + b\cdot f(z)$, где $z' = \frac{dz}{dx}$. Разделяя переменные и интегрируя, получим $\int \frac{dz}{a + b\cdot f(z)} = x + c$.

Уравнения вида $y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$; $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$, где $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ или $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ приводятся к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $z(x) = a_2(x) + b_2y$ или $z(x) = a_2x + b_2y + c_2$ или $z(x) = a_1x + b_1y + c_1$

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.1. Найти общее решение уравнения $y' = x\left(y^2 + 1\right)$.

<u>Решение.</u> Данное уравнение есть уравнение с разделяющимися переменными $f(x) = x$, $g(y) = 1 + y^2$, функции $f(x)$ и $g(y)$ непрерывны всюду и $1 + y^2 \neq 0$.

Разделяя переменными и интегрируя , получим

$$\frac{dy}{dx} = x\left(y^2 + 1\right) \; ; \; dy = x\left(y^2 + 1\right)dx \; ; \; \frac{dy}{1 + y^2} = x\,dx$$

$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int x\,dx$; $\operatorname{arctg} y = \frac{x^2}{2} + C -$ общий интеграл данного уравнения.

Разрешая относительно y, находим общее решение $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$,

$-\frac{\pi}{2} < \frac{x^2}{2} + C < \frac{\pi}{2}$.

ПРИМЕР 2.2. Найти общий интеграл уравнения

$\left(x^2 - yx^2\right)dx + \left(y^2 + xy^2\right)dy = 0$.

<u>Решение.</u> Преобразуем данное уравнение

$x^2(1 - y)dx + y^2(1 + x)dy = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными в дифференциальной форме, симметричное относительно x и y.

Разделим обе части уравнения на $(1 - y) \cdot (1 + x) \neq 0$, получим

$$\frac{x^2(1-y)}{(1-y)(1+x)}dx + \frac{y^2(1+x)}{(1-y)(1+x)}dy = 0.$$ Интегрируем

$$\int \frac{x^2}{1+x}dx + \int \frac{y^2}{1-y}dy = C; \; \int \frac{\left(x^2 - 1\right) + 1}{1+x}dx - \int \frac{\left(1 - y^2\right) - 1}{1-y}dy = C;$$

$$\int (x-1)dx + \int \frac{dx}{1+x} - \int (1+y)dy - \int \frac{dy}{y-1} = C;$$

$$\frac{x^2}{2} - x + \ln|1+x| - y - \frac{y^2}{2} - \ln|y-1| = C;$$

$\frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right) - (x+y) + \ln\left|\frac{1+x}{y-1}\right| = C$. Пусть $C_1 = 2C$.

Получили общий интеграл $(x+y)(x-y-2)+2\ln\left|\dfrac{1+x}{y-1}\right|-C_1=0$.

ПРИМЕР 2.3. Проинтегрировать уравнение $\dfrac{dx}{x}+\dfrac{dy}{y}=0$.

Решение. Данное уравнение - есть уравнение с разделенными переменными. Проинтегрируем данное уравнение $\int\dfrac{dx}{x}+\int\dfrac{dy}{y}=C$;

$\ln|x|+\ln|y|=\ln C$ (так как левая часть выражается через натуральный логарифм, то постоянную C удобнее в данном случае записать как $\ln C$).

$\ln|xy|=\ln C$; $xy=C$; $y=\dfrac{C}{x}-$ общее решение, которое с геометрической точки зрения определяет семейство гипербол.

ПРИМЕР 2.4. Найти кривую, обладающую тем свойством, что отрезок любой ее касательной, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания.

Решение. Пусть $y=f(x)-$ уравнение искомой кривой, $M(x;y)-$ произвольная точка кривой.

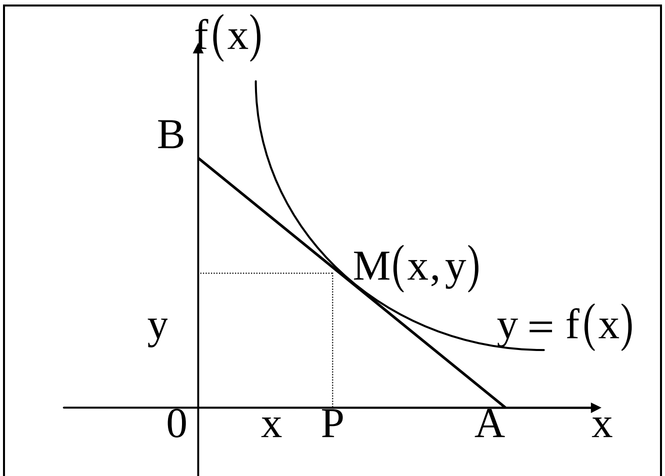


Рис. 2.1

$AM=BM$, т.е. $OP=PA=x$. Из ΔPAM $tg(\pi-\alpha)=\dfrac{MP}{PA}=\dfrac{y}{x}$, так как $tg\alpha=y'$, то $tg(\pi-\alpha)=-y'$, тогда $y'=-\dfrac{y}{x}$. Получили дифференциальное уравнение с разделяющими переменными, интегрируя его $\int\dfrac{dy}{y}=-\int\dfrac{dx}{x}$, имеем $\ln|y|+\ln|x|=\ln C$;

$xy=C$; $y=\dfrac{C}{x}-$семейство интегральных кривых, удовлетворяющих условию задачи.

ПРИМЕР 2.5. Материальная точка с массой $m=0{,}75$ г погружается в жидкость без начальной скорости. Сила сопротивления жидкости пропорциональна скорости погружения V. Коэффициент пропорциональности $k=3$. Найти зависимость погружения от времени.

<u>Решение.</u> В момент времени t точка находится под действием силы тяжести $P = mg$ и силы сопротивления жидкости $Q = kV$. Сила P направлена в сторону движения, а $Q -$ в сторону противоположную движению, поэтому их равнодействующая $F = mg - kV$.

Так как материальная точка погружается в жидкость под действием силы F, то по второму закону Ньютона эта же сила равна $F = m \cdot a = m\dfrac{dV}{dt}$.

Приравнивая оба выражения для F, получим $m\dfrac{dV}{dt} = mg - kV$, но по условию $m = 0{,}75$г, а $k = 3$. $0{,}75\dfrac{dV}{dt} = 0{,}75q - 3V$ сократим на $0{,}75$, $\dfrac{dV}{dt} = q - 4V$.

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделив переменные и проинтегрировав, получим

$$\int \frac{dV}{q - 4V} = \int dt, \qquad -\frac{1}{4}\ln|q - 4V| = t + C.$$

$$\ln|q - 4V| = -4(t + C); \qquad q - 4V = e^{-4(t+C)}; \qquad 4V = q - e^{-4(t+C)};$$

$$V = \frac{q - e^{-4(t+C)}}{4} \quad \text{или} \quad V = \frac{1}{4}\left(q - e^{-4t} \cdot e^{-C}\right) = \frac{1}{4}\left(q - C_1 e^{-4t}\right), \text{ где } C_1 = e^{-C}.$$

Для нахождения C_1 воспользуемся начальным условием $V(0) = 0$:

$0 = \dfrac{1}{4}(q - C_1)$, отсюда $C_1 = q$. Тогда частное решение будет иметь вид

$$V = \frac{q}{4}\left(1 - e^{-4t}\right).$$

ПРИМЕР. Решить дифференциальное уравнение $y' = \mathrm{ctg}(2x - 5y + 4) + \dfrac{2}{5}$.

<u>Решение</u>. Это уравнение вида $y' = f(ax + by + c)$. Сведем его к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $z(x) = 2x - 5y + 4$. Тогда $z' = 2 - 5y'$, а $y' = \dfrac{1}{5}(2 - z')$ и уравнение $y' = \mathrm{ctg}(2x - 5y + 4) + \dfrac{2}{5}$ примет вид

$$\frac{1}{5}(2 - z') = \mathrm{ctg}z + \frac{2}{5} \quad \text{или} \quad z' = -5\,\mathrm{ctg}\,z, \text{ где } z' = \frac{dz}{dx}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим $\dfrac{dz}{\mathrm{ctg}\,z} = -5dx$

$\int \frac{\sin z\, dz}{\cos z} = -5\int dx$, $\quad -\ln|\cos z| = -5x + c$. Заменяем z на $2x - 5y + 4$. Окончательно имеем $\ln|\cos(2x - 5y + 4)| = 5x + c$

ПРИМЕР. Решить дифференциальное уравнение $y' = \frac{4}{3} - \frac{4x - 3y + 2}{8x - 6y - 3}$.

Решение. Это уравнение вида $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$. Запишем определитель, составленный из коэффициентов при x и y: $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} = 0$. Т.к. определитель равен нулю, то это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Сделаем подстановку $z(x) = 4x - 3y + 2$, тогда $z' = 4 - 3y'$, а $y' = \frac{1}{3}(4 - z')$. Исходное уравнение $y' = \frac{4}{3} - \frac{4x - 3y + 2}{8x - 6y - 3}$ примет вид $\frac{1}{3}(4 - z') = \frac{4}{3} - \frac{z}{2(z-2) - 3}$ или $\frac{1}{3}z' = \frac{z}{2z - 7}$, где $z' = \frac{dz}{dx}$. Разделяя переменные и интегрируя, получим $\frac{2z - 7}{z}dz = 3dx$, $\int\left(2 - \frac{7}{z}\right)dz = 3\int dx$ $2z - 7\ln|z| = 3x + c$. Заменяем z на $4x - 3y + 2$. Окончательно имеем $2(4x - 3y + 2) - 7\ln|4x - 3y + 2| - 3x = c$.

2.3 ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Функция $f(x; y)$ называется **однородной $n -$го измерения** относительно своих аргументов x и y, если для любого значения λ имеет место тождество $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$.

Функция $f(x; y)$ называется **однородной нулевого измерения** относительно x и y, если для любого λ имеет место равенство $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x; y)$.

Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x; y)$ называется **однородным** относительно x и y, если $f(x; y)$ является однородной функцией нулевого измерения.

Дифференциальное уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется **однородным,** если $P(x, y)$ и $Q(x, y) -$ однородные функции одного измерения.

Однородное уравнение может быть приведено к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. С помощью подстановки $\frac{y}{x} = t$ $(y = xt,\ y' = t + xt')$ оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными по отношению к новой неизвестной функции $t(x)$.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.6. Найти общее решение уравнения $y' = \frac{2y^2 - x^2}{xy}$.

Решение. Функция $f(x;y) = \frac{2y^2 - x^2}{xy}$ является однородной функцией нулевого измерения, так как $\frac{2(\lambda y)^2 - (x\lambda)^2}{\lambda x \cdot \lambda y} = \frac{\lambda^2\left(2y^2 - x^2\right)}{\lambda^2 xy} = \frac{2y^2 - x^2}{xy}\lambda^0 = \frac{2y^2 - x^2}{xy}$. Значит данное уравнение однородное. Сделаем замену $\frac{y}{x} = t$. Подставим в уравнение $y = xt$ и $y' = t + xt'$, получим

$$t + xt' = \frac{2x^2t^2 - x^2}{x \cdot tx} = \frac{x^2\left(2t^2 - 1\right)}{x^2 t} = \frac{2t^2 - 1}{t}.$$

$$xt' = \frac{2t^2 - 1}{t} - t = \frac{2t^2 - 1 - t^2}{t} = \frac{t^2 - 1}{t} \quad \text{или} \quad x\frac{dt}{dx} = \frac{t^2 - 1}{t}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим $\int \frac{tdt}{t^2 - 1} = \int \frac{dx}{x}$.

$\frac{1}{2}\ln\left|t^2 - 1\right| = \ln|x| + \ln C_1$, или $\ln\left|t^2 - 1\right| = \ln Cx^2$, где $C_1^2 = C$.

$t^2 - 1 = Cx^2$, $t^2 = Cx^2 + 1$.

Возвращаясь к прежней неизвестной функции y, заменив t на $\frac{y}{x}$, получим $\frac{y^2}{x^2} = Cx^2 + 1$. Общий интеграл данного уравнения $y^2 = Cx^4 + x^2$.

ПРИМЕР 2.7. Найти частное решение уравнения

$$\left(x^4 + 6x^2y^2 + y^4\right)dx + 4xy\left(x^2 + y^2\right)dy = 0, \quad y(1) = 0.$$

<u>Решение.</u> В данном случае $P(x,y) = x^4 + 6x^2y^2 + y^4$, а $Q(x,y) = 4xy(x^2 + y^2)$. Обе функции - однородные четвертого измерения. Значит данное уравнение однородное. Введем подстановку $y = t \cdot x$, тогда $y' = t + xt'$, где $t = \dfrac{dt}{dx}$. Уравнение примет вид

$$x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = -4xy(x^2 + y^2) \cdot y', \quad y' = \frac{x^4 + 6x^2y^2 + y^4}{-4xy(x^2 + y^2)};$$

$$t + xt' = -\frac{x^4 + 6x^2 \cdot x^2t^2 + x^4t^4}{4x^2t(x^2 + x^2t^2)}; \quad t + xt' = -\frac{x^4(1 + 6t^2 + t^4)}{x^4(4t + 4t^3)};$$

$$xt' = -\frac{1 + 6t^2 + t^4}{4t + 4t^3} - t = \frac{-1 - 6t^2 - t^4 - 4t^2 - 4t^4}{4t(1 + t^2)} = \frac{-5t^4 - 10t^2 - 1}{4t + 4t^3}.$$ Разделяем переменные $-\dfrac{4t^3 + 4t}{5t^4 + 10t^2 + 1}dt = \dfrac{dx}{x}$, интегрируем

$$-\frac{1}{5}\int \frac{20t^3 + 20t}{5t^4 + 10t^2 + 1}dt = \ln|Cx|; \qquad -\frac{1}{5}\ln\left|5t^4 + 10t^2 + 1\right| = \ln|Cx|.$$ После упрощения получим $(Cx)^5 = \dfrac{1}{5t^4 + 10t^2 + 1}$. Возвращаясь к прежней неизвестной y, заменив t на $\dfrac{y}{x}$, получим $(Cx)^{-5} = 5\dfrac{y^4}{x^4} + 10\dfrac{y^2}{x^2} + 1$ или $Cx^5 = \dfrac{x^4}{5y^4 + 10y^2x^2 + x^4}$. Используя начальные условия $x = 1,\ y = 0$, найдем $C = 1$. Сокращая на x^4, имеем $x = \dfrac{1}{5y^4 + 10y^2x^2 + x^4}$ или окончательно $x^5 + 10y^2x^3 + 5y^4x = 1$.

ПРИМЕР 2.8. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $(1;1)$, если известно, что произведение абсциссы любой точки кривой на угловой коэффициент касательной к кривой в этой точке равно удвоенной сумме координат точки.

<u>Решение.</u> Пусть $M(x,y)-$ точка касания, тогда угловой коэффициент касательной, проведенной в точке $M(x,y)$ равен y'. По условию задачи $xy' = 2(x + y);\ y' = \dfrac{2(x + y)}{x} = 2\left(1 + \dfrac{y}{x}\right)$. Получили однородное уравнение. Сделаем подстановку $y = xt \quad (y' = t + xt')$

$t + xt' = 2(1+t)$; $\quad xt' = 2 + 2t - t$; $\quad t' = \dfrac{2+t}{x}$; $\quad \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{2+t}{x}$

$\dfrac{dt}{2+t} = \dfrac{dx}{x}$. Интегрируя, получим $\ln|2+t| = \ln c|x|$, $2 + t = Cx$,

$t = Cx - 2$, $\dfrac{y}{x} = Cx - 2$, но $y(1) = 1$. $1 = C - 2$; $C = 3$.

Итак, $y = 3x^2 - 2x$. Это уравнение параболы с вершиной в точке $\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$ и пересекающая ось $0X$ в точках $x = 0$ и $x = \dfrac{2}{3}$.

2.4 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДЯЩИЕСЯ К ОДНОРОДНЫМ

Уравнение вида $y' = \dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$ при $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ приводится к однородному подстановкой $x = x_1 + \alpha$, $y = y_1 + \beta$, где $(\alpha, \beta)-$ точки пересечения прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Если же $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то подстановкой $a_2x + b_2y = z(x)$ уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.9. Найти общее решение уравнения $y' = \dfrac{x + y - 2}{y - x - 4}$.

<u>Решение.</u> Вычислим определитель, составленный из коэффициентов при x и y

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, следовательно, данное уравнение, приводится к однородному. Сделаем подстановку $x = x_1 + \alpha$, $y = y_1 + \beta$, тогда $y' = \dfrac{dy_1}{dx_1}$, т.к. $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d(y_1 + \beta)}{d(x_1 + \alpha)} = \dfrac{dy_1 + d\beta}{dx_1 + d\alpha} = \dfrac{dy_1 + 0}{dx_1 + 0}$. x, y, y' подставим в исходное уравнение $y' = \dfrac{x + y - 2}{y - x - 4}$, имеем

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1 + \alpha + \beta - 2}{-x_1 + y_1 - \alpha + \beta - 4}. \tag{2.1}$$

Неизвестные α и β находим из системы

$$\begin{cases} \alpha+\beta-2=0, \\ \alpha-\beta+4=0. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Решая систему, получим $\alpha=-1,\ \beta=3$. При условии (2.2) уравнение (2.1) примет вид

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1+y_1}{-x_1+y_1}. \qquad (2.3)$$

Уравнение (2.3) является однородным. Сделаем подстановку $y_1=t\cdot x_1$, где $t=t(x)$, $y_1'=t'x_1+t$ подставим в уравнение (2.3)

$$t'x_1+t=\frac{1+t}{t-1};\quad t'x_1=\frac{1+t}{t-1}-t=\frac{1+2t-t^2}{t-1}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\int\frac{t-1}{1+2t-t^2}dt=\int\frac{dx_1}{x_1} \text{ или } -\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+2t-t^2\right)}{1+2t-t^2}=\ln C\,x_1\ ;$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+2t-t^2\right|=\ln\left|C_1\,x_1\right|\ ;\ \frac{1}{1+2t-t^2}=C^2\,x_1^2\ ;\ 1+2t-t^2=\frac{1}{C^2\,x_1^2}.$$

Так как $t=\dfrac{y_1}{x_1}$, то последнее уравнение примет вид $1+2\dfrac{y_1}{x_1}-\dfrac{y_1^2}{x_1^2}=\dfrac{1}{C^2\,x_1^2}$ или $\dfrac{x_1^2\,2\,x_1\,y_1-y_1^2}{x_1^2}=\dfrac{1}{C^2\,x_1^2}$. Обозначим $C_1=\dfrac{1}{C^2}$, тогда

$$x_1^2+2\,y_1\,x_1-y_1^2=C_1. \qquad (2.4)$$

ПРИМЕР 2.10. Решить дифференциальное уравнение $y'=\dfrac{y-4}{x-1}+\dfrac{1}{\ln\left(\dfrac{y-4x}{x-1}\right)}$.

<u>Решение</u>. Заметим, что $\dfrac{y-4x}{x-1}=\dfrac{y-4}{x-1}-4$. Перейдем к новым переменным $x_1=x-1$ и $y_1=y-4$. Так как $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d(y_1+4)}{d(x_1+1)}=\dfrac{dy_1+0}{dx_1+0}=\dfrac{dy_1}{dx_1}=y_1'$,

то исходное уравнение примет вид $y_1' = \frac{y_1}{x_1} + \frac{1}{\ln\left(\frac{y_1}{x_1} - 4\right)}$. Это однородное уравнение. Воспользуемся подстановкой $\frac{y_1}{x_1} = t$, где $t = t(x_1)$. Тогда $y_1 = x_1 t$, $y_1' = t + x_1 t'$, где $t' = \frac{dt}{dx_1}$ и уравнение примет вид $t + x_1 t' = t + \frac{1}{\ln(t-4)}$ или $x_1 t' = \frac{1}{\ln(t-4)}$. Разделяя переменные и интегрируя, получим $\int \ln(t-4)dt = \int \frac{dx_1}{x_1}$. Интегрируем по частям.

$$t \cdot \ln(t-4) - \int t \cdot \frac{1}{t-4} dt = \ln|x_1| + \ln c$$

$$t \cdot \ln(t-4) - \int \left(1 + \frac{4}{t-4}\right) dt = \ln|cx_1|$$

$$t \cdot \ln(t-4) - t - 4\ln|t-4| = \ln|cx_1|.$$

Т.к. $t = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y-4}{x-1}$, а $t - 4 = \frac{y-4x}{x-1}$, то окончательно имеем $\frac{y-4}{x-1} \cdot \ln\left|\frac{y-4x}{x-1}\right| - \frac{y-4}{x-1} - 4\ln\left|\frac{y-4x}{x-1}\right| = \ln|c \cdot (x-1)|$.

В уравнение (2.4) подставим $x_1 = x+1$ и $y_1 = y-3$, получим $(x+1)^2 + 2(x+1)(y-3) - (y-3)^2 = C_1$ или $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C_1$.

2.5 ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Уравнение вида $\mathbf{y' + P(x)y = Q(x)}$ линейное относительно искомой функции y и ее производной y' (y и y' входят в уравнение в первых степенях, не перемножаясь между собой) называется **линейным.**

Если $Q(x) = 0$, то уравнение называется **линейным однородным**, если $Q(x) \neq 0$ – **линейное неоднородное**.

Общее решение однородного уравнения $y' + P(x)y = 0$ легко получается разделением переменных:

$$\frac{dy}{dx} = -y\,P(x); \quad \int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx; \quad \ln C|y| = -\int P(x)dx = 0 \quad C\,y = e^{-\int P(x)dx};$$

$$y = C_1\, e^{-\int P(x)dx}, \quad \text{где} \quad C_1 = \frac{1}{C}. \tag{2.5}$$

Рассмотрим два способа решения линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y' + P(x)y = Q(x). \tag{2.6}$$

1 способ. Метод подстановки (метод Бернулли).

Полагая $y = u(x)\cdot v(x)$ и $y' = u'v + u\,v'$ уравнение (2.6) преобразуется в уравнение $u'v + u\,v' + P(x)u\,v = Q(x)$ или $u'v + u(v' + P(x)\cdot v) = Q(x)$.

Подберем v таким образом, чтобы уравнение $v' + P(x)v = 0$; $v = e^{-\int P(x)dx}$, тогда $v\,u' = Q(x)$ или $u' e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$; $u = C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx$. Так как $y = u\cdot v$, то

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + C\right). \tag{2.7}$$

Замечание. Если дифференциальное уравнение линейно относительно $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x'}$, т.е. имеет вид $x' + P(y)x = Q(y)$, то общее решение его находится подстановкой $x = u(y)\cdot v(y)$ $\quad (x = x(y),\ x' = u'v + uv')$.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.11. Решить уравнение $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2x}{x^2+4}y = x\sqrt{x^2+4}$. Линейное неоднородное уравнение.

Решение. Функции $P(x) = -\dfrac{2x}{x^2+4}$ и $Q(x) = x\sqrt{x^2+4}$ непрерывны повсюду.

Делаем замену $y = u(x)\cdot v(x),\ y' = u'v + u\,v'$

$u'v + u\,v' - \dfrac{2x}{x^2+4}u\,v = x\sqrt{x^2+4}$ или $u\left(v' - \dfrac{2x}{x^2+4}v\right) + u'v = x\sqrt{x^2+4}$.

Подбираем v таким образом, чтобы $v' - \dfrac{2x}{x^2+4}v = 0$; $\dfrac{dv}{v} = \dfrac{2x}{x^2+4}dx$ или $\ln v = \ln\left(x^2+4\right)$; $v = x^2+4$. Найденное v подставляем в уравнение

$u'v = x\sqrt{x^2+4}$ получим: $u'\left(x^2+4\right) = x\sqrt{x^2+4}$ или $u' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$u = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx = \frac{1}{2}\int \left(x^2+4\right)^{-1/2} d\left(x^2+u\right) = \sqrt{x^2+4}+C.$$

Таким образом, $y = u \cdot v = \left(x^2+u\right)\left(\sqrt{x^2+u}+C\right)$,

$y = \left(x^2+4\right)\left(\sqrt{x^2+4}+C\right)$ − общее решение.

<u>2 способ. Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа).</u>

По методу вариации произвольной постоянной решение уравнения (2.6) будем искать, как решение соответствующего однородного уравнения $y' + P(x)y = 0$ в виде $y = Ce^{-\int P(x)dx}$, только C будем считать функцией от x, $C = C(x)$. Эта функция должна быть такова, чтобы при подстановке $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ и $y' = \left(C(x)e^{-\int P(x)dx}\right)'$ в уравнение (2.6) оно обращалось в тождество.

ПРИМЕР 2.12. Найти общее решение уравнения $2xy' - y = 3x^2$.

<u>Решение.</u> Приведем уравнение к виду $y' - \dfrac{1}{2x}y = \dfrac{3}{2}x -$ линейное неоднородное уравнение первого порядка. Решим его по методу вариации произвольной постоянной. Первоначально, решаем однородное уравнение $y' - \dfrac{1}{2x}y = 0$. Разделяя переменные, получим $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{dx}{x}$; $\ln y = \dfrac{1}{2}\ln x + C$; $y = C\sqrt{x}$ - общее решение однородного уравнения.

По методу вариации общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y = C(x)\sqrt{x}$, $y' = C'(x)\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}C(x)$. Подставим y и y' в исходное уравнение.

$$C'(x)\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}C(x) - \frac{1}{2x}C(x)\sqrt{x} = \frac{3}{2}x; \quad C'(x)\sqrt{x} = \frac{3}{2}x; \quad C'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Интегрируя, получим: $C(x) = \dfrac{3}{2}x^{3/2}\cdot\dfrac{2}{3} + C_1 = x^{3/2} + C_1$. Таким образом, $y = C(x)\sqrt{x} = \sqrt{x}\left(x^{3/2}+C_1\right) = x^2 + C_1\sqrt{x}$, $y = x^2 + C_1\sqrt{x} -$ общее решение.

2.6 УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Уравнение вида $\mathbf{y'' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}}$, где $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ называется **уравнением Бернулли**.

Уравнение Бернулли

$$y' + P(x)y = y^{\alpha} Q(x) \tag{2.8}$$

путем деления его на y^{α} сводится к линейному: $y' y^{-\alpha} + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x)$. Полагая $z = y^{1-\alpha}$, а $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha} \cdot y'$ получим $\frac{z}{1-\alpha} + P(x)z = Q(x)$ или $z' + (1-\alpha)P(x)z = (1-x)Q(x)$. Решая полученное уравнение, находим $z = \varphi(x;C)$, а затем и y, из замены $y = \frac{1}{\sqrt[n-1]{z}} = \frac{1}{\sqrt[n-1]{\varphi(x;C)}}$.

<u>*Замечание.*</u> Уравнение Бернулли можно сразу решать как линейное подстановкой $y = u(x) \cdot v(x)$ не сводя его предварительно к линейному.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.12. Найти общее решение уравнения $y' + \frac{1}{x}y = y^2 \frac{\ln x}{x}$.

<u>Решение.</u> Данное уравнение является уравнением Бернулли. Разделим обе части уравнения на y^2: $y^{-2} y' + \frac{1}{x}y^{-1} = \frac{\ln x}{x}$ и сделаем замену $z = y^{-1}$ $z' = -y^{-2} \cdot y'$, $\quad -z' + \frac{1}{x}z = \frac{\ln x}{x}$; $z' - \frac{z}{x} = -\frac{\ln x}{x}$ – это уравнение линейно относительно z, z'. По формуле (2.7) найдем общее решение $z = u(x) \cdot v(x)$:

$$z = e^{-\int -\frac{dx}{x}}\left(\int -\frac{\ln x}{x} \cdot e^{\int -\frac{dx}{x}} dx + C\right), \quad z = e^{\ln x}\left(\int -\frac{\ln x}{x} e^{-\ln x} dx + C\right),$$

$$z = x \cdot \left(\int -\frac{\ln x}{x} e^{\ln \frac{1}{x}} dx + C\right), \quad z = x \cdot \left(\int -\frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{x} dx + C\right).$$

Т.к. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ \frac{dx}{x^2} = dv & v = -\frac{1}{x} \end{matrix} \right| = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$, то

$z = x\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C\right)$ или $z = \ln x + Cx + 1$. Учитывая замену $z = y^{-1}$, возвращаемся к y: $y = \frac{1}{z}$. Общее решение уравнения Бернулли $y = \frac{1}{\ln x + Cx + 1}$.

ПРИМЕР 2.13. Найти общее решение уравнения $y' - y\,\mathrm{tg}\,x + y^2\cos x = 0$

<u>Решение.</u> Данное уравнение является уравнением Бернулли $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = -y^2\cos x$. Будем решать его сразу как линейное заменой $y = u(x)\cdot v(x)$, $y' = u'v + uv'$; $u'v + uv' - u\cdot v\cdot \mathrm{tg}\,x = -u^2 v^2 \cos x$;
$u'v + u(v' - v\,\mathrm{tg}\,x) = -u^2 v^2 \cos x$.

$$\begin{cases} v' - v\,\mathrm{tg}\,x = 0 & (а) \\ u'v = -u^2 v^2 \cos x & (б) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} v' - v\,\mathrm{tg}\,x = 0 \\ u' = -u^2 v \cos x \end{cases}$$

Решаем уравнение (а).

$\frac{dv}{dx} v\,\mathrm{tg}\,x \quad \int \frac{dv}{x} = \int \mathrm{tg}\,x\,dx \quad \ln v = -\ln|\cos x| \quad v = \frac{1}{\cos x}$. Найденное частное решение v подставим в уравнение (б) $u' = -u^2 \frac{1}{\cos x}\cdot\cos x$. Найдем его общее решение $\int \frac{du}{u^2} = -\int dx$, $-\frac{1}{u} = -x + C$, $u = \frac{1}{x + C_1}$, где $C_1 = -C$.

$y = u\cdot v = \frac{1}{x + C_1}\cdot \sec x$; $\left(\sec x = \frac{1}{\cos x}\right)$, $y = \frac{\sec x}{x + C_1}$ – общее решение.

2.7 УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

Уравнение вида

$$P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0 \qquad (2.9)$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если выражение $P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u(x;y)$, т.е. $P(x;y)dx + Q(x;y)dy = d\,u(x;y)$.

Согласно определения уравнение (2.9) примет вид $du = 0$. Отсюда $u(x;y) = C$ – общий интеграл данного уравнения.

Не всякое уравнение (2.9) будет уравнением в полных дифференциалах. Для того, чтобы уравнение (2.9) было уравнением в полных дифференциалах достаточно выполнения условия

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}. \tag{2.10}$$

Если уравнение (2.9) – уравнение в полных дифференциалах, то $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x;y)$ (а), $\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x;y)$ (б). Решая уравнение (а) получим, что $u(x;y)=\int P(x;y)dx+C(y)$. Требуется найти $C(y)$, которое получим, подставив $\frac{\partial u}{\partial y}=\int\frac{\partial P}{\partial y}dx+C'(y)$ в уравнение (б): $\int\frac{\partial P}{\partial y}dx+C'(y)=Q(x,y)$. Из последнего уравнения находим $C'(y)$, а затем и $C(y)$.

Функция $u(x,y)$ может быть найдена сразу по формуле

$$u=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy, \tag{2.11}$$

где x_0 и y_0 произвольны; их выбор ограничен единственным условием – интегралы в правой части должны иметь смысл.

<u>Замечание.</u> Если дифференциальное уравнение первого порядка является одновременно однородным и в полных дифференциалах, то общий интеграл находится по формуле

$$P(x,y)x+Q(x,y)y=C. \tag{2.12}$$

Если в уравнении (2.9) условие (2.10) не выполняется, т.е. $\frac{\partial Q}{\partial x}\neq\frac{\partial P}{\partial y}$, то уравнение (2.8) не является уравнением в полных дифференциалах. Иногда удается подобрать такой множитель $\mu(x,y)$, который называется интегрирующим множителем, при умножении на который уравнение получается уравнением в полных дифференциалах.

Если у данного уравнения существует интегрирующий множитель, зависящий только от x, то он находится по формуле

$$\mu(x)=e^{\int\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx}, \tag{2.13}$$

зависящий только от y по формуле

$$\mu(y)=e^{-\int\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{P}dy}. \qquad (2.14)$$

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.14. Решить уравнение
$\left(e^{x}+y+\sin y\right)dx+\left(e^{y}+x+x\cos y\right)dy=0$.

<u>Решение.</u> Проверим, является ли данное уравнение в полных дифференциалах. $P(x;y)=e^{x}+y+\sin y,\quad Q(x;y)=e^{y}+x+x\cos y$.

$\frac{\partial P}{\partial y}=1+\cos y$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=1+\cos y$. Т.к. $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, то это уравнение в полных дифференциалах. Следовательно, левая часть уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, т.е.

$$\left(e^{x}+y+\sin y\right)dx+\left(e^{y}+x+x\cos y\right)dy=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\ ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x}+y+\sin y\quad (a)\qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=e^{y}+x+x\cos y\quad (б).$$

Проинтегрируем уравнение (а) по x: $\int\frac{\partial u}{\partial x}dx=\int\left(e^{x}+y+\sin y\right)dx$; $u=e^{x}+x\,y+x\sin y+C(y)$. От найденного u берем частную производную по y: $\frac{\partial u}{\partial y}=x+x\cos y+C'(y)$, которую подставляем в уравнение (б).
$x+x\cos y+C'(y)=e^{y}+x+x\cos y$, отсюда $C'(y)=e^{y}$. Интегрируя, находим $C(y)=e^{y}$. Подставляем его в $u(x,y)=e^{x}+xy+x\sin y+C(y)$, имеем $u(x,y)=e^{x}+x\,y+x\sin y+e^{y}$. Общий интеграл $u(x,y)=C$ запишется $e^{x}+x\,y+x\sin y+e^{y}-C=0$.

ПРИМЕР 2.15. Решить уравнение по формуле (2.11)
$(x+y-1)dx+\left(e^{y}+x\right)dy=0$.

<u>Решение.</u> $P(x,y)=x+y-1,\quad Q(x,y)=e^{y}+x$.
$\frac{\partial P}{\partial y}=1,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=1$. Следовательно, это уравнение в полных дифференциалах.

Найдем общий интеграл по формуле (2.11) $\int\limits_{x_0}^{x}(x+y-1)dx+\int\limits_{y_0}^{y}\left(e^y+x_0\right)dy=C$. Пусть $x_0=0$, $y_0=0$, тогда

$$\left.\left(\frac{x^2}{2}+xy-x\right)\right|_0^x+\left.\left(e^y\right)\right|_0^y=C,\qquad \frac{x^2}{2}+xy-x+e^y-e^0=C,$$

$\frac{x^2}{2}+xy-x+e^y-1=C$. Обозначим $C+1=C_1$, запишем общий интеграл $\frac{x^2}{2}+xy-x+e^y=C_1$.

ПРИМЕР 2.16. Решить уравнение $2xy\,dx+\left(x^2+y^2\right)dy=0$.

Решение. Данное уравнение однородное, так как функции $P(x,y)=2xy$ и $Q(x,y)=x^2+y^2$ однородные функции второй степени. Одновременно данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, так как $\frac{\partial P}{\partial y}=2x$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$. Общий интеграл будет иметь вид

$$(2xy)x+\left(x^2+y^2\right)y=C\ ;\ 2x^2y+x^2y+y^3=C\ ;3x^2y+y^3=C.$$

ПРИМЕР 2.17. Решить уравнение
$(x\cos y-y\sin y)dy+(x\sin y+y\cos y)dx=0$.

Решение. $Q(x,y)=x\cos y-y\sin y,\quad P(x,y)=x\sin y+y\cos y$

$\frac{\partial P}{\partial y}=x\cos y-y\sin y+\cos y$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\cos y$, $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$, следовательно, уравнение не в полных дифференциалах.

Исследуем выражение $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\dfrac{x\cos y-y\sin y+\cos y-\cos y}{x\cos y-y\sin y}=1$. Данное уравнение имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x. Найдем этот интегрирующий множитель.

$\mu=e^{\int\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx}=e^{\int dx}=e^x$. Умножив исходное уравнение на e^x, получим: $e^x(x\cos y-y\sin y)dy+e^x(x\sin y+y\cos y)dx=0$.

$P_1(x,y)=e^x(x\sin y+y\cos y)$, $Q_1(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)$.

$\frac{\partial P_1}{\partial y}=e^x(x\cos y-y\sin y+\cos y)$; $\frac{\partial Q_1}{\partial x}=e^x(x\cos y-y\sin y+\cos y)$.

Так как $\dfrac{\partial P_1}{\partial y}=\dfrac{\partial Q_1}{\partial x}$, то полученное уравнение в полных дифференциалах. Таким образом, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^x(x\cos y-y\sin y)\ \ (а),\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=e^x(x\sin y+y\cos y)\ \ (б).$$

Интегрируя уравнение (а) по y, получим:

$$u=\int e^x(x\cos y-y\sin y)dy=x\,e^x\sin y+e^x y\cos y-e^x\sin y+C(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\sin y+x\,e^x\sin y+e^x y\cos y-e^x\sin y+C'(x)=$$

$$=x\,e^x\sin y+e^x y\cos y\ \ ;\ \ C'(x)=0,\ C(x)=C.$$

$$u(x,y)=x\,e^x\sin y+e^x\,y\cos y-e^x\sin y=C.$$

$e^x(x\sin y+y\cos y-\sin y)=C$ – общий интеграл.

2.8 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Уравнение вида

$$\mathbf{F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)=0} \tag{2.15}$$

называется **дифференциальным уравнением n – го порядка**.

Всякая n раз дифференцируемая функция $y=\varphi(x)$, которая обращает уравнение (2.15) в тождество называется **решением уравнения** (2.15).

Задача Коши для уравнения (2.15) состоит в том, чтобы найти решение уравнения, удовлетворяющее условиям $y=y_0$, $y'=y_0'\ldots$, $y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$ при $x=x_0$, где $x_0,y_0,y_0',\ldots,y_0^{(n-1)}$ – начальные условия.

Функция $y=\varphi(x,C_1,\ldots,C_n)$ называется **общим решением уравнения** (2.15), если при соответствующем выборе произвольных постоянных $C_1,C_2,\ldots,C_n$ эта функция является решением любой задачи Коши, поставленной для данного уравнения.

Одним из основных методов, применяемых при интегрировании дифференциальных уравнений высших порядков, является понижение порядка уравнения, т.е. сведение уравнения путем замены к уравнению, порядок которого ниже данного.

Понижение порядка возможно не для всякого уравнения, в связи, с чем представляют интерес некоторые типы неполных дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.

2.9 УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

1. Уравнение вида $\mathbf{y^{(n)} = f(x)}$. Решение этого уравнения находится $n-$кратным интегрированием, а именно:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1 = f_1(x) + C_1$$

$$y^{(n-2)} = \int (f_1(x) + C_1)dx + C_2 = f_2(x) + C_1 x + C_2$$

....

$$y = f_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \ldots C_{n-1}x + C_n, \text{ где}$$

$$f_n(x) = \underbrace{\iiint \ldots \int f(x)dx^n}_{n \text{ раз}}.$$

Общее решение окончательно может быть записано $y = f_n(x) + C_1 x^{n-1} + \ldots + C_{n-1}x + C_n$, где $C_1 = \dfrac{C_1}{(n-1)!}$, $C_2 = \dfrac{C_2}{(n-2)!}, \ldots$

ПРИМЕР 2.18. Найти частное решение уравнения $y''' = e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$; $y''(0) = 0$.

<u>Решение.</u> Последовательно интегрируем три раза, $y'' = \int e^{2x}dx + C_1 = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1$, $\quad y' = \int\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)dx + C_2 = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2$,

$$y = \int\left(\frac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2\right)dx + C_3 = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3.$$

Определим постоянные C_1, C_2, C_3, для чего подставим начальные условия в полученные уравнения

$$y''(0) = 0: \quad 0 = \frac{1}{2} + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{2}$$

$$y'(0) = -1: \quad -1 = \frac{1}{4} + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{5}{4}$$

$$y(0) = 1: \quad 1 = \frac{1}{8} + C_3 \quad \Rightarrow \quad C_3 = \frac{7}{8}$$

Искомое частное решение: $y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}$.

2. Дифференциальные уравнения вида $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, не содержащие искомой функции y

Порядок данного уравнения понижается путем замены $y^{(k)} = z(x)$, $y^{(k+1)} = z'$, $y^{(k+2)} = z''\ldots$, $y^{(n)} = z^{(n-k)}$ и уравнение примет вид $F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0$, порядок которого понижен на k единиц.

ПРИМЕР 2.19. Найти общее решение уравнения $x\,y'' = y' \cdot \ln\left(\dfrac{y'}{x}\right)$.

Решение. Делаем замену $y' = z(x)$, тогда $y'' = z'$, подставляем в данное уравнение, имеем: $x\,z' = z\ln\left(\dfrac{z}{x}\right)$ или $z' = \dfrac{z}{x}\ln\left(\dfrac{z}{x}\right)$.

Полученное уравнение является однородным уравнением первого порядка, так как справа стоит однородная функция нулевого измерения. Полагая $\dfrac{z}{x} = t(x)$, то $z = t\,x$ и $z' = t'\,x + t$, получим уравнение $t'x + t = t\ln t$ или $x\dfrac{dt}{dx} = t(\ln t - 1)$. Разделяем переменные $\dfrac{dt}{t(\ln t - 1)} = \dfrac{dx}{x}$. Интегрируя $\int \dfrac{d(\ln t - 1)}{\ln t - 1} = \int \dfrac{dx}{x}$, находим $\ln(\ln t - 1) = \ln x + \ln C_1$ или $\ln t - 1 = C_1 x$; $t = e^{C_1 x + 1}$. Возвращаясь к переменной $z = xt$, получим $z = x \cdot e^{C_1 x + 1}$. Так как $z = y'$, то $y' = xe^{C_1 x + 1}$ или $dy = xe^{C_1 x + 1}dx$. Интегрируем последнее уравнение, используя формулу $\int u\,dv = uv - \int vdu$.

$$y = \int x\,e^{C_1 x + 1}\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ e^{C_1 x + 1}\,dx = dv & v = \dfrac{1}{C_1}e^{C_1 x + 1} \end{array} \right|.$$

Получаем общее решение $y = \dfrac{x}{C_1}e^{C_1 x + 1} - \dfrac{1}{C_1^2}e^{C_1 x + 1} + C_2$.

3. Дифференциальные уравнения вида $F\left(y, y'', y''' \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, не содержащие независимой переменной x

Порядок данного уравнения понижается путем замены $\mathbf{y' = p(y)}$, тогда $\mathbf{y'' = p' \cdot p}$, где $\mathbf{p'' = p\dfrac{dp}{dy}}$ и так далее. После замены порядок уравнения понизится на единицу.

Замечание. Если дифференциальное уравнение не содержит явно независимой переменной $\mathbf{x}$, искомой функции y и ее первых $(k-1)$ производных, т.е. уравнение имеет вид $F\left(y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right)=0$, то его порядок можно понизить на $(k+1)$ единиц, применяя сначала подстановку $y^{(k)}=z(x)$, а затем $z'=p(y)$.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.20. Решить уравнение $y''=\dfrac{y'}{\sqrt{y}}$.

Решение. Это уравнение второго порядка, не содержащее явно x. Делаем замену $y'=p(y)$, $y''=p\dfrac{dp}{dy}$ и подставляем в уравнение. Получим $p\dfrac{dp}{dy}=\dfrac{p}{\sqrt{y}}$,

$dp=y^{-\frac{1}{2}}dy$ или $p=\int y^{-\frac{1}{2}}dy=2\sqrt{y}+C_1$. Найденное p заменим на y', тогда $y'=2\sqrt{y}+C_1$. Разделяем переменные $\dfrac{dy}{2\sqrt{y}+C_1}=dx$. Интегрируем

$$x=\int\frac{dy}{2\sqrt{y}+C_1}=\left|\begin{aligned}&y=t^2\\&dy=2t\,dt\end{aligned}\right|=\int\frac{2t\,dt}{2t+C_1}=\int\frac{2t+C_1-C_1}{2t+C_1}dt=\int dt-\frac{C_1}{2}\int\frac{2\,dt}{2t+C_1}.$$

$x=t-\dfrac{C_1}{2}\ln|2t+C_1|+C_2$. Т.к. $t=\sqrt{y}$, то $x=\sqrt{y}-0{,}5C_1\ln\left|2\sqrt{y}+C_1\right|+C_2$ – общий интеграл.

ПРИМЕР 2.21. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения $y^3y''=-1$ с начальными условиями $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

Решение. Данное уравнение является уравнением, не содержащим явно независимую переменную. Сделаем замену $y'=p(y)$. Тогда, учитывая, что $p''=p'\cdot p$, получим уравнение первого порядка $y^3p'p=-1$.

Принимая во внимание, что $p'=\dfrac{dp}{dy}$, получим уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$$y^3\frac{dp}{dy}p=-1,\quad pdp=-\frac{dy}{y^3},\ \int pdp=\int-\frac{dy}{y^3},\quad \frac{p^2}{2}=-\int y^{-3}dy,\ \frac{p^2}{2}=-\frac{y^{-3+1}}{-3+1}+\frac{C_1}{2},$$

$$\frac{p^2}{2}=\frac{1}{2y^2}+\frac{C_1}{2},\ p^2=\frac{1}{y^2}+C_1.$$

Необходимо найти частное решение данного дифференциального уравнения при заданных начальных условиях.
Определим произвольную постоянную C_1 учитывая, что $y'(0)=1$ и $y(0)=1$, то в силу замены $y'=p(y)$ получим $p(1)=1$. Подставим $y=1$ и $p=1$ в полученное промежуточное решение $p^2=\frac{1}{y^2}+C_1$: $1=\frac{1}{1}+C_1$, $C_1=0$.

Таким образом, $p^2=\frac{1}{y^2}$ или $p=\pm\frac{1}{y}$. Так как $y'=p(y)$, то $y'=\pm\frac{1}{y}$.

Получили уравнение первой степени с разделяющимися переменными.

$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{1}{y}$, $ydy=\pm dx$, $\int ydy=\pm\int dx$, $\frac{y^2}{2}=\pm x+\frac{C_2}{2}$, $y^2=\pm 2x+C_2$.

Таким образом, решение примет вид: $y=\pm\sqrt{C_2\pm 2x}$.

Найдем произвольную постоянную C_2, подставив $x=0$ и $y=1$

$1=\pm\sqrt{C_2\pm 0}$, $C_2=1$.

Окончательно получаем $y^2=\pm 2x+1$

или $y=\pm\sqrt{1\pm 2x}$ – частное решение

2.10 ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Линейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами называется уравнение вида

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_n(x)y=f(x). \qquad (2.16)$$

В уравнении (2.16) $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$ и $f(x)$ заданы и непрерывны в некотором интервале (a,b).

Если $f(x)\neq 0$, то уравнение (2.16) называется **неоднородным** или с правой частью. Если $f(x)\equiv 0$, то уравнение называется **однородным**.

Зная одно частное решение y_1 – линейного однородного уравнения, можно с помощью замены $y=y_1\int z\,dx$ понизить порядок уравнения на единицу.

Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – линейно независимые частные решения однородного уравнения

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+, a_n(x)y=0, \qquad (2.17)$$

то

$$y = C_1y_1 + y_2C_2 + \ldots + y_nC_n - \tag{2.18}$$

общее решение этого уравнения $(C_1, C_2, \ldots, C_n - \text{const})$.

В частности, для однородного уравнения 2-го порядка

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{2.19}$$

общее решение имеет вид

$$y = C_1y_1 + C_2y_2, \tag{2.20}$$

где y_1 и y_2 – два частных линейно независимых решения.

Две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются **линейно независимыми**, если их отношение **не** является постоянной величиной, т.е. $\dfrac{y_1}{y_2} \neq \text{const}$.

Необходимым и достаточным условием линейной независимости двух функций непрерывных вместе со своими производными до первого порядка в интервале (a, b) является то, что определитель Вронского (вронскиан) $W(y_1, y_2) \neq 0$ ни в одной точке этого интервала, т.е.

$$\mathbf{W(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \mathbf{y_1} & \mathbf{y_2} \\ \mathbf{y_1''} & \mathbf{y_2''} \end{vmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

Если для уравнения (2.19) известно только одно частное решение $y_1(x)$, то второе его решение, линейно независимое с первым, можно найти по формуле

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(x)dx}}{y_1^2}dx, \quad \text{где } x_0 \in (a, b) \tag{2.21}$$

Формула (2.21) дает возможность интегрировать линейные однородные уравнения 2-го порядка, сразу, не прибегая к понижению их порядка.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.22. Решить уравнение $y'' + \dfrac{2}{x}y' + y = 0$ двумя способами:

1) путем понижения порядка; 2) по формуле (2.21).

Решение. 1) Пусть известно одно частное решение данного уравнения $y_1 = \frac{\sin x}{x}$. Произведем замену $y = \frac{\sin x}{x}\int z\,dx$; тогда

$$y' = \frac{\sin x}{x} z + \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\int z\,dx,$$

$$y'' = z'\frac{\sin x}{x} + 2z\frac{(x\cos x - \sin x)}{x^2} - \frac{(x^2-2)\sin x + 2x\cos x}{x^3}\int z\,dx.$$

Подставляя в уравнение, получим: $z'\sin x + 2z\cos x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{2\cdot\cos x}{\sin x} z$. Разделим переменные и интегрируем

$\ln z = -2\int\frac{d(\sin x)}{\sin x} = -2\ln\sin x + \ln C_1 \Rightarrow z = \frac{C_1}{\sin^2 x}$. Следовательно,

$y = \frac{\sin x}{x}\left(\int\frac{C_1\,dx}{\sin^2 x} + C_2\right) = C_2\frac{\sin x}{x} - C_1\frac{\sin x}{x}\cdot\mathrm{ctg}\ x.$ Окончательно

$y = C_2\frac{\sin x}{x} - C_1\frac{\cos x}{x}$.

2) Решим данное уравнение, применяя формулу (2.21)

$$y_2(x) = \frac{\sin x}{x}\int\frac{e^{-2\int\frac{dx}{x}}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}dx = \frac{\sin x}{x}\int\frac{\frac{1}{x^2}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}dx = \frac{\sin x}{x}\int\frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{\sin x}{x}\cdot(-\mathrm{ctg} x) = -\frac{\cos x}{x}.$$

Общее решение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, тогда окончательно $y = C_1\frac{\sin x}{x} - C_2\frac{\cos x}{x}$.

2.11 ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ $n-$ГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Линейным обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называют уравнения вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0, \qquad (2.22)$$

где коэффициенты $a_1,\ldots,a_n$ - некоторые известные константы.

Уравнение (2.22) является частным случаем уравнения вида (2.17) и его общее решение также имеет структуру (2.18)

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \ldots + C_n y_n,$$

где $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – частные решения уравнения (2.22), вронскиан которых не равен нулю; $C_1, C_2, \ldots, C_n$-произвольные константы. Такой набор функций называется **фундаментальной системой решений.** Для линейных однородных (с нулевой правой частью) уравнений известно как построить фундаментальную систему решений, через которую можно записать общее решение уравнения (2.22). Для этого выписываем так **называемое характеристическое уравнение**, соответствующее дифференциальному уравнению (2.22):

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0. \tag{2.23}$$

Характеристическое уравнение получается из уравнения (2.22) формальной заменой производных неизвестной функции и самой функции y на соответствующие степени параметра k:

$$y^{(n)} \to k^n, \quad y^{(n-1)} \to k^{n-1}, \ \ldots, \quad y' \to k, \quad y \to 1.$$

Характеристическое уравнение (2.23) имеет ровно n корней (действительных или комплексных) среди которых могут быть совпадающие (кратные). Напомним, что кратностью корня k_j называется степень двучлена $\left(k - k_j\right)$ в разложении многочлена на множители.

Фундаментальная система решений строится в соответствии с корнями характеристического уравнения (2.23) согласно следующей схеме:

1. каждому простому (кратности 1) действительному корню k ставится в соответствие функция e^{kx};
2. каждому действительному корню k кратности m ставится в соответствие m линейно независимых функций $e^{kx}, xe^{kx}, \ldots, x^{m-1}e^{kx}$;
3. каждой паре комплексно сопряженных корней $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$ ставится в соответствие пара функций $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$;
4. каждой паре комплексно сопряженных корней $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$ кратности m ставится в соответствие $2m$ функций $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, $xe^{\alpha x}\cos(\beta x), xe^{\alpha x}\sin(\beta x), \ldots,$ $x^{m-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $x^{m-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

Таким образом, по n корням (с учетом кратности) мы построили n линейно независимых решений уравнения (2.22). Согласно (2.18), общее решение уравнения (2.22) выписывается как линейная комбинация этих всех функций.

Для выделения частного решения необходимо на функцию y и ее производные наложить n дополнительных условий, например $y(x_0) = y_{00}$, $y'(x_0) = y_{10}$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1,0}$ (задача Коши).

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.23. Найти общее решение уравнения $y''+2y'-3y=0$.

Решение. Заменяя в данном дифференциальном уравнении неизвестную функцию на единицу, ее производные на соответствующие степени параметра k, получаем характеристическое уравнение $k^2+2k-3=0$. Корни этого уравнения $k_1=-3, k_2=1$ действительны и различны. Фундаментальная система решений состоит из функций $y_1=e^{-3x}, y_2=e^{x}$. Общее решение, следовательно, $y(x)=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}$.

ПРИМЕР 2.24. Найти общее решение уравнения $y^{(4)}+2y'''+5y''=0$.

Решение. Выписываем характеристическое уравнение $k^4+2k^3+5k^2=0$, его корни: $k_1=0$ кратности 2, и пара простых комплексно сопряженных корней $k_3=-1+2i$, $k_4=-1-2i$. В соответствии со схемой, фундаментальная система решений состоит из четырех функций $y_1=e^0=1, y_2=xe^0=x$, $y_3=e^{-x}\cos(2x)$, $y_4=e^{-x}\sin(2x)$; общее решение есть их линейная комбинация $y(x)=C_1+C_2x+C_3e^{-x}\cos(2x)+C_4e^{-x}\sin(2x)$.

ПРИМЕР 2.25. Найти частное решение уравнения $y'''-y''+4y'-4y=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0, y'(0)=2, y''(0)=10.$.

Решение. Найдем сначала общее решение. Выписываем характеристическое уравнение $k^3-k^2+4k-4=0$ или $k^2(k-1)+4(k-1)=0$, тогда $(k-1)(k^2+4)=0$. Корни характеристического уравнения: $k_1=1$, $k_2=2i$, $k_3=-2i$. Общее решение $y(x)=C_1e^x+C_2\cos(2x)+C_3\sin(2x)$. Найдем производные $y'(x)=C_1e^x-2C_2\sin(2x)+2C_3\cos(2x)$, $y''(x)=C_1e^x-4C_2\cos(2x)-4C_3\sin(2x)$. Частное решение находится в соответствии с начальными условиями $x=0$, $y=0$, $y'=2$, $y''=10$: $0=C_1+C_2$, $2=C_1+2C_3$, $10=C_1-4C_2$. Решая, получаем $C_1=2, C_2=-2, C_3=0$, тогда частное решение $y(x)=2e^x-2\cos(2x)$.

ПРИМЕР 2.26. Рассмотрим колебание груза массой m под действием пружины жесткости k. Пусть $x(t)$ – отклонение тела от положения равновесия $x = 0$, $x'(t)$ – скорость тела, $x''(t)$ – ускорение.

<u>Решение.</u> Запишем для этой системы закон Ньютона $m x'' = F$. Если силами, действующими на тело, являются только возвращающая сила пружины $F_{gh} = -k x(t), k > 0$, сила сопротивления $F_{сопр} = -\gamma x'(t)$, $\gamma > 0$, то получим уравнение линейного осциллятора при наличие сопротивления вида $m x'' + \gamma x' + k x = 0$. Его характеристическое уравнение $m k^2 + \gamma k + k = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \dfrac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4m k}}{2m}$.

Рассмотрим три случая:

1) Если $\gamma^2 - 4mk > 0$ (сила сопротивления движению велика, возрастающая сила пружины мала), то корни действительны, различны и оба отрицательны.

Общее решение запишется в виде $x(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}$. Это случай так называемого апериодического решения. Точка асимптотически, без колебаний стремится к положению равновесия $x = 0$ при $t \to \infty$. Напомним $k_1, k_2 < 0$.

2) Если $\gamma^2 - 4mk = 0$, то корни характеристического уравнения действительны и равны $k_1 = k_2 = -\dfrac{\gamma}{2m} = -r < 0$.

Общее решение имеет вид $x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-r t}$.

3) Наконец $\gamma^2 - 4mk < 0$. Корни в этом случае комплексны и сопряжены

$$k_1 = -\alpha + i\beta, \quad k_2 = -\alpha - i\beta, \quad \alpha = \frac{\gamma}{2m}, \quad \beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m}.$$

Общее решение имеет вид $x(t) = e^{-\alpha t}(C_1 \sin\beta t + C_2 \cos\beta t)$. Движение точки представляет собой колебания около положения равновесия с затухающей амплитудой. Отметим, что при отсутствии трения $k = 0$ движение будет периодическим $x(t) = C_1 \sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}} t\right) + C_2 \left(\sqrt{\dfrac{k}{m}} t\right)$.

2.12 ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ n –ГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ

В данном параграфе речь пойдет об уравнениях вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x). \qquad (2.24)$$

Если функция правой части $f(x)$ не тождественный нуль, такие уравнения называют **неоднородными или уравнениями с правой частью.**

Коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – известные константы (в данном параграфе это замечание не принципиально – все выкладки имеют место и в случае зависящих от x коэффициентов).

Общее решение уравнения (2.24) представляет собой сумму

$$y(x) = Y^*(x) + \overline{Y}(x), \qquad (2.25)$$

где $Y^*(x)$ - какое-либо частное решение неоднородного уравнения, $\overline{Y}(x)$ - общее решение однородного уравнения $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$.

Пусть фундаментальная система решений однородного уравнения известна: $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$. Тогда общее решение однородного уравнения можно выписать $\overline{Y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$. Таким образом, для построения общего линейное однородного уравнения решения необходимо найти какое-либо частное решение $Y^*(x)$.

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения можно пользоваться методом **вариации произвольных постоянных**. Он заключается в следующем. Решение уравнения (2.24) находится в виде линейной комбинации функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ с коэффициентами, уже зависящими от x:

$$Y^*(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \ldots + C_n(x) y_n(x).$$

Производные от функций $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ определяются из линейной алгебраической системы вида

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 + \ldots + C_n'(x) y_n = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' + \ldots + C_n'(x) y_n' = 0, \\ \vdots \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)} + C_2'(x) y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x) y_n^{(n-1)} = f(x), \end{cases} \qquad (2.26)$$

где f(x) – правая часть уравнения (2.24).

Определитель системы равен вронскиану $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и в нуль не обращается. Это обеспечивает однозначную разрешимость системы. Тем или иным методом линейной алгебры можно получить выражения для $C_2'(x), C_2'(x), \ldots, C_n'(x)$; сами функции восстанавливаются интегрированием. В частности, для дифференциального уравнения второго порядка система имеет вид

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_2'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases} \qquad (2.27)$$

Неизвестные $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ определяются по формулам Крамера

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = -\frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)}, \; C_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} \;,$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_2'.. \qquad (2.28)$$

Решения выписываются через интегралы

$$C_1(x) = -\int_{x_0}^{x} \frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx, \;\; C_2(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx. \qquad (2.29)$$

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.27. Найти общее решение уравнения $y'' + 9y = \dfrac{9}{\sin 3x}$.

<u>Решение.</u> Общее решение по теореме о структуре решений, имеет вид $y = Y^* + \overline{Y}$. $\overline{Y}$ находим при решении однородного уравнения $y'' + 9y = 0$. Составим характеристическое уравнение $k^2 + 9 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 3i$, общее решение однородного уравнения будет иметь вид $\overline{Y} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$, где

$y_1=\cos 3x$ и $y_2=\sin 3x$. Частное решение данного уравнения по методу вариации будет иметь вид $Y^*=C_1(x)\cos 3x+C_2(x)\sin 3x$.

Составим систему $\begin{cases} C_1'(x)\cos 3x+C_2'\sin 3x=0 \\ -3C_1(x)\sin 3x+3C_2'\cos 3x=\dfrac{9}{\sin 3x} \end{cases}$.

Вычислим главный определитель системы

$\Delta=W=\begin{vmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -3\sin x & 3\cos 3x \end{vmatrix}=3\neq 0 \Rightarrow$ система имеет единственное решение, по формулам Крамера имеем

$$\Delta C_1'=\begin{vmatrix} 0 & \sin 3x \\ \dfrac{9}{\sin 3x} & 3\cos 3x \end{vmatrix}=-9;\ \ \Delta C_2'=\begin{vmatrix} \cos 3x & 0 \\ -3\sin 3x & \dfrac{9}{\sin 3x} \end{vmatrix}=-9\operatorname{ctg} 3x.$$

$C_1'=\dfrac{\Delta C_1'}{\Delta}=-3,\quad C_2'=\dfrac{\Delta C_2'}{\Delta}=3\operatorname{ctg}3x$. Интегрируя последние равенства, найдем $C_1(x)$ и $C_2(x)$. $\quad C_1=-3x,\ \ C_2=\ln|\sin 3x|$.

Запишем частное решение неоднородного уравнения

$Y^*=-3x\cos 3x+\ln|\sin 3x|(\sin 3x)$, тогда общее решение будет иметь вид

$y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x-3x\cos 3x+\ln|\sin 3x|\,(\sin 3x)$.

2.13 НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ СО СПИЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ. МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФИЦИЕНТОВ

Частное решение уравнения $n-$го порядка

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_ny=f(x), \tag{2.30}$$

где

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right), \tag{2.31}$$

а $a_1,a_2,\ldots,a_n\in R$ следует искать в виде

$$Y^*(x)=x^r\cdot e^{\alpha x}\left(P_S(x)\cos\beta x+Q_S(x)\sin\beta x\right). \tag{2.32}$$

Здесь $r -$ кратность корня $\alpha + i\beta$ в характеристическом уравнении

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \qquad (2.33)$$

Если (2.33) такого корня не имеет, то $r = 0$; $P_S(x)$ и $Q_S(x) -$ полные многочлены от x степени S, с неопределенными коэффициентами, причем S равно наибольшему из чисел n и m

$$S = \max(n; m). \qquad (2.34)$$

Неизвестные коэффициенты многочленов $P_s(x)$ и $Q_s(x)$ находятся из системы линейных алгебраических уравнений, получаемых отождествлением коэффициентов подобных членов в правой и левой частях исходного уравнения после подстановки в него Y^* вместо y.

Если правая часть уравнения (2.30) есть сумма конечного числа функций вида (2.31), то частное решение есть сумма частных решений, соответствующих правых частей, т.е. если

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x), \qquad (2.35)$$

то $Y^* = Y_1^* + Y_2^* + \ldots + Y_n^*$, где $Y_i^* -$ частное решение уравнения $y^{(n)} + a\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f_i(x)$.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.28. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' - 3y = x e^{4x}$.

<u>Решение.</u> По теореме о структуре общего решения неоднородного уравнения $y = \overline{Y} + Y^*$. Найдем $\overline{Y} -$ общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 2y' - 3y = 0$. Его характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 2k - 3 = 0$, $k_1 = -1$, $k_2 = 3$, тогда $\overline{Y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$.

Найдем частное решение y^* по виду правой части $f(x) = x \cdot e^{4x}$. В данном случае $\alpha = 4$, $\beta = 0$, $P_n(x) = x$, $Q_m(x) = 0$, $n = 1$. Число $\alpha + \beta i = 4 + 0i = 4$ корнем характеристического уравнения не является, значит $r = 0$. Согласно (2.32) частное решение будет иметь вид

$Y^* = e^{4x}(ax + b)$. Найдем a и b. Для этого Y^*, $Y^{*'}$, $Y^{*''}$ подставляем в исходное уравнение.

Так как $\left(Y^*\right)' = 4e^{4x}(ax + b) + a e^{4x} = e^{4x}(4ax + 4b + a)$

$\left(Y^*\right)'' = 4e^{4x}(4ax + 4b + a) + 4a e^{4x} = e^{4x}(16ax + 16b + 8a)$, то уравнение

$y'' - 2y' - 3y = x e^{4x}$ примет вид:

$$e^{4x}(16ax + 16b + 8a) - 2e^{4x}(4ax + 4b + a) - 3e^{4x}(ax + b) = x e^{4x}.$$

Сокращаем на e^{4x} и после упрощения имеем $5ax + 6a + 5b = x$. Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства.

$$x: \quad 5a = 1,$$

$$x^0: \quad 6a + 5b = 0.$$

Отсюда $a = \frac{1}{5}, \quad b = -\frac{6}{25}$, тогда $Y^* = e^{4x}\left(\frac{1}{5}x - \frac{6}{25}\right)$.

Общее решение уравнения $y = \bar{y} + y^*$, поэтому окончательно имеем $y(x) = e^{4x}\frac{5x-6}{25} + C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$.

ПРИМЕР 2.29. Найти общее решение уравнения линейного осциллятора без трения с периодической внешней силой $\sin(\omega t)$:

$$x'' + \omega^2 x = \sin(\omega t).$$

ω^2 – частота собственных колебаний, $\omega^2 = k / m$.

Решение. Общее решение однородного уравнения $x'' + \omega^2 x = \sin(\omega t)$ выписывается с учетом корней характеристического уравнения $k_{1,2} = \pm i\omega$:

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t).$$

Число $\alpha + i\beta = i\omega$, соответствующее правой части уравнения, является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение ищем в виде

$$u(t) = (A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))t,$$

$$u'(t) = (-A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t))t + A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t),$$

$$u''(t) = -t(A\omega^2\cos(\omega t) + B\omega^2\sin(\omega t)) + 2(-A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)).$$

После подстановки в уравнение получаем

$$-2A\omega\sin(\omega t) + 2B\omega\cos(\omega t) = \sin(\omega t).$$

Отсюда $A = -\frac{1}{2\omega}, B = 0$. Окончательно, общее решение неоднородного уравнения $x(t) = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t) - \frac{t}{2\omega}\cos(\omega t)$.

Наличие в общем решении членов пропорциональных t свидетельствует о росте со временем амплитуды колебаний. Этот эффект называется резонансом. Это происходит при совпадении частоты внешнего воздействия с собственной частотой.

Если правая часть уравнения представляет собой сумму различных функций вида (функций с разными α и β), то решение выписывается с использованием теоремы о суперпозиции решений: надо найти частные решения, соответствующие различным частям и затем взять их сумму, которая и является решением исходного уравнения.

ПРИМЕР 2.30. Найти общее решение уравнения $y^{(4)}+y''=12x+6e^x$ с начальными данными $y'''(0)=11, y''(0)=3,\ y'(0)=6, y(0)=4.$

Решение. Сначала находится общее решение, затем определяются содержащиеся в нем произвольные константы. Правая часть представляет собой сумму двух функций $f_1(x)=x$ и $f_2(x)=e^x$. Для каждой из функций найдем соответствующее частное решение. Общее решение $\overline{Y}$ однородного уравнения найдем согласно корням характеристического уравнения: $k_1=k_2=0$, $k_3=i, k_4=-i$: $Y=C_1+C_2x+C_3\cos x+C_4\sin x$. Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде суммы двух функций $Y^*=Y_1^*+Y_2^*$.

Правой части $f_1(x)$ соответствует $\alpha=0$, $\beta=0$, $P_n(x)=x$, $n=1$. Так как $\alpha+i\beta=0$ - корень характеристического уравнения кратности 2, то решение ищем в виде многочлена первой степени $(n=1)$ с произвольными коэффициентами, умноженного на $x^2(r=2)$:

$$Y_1^*=(a_1x+a_2)x^2=a_1x^3+a_2x^2.$$

Правой части $f_2(x)=6e^x$ соответствует $\alpha=1,\beta=0,P_n(x)=6,n=0.$ Число $\alpha+i\beta=1$ корнем характеристического уравнения не является, следовательно, решение ищем в виде $Y_2^*(x)=be^x$. Таким образом, $Y^*=a_1x^3+a_2x^2+be^x$. Найдем a_1,a_2,b. Для этого $\left(Y^*\right)''$ и $\left(Y^*\right)^{(4)}$ подставим в исходное уравнение.

Так как $\left(Y^*\right)'=3a_1x^2+2a_2x+be^x$, $\left(Y^*\right)''=6a_1x+2a_2+be^x$,

$\left(Y^*\right)'''=6a_1+be^x$, $\left(Y^*\right)^{(4)}=be^x$,

то уравнение $y^{(4)}+y''=12x+6e^x$ примет вид:

$$be^x+6a_1x+2a_2+be^x=12x+6e^x.$$

Отсюда $a_1=2,\ a_2=0,\ b=3.$ Общее решение неоднородного уравнения $y(x)=\overline{Y}+Y^*$, $y(x)=C_1+C_2x+C_3\cos x+C_4\sin x+2x^3+3e^x$.

Найдем частное решение, соответствующее начальным данным. Для этого находим значение функции y и ее производных при $x=0$ и приравниваем их к соответствующим начальным данным

$$y(0)=C_1+C_2x+C_3\cos x+C_4\sin x+2x^3+3e^x\Big|_{x=0}=C_1+C_3+3=4,$$

$$y'(0)=C_2-C_3\sin x+C_4\cos x+6x^2+3e^x\Big|_{x=0}=C_2+C_4+3=6,$$

$$y''(0)=-C_3\cos x-C_4\sin x+12x+3e^x\Big|_{x=0}=-C_3+3=3,\ \text{т.к.}\ y''(0)=3,$$

$$y'''(0)=C_3\sin x-C_4\cos x+12+3e^x\Big|_{x=0}=-C_4+15=11,\ \text{т.к.}\ y'''(0)=11.$$

Отсюда следует $C_1 = 1$, $C_2 = -1$, $C_3 = 0$, $C_4 = 4$.

Окончательно $y = 1 - x + 2x^3 + 4\sin x + 3e^x$.

2.14 СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Системой называется совокупность дифференциальных уравнений, содержащих функции $y_1, \ldots, y_n$ и их производные. Максимальный порядок производной называется **порядком системы**.

Система дифференциальных уравнений, разрешенных относительно старших производных, называется **нормальной.** Например, нормальная система первого порядка имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1\,(x, y_1, \ldots y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2\,(x, y_1, \ldots y_n), \\ \qquad\vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n\,(x, y_1, \ldots y_n). \end{cases} \tag{2.36}$$

Решением системы дифференциальных уравнений называется набор функций
$y_1(x), \ldots, y_n(x)$, которые после подстановки в систему обращают каждое ее уравнение в верное равенство.

Задача Коши для системы (2.36) заключается в нахождении такого решения, которое удовлетворяет начальным данным в виде

$$y_1(x_0) = y_{10}, \ y_2(x_0) = y_{20}, \ \ldots, \ y_n(x_0) = y_{n0}. \tag{2.37}$$

Общим решением системы (2.36) называется набор функций $y_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \ldots, y_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, которые
$\forall (C_1, C_2, \ldots, C_n) \in D \subset R$ являются решением (2.36); кроме того, для любых начальных данных вида (2.37), принадлежащих области определения системы, существуют $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \ldots, \tilde{C}_n$, при которых функции $y_1\left(x, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \ldots, \tilde{C}_n\right), \ldots$
$\ldots y_n(x, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \ldots, \tilde{C}_n)$, удовлетворяют начальным данным (2.37). Решение, соответствующее какому-либо конкретному набору констант, называется **частным решением.**

Разберем решение систем на примере линейной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \quad\vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n, \end{cases} \tag{2.38}$$

где коэффициенты a_{ij} -известные константы.

Один из методов заключается в сведении системы к дифференциальному уравнению на одну из неизвестных функций. Продифференцируем, например, первое уравнение

$$y_1'' = a_{11}y_1' + \ldots + a_{1n}y_n'.$$

В полученное уравнение вместо $y_2', \ldots, y_n'$ подставляем взятые из системы выражения для них. Получаем уравнение, которое запишем в виде:

$$y_1'' - a_{11}y_1' + \alpha_{21}y_1 = \alpha_{22}y_2 + \ldots + \alpha_{2n}y_n \tag{2.39}$$

Коэффициенты α_{ij} легко вычисляются через коэффициенты исходной системы. Проделывая эту процедуру далее, имеем

$$y_1''' - a_{11}y_1'' + \alpha_{21}y_1' + \alpha_{31}y_1 = \alpha_{32}y_2 + \ldots + \alpha_{3n}y_n, \tag{2.40}$$

$$\vdots$$

$$y_1^{(n-1)} - a_{11}y_1^{(n-2)} + \ldots + \alpha_{n-1,1}y_1 = \alpha_{n-1,2}y_2 + \ldots + \alpha_{n-1,n}y_n, \tag{2.41}$$

$$y_1^{(n)} - a_{11}y_1^{(n-1)} + \ldots + \alpha_{n1}y_1 = \alpha_{n2}y_2 + \ldots + \alpha_{nn}y_n. \tag{2.42}$$

Рассматривая первое уравнение системы (2.38) и уравнения (2.39)-(2.42) как линейную алгебраическую систему функций $y_2, \ldots, y_n$, можно получить для них выражения через функцию $y_1(x)$ и ее производные $y_1^{(n)}, y_1^{(n-1)}, \ldots, y_1'$. Подставляя эти выражения в последнее уравнение (2.42), получаем линейное дифференциальное уравнение n-го порядка для y_1. Решая полученное уравнение тем или иным способом находим y_1, затем по полученным формулам находим $y_2, \ldots, y_n$.

ПРИМЕР 2.31. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -y_1 + y_2 + y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 - y_2 + y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = y_1 + y_2 + y_3. \end{cases}$

Решение. Продифференцируем первое уравнение
$y_1'' = -y_1' + y_2' + y_3' = -y_1' + (y_1 - y_2 + y_3) + (y_1 + y_2 + y_3) =$
$= -y_1' + 2y_1 + 2y_3$ или

$$y_1'' + y_1' - 2y_1 = 2y_3. \qquad (2.43)$$

Дифференцируем далее и получаем
$$y_1''' + y_1'' - 2y_1' = 2y_3' = 2y_1 + 2y_2 + 2y_3.$$
Или
$$y_1''' + y_1'' - 2y_1' - 2y_1 = 2y_2 + 2y_3.$$
Чтобы получить уравнение для $y_1(x)$, необходимо выразить y_2, y_3 через y_1 и ее производные. Рассмотрим первое уравнение исходной системы и уравнение (2.43), записанные в виде
$$\begin{cases} y_2 + y_3 = y_1' + y_1, \\ y_3 = \dfrac{y_1'' + y_1' - 2y_1}{2}. \end{cases}$$
Эта линейная алгебраическая система для y_2, y_3 решается тривиально

$$\begin{cases} y_3 = \dfrac{y_1'' + y_1' - 2y_1}{2}, \\ y_2 = -\dfrac{y_1'' - y_1' - 4y_1}{2}. \end{cases} \qquad (2.44)$$

Подставляем эти выражения в правую часть (2.43)

$$y_1''' + y_1'' - 4y_1' - 4y_1 = 0. \qquad (2.45)$$

Для уравнения (2.45) составим характеристическое уравнение и решим его: $\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda - 4 = 0$, $\lambda^2(\lambda+1) - 4(\lambda+1) = 0$, $(\lambda+1)(\lambda^2 - 4) = 0$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$. Они равны $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$.

Следовательно, общее решение уравнения (2.45) имеет вид

$$y_1(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+C_3e^{-2x}.$$

Из (2.44) находим $y_2(x)$ и $y_3(x)$

$$y_2(x)=-\frac{1}{2}(C_1e^{-x}+4C_2e^{2x}+4C_3e^{-2x}+C_1e^{-x}-2C_2e^{2x}+2C_3e^{-2x}-$$
$$-4C_1e^{-x}-4C_2e^{2x}-4C_3e^{-2x}=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}-2C_3e^{-2x}.$$
$$y_3(x)=\frac{1}{2}(C_1e^{-x}+4C_2e^{2x}+4C_3e^{-2x}-C_1e^{-x}+2C_2e^{2x}-2C_3e^{-2x}-$$
$$-2C_1e^{-x}-2C_2e^{2x}-2C_3e^{-2x})=-C_1e^{-x}+2C_2e^{2x}.$$

Окончательно, общее решение исходной системы

$$\begin{cases} y_1(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+C_3e^{-2x}, \\ y_2(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}-2C_3e^{-2x}, \\ y_3(x)=-C_1e^{-x}+2C_2e^{2x}. \end{cases}$$

Рассмотрим метод решения систем дифференциальных уравнений с помощью матриц на примере систем второго порядка

$$\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y, \\ y'=a_{21}x+a_{22}y. \end{cases} \tag{2.46}$$

Будем искать решение в виде $x=p_1e^{\lambda t}, y=p_2e^{\lambda t}$. Определим при каких λ такое решение существует. Подставим выражения для x, y в систему, и после сокращения на $e^{\lambda t}$, получаем

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)p_1+a_{12}p_2=0, \\ a_{21}p_1+(a_{22}-\lambda)p_2=0. \end{cases} \tag{2.47}$$

Эта линейная алгебраическая система имеет ненулевые решения только тогда, когда определитель соответствующей матрицы равен 0:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{2.48}$$

Уравнение (2.48) называется характеристическим уравнением системы (2.46), его решения – характеристическими числами. Это уравнение имеет два корня λ_1 и λ_2 (вообще говоря, комплексные). Рассмотрим три различных случая.

1) $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

В этом случае система имеет два частных решения, соответствующие различным собственным числам: первое- $x^{(1)}=p_1^1 e^{\lambda_1 t}, y^{(1)}=p_2^1 e^{\lambda_1 t}$, второе - $x^{(2)}=p_1^2 e^{\lambda_2 t}, y^{(2)}=p_2^2 e^{\lambda_2 t}$. В качестве p_1^1, p_2^1 и p_1^2, p_2^2 берутся какие-либо решения системы (2.47) с соответствующими $\lambda=\lambda_{1,2}$. Общее решение системы выписывается как линейная комбинация частных решений с произвольными коэффициентами:

$$x=C_1 x^{(1)}+C_2 x^{(2)}=C_1 p_1^1 e^{\lambda_1 t}+C_2 p_1^2 e^{\lambda_2 t},$$
$$y=C_1 y^{(1)}+C_2 y^{(2)}=C_1 p_2^1 e^{\lambda_1 t}+C_2 p_2^2 e^{\lambda_2 t}.$$

2) $\lambda_1=\alpha+i\beta,\ \lambda_2=\alpha-i\beta,\quad \beta\neq 0.$

Пусть p_1 и p_2- решения системы (2.47), соответствующее $\lambda=\lambda_1$.Частным решением является пара комплексных функций $x^*=p_1 e^{(\alpha+i\beta)t}, y^*=p_2 e^{(\alpha+i\beta)t}$. Частными вещественными решениями являются следующие пары функции, определенные как вещественная и мнимая части x^*, y^*:

$$x^{(1)}=\mathrm{Re}(p_1 e^{(\alpha+i\beta)t}), y^{(1)}=\mathrm{Re}(p_2 e^{(\alpha+i\beta)t}),$$
$$x^{(2)}=\mathrm{Im}(p_1 e^{(\alpha+i\beta)t}), y^{(2)}=\mathrm{Im}(p_2 e^{(\alpha+i\beta)t}).$$

Их линейная комбинация и дает выражения для общего решения

$$x=C_1\,\mathrm{Re}(p_1 e^{(\alpha+i\beta)t})+C_2\,\mathrm{Im}(p_1 e^{(\alpha+i\beta)t}),$$
$$y=C_1\,\mathrm{Re}(p_2 e^{(\alpha+i\beta)t})+C_2\,\mathrm{Im}(p_2 e^{(\alpha+i\beta)t}).$$

3) λ- вещественный корень кратности 2.

Общее решение в этом случае имеет вид

$$x=e^{\lambda t}(a_1 t+a_2), y=e^{\lambda t}(a_3 t+a_4). \tag{2.49}$$

Здесь a_1, a_2, a_3, a_4 – неизвестные константы, но только две из них могут быть произвольными. Чтобы определить их, подставим выражения (2.49) в систему (2.46). Отдельно приравнивая свободные члены и члены с множителями t, получим два различных уравнения. Полагая, например, $a_1=C_1, a_2=C_2$, находим a_3, a_4.

ПРИМЕР 2.32. Найти общее решение системы уравнений.

$$\begin{cases} x'=4x-3y, \\ y'=3x+4y. \end{cases}$$

<u>Решение.</u> Решение ищем в виде $x=p_1 e^{\lambda t}, y=p_2 e^{\lambda t}$. На p_1, p_2 и λ получаем систему

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)p_1+a_{12}p_2=0,\\ a_{21}p_1+(a_{22}-\lambda)p_2=0.\end{cases}$$

Эта алгебраическая система имеет ненулевые решения только при λ, равном корню характеристического многочлена

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & -3\\ 3 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)^2+9=0.$$

Корни $\lambda_{1,2}=4\pm 3i$. Найдем p_1, p_2,соответствующие значения $\lambda_1=4+3i$:

$$\begin{cases}3ip_1-3p_2=0,\\ 3p_1+3ip_2=0.\end{cases}$$

Система имеет бесконечно много решений (ее строки пропорциональны, определитель равен 0). Положим $p_1=1$, тогда $p_2=i$. Пару частных решений выпишем как вещественную и мнимую часть функций $x=p_1e^{\lambda t}$ и $y=p_2e^{\lambda t}$:

$$x^{(1)}=\mathrm{Re}(e^{(4+3i)t})=e^{4t}\cos(3t),\qquad y^{(1)}=\mathrm{Re}(ie^{(4+3i)t})=-e^{\lambda_1 t}\sin(3t),$$

$$x^{(2)}=\mathrm{Im}(e^{(4+3i)t})=e^{4t}\sin(3t),\qquad y^{(2)}=\mathrm{Im}(ie^{(4+3i)t})=e^{\lambda_1 t}\cos(3t),$$

Общее решение

$$x=C_1x^{(1)}+C_2x^{(2)}=e^{4t}(C_1\cos(3t)+C_2\sin(3t)),$$
$$y=C_1y^{(1)}+C_2y^{(2)}=e^{4t}(-C_1\sin(3t)+C_2\cos(3t)).$$

2.15 РЕШЕНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

Изучение динамических процессов в различных областях физики, биологии, химии, экономики и т.п. приводит к математическим моделям в виде дифференциальных уравнений. Рассмотрим лишь некоторые задачи, постановка которых дает дифференциальное уравнение (ДУ).

Простейший пример: задача о нахождении первообразной некоторой непрерывной функции $f(x)$ сводится к ДУ I порядка вида: $y'=f(x)$.

Известно, что график решения ДУ изображается на плоскости $X0Y$ интегральной кривой. Общее решение ДУ есть семейство интегральных кривых, заданных в явном $y=\varphi(x,c_1,c_2,\ldots,c_n)$ или неявном виде $\Phi(x,y,\ c_1,c_2,\ldots,c_n)=0$ ($y-$ функция независимой переменной x; $c_1,c_2,\ldots,c_n$ – произвольные постоянные). Продифференцируем уравнение $y=\varphi(x,c_1,c_2,\ldots,c_n)$ n раз. Составим систему из $(n+1)$ уравнений:

$$\begin{cases} y=\varphi(x,c_1,\ldots,c_n), \\ y'=\varphi'(x,c_1,\ldots,c_n), \\ y''=\varphi''(x,c_1,\ldots,c_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y^{(n)}=\varphi^{(n)}(x,c_1,\ldots,c_n). \end{cases}$$

Из полученной системы исключаем $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Таким образом, получим ДУ $n-$го порядка для интегральных кривых $y=\varphi(x,c_1,\ldots,c_n)$.

В случае, когда кривые заданы в неявном виде $\Phi(x,c_1,\ldots,c_n)=0$, при дифференцировании учитываем, что $y-$ функция независимой переменной x и $x'=1$, $y'=y'$. Например, $\left(x^4\right)'=4x^3$, но $\left(y^4\right)'=4y^3y'$.

ПРИМЕР. Составить дифференциальное уравнение I порядка семейства интегральных кривых: $x^2=x+cy^3$.

<u>Решение</u>. Продифференцируем данное равенство $x^2=x+cy^3$ один раз. Заметим, что $\left(x^2\right)'=2x$ и $\left(x+cy^3\right)'=1+3cy^2\cdot y'$. Запишем систему:

$$\begin{cases} x^2=x+cy^3, \\ 2x=1+3cy^2y', \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\dfrac{x^2-x}{y^3}, \\ 2x=1+3\dfrac{x^2-x}{y^3}y^2y'. \end{cases}$$

После упрощения второй строки системы, получим искомое ДУ:
$3x(x-1)y'=y(2x-1)$.

ПРИМЕР. Составить дифференциальное уравнение II порядка семейства интегральных кривых: $x=c_1+\dfrac{c_2}{y^2}$.

<u>Решение.</u> Продифференцируем равенство $x=c_1+\dfrac{c_2}{y^2}$ два раза

1) $(x)'=c_1'+\left(\dfrac{c_2}{y^2}\right)'$, $\quad 1=0+c_2(-2)y^{-3}y'$.

2) $(1)'=-2c_2\left(y^{-3}y'\right)'$, $\quad 0=-2c_2\left(-3y^{-4}y'y'+y^{-3}y''\right)$.

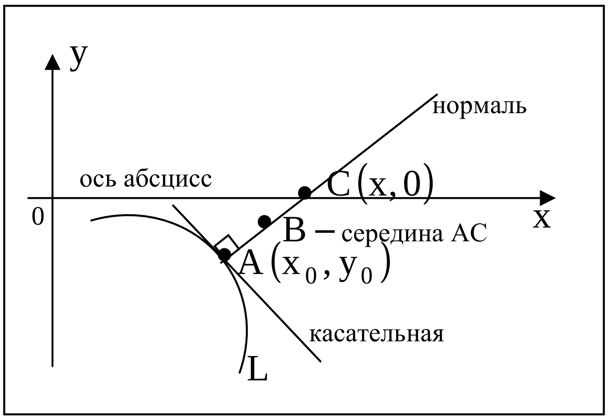
Запишем систему: $\begin{cases} x = c_1 + \dfrac{c_2}{y^2} \\ 1 = c_2(-2)y^{-3}y' \\ 0 = -2c_2\left(-3y^{-4}y\,y'y' + y^{-3}y''\right). \end{cases}$

Из последнего равенства после упрощения получаем искомое дифференциальное уравнение II порядка $y\,y'' = 3(y')^2$.

В следующих задачах для составления ДУ I порядка используем геометрический смысл первой производной функции. Пусть к кривой $y = f(x)$ проведена касательная; $(x_0, f(x_0))$ – точка касания. $f'(x_0) = k$ – угловой коэффициент касательной или $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, где α – угол наклона касательной к положительному направлению оси $0X$. Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет вид:

$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$ или $y = y_0 + y_0' \cdot (x - x_0)$, где (x_0, y_0) – координаты точки касания. Точка (x_0, y_0) лежит на кривой $y = f(x)$ и на касательной. (x, y) – координаты текущей точки касательной, то есть координаты любой точки, лежащей на касательной (не на кривой!). Напомним, что нормаль – прямая, перпендикулярная касательной и ее уравнение имеет вид: $y = y_0 - \dfrac{1}{y_0'}\cdot(x - x_0)$.

ПРИМЕР. Составить дифференциальное уравнение семейства интегральных кривых, зная, что середину отрезка нормали от произвольной точки этой кривой до оси абсцисс пересекает парабола $2y^2 = x$.



<u>Решение.</u> Возьмем произвольную точку A на кривой L, зафиксируем ее координаты (x_0, y_0) и проведем в ней нормаль AC.

Нормаль пересекает ось абсцисс в точке C, поэтому ее вторая координата «y» равна нулю. Точка C – точка нормали, следовательно, ее первую координату «x» найдем из уравнения нормали: $y = y_0 - \dfrac{1}{y_0'}(x - x_0)$

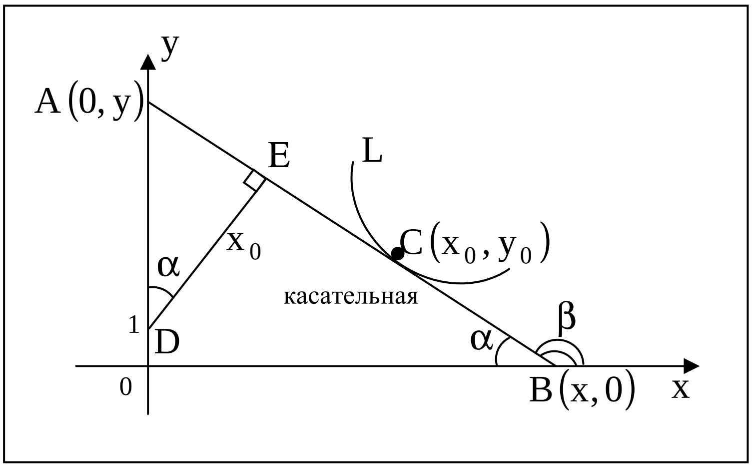
$0 = y_0 - \dfrac{1}{y_0'}(x - x_0) \Rightarrow x = x_0 + y_0 \cdot y_0' \Rightarrow$ т. $C(x_0 + y_0 y_0'; 0)$. Пусть точка B

– середина отрезка AC, тогда ее координаты будут: $\left(\frac{x_0+(x_0+y_0y_0')}{2};\frac{y_0+0}{2}\right)$.

По условию задачи координаты т.B должны удовлетворять уравнению $2y^2=x$.

Получаем равенство $2\left(\frac{y_0}{2}\right)^2=\frac{x_0+(x_0+y_0y_0')}{2}$, после упрощения которого имеем $y_0^2=2x_0+y_0\cdot y_0'$. Поскольку точка $A(x_0,y_0)$ на кривой L – произвольная точка, то индекс у ее координат можно опустить. Окончательно, ДУ I порядка примет вид $yy'-y^2+2x=0$.

ПРИМЕР. Составить дифференциальное уравнение семейства интегральных кривых, обладающих свойством: длина перпендикулярна, опущенного из точки (0; 1) на касательную к кривой равна абсциссе точки касания.



<u>Решение.</u> Обозначим $C(x_0,y_0)$ – точку на кривой L, в которой проведена касательная AB. β – угол наклона касательной к положительному направлению оси 0X, тогда $\operatorname{tg}\beta=y'(x_0)$ или $\operatorname{tg}\beta=y_0'$. Так как $\alpha=180^0-\beta$, то $\operatorname{tg}\alpha=-y_0'$.

Пусть касательная пересекает ось ординат в т.A, тогда ее первая координата «x» равна 0. Но т.A – точка на касательной, поэтому ее вторая координата «y» удовлетворяет уравнению касательной:

$y=y_0+y_0'\cdot(x-x_0)$

$y=y_0+y_0'\cdot(0-x_0)\ \Rightarrow\ $ т.$A(0;y_0-x_0y_0')\ \Rightarrow\ 0A=y_0-x_0y_0'$. Так как $AD=A0-0D$, где $0D=1$, то $AD=(y_0-1)-x_0y_0'$.

DE – длина перпендикуляра из т.D на касательную, тогда по условию задачи $DE=x_0$.

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+(-y_0')^2}}.$$

Подставляем выражения для $AD, DE, \cos\alpha$ в равенство: $DE=AD\cdot\cos\alpha$ (из прямоугольного треугольника ADE).

Имеем: $x_0=((y_0-1)-x_0y_0')\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(y_0')^2}}$. Возводим в квадрат

$x_0^2\cdot\left(1+(y_0')^2\right)=(y_0-1)^2-2(y_0-1)x_0y_0'+x_0^2\cdot(y_0')^2$ и после упрощения получим $2x_0(y_0-1)\cdot y_0'=(y_0-1)^2-x_0^2$.

Точка $C(x_0, y_0)$ – произвольная точка кривой, поэтому индекс у ее координат можно опустить. Окончательно ДУ I порядка будет иметь вид $2x(y-1)y' = (y-1)^2 - x^2$.

Напомним физический смысл первой производной функции $f(x)$. Если функция $y = f(x)$ описывает динамический процесс, то есть проходящий во времени, то $y' = f'(x)$ есть скорость протекания этого процесса в момент времени x.

ПРИМЕР. Пусть тело находится в окружающей среде с более низкой температурой, равной 10^0 С. Известно, что с течением времени охлаждение тела пропорционально разности температур самого тела и среды с коэффициентом пропорциональности 0,02. Составить дифференциальное уравнение процесса изменения температуры тела во времени.

Решение. Обозначим T – температуру тела в некоторый момент времени t. Введем функцию $T(t)$, тогда $T'(t)$ или $\frac{dT}{dt}$ – скорость изменения тела в момент времени t. По условию $T'(t)$ пропорционально разности температур тела T и окружающей среды 10^0, то есть $(T-10)$ с коэффициентом пропорциональности 0,02. Получаем равенство $\frac{dT}{dt} = -0{,}02(T-10)$. Минус в правой части означает процесс охлаждения. Это же уравнение может иметь вид $T' = -0{,}02(T-10)$.

Отметим, что полученное дифференциальное уравнение I порядка, можно записать и таким образом $y' = -0{,}02(x-10)$ или $50y' = 10 - x$.

ПРИМЕР 2.33. Цилиндрический резервуар с высотой 6 м и диаметром основания 4 м поставлен вертикально и наполнен водой. За какое время вода, заполняющая резервуар, вытечет из него через круглое отверстие радиуса 1/12 м, сделанного в дне резервуара?

Решение. Для решения поставленной задачи надо воспользоваться формулой Бернулли, определяющей скорость V (в м/с) истечения жидкости из отверстия в резервуаре, находящегося на h м ниже свободного уровня жидкости: $V = \sigma\sqrt{2gh}$

Здесь g = 9,8 м/с^2 - ускорение силы тяжести, а σ - постоянный (безразмерный) коэффициент, зависящий от свойств жидкости (для воды $\sigma \approx 0{,}6$).

Пусть через t с после начала истечения воды уровень оставшейся в резервуаре воды был равен h м, и за время dt с понизился еще на dh м (dh<0). Подсчитаем объем воды, вытекшей за этот бесконечно малый промежуток времени dt, двумя способами.

С одной стороны, этот объем $d\omega$ равен объему цилиндрического слоя с высотой |dh| и радиусом, равным радиусу r основания резервуара (r=2 м). Таким образом, $d\omega = \pi r^2 |dh| = -\pi r^2 dh$.

С другой стороны, этот объем равен объему цилиндра, основанием которого служит отверстие в дне резервуара, а высота равна $V\,dt$ (где V - скорость истечения). Если радиус отверстия равен $\rho\,(\rho = 1/12\,\text{м})$, то $d\omega = \pi\rho^2 v dt = \pi\rho^2\sqrt{2gh}dt$.

Приравнивая эти два выражения для одного и того же объема, приходим к уравнению

$$-r^2 dh = \sigma\rho^2\sqrt{2gh}dt.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$dt = -\frac{r^2}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}}\cdot\frac{dh}{\sqrt{h}};\quad t = C - \frac{2r^2}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}}\sqrt{h}.$$

При $t = 0$ имеем $h = h_0 = 6$ м. Отсюда находим

$$C = \frac{2r^2}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}}\sqrt{h_0}.$$

Таким образом, связь между t и h определяется уравнением

$$t = \frac{2r^2}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h}\right),$$

а полное время истечения T найдем, полагая в этой формуле $h = 0$:

$$T = \frac{2r^2\sqrt{h_0}}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}}.$$

Используя данные задачи ($r = 2$ м, $h_o = 6$ м, $\sigma = 0{,}6$, $\rho = 1/12$ м, $g = 9{,}8$ м/с^2), находим $T \approx 1062$ с $\approx 17{,}7$ мин.

ПРИМЕР 2.34. В комнате, где температура 20°С, некоторое тело остыло за 20 мин от 100 до 60°С. Найти закон охлаждения тела; через сколько минут оно остынет до 30° С? Повышением температуры в комнате пренебречь.

Решение. В силу закона Ньютона (скорость охлаждения пропорциональна разности температур) можем записать:

$$\frac{dT}{dt} = k(T-20),\ \text{или}\ \frac{dT}{T-20} = k\,dt,\ \text{т.е.}\ \ln(T-20) = kt + \ln C$$

Если $t = 0$, то $T=100°$; отсюда $C = 80$. Если $t = 20$, то $T = 60°$; значит, $\ln 40= =20k+\ln 80$, откуда $k = -(1/20)\ \text{In}\ 2$. Итак, закон охлаждения тела имеет вид

$$T - 20 = 80\cdot e^{-(1/20)t\cdot\ln 2} = 80(1/2)^{(t/200)},\ \text{или}\ T = 20 + 80(1/2)^{(t/20)}.$$

При $T=30^0$ имеем $10=80(1/2)^{t/20}$, или $(1/2)^{t/20}=1/8$. Таким образом, $t/20=3$, откуда $t=60$ мин.

ПРИМЕР 2.35. Материальная точка массы т движется по оси Ох под действием восстанавливающей силы, направленной к началу координат и пропорциональной расстоянию движущейся точки от начала; среда, в которой происходит движение, оказывает движению точки сопротивление, пропорциональное скорости движения. Найти закон движения.

Решение. Пусть $\dot{x}$-скорость точки; $\ddot{x}$-ее ускорение; на точку действуют две силы: восстанавливающая $f_1 = -ax$ и сила сопротивления среды $f_1 = -b\dot{x}$. Согласно второму закону Ньютона, имеем

$m\ddot{x} = -b\dot{x} - ax$, или $m\ddot{x} + b\dot{x} + ax = 0$

Мы получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Его характеристическое уравнение $mk^2 + bk + a = 0$ имеет корни

$$k_{1,2} = \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ma}\right)/(2m)$$

1). Если $b^2 - 4ma > 0$, то корни-действительные, различные и оба отрицательные; вводя для них обозначения

$$k_1 = \left(-b + \sqrt{b^2 - 4ma}\right)/(2m) = -r_1,\ \ k_2 = -\left(b + \sqrt{b^2 - 4ma}\right)/(2m) = -r_2,$$

находим общее решение уравнения движения в виде $x = C_1 e^{-r_1 t} + C_2 e^{-r_2 t}$
(это-случай так называемого **апериодического** движения).

2). Если $b^2 - 4ma = 0$, то корни характеристического уравнения – действительные равные:

$$k_1 = k_2 = -b/(2m) = -r.$$

В этом случае общее решение уравнения движения имеет вид $x = C_1 e^{-rt} + C_2 t e^{-rt}$.

3). Наконец, если $b^2 - 4ma < 0$, то характеристическое уравнение имеет комплексные сопряженные корни:

$k_1 = -\alpha + \beta_i$, $k_2 = -\alpha - \beta_i$, где $\alpha = b/(2m), \beta = \left(\sqrt{4am - b^2}\right)/(2m)$.

Общее решение уравнения движения имеет вид

$x = e^{-\alpha t}(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t)$, или $x = Ae^{-\alpha t}\sin(\beta t + \varphi_0)$,

где $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\sin\varphi_0 = C_1 / A$, $\cos\varphi_0 = C_2 / A$

2.16 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ЕГО РЕШЕНИЯ. ВВОДНЫЕ ПОНЯТИЯ

Дифференциальным уравнением в частных производных называют уравнение, связывающее неизвестную функцию нескольких переменных и ее частные производные.

Порядок высшей частной производной, входящий в уравнение, определяет порядок уравнения.

Ограничимся рассмотрением уравнений с функциями двух и трех переменных.

Общий вид уравнения первого и второго порядков для функции двух переменных соответственно такой

$$F\left(x, y, U, U_x, U_y\right) = 0, \tag{2.50}$$

$$F\left(x, y, U, U_x, U_y, U_{xx}, U_{xy}, U_{yy}\right) = 0, \tag{2.51}$$

где F – заданная функция своих аргументов.

Уравнение называется линейным, если F линейно зависит от функции U и ее частных производных.

Уравнение (2.51) называется линейным относительно старших производных, если оно имеет вид

$$A(x, y)U_{xx} + 2B(x, y)U_{xy} + C(x, y)U_{yy} + F\left(x, y, U, U_x, U_y\right) = 0. \tag{2.52}$$

Частным случаем уравнения (2.52) является линейное уравнение

$$\begin{aligned} &A(x, y)U_{xx} + 2B(x, y)U_{xy} + C(x, y)U_{yy} + D(x, y)U_x + \\ &+ E(x, y)U_y + F(x, y)U = f(x, y), \end{aligned} \tag{2.53}$$

где A, B, C, D, E, F, f – данные непрерывные функции, определяемые в некоторой области G переменных x и y, причем A, B, C имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Чаще всего коэффициенты перед искомой функцией и ее производными – числа. Если в уравнении (2.53) $f(x, y) = 0$, то уравнение называется однородным; если $f(x, y) \neq 0$, то – неоднородным.

Решением уравнения в частных производных называется всякая функция, которая, будучи подставленная в уравнение вместо неизвестной функции U и ее частных производных, обращает это уравнение в тождество по независимым переменным.

Как известно, для обыкновенного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

решение $y = \varphi\left(x, C_1, \ldots, C_n\right)$, содержащее n произвольных постоянных, называется общим (при условии, что при соответствующем выборе констант, возможно, решить задачу Коши).

Для уравнений в частных производных дело сложнее. Так называемое общее решение содержит произвольные функции в количестве, вообще говоря, равном порядку дифференциального уравнения. В приводимых ниже задачах будет отмечена особенность общего решения уравнения в частных производных.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.36. Выяснить, являются ли приведенные ниже равенства дифференциальными уравнениями в частных производных:

а) $U_{xx}^2 + U_{yy}^2 - \left(U_{xx} - U_{yy}\right)^2 = 0,$

б) $\sin\left(U_{xy}-U_{yy}\right)-\sin U_{xy}\cdot\cos U_x-\sin U_x\cdot\cos U_{xy}+2U=0$.

Решение. Преобразуем уравнение а)

$$U_{xx}^2+U_{yy}^2-U_{xx}^2+2\cdot U_{xx}U_{yy}-U_{yy}^2=2\cdot U_{xx}U_{yy}=0.$$

Данное уравнение является уравнением в частных производных, так как в него входят частные производные второго порядка

$$U_{xx}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad U_{yy}=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}.$$

Уравнение б) не является уравнением в частных производных, так как в него входит только функция $U=U(x,y)$. Действительно, раскрывая $\sin(U_{xy}-U_{yy})$, получим

$$\sin U_{xy}\cdot\cos U_x+\sin U_x\cdot\cos U_{xy}-\sin U_{xy}\cdot\cos U_x-$$
$$-\sin U_x\cdot\cos U_{xy}+2U=0\Rightarrow 2U=0\Rightarrow U(x,y)=0.$$

ПРИМЕР 2.37. Выяснить, какие из следующих уравнений являются линейными (однородными или неоднородными) и какие нелинейными:

а) $3U_{xy}-6U_{xx}+7U_y-U_x+8x=0$,

б) $U_x\,U_{xy}^2+2x\,U\cdot U_{xy}-3xy\,U_y-U=0$,

в) $x^2\,y\cdot U_{xxy}+2e^x\,y^2\,U_{xy}-\left(x^2\,y^2+1\right)U_{xx}-2U=0$.

Решение. Сравнивая данные уравнения с формой (1.4), заключаем, что

- уравнение а) есть неоднородное линейное уравнение второго порядка, для которого $A=-6,\ 2B=3,\ C=0,\ D=-1,\ E=7, F=0,\ f=-8x$;

- уравнение б) нелинейное, так как оно не является линейным относительно старших частных производных;

- уравнение в) является однородным линейным уравнением третьего порядка.

ПРИМЕР 2.38. Решить уравнение $\dfrac{\partial U}{\partial x}=0$.

Решение. Ясно, что искомая функция $U(x,y)$ не зависит от переменной x, но может быть любой функцией от y: $U(x,y)=\varphi(y)$, поскольку, дифференцируя $\varphi(y)$ по x, получим ноль, а это значит, что данное равенство выполняется. Таким образом, решение уравнения содержит одну произвольную функцию $\varphi(y)$.

ПРИМЕР 2.39. Решить уравнение $\dfrac{\partial U}{\partial y}=f(y)$, где $f(y)-$ заданная функция.

Решение. Интегрируя по y, восстановим искомую функцию

$$U(x,y)=\int\frac{\partial U}{\partial y}dy+\psi(x)=\int f(y)dy+\psi(x),$$

где $\psi(x)-$ произвольная функция.

Итак, решение уравнений в примерах 2.38 и 2.39 содержат одну произвольную функцию $(\varphi(y)$ и $\psi(x))$. Такое решение называется общим. В отличие от общего решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, которое содержит одну произвольную постоянную, решение уравнения в частных производных первого порядка содержит одну произвольную функцию.

ПРИМЕР 2.40. Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}=0$.

Решение. Перепишем уравнение так: $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial U}{\partial y}\right)=0$. Положим $\dfrac{\partial U}{\partial y}=V$, после чего данное уравнение принимает вид $\dfrac{\partial V}{\partial x}=0$. Как было установлено в примере 2.38, общее решение последнего уравнения имеет вид: $V=f(y)$, где $f(y)-$ произвольная функция. Исходное уравнение примет вид: $\dfrac{\partial U}{\partial y}=f(y)$. Проинтегрировав полученный результат по y, получим

$$U(x,y)=\int f(y)dy+\varphi(x),\text{ иначе}$$
$$U(x,y)=\varphi(y)+\psi(x),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)-$ произвольные дважды дифференцируемые функции.

Легко проверить, что найденная функция $U(x,y)$ удовлетворяет данному уравнению.

Итак, решение уравнения в частных производных второго порядка содержит уже две произвольные функции. Такое решение называют общим.

Приведенные в качестве примеров уравнения дают основание сделать заключение: общее решение уравнения в частных производных первого порядка содержит одну произвольную функцию, а общее решение уравнения второго порядка – две произвольные функции. В этом заключается коренное отличие общего решения уравнения в частных производных от общего решения обыкновенного дифференциального уравнения, которое содержит одну и две произвольные постоянные.

В дальнейшем будет выяснено, какие дополнительные условия надо задать, чтобы с их помощью можно было выделить частное решение, т. е. функцию, удовлетворяющую как уравнению, так и дополнительным условиям.

2.17 КЛАССИФИКАЦИЯ И ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Все многообразие линейных относительно старших производных (или просто линейных) уравнений может быть разделено на три класса (типа). В каждом классе есть простейшие уравнения, которые называются каноническими. Решения уравнения одного и того же типа (класса) имеют много общих свойств. Для изучения этих свойств достаточно рассмотреть канонические уравнения, так как другие уравнения данного класса могут быть приведены к каноническому виду.

Классификация уравнений вида (2.52) проводится в соответствии со знаком дискриминанта $\Delta = B^2 - AC$.

Говорят, что уравнение (1.3) в области G принадлежит

а) гиперболическому типу, если $B^2 - AC > 0$,

б) параболическому типу, если $B^2 - AC = 0$,

в) эллиптическому типу, если $B^2 - AC < 0$.

Уравнение вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \right) \tag{2.54}$$

называется **каноническим уравнением гиперболического типа**.

Второй канонический вид уравнения гиперболического типа таков:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial y^2} = F\left(x, y, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \right) \tag{2.55}$$

Уравнение вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = F\left(x, y, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \right) \tag{2.56}$$

называется **каноническим уравнением параболического типа.**

Уравнение вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = F\left(x, y, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \right) \tag{2.57}$$

называется **каноническим уравнением эллиптического типа.**

Дифференциальное уравнение

$$A(dy)^2 - 2B\,dxdy + C(dx)^2 = 0 \tag{2.58}$$

называется **характеристическим уравнением** для уравнения (2.52), а его общие интегралы $\varphi(x, y) = C_1$ и $\psi(x, y) = C_2$ – **характеристиками**.

Характеристики линейного уравнения (2.52) используются для приведения его к каноническому виду. Уравнение (2.52) в каждой из областей, где сохраняется знак дискриминанта Δ, приводится к эквивалентному уравнению, а именно к каноническому, путем введения вместо переменных x и y новых переменных ξ и η с помощью зависимостей

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y).$$

Для уравнения гиперболического типа характеристическое уравнение имеет два интеграла, т.е. существуют два семейства действительных характеристик

$$\varphi(x, y) = C_1 \quad \text{и} \quad \psi(x, y) = C_2,$$

и потому следует сделать замену переменных, положив

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

в результате чего исходное уравнение преобразуется к уравнению (2.54) (или к уравнению (2.55) после дополнительной замены $\alpha = \dfrac{\xi + \eta}{2}$, $\beta = \dfrac{\xi - \eta}{2}$, где α и β – новые переменные).

Для уравнения параболического типа характеристическое уравнение имеет один действительный интеграл, т.е. одну характеристику $\varphi(x, y) = C$, и потому полагают

$$\xi = \varphi(x, y), \text{ а } \quad \eta = \psi(x, y),$$

где $\psi(x, y)$ – произвольная функция, например, $\eta = x$. После такой замены уравнение приводится к виду (2.56).

Для уравнения эллиптического типа общие интегралы характеристического уравнения имеют вид

$$\varphi(x, y) \equiv \varphi_1(x, y) \pm i\,\varphi_2(x, y) = C_{1,2},$$

где $\varphi(x, y)$ – функция, принимающая комплексные значения, а $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ – действительные функции действительных переменных. С помощью подстановок

$$\xi = \varphi_1(x, y), \quad \eta = \varphi_2(x, y)$$

уравнение (2.52) приводится к каноническому виду (2.57).

После выбора новых переменных ξ и η требуется преобразовать производные, входящие в данное уравнение, к новым переменным. Напомним, что первые производные по старым переменным x и y выражаются через производные по новым переменным ξ и η по известным формулам дифференцирования сложной функции двух переменных:

$$U_x = U_\xi \cdot \xi_x + U_\xi \cdot \eta_x, \quad U_y = U_\xi \cdot \xi_y + U_\eta \cdot \eta_y.$$

Вторые производные находятся путем дифференцирования выражений для U_x и U_y по правилу дифференцирования сложной функции.

Так как для каждого типа канонических уравнений разработаны определенные методы как аналитического, так и численного решения, то задача приведения уравнений (2.52) к каноническому виду представляет практический интерес.

Заметим, что в различных областях тип одного и того же уравнения (2.52) может быть различным.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.41. Определить тип уравнения

$$y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

и привести его к каноническому виду.

Решение. Составим выражение $B^2 - AC$. В данном случае $A = y^2$, $C = -x^2$, $B = 0$, тогда $B^2 - AC = x^2 y^2 \geq 0$. Отсюда следует, что данное уравнение – уравнение гиперболического типа во всех точках плоскости, кроме лежащих на осях $x = 0$ и $y = 0$. Оси координат являются линиями параболичности. Следовательно, уравнение можно привести к каноническому виду (2.54) в каждом из координатных углов. Составим характеристическое уравнение:

$$y^2(dy)^2 - x^2(dx)^2 = 0 \Rightarrow$$
$$(y\,dy - x\,dx)(y\,dy + x\,dx) = 0,$$

откуда получаем $y\,dy - x\,dx = 0, \quad y\,dy + x\,dx = 0$.

Интегрируя последние уравнения, получаем

$$y^2 - x^2 = C_1 \text{ и } y^2 + x^2 = C_2.$$

Сделаем замену: $\xi = y^2 - x^2$, $\eta = x^2 + y^2$.

Выразим частные производные по старым переменным через частные производные по новым переменным:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot (-2x) + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot 2x,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot 2y + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot 2y$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2x\frac{\partial U}{\partial \xi} + 2x\frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = -2\frac{\partial U}{\partial \xi} - 2x\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right] +$$

$$+2\frac{\partial U}{\partial \eta} + 2x\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right] =$$

$$-2\frac{\partial U}{\partial \xi} - 2x\left[\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}(-2x) + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}\cdot 2x\right] + 2\frac{\partial U}{\partial \eta} + 2x\left[\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}(-2x) + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\cdot 2x\right] =$$

$$= -4x^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 8x^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + 4x^2\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial U}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial U}{\partial \eta}.$$

Аналогично найдем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 4y^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 8y^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + 4y^2\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial U}{\partial \xi} + 2\frac{\partial U}{\partial \eta}.$$

Подставим найденные U_{xx} и U_{yy} в исходное уравнение, и после приведения подобных получим

$$\left(4x^2y^2 - 4x^2y^2\right)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 16x^2y^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \left(4x^2y^2 - 4x^2y^2\right)\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} -$$

$$-2\left(x^2 + y^2\right)\frac{\partial U}{\partial \xi} + 2\left(y^2 - x^2\right)\frac{\partial U}{\partial \eta} = 0$$

или $$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{x^2 + y^2}{8x^2y^2}\,\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{y^2 - x^2}{8x^2y^2}\,\frac{\partial U}{\partial \eta} = 0.$$

Запишем теперь коэффициенты полученного уравнения в новых переменных. Из равенств $x^2 + y^2 = \eta$ и $y^2 - x^2 = \xi$ выразим $2y^2 = \eta + \xi$, $2x^2 = \eta - \xi$.

И окончательно получаем канонический вид исходного уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\eta}{2\left(\eta^2 - \xi^2\right)}\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\xi}{2\left(\eta^2 - \xi^2\right)}\frac{\partial U}{\partial \eta} = 0.$$

2.18 ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

К основным уравнениям математической физики относятся следующие уравнения в частных производных второго порядка.

1. Волновое и телеграфное уравнения

Уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) + f(x, y, z, t), \tag{2.59}$$

где $c -$ скорость распространения волны в данной среде, называется **волновым уравнением**. В приведенном уравнении x, y, z обозначают декартовы координаты точки, $t -$ время.

Для двумерного пространства (плоский случай) волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) + f(x, y, t). \tag{2.60}$$

В одномерной области уравнение (2.60) принимает вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x, t). \tag{2.61}$$

Волновое уравнение описывает процессы распространения упругих, звуковых, световых, электромагнитных волн, а также другие колебательные явления. Например, волновое уравнение может описать:

а) малые поперечные колебания струны (при этом под $U = U(x, t)$ понимают поперечное отклонение точки x струны от положения равновесия в момент времени t);

б) продольные колебания упругого стержня ($U -$ продольное отклонение частицы от ее положения при отсутствии деформации);

в) малые упругие колебания плоской пластины, мембраны;

г) течение жидкости или газа в коротких трубах, когда трением о стенки трубы можно пренебречь ($U -$ давление или расход).

Уравнение вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = A\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + B\frac{\partial U}{\partial t} + C \cdot U \tag{2.62}$$

называется **телеграфным уравнением**. Оно описывает электрические колебания в проводах ($U -$ сила тока или напряжение), неустановившееся течение жидкости или газа в трубах ($U -$ давление или скорость).

Волновое и телеграфное уравнения входят в группу уравнений гиперболического типа.

2. Уравнение теплопроводности

Уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right), \tag{2.63}$$

где $a-$ параметр, учитывающий физические свойства изучаемой среды, называется **уравнением теплопроводности**.

Оно имеет вид для плоского случая

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right), \tag{2.64}$$

для одномерного

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \tag{2.65}$$

Уравнением теплопроводности описываются процессы нестационарного массо- и теплообмена. В частности, к этим уравнениям приводят задачи о неустановившемся режиме распределения тепла (при этом a^2 означает коэффициент температуропроводности, а $U-$ температуру в любой точек исследуемой области в любой момент времени t), о фильтрации упругой жидкости в упругой пористой среде, например, нефти и газа в подземных песчаниках ($a^2 = \chi -$ коэффициент пьезопроводности, $U-$ давление в любой точке среды), о неустановившейся диффузии ($a^2 = D-$ коэффициент диффузии, $U-$ концентрация), о течении жидкости в магистральных трубопроводах ($U-$ давление или скорость жидкости).

Если при рассмотрении этих задач окажется, что в исследуемой области функционируют внутренние источники и стоки массы или тепла, то процесс описывается неоднородным уравнением

$$\frac{\partial U}{\partial t} + f(x, y, z, t) = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right), \tag{2.66}$$

где функция $f(x, y, z, t)$ характеризует интенсивность функционирующих источников.

Уравнения (2.63) – (2.66) являются простейшими уравнениями параболического типа.

3. Уравнения Лапласа и Пуассона

Уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=f(x,y,z) \tag{2.67}$$

называется **уравнением Пуассона** в трехмерном пространстве. Если в этом уравнении $f(x,y,z)=0$, то оно называется **уравнением Лапласа**:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0. \tag{2.68}$$

К исследованию уравнений Лапласа и Пуассона приводит рассмотрение задач о стационарном процессе: это задачи гидродинамики, диффузии, распределения температуры, электростатики и др.

Эти уравнения относятся к уравнениям эллиптического типа.

Те задачи, которые приводят к уравнениям, содержащим время, называются **нестационарными или динамическими задачами математической физики**; задачи, приводящие к уравнениям, не содержащим время, называются **стационарными или статическими**.

Как было показано, уравнения математической физики имеют бесчисленное множество решений, зависящие от двух произвольных функций (речь идет об уравнениях второго порядка для функции двух переменных). Для того, чтобы из множества решений выделить определенное, характеризующее процесс, необходимо на искомую функцию наложить дополнительные условия, которые диктуются физическими соображениями. Таковыми условиями для уравнений в частных производных являются, чаще всего, начальные и граничные условия. Граничные условия – это условия заданные на границе рассматриваемой среды; начальные условия – это условия, относящиеся к какому-нибудь моменту времени, с которого начинается изучение данного физического явления. Дополнительные условия, так же как и само дифференциальное уравнение, выводятся на основе физических соображений, связанных с самим процессом. Вместе с тем дополнительные условия должны быть такими, чтобы обеспечить выделение единственного решения из всего множества решений. Число граничных и начальных условий определяются типом уравнения, а их вид – заданным исходным состоянием на границе объекта и внешней среды. Для рассматриваемых нами уравнений число начальных условий равно порядку старшей производной по времени, входящей в уравнение, а число граничных условий – порядку старшей производной по координате.

Совокупность дифференциального уравнения и дополнительных условий представляют собой математическую формулировку физической задачи, и называется **задачей математической физики**.

Итак, задача математической физики состоит в отыскании решений уравнений в частных производных, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, скажем, граничным и начальным.

Задача математической физики считается поставленной корректно, если решение задачи, удовлетворяющее всем ее условиям, существует, единственно и устойчиво.

2.19 КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ. ГРАНИЧНЫЕ И НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ. ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

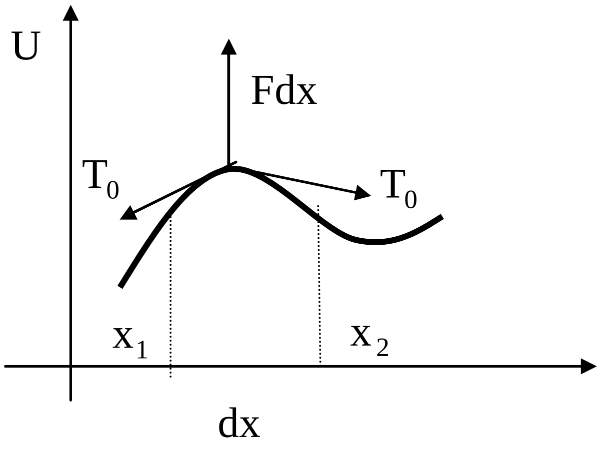


Рис. 2.2

Пусть струна находится под действием сильного начального натяжения T_0. Если вывести струну из положения равновесия и подвергнуть действию какой-либо силы, то струна начнет колебаться. Процесс колебания можно описать одной функцией $U(x,t)$, характеризующей вертикальное перемещение струны (отклонение от положения равновесия (рис. 2.2)). При каждом фиксированном значении t график функции $U = U(x, t_0)$ на плоскости $X0U$ дает форму струны в момент времени t_0.

Функция $U = U(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad (2.69)$$

где $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$, $f = \frac{F}{\rho}$, $\rho = \rho(x) -$ масса единицы длины (линейная плотность струны), $F -$ сила, действующая на струну перпендикулярно оси $0X$ и рассчи-

x танная на единицу длины.

Если внешняя сила отсутствует, т.е. $f = 0$, то уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad (2.70)$$

описывает свободные колебания струны без воздействия внешних усилий.

Уравнение (2.69) является простейшим уравнением гиперболического типа и в то же время одним из важнейших уравнений матфизики.

Одного уравнения движения (2.69) или (2.70) при математическом описании физического процесса недостаточно. При рассмотрении задачи о колебании струны дополнительные условия могут быть двух видов: начальные и граничные (краевые).

Так как процесс колебаний струны зависит от ее начальной формы и распределения скоростей, то следует задать начальные условия:

$$U(x,0)=\varphi(x),\ \ \frac{\partial\, U(x,0)}{\partial\, t}=\psi(x). \tag{2.71}$$

Граничные условия определяются поддерживаемым на концах струны режимом на протяжении процесса колебания. Так, если концы струны длины ℓ закреплены, то отклонения $U(x,t)$ в точках $x=0$ и $x=\ell$ равны нулю:

$$U(0,t)=0,\quad U(\ell,t)=0. \tag{2.72}$$

Будем говорить о трех типах граничных условий:

I $\quad U\big|_{x=0}=\mu_1(t),\ \ U\big|_{x=\ell}=\mu_2(t)$

II $\quad \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}=\nu_1(t),\ \ \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=\ell}=\nu_2(t)$

III $\quad \left.\left(\frac{\partial U}{\partial x}+h_1U\right)\right|_{x=0}=\omega_1(t),\ \ \left.\left(\frac{\partial U}{\partial x}+h_2U\right)\right|_{x=\ell}=\omega_2(t),$

где $\mu_1(t),\mu_2(t),\nu_1(t),\nu_2(t),\omega_1(t),\omega_2(t)-$ известные функции,

h_1 и h_2 – известные постоянные.

Приведенные условия называют соответственно граничными условиями первого, второго, третьего рода. Условия I имеют место в том случае, когда концы объекта (струна, стержень и т.д.) перемещаются по заданному закону; условия II – в случае, когда к концам приложены заданные силы; условия III – в случае упругого закрепления концов.

Если функции, заданные в правой части равенства, равны нулю, то граничные условия называются **однородными**. Так, граничные условия (2.72) – однородные. Комбинируя различные перечисленные типы граничных условий, получим шесть типов простейших краевых задач.

В том случае, когда режим на концах не будет оказывать существенного влияния на ту часть струны, которая достаточно удалена от них, струну считают бесконечной. В силу этого вместо полной краевой задачи ставят предельную задачу – **задачу Коши:** найти решение уравнения (2.69) для $-\infty<x<\infty$ при $t>0$, удовлетворяющее начальным условиям

$$U\big|_{t=0}=\varphi(x),\ \ \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x).$$

Если изучается процесс вблизи одной границы и влияние граничного режима на второй границе не имеет существенного значения на протяжении интересующего нас промежутка времени, то приходим к постановке задачи на полуограниченной прямой $0 \le x < \infty$. В этом случае задаются начальные условия и одно из граничных условий I - III при $x = 0$.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.42. Однородная струна длины ℓ совершает малые поперечные колебания. Поставить задача об определении отклонений $U(x,t)$ точек струны от прямолинейного положения покоя, если в момент $t = 0$ струна имела форму $\varphi(x)$ $(0 \le x \le \ell)$ и скорость каждой ее точки задается функцией $\psi(x)$. Рассмотреть случаи:

а) концы струны закреплены;

б) концы струны свободны;

в) к концам струны $x = 0$ и $x = \ell$, начиная с момента $t = 0$, приложены поперечные силы $F(t)$ и $\Phi(t)$ соответственно;

г) концы струны закреплены упруго, т.е. каждый из концов испытывает сопротивление, пропорциональное отклонению конца.

Решение. Как известно, отклонения $U(x,t)$ точек струны от положения равновесия удовлетворяют в отсутствии действующей внешней силы уравнению свободных колебаний (2.70)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Здесь $a^2 = T_0 / \rho_0$, $T_0 -$ натяжение, линейная плотность $\rho = \rho_0 = \text{const}$, т.к. струна однородная.

Начальные условия имеют вид:

$$U\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \le x \le \ell.$$

Займемся выводом граничных условий.

СЛУЧАЙ а). Так как концы струны закреплены, то их отклонения $U(x,t)$ в точках $x = 0$ и $x = \ell$ должны быть равными нулю при любом t, т.е.

$$U\big|_{x=0} = 0, \quad U\big|_{x=\ell} = 0, \quad t > 0.$$

Итак, физическая задача о колебаниях закрепленной на концах струны свелась к следующей математической задаче: найти функцию $U(x,t)$, определенную при $0 < x < \ell$ и $t > 0$, являющуюся решением уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

и удовлетворяющую граничным условиям

$$U\big|_{x=0}=0, \quad U\big|_{x=\ell}=0$$

и начальным условиям

$$U\big|_{t=0}=\varphi(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(x).$$

СЛУЧАЙ б). Если концы струны свободны, то внешние силы, приложенные к ним, равны нулю. И, следовательно, равна нулю сила натяжения T, которая согласно закону Гука, пропорциональна удлинению: $T=K\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x}$, где коэффициент K включает модуль упругости материала. Поэтому

$$\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=0}=0, \quad \frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=\ell}=0, \quad t>0,$$

Задача формулируется следующим образом: найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0<x<\ell, \quad t>0,$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=0}=0, \quad \frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=\ell}=0$$

и начальным условиям

$$U\big|_{t=0}=\varphi(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(x).$$

СЛУЧАЙ в). Рассмотрим граничные элементы $(0;\Delta x)$ и $(\ell-\Delta x;\ell)$. Запишем второй закон Ньютона для правого элемента $(\ell-\Delta x;\ell)$, на который действует сила $\Phi(t)$ и сила натяжения T_2 $\left(T_2=T\cdot\sin\theta\approx T\cdot\operatorname{tg}\theta=T\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x}\right)$:

$$\rho\cdot\Delta x\cdot U_{tt}=\Phi(t)-T\cdot U_x(\ell-\Delta x,\ell)$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получим

$$\Phi(t)-T\cdot U_x(\ell;t)=0, \text{ откуда } \frac{\partial U(\ell;t)}{\partial x}=\frac{\Phi(t)}{T}=\nu_2(t).$$

Аналогично получим условия для левого конца:

$$\frac{\partial U(0;t)}{\partial x}=-\frac{F(t)}{T}=\nu_1(t).$$

Таким образом, задача ставится так: найти в области $0<x<\ell$, $t>0$, решение уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее граничным условиям II рода

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = \nu_1(t), \quad \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=\ell} = \nu_2(t)$$

и начальным условиям

$$U\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x).$$

СЛУЧАЙ г). При упругом закреплении концов каждый конец испытывает сопротивление, пропорциональное отклонению конца, т.е.

$$F(t) = -k \cdot U(0,t), \quad \Phi(t) = -k \cdot U(\ell,t),$$

где k - коэффициент жесткости упругого крепления концов струны. Тогда из граничных условий в случае в) получим

$$T \cdot U_x(0,t) - k \cdot U(0,t) = 0, \quad T \cdot U_x(\ell,t) + k \cdot U(\ell,t) = 0,$$

иначе $\dfrac{\partial U(0,t)}{\partial x} + h_1 \cdot U(0,t) = 0, \quad \dfrac{\partial U(\ell,t)}{\partial x} + h_2 \cdot U(\ell,t) = 0.$

Математическая формулировка задачи: найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее граничным условиям III рода

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} + h_1 \cdot U(0,t) = 0, \quad \frac{\partial U(\ell,t)}{\partial x} + h_2 \cdot U(\ell,t) = 0, \quad t > 0$$

и начальным условиям

$$U(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \quad 0 \le x \le \ell.$$

2.20 РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК (МЕТОДОМ ДАЛАМБЕРА)

Одним из широко используемых способов решения уравнений колебаний струны является метод характеристик, называемый методом Даламбера. В основе его лежит тот факт, что с помощью замены $\xi = x + at$, $\eta = x - at$ уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{2.73}$$

преобразуется в уравнение $\dfrac{\partial^2 U}{\partial\xi\,\partial\eta} = 0$, которое имеет общее решение

$$U(\xi,\ \eta) = \Phi(\xi) + F(\eta),$$

где Φ и F - произвольные дважды дифференцируемые функции (см. пример 2.40). Для определения функций Φ и F, т.е. для определения закона колебаний струны, требуется использовать начальные условия, а для некоторых задач и граничные. Если вернуться к старым переменным x и t, то общее решение примет вид

$$U(x,\ t) = \Phi(x + at) + F(x - at).$$

Здесь $F(x - at)$ характеризует прямую волну (кривая $F(x)$смещается вправо со скоростью a), а $\Phi(x + at)$ - обратную волну (кривая $\Phi(x)$ смещается влево со скоростью a).

Если рассматривается ***задача Коши*** для бесконечной струны $-\infty < x < \infty$, то по заданным начальным условиям

$$U(x,0) = \varphi(x),\ \ U_t(x,0) = \psi(x) \qquad (2.74)$$

определяются функции Φ и F, и искомое решение имеет вид

$$U(x,t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,dz. \qquad (2.75)$$

Формула (2.75) называется формулой Даламбера. Эта формула доказывает единственность решения задачи Коши.

В частности, когда начальная скорость равна нулю ($\psi(x) = 0$), то

$$U(x,t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2},$$

откуда легко вычислить отклонение струны от положения равновесия для любой из ее точек; оно равно сумме левой и правой бегущих волн, причем начальная форма каждой волны определяется функцией $\varphi(x)/2$, равной половине начального отклонения.

В случае полубесконечной струны, кроме начальных условий (2.74), заданных при $0 \le x < \infty$, необходимо добавить еще граничное условие (конец предполагается в точке $x = 0$)

$$U(0,t) = 0 \qquad (2.76)$$

для закрепленной в точке $x = 0$ струны,

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x}=0 \tag{2.77}$$

для свободного конца в точке $x=0$,

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x}-h\cdot U(0,t)=0.$$

для упругого закрепления в точке $x=0$.

В случае однородных граничных условий (2.76) или (2.77) решение задачи о колебании полубесконечной струны сводится к решению задачи о колебании бесконечной струны путем продолжения начальных условий на всю ось нечетным образом для условия (2.76), т.е. полагают $\varphi(-x)=-\varphi(x)$, $\psi(-x)=-\psi(x)$, и четным образом для условия (2.77), т.е. $\varphi(-x)=\varphi(x)$, $\psi(-x)=\psi(x)$.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.43. Найти форму достаточно длинной струны, определяемой уравнением $\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, в момент времени $t=\pi/2$, $t=\pi$, если заданы начальные смещения и скорости:

а) $U(x,0)=\sin x, \quad U_t(x,0)=\cos x$;

б) $U(x,0)=0, \quad U_t(x,0)=\cos x$;

в) $U(x,0)=\sin x, \quad U_t(x,0)=0$.

Решение. По постановке вопроса надо найти решение $U(x,t)$ задачи Коши (2.73), (2.74) в области: $-\infty<x<\infty$, $t>0$. Оно определяется формулой Даламбера (2.75).

СЛУЧАЙ а). Полагая в формуле Даламбера $\varphi(x)=\sin x$, $\psi(x)=\cos x$, найдем смещение $U(x,t)$ в любой точке и любой момент t:

$$U(x,t)=\frac{1}{2}\left[\sin(x-t)+\sin(x+t)\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\cos z\,dz=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin(x-t)+\sin(x+t)\right]+\frac{1}{2}\left[\sin(x+t)-\sin(x-t)\right]=\sin(x+t).$$

Откуда определяем форму кривой в указанные моменты времени:

$$U(x,\pi/2)=\cos x,\quad U(x,\pi)=-\sin x.$$

Кривые изображены на рис. 2.3.

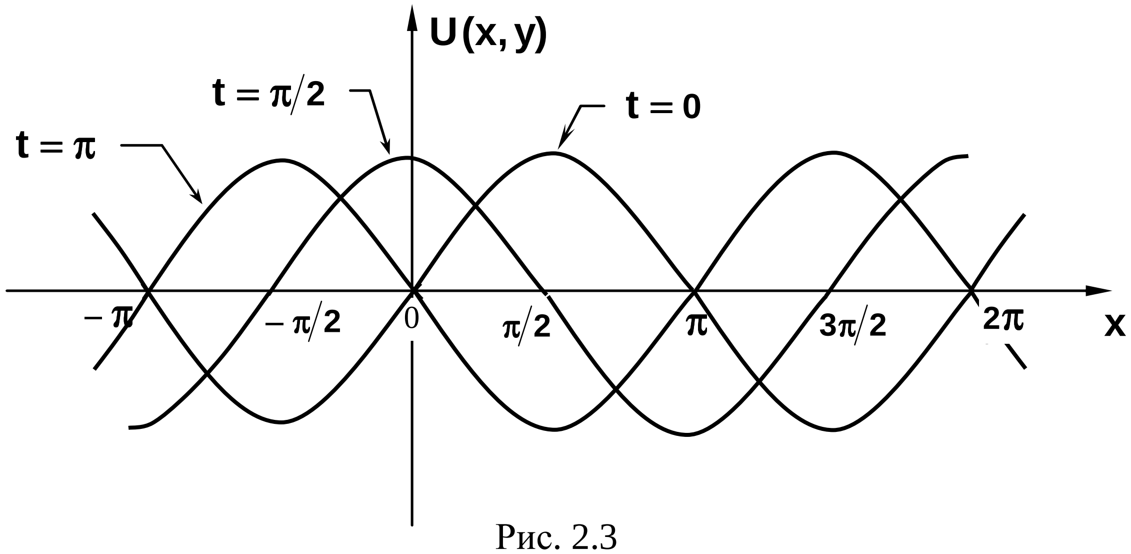


Рис. 2.3

СЛУЧАЙ б) Начальные смещения струны равны нулю, т.к. $U(x,0)=0$. При $\varphi(x)=0$ колебательный процесс будет описан по формуле

$$U(x,t)=\frac{1}{2}\cdot\int_{x-t}^{x+t}\cos z\;dz=\frac{1}{2}\cdot\sin z\Big|_{x-t}^{x+t}=\frac{1}{2}\cdot\left[\sin(x+t)-\sin(x-t)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\cos\frac{x+t+x-t}{2}\cdot\sin\frac{x+t-x+t}{2}=\cos x\cdot\sin t.$$

В момент времени $t=\pi/2$ струна имеет форму косинусоиды: $U\big|_{t=\pi/2}=\cos x$, а в момент $t=\pi$ она совпадает с осью абсцисс: $U\big|_{t=\pi}=0$.

СЛУЧАЙ в). По условию, начальные скорости равны нулю, значит, $\psi(x)=0$. Тогда имеем

$$U(x,t)=\frac{\sin(x-t)+\sin(x+t)}{2}=\frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{x-t+x+t}{2}\cos\frac{x-t-x-t}{2}=$$
$$=\sin x\cdot\cos t.$$

Форма струны в указанные моменты времени определяется уравнениями:

$$U(x,\,\pi/2)=0,\;\; U(x,\,\pi)=-\sin x.$$

2.21 РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ФУРЬЕ. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ МЕТОДОМ ФУРЬЕ

Метод Фурье или метод разделения переменных, широко используемый при решении ряда задач математической физики, состоит в следующем. Искомая функция, зависящая от нескольких переменных, ищется в виде произведения функций, каждая из которых зависит лишь от одной переменной. После подстановки этого произведения в исходное уравнение получается несколько обыкновенных дифференциальных уравнений, часть из которых вместе с краевыми условиями исходной задачи являются краевыми задачами, называемыми задачами Штурма- Лиувилля. Искомое решение представляется рядом по произведениям собственных функций задач Штурма- Лиувилля. Приведем **с х е м у э т о г о м е т о д а** для простейших уравнений гиперболического и параболического типов – волнового уравнения и уравнения теплопроводности.

Рассмотрим однородные уравнения

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{2.78}$$

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tag{2.79}$$

для которых граничные условия имеют вид

$$U(0,t) = 0, \quad U(\ell,t) = 0. \tag{2.80}$$

а начальные условия таковы

$$U(x,0) = \varphi(x), \quad U_t(x,0) = \psi(x) \tag{2.81}$$

для (2.78)

$$U(x,0) = \varphi(x) \tag{2.82}$$

для (2.79).

Процесс решения разбивается на два этапа: I – нахождение частных решений; II – нахождение общего решения и удовлетворение начальным условиям.

I. Ищутся всевозможные частные решения (2.78) в виде

$$U(x,t) = X(x)\cdot T(t). \tag{2.83}$$

В результате подстановки функции такого вида в уравнение (2.78) получаем

$$\frac{1}{a^2}X(x)T''(t) = X''(x)T(t) \text{ или } \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda\,(\text{const}).$$

Последнее уравнение распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения относительно функций $X(t)$ и $T(t)$:

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0. \tag{2.84}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{2.85}$$

Как говорят, в уравнении (2.78) переменные разделены.

Подставляя (2.83) в граничные условия (2.80), получим

$X(0)T(t) = 0, \quad X(\ell)T(t) = 0$, откуда

$$X(0) = 0, \quad X(\ell) = 0 \tag{2.86}$$

(т.к. случай $T(t) = 0$ не представляет интереса, поскольку тогда $U \equiv 0$).

Для определения функции $X(x)$ получена **з а д а ч а Ш т у р м а - Л и у в и л л я**: найти такие значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения (2.85), удовлетворяющие граничным условиям (2.86). Те значения параметра λ, для которых задача (2.85) – (2.86) имеет нетривиальные решения, называются **собственными значениями**, а сами решения – **собственными функциями**. Нетривиальные решения задачи (2.85) – (2.86) возможны лишь при значениях

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2, \ k = 1,2,3,\ldots$$

Этим значениям λ_k соответствуют собственные функции

$$X_k(t) = \sin\frac{k\pi x}{\ell} .$$

При $\lambda = \lambda_k$ общее решение уравнения (2.84) имеет вид

$$T_k(t) = a_k \cos\frac{k\pi a t}{\ell} + b_k \sin\frac{k\pi a t}{\ell},$$

где a_k и b_k – произвольные постоянные.

Таким образом, произведения функций $X_k(t)$ и $T_k(t)$ образуют частные решения уравнения (2.78), удовлетворяющие краевым условиям (2.80)

$$U_k(x,t) = \left(a_k \cos\frac{k\pi a}{\ell} t + b_k \sin\frac{k\pi a}{\ell} t\right)\sin\frac{k\pi}{\ell} x, \ k = 1,2,\ldots.$$

II. При помощи собственных функций строится общее решение уравнения в частных производных, которое в силу свойства линейного однородного уравнения можно взять в виде комбинации полученных частных решений - ряда

$$U(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}U_k(x,t). \tag{2.87}$$

Для уравнения (2.78) общее решение имеет вид

$$U\ (x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi a}{\ell}t+b_k\sin\frac{k\pi a}{\ell}t\right)\sin\frac{k\pi}{\ell}x. \tag{2.88}$$

Подставляя решение (2.88) в начальные условия (2.81), определяют значения коэффициентов a_k и b_k, пользуясь разложением функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряд Фурье (в ряд по системе собственных функций $\{X_n(t)\}$). В результате имеем

$$a_k=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx,\quad b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^{\ell}\psi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx. \tag{2.89}$$

Решение уравнения теплопроводности (2.79) получается применением этой же схемы с той лишь разницей, что вместо уравнения (2.84) надо решать уравнение

$$\frac{1}{a^2}\ \frac{T'(t)}{T(t)}=-\lambda\quad \text{или}\quad T'+a^2\lambda T=0,$$

общее решение которого есть

$$T_k(t)=a_k\, e^{-\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 t},\ \ k=0,1,\ldots$$

где a_k – произвольные постоянные.

Следовательно, $U_k(x,t)=T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{\ell}$ и общее решение (2.87) принимает вид

$$U(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\exp\left[-\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 t\right]\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell}. \tag{2.90}$$

Потребовав выполнения начального условия (2.82), коэффициенты a_k будут найдены как коэффициенты разложения функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье:

$$a_k=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx. \tag{2.91}$$

Приведенные здесь решения для линейных однородных уравнений с однородными граничными условиями будут использованы также при рассмотрении неоднородных и однородных уравнений с однородными и неоднородными граничными условиями как составные части решений краевых задач.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.44. Найти закон колебания однородной струны, закрепленной на концах $x = 0$ и $x = \ell$. В начальный момент струна оттянута в точке x_0 на высоту h (рис. 2.4) и затем отпущена без начальной скорости.

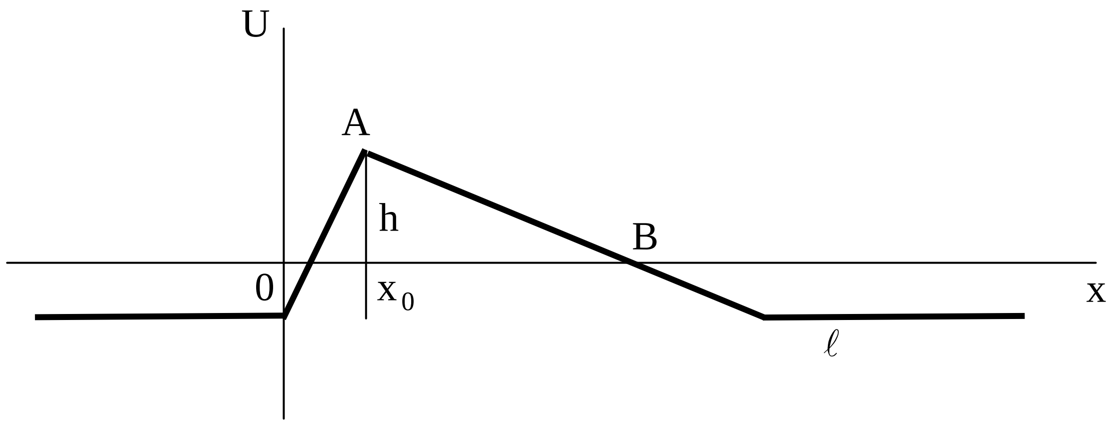


Рис. 2.4

<u>Решение.</u> Задача сводится к решению уравнения

$$U_{tt} = a^2 \cdot U_{xx}$$

при граничных условиях $U(0,t) = U(0,x) = 0$ и начальных условиях

$$U(0,x) = \begin{cases} \dfrac{h}{x_0}, & 0 < x \le x_0 \\ \dfrac{h(\ell - x)}{\ell - x_0}, & x_0 < x \le \ell \end{cases} \qquad U_t(x,0) = 0, \qquad 0 < x \le \ell,$$

где $\dfrac{h}{x_0} \cdot x = U$ - уравнение прямой OA, $\dfrac{h(\ell - x)}{\ell - x_0} = U$ – уравнение прямой AB (оба записываются как уравнение прямой с угловым коэффициентом).

Решение поставленной задачи определяется рядом (2.88)

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \mathrm{Cos}\frac{a\pi}{\ell} t + b_k \cdot \mathrm{Sin}\frac{a\pi}{\ell} t \right) \cdot \mathrm{Sin}\frac{k\pi}{\ell} x,$$

где a_k, b_k - коэффициенты Фурье для функций, которые вычисляются по формулам (2.89).

$$a_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\cdot \mathrm{Sin}\frac{k\pi}{\ell}x\ dx, \quad \text{где } \varphi(x) = U(x,0).$$

В нашем случае

$$a_k = \frac{2}{\ell}\left[\int_0^{x_o}\frac{h}{x_o}\cdot x\cdot \mathrm{Sin}\frac{k\pi}{\ell}x\ dx + \int_{x_o}^{\ell}\frac{h(\ell - x)}{\ell - x_o}\cdot \mathrm{Sin}\frac{k\pi}{\ell}x\ dx\right].$$

Вычислим первый интеграл

$$\frac{h}{x_o}\int_0^{x_o} x\cdot \mathrm{Sin}\frac{k\pi}{\ell}x\ dx = \left|\begin{matrix} x = u, & \mathrm{Sin}\frac{k\pi}{\ell}x\ dx = dv \\ dx = du, & v = -\frac{\ell}{k\pi}\cdot \mathrm{Cos}\frac{k\pi}{\ell}x \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{h}{x_o}\left[-\frac{x\ell}{k\pi}\cdot \mathrm{Cos}\frac{k\pi}{\ell}x\Big|_0^{x_o} + \frac{\ell}{k\pi}\int_{x_o}^{x_o}\mathrm{Cos}\frac{k\pi}{\ell}x\,dx\right] =$$

$$= -\frac{h\ell}{k\pi}\cdot \mathrm{Cos}\frac{k\pi}{\ell}x_0 + \frac{h\ell}{x_o k\pi}\cdot\frac{\ell}{k\pi}\cdot \mathrm{Sin}\frac{k\pi}{\ell}x_0\Big|_0^{x_o} =$$

$$= -\frac{h\ell}{k\pi}\cdot \mathrm{Cos}\frac{k\pi}{\ell}x_0 + \frac{h\ell^2}{x_o(k\pi)^2}\cdot \mathrm{Sin}\frac{k\pi}{\ell}x_0.$$

Вычислим второй интеграл

$$\int_{x_o}^{\ell}\frac{h(\ell - x)}{\ell - x_o}\cdot \mathrm{Sin}\frac{k\pi x}{\ell}\ dx = \frac{h}{\ell - x_o}\int_{x_o}^{\ell}(\ell - x)\cdot \mathrm{Sin}\frac{k\pi x}{\ell}\ dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} \ell - x = u, & \mathrm{Sin}\frac{k\pi x}{\ell}\ dx = dv \\ du = -dx, & v = -\frac{\ell}{k\pi}\cdot \mathrm{Cos}\frac{k\pi x}{\ell} \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{h}{\ell - x_o}\left[\frac{\ell\cdot(\ell - x)}{k\pi}\cdot \mathrm{Cos}\frac{k\pi x}{\ell}\Big|_{x_o}^{\ell} - \frac{\ell}{k\pi}\int_{x_o}^{\ell}\mathrm{Cos}\frac{k\pi x}{\ell}dx\right] =$$

$$= \frac{h\ell}{k\pi}\cdot \mathrm{Cos}\frac{k\pi x_0}{\ell} - \frac{h\ell}{k\pi(\ell - x_o)}\cdot\frac{\ell}{k\pi}\cdot \mathrm{Sin}\frac{k\pi x}{\ell}\Big|_{x_o}^{\ell} =$$

$$=\frac{h\ell}{k\pi}\cdot \mathrm{Cos}\frac{k\pi x_0}{\ell}+\frac{h\ell^2}{(k\pi)^2(\ell-x_o)}\cdot \mathrm{Sin}\frac{k\pi x_0}{\ell}.$$

Тогда

$$a_k=\frac{2}{\ell}\left[-\frac{h\ell}{k\pi}\cdot \mathrm{Cos}\frac{k\pi x_o}{\ell}+\frac{h\ell^2}{x_o(k\pi)^2}\cdot \mathrm{Sin}\frac{k\pi x_o}{\ell}+\right.$$

$$\left.+\frac{h\ell}{k\pi}\cdot \mathrm{Cos}\frac{k\pi x_o}{\ell}+\frac{h\ell^2}{(k\pi)^2(\ell-x_o)}\cdot \mathrm{Sin}\frac{k\pi x_o}{\ell}\right]=$$

$$=\frac{2}{\ell}\cdot\frac{h\ell^2}{(k\pi)^2}\cdot\left(\frac{1}{x_o}+\frac{1}{\ell-x_o}\right)\cdot \mathrm{Sin}\frac{k\pi x_o}{\ell}=\frac{2h\ell^2}{x_o(\ell-x_o)(k\pi)^2}\cdot \mathrm{Sin}\frac{k\pi x_o}{\ell}.$$

Определим b_k.

$$b_k=\frac{2}{a k\pi}\int_0^{\ell}\psi(x)\cdot \mathrm{Sin}\frac{k\pi}{\ell}x\,dx,\quad \text{где}\quad \psi(x)=\frac{\partial U(x,0)}{\partial t}.$$

В нашем случае $\psi(x)=0$, тогда $b_k=0$ и решение $U(x,t)$ имеет вид

$$U(x,t)=\frac{2h\ell^2}{\pi^2 x_o(\ell-x_o)}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot \mathrm{Sin}\frac{k\pi x_o}{\ell}\cdot \mathrm{Cos}\frac{a\pi}{\ell}t\cdot \mathrm{Sin}\frac{k\pi}{\ell}x\ .$$

Полученный ряд описывает колебательный процесс: смещение $U(x,t)$ точки x струны в любой момент времени t. Чтобы определить форму струны в момент t_0, надо протабулировать функцию $U(x,t_0)$, ограничившись несколькими.

2.22 УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ. ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В п. 2.18 отмечалось, что нестационарные процессы теплопроводности, диффузии и другие описываются уравнениями параболического типа (2.63) – (2.66). Ограничимся рассмотрением процесса распространения тепла в одномерном теле – стержне, достаточно тонком, чтобы в любой момент времени температуру U во всех точках поперечного сечения можно считать одинаковой.

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+f(x,t). \qquad (2.92)$$

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.45. Поставить задачу о распределении температуры в тонком однородном стержне $0 \le x \le \ell$ с теплоизолированной боковой поверхностью. Внутри стрежня происходит свободный теплообмен, т.е. отсутствуют источники и поглотители тепла. Начальная температура есть некоторая функция от x, а на концах поддерживается следующий температурный режим:

а) на концах задается температура

a' – постоянная, a'' – переменная;

б) на концы стержня подаются извне заданные тепловые потоки;

в) концы стрежня теплоизолированы;

г) на концах стержня происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой задана.

Решение. Задача о распределении температуры в однородном стержне без тепловых источников сводится к решению уравнения (2.92), в котором $f(x,t) \equiv 0$, т.е.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad o < x < \ell,\ t > 0,$$

где $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$ – коэффициент температуропроводности (k – коэффициент теплопроводности материала стержня, c – удельная теплоемкость, ρ – плотность стержня). Начальное условие запишется в виде

$$U(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le \ell,$$

где $\varphi(x)$ – произвольная функция, определяющая начальную температуру точек стержня в момент времени $t = 0$. Сформулируем граничные условия.

СЛУЧАЙ а) поскольку концы стержня ($x = 0,\ x = \ell$) поддерживаются при заданных постоянных температурах, задача a' формулируется математически следующим образом: найти решение уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0$$

при начальном условии

$$U(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le \ell,$$

и граничных условиях

$$U(0,t) = u_1, \quad U(\ell,t) = u_2, \quad t > 0, \quad \text{где } u_1 = u_2 = \text{const}.$$

В случае a'', когда концы стержня находятся при заданных переменных температурах, формулировка задачи следующая: найти решение уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0$$

при начальном условии

$$U(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le \ell\ ,$$

и граничных условиях

$$U(0,t) = \psi_1(t), \quad U(\ell,t) = \psi_2(t), \quad t > 0;$$

СЛУЧАЙ б) тепловой поток q (количество тепла, протекающее через поперечное сечение стержня площадью σ в момент времени t) определяется законом Фурье

$$q = -k\sigma \frac{\partial U}{\partial x}.$$

По условию, в стержень через его левый и правый концы подаются тепловые потоки; пусть они заданы функциями $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ соответственно.

Тогда условия на концах стержня запишутся так:

$$-k\sigma \frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = Q_1(t) \quad \text{или} \quad \frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = -\frac{Q_1(t)}{k\sigma} = \nu_1(t),$$

$$k\sigma \frac{\partial U(\ell,t)}{\partial x} = Q_2(t) \quad \text{или} \quad \frac{\partial U(\ell,t)}{\partial x} = \frac{Q_2(t)}{k\sigma} = \nu_2(t).$$

Эти условия отличаются знаком, так как тепловой поток, поступающий в стержень через правый конец $x = \ell$, имеет направление, противоположное направлению оси $0X$. На концах имеем граничные условия второго рода.

Итак, математически задача формулируется следующим образом: решить уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0,$$

при начальном условии

$$U(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le \ell\ ,$$

и граничных условиях

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = -\frac{Q_1(t)}{k\sigma}, \qquad \frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = \frac{Q_2(t)}{k\sigma}; \quad \text{при } t > 0;$$

СЛУЧАЙ в) Если концы стержня теплоизолированы, то количество тепла $q(0,t) = Q_1(t)$ и $q(\ell,t) = Q_2(t)$, поступающее через сечение $x = 0$ и

$x = \ell$, равно нулю. Следовательно, согласно закону Фурье, на концах выполняются условия

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial U(\ell,t)}{\partial x} = 0$$

СЛУЧАЙ г) согласно закону конвективного теплообмена Ньютона, поток тепла в окружающую среду пропорционален разности температур на конце стержня и окружающей среды. Поэтому

для правого конца $q(\ell,t) = \alpha[U(\ell,t) - \psi_2(t)]$,

для левого конца $q(0,t) = \alpha[U(0,t) - \psi_1(t)]$,

где $U(0,t)$ и $U(\ell,t)-$ значения температуры концов стержня,

$\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)-$ значения температуры окружающей среды соответственно у левого конца ($x = 0$) и правого конца ($x = \ell$) стержня;

$\alpha-$ коэффициент теплообмена.

С другой стороны, по закону Фурье, $q = -k\dfrac{\partial U}{\partial x}$. Тогда

для правого конца стержня $x = \ell$

$$-k\frac{\partial U(\ell,t)}{\partial x} = \alpha[U(\ell,t) - \psi_2(t)] \quad \text{или}$$

$$\frac{\partial U(\ell,t)}{\partial x} = -h[U(\ell,t) - \psi_2(t)], \quad \text{где} \quad h = \frac{\alpha}{k},$$

для левого конца стержня $x = 0$

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = h[U(0,t) - \psi_1(t)].$$

Здесь на правом конце стержня направление потока, идущего во внешнюю среду, совпадает с направлением оси $0X$, поэтому в соответствии с законом Фурье $q = -k \cdot \partial U/\partial x$. На левом же конце эти направления противоположны и поэтому поток $q = k \cdot \partial U/\partial x$.

Таким образом, математическая формулировка задачи имеет вид: найти решение уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0,$$

при начальном условии

$$U(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le \ell,$$

и граничных условиях

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = h[U(0,t) - \psi_1(t)],$$

$$\frac{\partial U(\ell,t)}{\partial x} = -h[U(\ell,t) - \psi_2(t)], \quad t > 0.$$

На концах стержня имеем граничные условия третьего рода.

Если коэффициент теплообмена α значительно больше коэффициента внутренней теплопроводности k ($\alpha >> k$), то граничные условия задачи **г)** переходят в граничные условия **а)**. Если же, наоборот, α пренебрежимо мало ($\alpha \to 0$), то граничные условия задачи **г)** превращаются в граничные условия задачи **б)**, где $Q_1(t) = Q_2(t) = 0$, то есть мы приходим к случаю тепловой изоляции концов стержня.

2.23 РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ ФУРЬЕ

Здесь будет показано применение метода Фурье к решению задач о распространении тепла в ограниченном стержне в случае однородного и неоднородного уравнения теплопроводности при различных граничных условиях.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.46. Дана тонкая однородная проволока длиной $\ell = 3$, теплоизолированная от окружающей среды. Начальная температура определена по закону $f(x) = 3x - x^2$. На концах проволоки поддерживается нулевая температура. Найти распределение температуры $U(x,t)$ в проволоке. (Принять коэффициент температуропроводности a равным 4).

Решение. Искомая функция $U(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 16\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 3, \ t > 0,$$

граничным условиям

$$U(0,t) = 0, \ U(3,t) = 0, \ t > 0$$

и начальному условию

$$U(x,0) = 3x - x^2, \ 0 \le x \le 3.$$

Решение сформулированной задачи – однородного уравнения теплопроводности с однородными граничными условиями, как установлено в п.6, определяется рядом (2.90)

$$U(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\exp\left[-\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 t\right]\sin\frac{k\pi x}{\ell},$$

в котором коэффициенты Фурье a_k вычисляются по формуле (2.91)

$$a_k=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx,\quad \text{где}\quad \varphi(x)=U(x,0).$$

По условию, $\ell=3,\ a=4,\ \varphi(x)=3x-x^2.$

Вычислим коэффициенты Фурье, интегрируя по частям:

$$a_k=\frac{2}{3}\int_0^3(3x-x^2)\cdot\mathrm{Sin}\frac{k\pi x}{3}\,dx=\left|\begin{array}{ll} u=3x-x^2, & dv=\mathrm{Sin}\dfrac{k\pi x}{3}dx \\ du=(3-2x)\,dx, & v=-\dfrac{3}{k\pi}\cdot\mathrm{Cos}\dfrac{k\pi x}{3}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{2}{3}\left[-\frac{x\cdot(3-x)\cdot 3}{k\pi}\cdot\mathrm{Cos}\frac{k\pi x}{3}\Big|_0^3+\frac{3}{k\pi}\int_0^3(3-2x)\,\mathrm{Cos}\frac{k\pi x}{3}dx\right]=$$

$$=0+\frac{3}{k\pi}\int_0^3(3-2x)\mathrm{Cos}\frac{k\pi x}{3}dx=\left|\begin{array}{ll} u=3-2x, & dv=\mathrm{Cos}\dfrac{k\pi x}{3}\,dx \\ du=-2\,dx, & v=\dfrac{3}{k\pi}\cdot\mathrm{Sin}\dfrac{k\pi x}{3}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{2}{k\pi}\left[(3-2x)\cdot\frac{3}{k\pi}\mathrm{Sin}\frac{k\pi x}{3}\Big|_0^3+\frac{6}{k\pi}\int_0^3\mathrm{Sin}\frac{k\pi x}{3}\,dx\right]=$$

$$=\frac{2}{k\pi}\left[0+\frac{6}{k\pi}\int_0^3\mathrm{Sin}\frac{k\pi x}{3}\,dx\right]=\frac{2}{k\pi}\left[-\frac{18}{k^2\pi^2}\,\mathrm{Cos}\frac{k\pi x}{3}\Big|_0^3\right]=$$

$$=-\frac{36}{k^3\pi^3}[\mathrm{Cos}k\pi-\mathrm{Cos}\,0]=-\frac{36}{k^3\pi^3}\left[(-1)^k-1\right]=\frac{36}{k^3\pi^3}\left[1-(-1)^k\right].$$

Тогда решение будет иметь вид

$$U(x,t)=\frac{36}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^3}e^{-\left(\frac{4k\pi}{3}\right)^2 t}\cdot\mathrm{Sin}\frac{k\pi x}{3}\ .$$

Но, так как $1-(-1)^k=\begin{cases}0 & \text{при } k\text{ - четном}\\ 2 & \text{при } k\text{ - нечетном},\end{cases}$

то, положив $k=2n+1$ ($k=1$ при $n=0$), получим окончательное решение в виде

$$U(x,t)=\frac{72}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}e^{-\frac{16(2n+1)^2\pi^2 t}{9}}\cdot \mathrm{Sin}\frac{\pi(2n+1)}{3}x.$$

Чтобы найти численные значения искомой функции $U(x,t)$ необходимо протабулировать полученное решение.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.47. Начальная температура однородного стержня длины ℓ равна $U_0=\mathrm{const}$, на его концах поддерживается постоянная температура: в точке $x=0$ $U=U_1$, в точке $x=\ell$ $U=U_2$. Найти закон распределения температуры $U(x,t)$, предполагая, что стенки стержня теплоизолированы и что внутри него происходит свободный теплообмен.

Решение. Задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\qquad 0<x<\ell,\quad t>0$$

при неоднородных граничных и начальном условиях

$$U(0,t)=u_1,\quad U(\ell,t)=u_2,\qquad t>0,$$

$$U(x,0)=U_0,\qquad\qquad 0\le x\le \ell\ ,$$

Решение первой краевой задачи в случае ненулевых граничных условий будем искать в виде ряда Фурье по собственным функциям $\sin\frac{n\pi x}{\ell}$:

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cdot \mathrm{Sin}\frac{\pi n x}{\ell} \tag{2.93}$$

где

$$T_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}U(x,t)\cdot \mathrm{Sin}\frac{\pi n x}{\ell}\,dx, \tag{2.94}$$

считая при этом t параметром. Займемся определением функций $T_n(t)$.

Интегрируя дважды по частям, получим

$$T_n(t)=\frac{2}{\pi n}\left[U(0,t)-(-1)^n\cdot U(\ell,t)\right]-\frac{2\ell}{\pi^2 n^2}\int_0^{\ell}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\cdot \mathrm{Sin}\frac{\pi n x}{\ell}dx.$$

Так как $U(x,t)$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial U}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, то

$$T_n(t)=\frac{2}{\pi n}\left[U(0,t)-(-1)^n\cdot U(\ell,t)\right]-\frac{2\ell}{(\pi na)^2}\int_0^\ell\frac{\partial U}{\partial t}\cdot\mathrm{Sin}\frac{\pi nx}{\ell}dx \qquad (2.95)$$

Дифференцируя выражение (2.94) по t, найдем

$$\frac{dT_n}{dt}=\frac{2}{\ell}\int_0^\ell\frac{\partial U}{\partial t}\cdot\mathrm{Sin}\frac{\pi nx}{\ell}dx \qquad (2.96)$$

Исключая интеграл из равенств (2.95), (2.96), получим уравнение для определения коэффициентов $T_n(t)$:

$$\frac{dT_n(t)}{dt}+\left(\frac{\pi na}{\ell}\right)^2\cdot T_n(t)=\frac{2\pi na^2}{\ell^2}\left[U(0,t)-(-1)^n\cdot U(\ell,t)\right]$$

Общее решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка имеет вид

$$\begin{gathered}T_n(t)=\exp\left[-\left(\frac{\pi na}{\ell}\right)^2\cdot t\right]\cdot\left\{C_n+\frac{2\pi na^2}{\ell^2}\times\right.\\ \left.\times\int_0^t\exp\left[\left(\frac{\pi na}{\ell}\right)^2\tau\right]\cdot\left[U(0,\tau)-(-1)^n\cdot U(\ell,\tau)\right]d\tau\right\},\end{gathered} \qquad (2.97)$$

где C_n определяется из равенства $T_n(0)=C_n$, а $T_n(0)$ вычисляется согласно (2.94): $\quad C_n=T_n(0)=\dfrac{2}{\ell}\displaystyle\int_0^\ell U(x,0)\cdot\mathrm{Sin}\frac{\pi nx}{\ell}\,dx$

Так как по условию $U(x,0)=U_0$, $U(0,t)=U_1$, $U(\ell,t)=U_2$, то (2.97) принимает вид

$$\begin{gathered}T_n(t)=\frac{2}{\pi n}\left[U_1-(-1)^n\cdot U_2\right]\cdot\left\{1-\exp\left[-\left(\frac{\pi na}{\ell}\right)^2\cdot t\right]\right\}+\\ +\exp\left[-\left(\frac{\pi na}{\ell}\right)^2\cdot t\right]\cdot\frac{2}{\ell}\int_0^\ell U_0\cdot\mathrm{Sin}\frac{\pi nx}{\ell}dx=\end{gathered}$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left[U_1 - (-1)^n \cdot U_2\ \right] \cdot \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 \cdot t\right]\right\} -$$

$$- \exp\left[-\left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 \cdot t\right] \cdot \frac{2\,U_0}{\ell} \cdot \frac{\ell}{\pi n} \cdot \mathrm{Cos}\frac{\pi n x}{\ell}\Bigg|_0^{\ell} =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left[U_1 - (-1)^n \cdot U_2\ \right] \cdot \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 \cdot t\right]\right\} -$$

$$- \frac{2\,U_0}{\pi n} \cdot \exp\left[-\left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 \cdot t\right] \cdot \left(\mathrm{Cos}\,\pi n - \mathrm{Cos}\,0\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left[U_1 - (1)^n \cdot U_2\ \right] \cdot \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 \cdot t\right]\right\} -$$

$$- \frac{2\,U_0}{\pi n} \cdot \exp\left[-\left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 \cdot t\right] \cdot \left[(-1)^n - 1\right]. \qquad (2.98)$$

Подставляя (2.98) в ряд (2.93), получаем

$$U(x,t) = \frac{2U_1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi x}{\ell}}{n} + \frac{2U_2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin\frac{n\pi x}{\ell}}{n} +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n U_2 - U_1}{n}\exp\left[-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t\right]\sin\frac{n\pi x}{\ell} +$$

$$+ \frac{2U_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n}\exp\left[-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t\right]\sin\frac{n\pi x}{\ell}.$$

Если воспользоваться известными разложениями

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\xi\,(}{n} = \begin{cases}\dfrac{\pi - \xi}{2} & \text{при} \quad 0 < \xi < 2\pi \\ 0 & \text{при} \quad \xi = 0,\ 2\pi, \ldots\end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{\sin n\xi}{n} = \begin{cases}\dfrac{\xi}{2} & \text{при} \quad -\pi < \xi < \pi \\ 0 & \text{при} \quad \xi = -\pi,\ \pi, \ldots,\end{cases}$$

то можно найти суммы первых двух рядов полученного решения

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\frac{\pi x}{\ell}}{n}=\frac{\pi(\ell-x)}{2\ell} \qquad \text{при} \quad 0<x<2\ell,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin n\frac{\pi x}{\ell}}{n}=\frac{\pi x}{2\ell} \quad \text{при} \quad -\ell<x<\ell.$$

Тогда окончательно имеем

$$U(x,t)=U_1+(U_2-U_1)\frac{x}{\ell}+$$
$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n U_2-U_1+\left[(-1)^n-1\right]U_0}{n}\cdot\exp\left[-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t\right]\sin\frac{n\pi x}{\ell}.$$

<u>Примечание.</u> При решении данной задачи был использован подход к решению общей первой краевой задачи, когда на концах стержня задан произвольный температурный режим $U_1=U_1(0,t)$ и $U_2=U_2(\ell,t)$. Возможен другой подход, который используется при решении уравнения с неоднородными граничными условиями: искомая функция $U(x,t)$ складываются из двух функций

$$U(x,t)=v(x,t)+w(x,t),$$

где $w(x,t)$ удовлетворяет ненулевым граничным условиям данной задачи, а $v(x,t)-$ нулевым граничным условиям. В качестве $w(x,t)$ выбирается какая угодно, но по возможности более простая функция, например, линейная относительно x

$$w(x,t)=\alpha(t)+\frac{\beta(t)-\alpha(t)}{\ell}x.$$

Так, функция $w(x,t)=U_1+(U_2-U_1)\frac{x}{\ell}$ удовлетворяет данным граничным условиям. В самом деле, $w(0,t)=U_1$, $w(\ell,t)=U_2$. Метод разделения переменных Фурье состоит в том, чтобы определить функцию $v(x,t)$, которая удовлетворяет основному уравнению, нулевым граничным условиям и совместно с функцией $w(x,t)$ начальному условию. Метод Фурье не определяет функцию $w(x,t)$, она подбирается.

Покажем такой подход при решении следующей задачи.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.48. В конечном стержне $0 \le X \le 1$ с теплоизолированной поверхностью действуют источники тепла по закону $f(x,t)=t\cdot(x+1)$. На левом конце стержня задан тепловой поток $Q(t)=t^2$, температура правого конца изменяется по закону $\varphi(t)=t^2$. Начальная температура стержня нулевая. Найти закон изменения температуры ($t>0$).

Решение. Имеем смешанную задачу для неоднородного уравнения параболического типа

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=t\,(x+1),\qquad 0\le x\le 1,\quad t>0, \tag{2.99}$$

при начальном условии $U(x,0)=0$ и граничных условиях

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x}=t^2 \quad \text{и} \quad U(1,t)=t^2. \tag{2.100}$$

Решение искомой задачи будем искать в виде

$$U(x,t)=v(x,t)+w(x,t). \tag{2.101}$$

Подберем сначала функцию w, удовлетворяющую граничным условиям (2.100). Пусть, например, $w=x\,t^2$. Очевидно, что эта функция удовлетворяет данным граничным условиям (2.100):

$$\frac{\partial w(0,t)}{\partial x}=t^2,\;\; w(1,t)=t^2$$

и начальному условию $w(x,0)=0$.

Тогда функция

$$v=U-x\,t^2 \tag{2.102}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=t\,(1-x), \tag{2.103}$$

однородным граничным условиям

$$\frac{\partial v(0,t)}{\partial x}=0 \quad \text{и} \quad v(1,t)=0 \tag{2.104}$$

и нулевому начальному условию

$$v(x,0)=0. \tag{2.105}$$

Тем самым, решение исходной задачи свелось к решению неоднородного уравнения с однородными условиями

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(1-x)t,$$

$$v(x,0)=0, \quad \frac{\partial v(0,t)}{\partial x}=0, \quad v(1,t)=0.$$

Применяя метод разделения переменных для решения однородного уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0$$

при условиях (2.104), (2.105), положим $v=X(x)\cdot T(t)$. Решая задачу Штурма - Лиувилля

$$X''(x)+\lambda^2 X(x)=0, \quad X'(0)=0, \quad X(1)=0,$$

находим ее собственные значения

$$\lambda_n=\frac{\pi}{2}+\pi n \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

и соответствующие собственные функции

$$X_n(x)=\mathrm{Cos}(\lambda_n x). \tag{2.106}$$

Решение задачи (2.103) - (2.105) ищем в виде

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cdot \mathrm{Cos}(\lambda_n x) \tag{2.107}$$

Подставляя $v(x,t)$ из (2.107) в уравнение (2.103) получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[T_n'(t)+\lambda_n^2\, T_n(t)\right]\cdot \mathrm{Cos}(\lambda_n x)=(1-x)\cdot t. \tag{2.108}$$

Разложим функцию $1-x$ в ряд Фурье по системе функций (2.106) на интервале (0,1):

$$1 - x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \mathrm{Cos}(\lambda_n x).$$

Так как

$$a_n = \int_0^1 (1 - x) \cdot \mathrm{Cos}(\lambda_n x)\, dx = \frac{2}{\lambda_n^2}, \qquad (2.109)$$

то из (2.108) и (2.109) находим

$$T_n'(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = \frac{2t}{\lambda_n^2}. \qquad (2.110)$$

Решением уравнения (2.110) при условии $T_n(0) = 0$ является функция

$$T_n(t) = 2\lambda_n^{-6} \cdot [\exp\left(-\lambda_n^2 t\right) + \lambda_n^2 t - 1]. \qquad (2.111)$$

Из (2.102), (2.107) и (2.111) находим искомое решение задачи (2.99) - (2.100),

$$U(x,t) = x t^2 + 2\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-6} \cdot [\exp\left(-\lambda_n^2 t\right) + \lambda_n^2 t - 1] \cdot \mathrm{Cos}(\lambda_n x),$$

где $\lambda_n = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

УЧЕБНО - МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

РАЗДЕЛ 9 «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

3. Материалы для самостоятельной работы студентов

3.1 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные и приводящиеся к однородным.
3. Линейные уравнения первого порядка, уравнение Бернулли.
4. Уравнения в полных дифференциалах.
5. Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка методом изоклин.
6. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Общее и частное решения. Общий и частный интегралы.
7. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.
8. Линейный дифференциальный оператор, его свойства. Линейное однородное дифференциальное уравнение, свойства его решений.
9. Линейное однородное дифференциальное уравнение. Фундаментальная система решений. Структура общего решения.
10. Линейно-зависимые и линейно-независимые системы функций. Необходимое условие линейной зависимости системы функций.
11. Условие линейной независимости решений линейного однородного дифференциального уравнения.
12. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Структура общего решения.
13. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.
14. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (случай простых корней характеристического уравнения).
15. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (случай кратных корней характеристического уравнения).
16. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод подбора.
17. Система дифференциальных уравнений. Методы их решения. Характеристическое уравнение. Задача коши для системы дифференциальных уравнений.

18. Дифференциальное уравнение в частных производных. Общее решение.
19. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных (однородные и неоднородные).
20. Классификация линейных уравнений и приведение их к каноническому виду.
21. Уравнение гиперболического типа. Постановка краевых задач.
22. Метод Даламбера.
23. Метод Фурье.
24. Уравнение параболического типа. Постановка краевых задач.

3.2 ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

3.2.1. Решите уравнения

1). $x\cdot\sqrt{1+y^2}dx+y\left(4+x^2\right)dy=0$	Отв. $\sqrt{1+y^2}+\ln\left(4+x^2\right)=C$
2). $\dfrac{e^{-y^2}}{x^2-4}dy+\dfrac{x}{y}dx=0$	Отв. $e^{y^2}=\dfrac{1}{2}\left(x^2-4\right)^2+C$
3). $y'=tgx\cdot tgy$	Отв. $\sin y\cdot\cos x=C$
4). $y'=-\dfrac{2x}{y}\cdot\sec y$	Отв. $x^2+y\cdot\sin y+\cos y=C$
5). $5e^x tgydx+\left(1-e^x\right)\sec^2 ydy=0$	Отв. $y=arctgC\left(1-e^x\right)^5$

3.2.2. Найти частные решения уравнений

1). $y'\sin x=y\ln y \qquad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e$	Отв. $y=e^{tg\frac{x}{2}}$
2). $\dfrac{yy'}{x}+e^y=0 \qquad y(1)=0$	Отв. $2e^{-y}(y+1)=x^2+1$
3). $3e^x\cdot tgydx+\left(1+e^x\right)\sec^2 ydy=0$ $\quad y(0)=\dfrac{\pi}{4}$	Отв. $\left(1+e^x\right)^3\cdot tgy=8$
4). $\left(1+e^{2x}\right)y^2dy=e^xdx \qquad y(0)=0$	Отв. $\dfrac{1}{3}y^3+\dfrac{\pi}{4}=arctge^x$
5). $S=S'\cos^2 t\cdot\ln S$	Отв. $\ln^2 S-2tgt=0$

3.2.3. Кривая проходит через точку $\left(2;\dfrac{1}{2}\right)$. В произвольной точке этой кривой проведена касательная. Точка пересечения касательной с осью OX имеет абсциссу вдвое большую, чем абсцисса точки касания. Найти кривую.

Ответ: $y=\dfrac{1}{x}$

3.2.4. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $M(0;3)$, если угловой коэффициент касательной в любой точке кривой равен произведению координат точки касания.

Ответ: $y = 3e^{\frac{x^2}{2}}$.

3.2.5. Найти время, в течение которого вся вода вытекает из конической воронки, если известно, что половина воды вытекает в 2 мин.

Ответ: $\approx 4{,}6$ мин.

3.2.6. В комнате, где температура 20^0 С, некоторое тело остыло за 20 мин от 100^0 до 60^0 С. Найти закон охлаждения тела; через сколько минут оно остынет до 30^0 С? Повышением температуры в комнате пренебречь.

Ответ: $t = 60$ мин.

3.2.7. Решить уравнения

1). $xy' - y = \dfrac{x}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$	Отв.: $\frac{y}{x} \cdot \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln C\sqrt{x^2 + y^2}$
2). $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$	Отв.: $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln C\sqrt{x^2 + y^2}$
3). $\left(x^2 + y^2\right)dx - xy\,dy = 0$	Отв.: $y^2 = x^2 \ln Cx^2$
4). $xy' - y + xe^{\frac{y}{x}} = 0$	Отв.: $y = -x \ln\ln\lvert Cx\rvert$, $C \neq 0$
5). $3y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 9\dfrac{y}{x} + 9$	Отв.: $y = x - \dfrac{3x}{C + \ln\lvert x\rvert}$

3.2.8. Найти частные решения дифференциальных уравнений

1). $\left(xy' - y\right)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = x;\quad y\rvert_{x=1} = 0$	Отв.: $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$
2). $\left(y^2 - 3x^2\right)dy + 2xy\,dx = 0;\ y(0) = 1$	Отв.: $y^3 = y^2 - x^2$
3). $y' = \dfrac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2};\ y\rvert_{x=1} = -1$	Отв.: $y = -x$
4). $2x^2y' = x^2 + y^2;\ y(1) = 0$	Отв.: $y = x - \dfrac{x}{1 + \ln\sqrt{\lvert x\rvert}}$
5). $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2};\ y(1) = 0$	Отв.: $y = \frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right)$

3.2.9. Найти линию, у которой квадрат длины отрезка, отсекаемого любой касательной от оси ординат, равен произведению координат точки касания.

Ответ: $x = Ce^{\pm 2\sqrt{\frac{y}{x}}}$.

3.2.10. Найти линию, у которой начальная ордината любой касательной равна соответствующей поднормали.

Ответ: $x = y\ln|Cy|$.

3.2.11. Решить уравнения

1). $(x-2y+3)dy+(2x+y-1)dx=0$	Отв.: $x^2+xy-y^2-x+3y=C$
2). $(x+y+2)dx+(2x+2y-1)dy=0$	Отв.: $C=x+2y+5\cdot\ln|x+y-3|$
3). $y'=\dfrac{2y-x-5}{2x-y+4}$	Отв.: $(x+y-1)^3=C(x-y+3)$
4). $y'=\dfrac{2x-y+1}{x-2y+1}$	Отв.: $x^2-xy+y^2+x-y=C$
5). Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y'=\dfrac{x+y-2}{y-x-4}$, проходящую через точку $M(1;1)$	Отв.: $x^2-y^2+2xy-4x+8y-6=0$.

3.2.12. Решить уравнения

1). $y'+2y=x^2+2x$	Отв. $y=\dfrac{1}{2}\left(x^2+x-\dfrac{1}{2}\right)+Ce^{-2x}$
2). $y'=\dfrac{1}{x\sin y+2\sin 2y}$;	Отв. $x=8\sin^2\dfrac{y}{2}+Ce^{-\cos y}$
3). $xy'-y=x^2\cos x$;	Отв. $y=x(\sin x+C)$
4). $y'+2xy=xe^{-x^2}$;	Отв. $y=e^{-x^2}\left(\dfrac{1}{2}x^2+C\right)$
5). $(1+x^2)\cdot y'+y=\operatorname{arctg} x$;	Отв. $y=\operatorname{arctg} x-1+Ce^{-\operatorname{arctg} x}$

Найти частное решение уравнений

6). $y'\sqrt{1-x^2}+y=\arcsin x$;	Отв. $y=e^{-\arcsin x}+\arcsin x-1$
7). $y'-\dfrac{y}{x\ln x}=x\ln x$;	Отв. $y=\dfrac{1}{2}x^2\ln x$

8). $y'\sin x - y\cos x = 1$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$	Отв. $y = -\cos x$
9). $y' + y\,\mathrm{tg}x = \frac{1}{\cos x}$ $y(\pi) = 1$	Отв. $y = \sin x - \cos x$

3.2.13. Найти линию, у которой начальная ордината любой касательной на две единицы масштаба меньше абсциссы точки касания.

Отв. $y = -2 + x\ln|x| + Cx$

3.2.14. Найти линию, у которой площадь треугольника, построенного на абсциссе любой точки и начальной ординате касательной в этой точке, есть величина постоянная, равная a^2.

Отв. $y = Cx \pm \frac{a^2}{2x}$

3.2.15. Точка массой равной m движется прямолинейно, на нее действует сила, пропорциональная времени (k_1), прошедшему от момента, когда скорость равнялась нулю. Кроме того, на точку действует сила сопротивления среды, пропорциональная скорости (k). Найти зависимость скорости от времени.

Отв. $v = \frac{k}{k_1}\left(t - \frac{m}{k}\right) + \frac{m}{k_1}e^{-\frac{k}{m}t}$

3.2.16. Найти общее решение уравнений

1). $y' + \frac{2y}{x} = 3x^2y^{4/3}$;	Отв. $y^{-1/3} = Cx^{2/3} - \frac{3}{7}x^3$.
2). $y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}$;	Отв. $y = \frac{x-1}{C-x}$.
3). $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$;	Отв. $y^{1/2} - \mathrm{tg}\,x = \frac{\ln\cos x + C}{x}$.
4). $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^3$;	Отв. $y^{-4} = x^3\left(e^x + C\right)$.
5). $xy' + y = xy^2\ln x$;	Отв. $y = -\frac{2}{x(C+\ln^2 x)}$

3.2.17. Найти частные решения уравнений

1). $y' + y = e^{x/2}\sqrt{y}$; $y(0) = 1$	Отв. $y = e^{-x}\left(\frac{e^x}{2} + 1\right)^2$.
2). $y' + \frac{3x^2 y}{x^3 + 1} = y^2 (x^3 + 1)\sin x$; $y(0) = -1$	Отв. $y = \frac{\sec x}{x^3 + 1}$.

3.2.18. Найти общий интеграл.

1). $(x + \sin y)dx + (x\cos y + \sin y)dy = 0$;

Отв. $\frac{1}{2}x^2 + x\sin y - \cos y = C$

2). $(3x^2 y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy = 0$;

Отв. $x^3 y - \cos x - \sin y = C$

3). $(e^{x+y} + 3x^2)dx + (e^{x+y} + 4y^3)dy = 0$ начальное условие: $y(0) = 0$

Отв. $e^{x+y} + x^3 + y^4 = 1$

4). $\left(2xye^{x^2} + \ln y\right)dx + \left(e^{x^2} + \frac{x}{y}\right)dy = 0$, начальное условие: $y(0) = 1$

Отв. $ye^{x^2} + x\ln y = 1$

5). $y\,dx - x\,dy + \ln x\,dx = 0.$ $(\mu = \varphi(x))$

Отв. $y = Cx - \ln x - 1$

6). $(x^2 \cos x - y)dx + x\,dy = 0,$ $(\mu = \varphi(x))$

Отв. $y = x(C - \sin x)$

7). $(x^2 + y)dx - x\,dy = 0$

Отв. $x - \frac{y}{x} = C$

3.2.19. Решить уравнения

1). $y''' \sin^4 x = \sin 2x$;	Отв. $y = \ln\lvert\sin x\rvert + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$
2). $y'' = 2\sin x - \cos^2 x - \sin^3 x$;	Отв. $y = \frac{1}{3}\sin^3 x + C_1 x + C_2$

3). $y'' = x + \sin x$;	Отв. $y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2$
4). $y'' = \ln x$;	Отв. $y = \frac{x^2}{2}\left[\ln x - \frac{2}{3}\right] + C_1 x + C_2$
5). $(1 - x^2)y'' - x y' = 2$;	Отв. $y = \arcsin^2 x + C_1 \arcsin x + C_2$
6). $(1 + x^2)y'' + 1 + y'^2 = 0$;	Отв. $y = (1 + a^{-2})\ln(1 + C_1 x) - \frac{1}{C_1} x + C_2$
7). $y''(2y + 3) = 2y'^2$;	Отв. $\frac{1}{2}\ln(2y + 3) = C_1 x + C_2$
8). $y y'' - y'^2 = y^2 \ln y$;	Отв. $\ln y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$
9). $3y'^2 = 4y y'' + y^2$;	Отв. $y = C_2 \cos^4\left(C_1 - \frac{x}{4}\right)$

3.2.20. Найти частные решения

1). $y''' = x e^{-x}$ $y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 2$	Отв. $y = -(x + 3)e^{-x} + \frac{3}{2}x^2 + 3$
2). $y^{\prime V} = \cos^2 x$ $y(0) = \frac{1}{32}$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = \frac{1}{8}$, $y'''(0) = 0$;	Отв. $\frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{32}\cos 2x$
3). $y''(x^2 + 1) = 2xy'$ $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;	Отв. $y = x^3 + 3x + 1$
4). $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$ $y(0) = 0$, $y'(2) = 4$;	Отв. $y = \frac{2}{5}x^2\sqrt{2x} - \frac{16}{5}$
5). $y y'' - y'^2 = 0$ $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;	Отв. $y = e^{2x}$
6). $y^3 y'' = -1$ $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$;	Отв. $y = \sqrt{2x - x^2}$

3.2.21. Найти линию, для которой проекция радиуса кривизны на ось $0Y$ есть величина постоянная, равная a.

Отв. $e^{\frac{y}{a}} = C_2 \sec\left(\frac{x}{a} + C_1\right)$

3.2.22. Тело, находившееся в начальный момент в жидкости, погружается в нее под действием собственного веса без начальной скорости. Сопротивление жидкости прямо пропорционально скорости тела. Найти закон движения тела, если его масса m.

Отв. $S = \frac{m^2 g}{k^2}\left(e^{\frac{kt}{m}} - 1\right) + \frac{mgt}{k}$

3.2.23. Найти закон прямолинейного движения материальной точки массы m, если известно, что работа силы, действующей в направлении движения и зависящей от пути, пропорциональна времени, протекшему с момента начала движения. Коэффициент пропорциональности равен k.

Отв. $S = \frac{m}{3k}\left(\sqrt{\left(\frac{2k}{m}t + C\right)^3} - \sqrt{C^3}\right)$

3.2.24. Понизить порядок и проинтегрировать уравнение $y'' \sin^2 x = 2y$, имеющее частное решение $y = \operatorname{ctg} x$.

Отв. $y = C_2 + (C_1 - C_2 x)\operatorname{ctg} x$

3.2.25. Уравнение $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0$ имеет частное решение $y = x$. Понизить порядок и проинтегрировать это уравнение.

Отв. $y = \frac{1}{2} x \ln^2 x + C_1 x \ln x + C_2 x$

3.2.26. Уравнение $y'' + (\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x)y' + 2y \cdot \operatorname{ctg}^2 x = 0$ имеет частное решение $y = \sin x$. Понизить порядок и проинтегрировать это уравнение.

Отв. $y = C_1 \sin x + C_2 \sin^2 x$

3.2.27. Подобрав одно частное решение уравнения, найти обще решение $y'' - y' \operatorname{tg} x + 2y = 0$.

Отв. $y = C_1 \sin x + C_2\left[1 - \sin \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right)\right]$

3.2.28. Подобрав одно частное решение уравнения, найти общее решение $y'' - y' + \frac{y}{x} = 0$.

Отв. $y = C_1 x + C_2 x \int \frac{e^x \, dx}{x^2}$

3.2.29. Показать, что $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$ является общим решением уравнения $y'' - 9y = 0$.

3.2.30. Уравнению $y'' - y = 0$ удовлетворяют два частных решения $y = \operatorname{sh} x,\ y_2 = \operatorname{ch} x$. Составляют ли они фундаментальную систему?

3.2.31. Можно ли составить общее решение уравнения $y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y = 0 \ (x \neq 0)$ по двум его частным решениям $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sin x,\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \cos x$?

3.2.32. Найти общее решение

1). $y'' - y' - 2y = 0.$	Отв. $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$;
2). $y'' + 16y = 0.$	Отв. $y(x) = C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x$;
3). $y'' - y' = 0.$	Отв. $y(x) = C_1 + C_2 e^x$;
4). $y''' - 2y'' + y = 0.$	Отв. $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} + C_3 e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}$;
5). $y^{(4)} - 16y = 0$	Отв. $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$
6). $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0.$	Отв. $y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3 \sin 2x + C_4 \cos 2x$
7). $y^{(4)} + 20y'' + 25y = 0.$	Отв. $y(x) = C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x + C_3 \cos\sqrt{9}x + C_4 \sin\sqrt{9}x$
8). $y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$	Отв. $y(x) = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_1 + C_2 x)\sin x$
9). $y'' + 10y' + 25y = 0$	Отв. $y = (C_1 x + C_2) e^{-5x}$
10). $y'' + y' + y = 0$	Отв. $y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

3.2.33. Два одинаковых груза подвешены к концу пружины и удлиняют ее относительно ненагруженного состояния на a. Найти закон движения одного груза, если второй сорвется. Отв. $x(t)=a\cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}t\right)$.

3.2.34. Найти общее решение $y''+5y'+6y=\frac{1}{1+e^{2x}}$.

Отв. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}+\frac{e^{-2x}}{2}\left(\ln\left(1+e^{2x}\right)-e^{-2x}+e^{-3x}\operatorname{arctg}\left(e^x\right)\right)$

3.2.35. Найти общее решение $y''+4y=\operatorname{ctg}x$.

Отв. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos x-\ln|\sin x|-\frac{1}{4}\sin^2 x$

3.2.36. Найти общее решение $4y''+y=\frac{4}{\cos\frac{x}{2}}$.

Отв. $y=C_1\cos\frac{x}{2}+C_2\sin\frac{x}{2}+4\cos 2x\cdot\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|$.

3.2.37. Найти общее решение $y''-6y'+9y=2x^2-x+3$.

Отв. $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}x+\frac{11}{27}$.

3.2.38. Найти общее решение $y''-3y+2y=3e^{2x}$.

Отв. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+3xe^{2x}$.

3.2.39. Найти общее решение $2y''+5y'=e^x$

Отв. $y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+\frac{1}{7}e^x$.

3.2.40. Найти общее решение $y''+\frac{2}{x}y'+y=\frac{\operatorname{ctg}x}{x}$.

Отв. $y=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}+\frac{\sin x}{x}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

3.2.41. Найти решение уравнения $y''+y=\operatorname{tg}x$, удовлетворяющее краевым условиям $y(0)=y\left(\frac{\pi}{0}\right)=0$.

Отв. $y=\frac{\sqrt{3}}{2}\ln 3\sin x-\cos x\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

3.2.42. Найти частное решение уравнения $y'' + y + \sin 2x = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(\pi) = y'(\pi) = 1$.

Отв. $y = \frac{1}{3}\sin 2x - \frac{1}{3}\sin x - \cos x$.

3.2.43. Найти общее решение уравнения

1). $y''+4y = 5e^{x}$.	Отв. $y = e^{x} + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$
2). $x''-2x = te^{-t}$.	Отв. $x = (2-t)e^{-t} + C_1 e^{-\sqrt{2}t} + C_2 e^{t\sqrt{2}}$.
3). $y''+y'-2y = 4x^{2}$.	Отв. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} - 2x^2 - 2x - 3$.
4). $y''-2y'+y = xe^{x}$.	Отв. $y = e^{x}(C_1 + C_2 x + x^3/6)$.
5). $y''-2y'+5y = 5e^{x}\sin 2x$.	Отв. $y = e^{x}\big(C_1\sin 2x + C_2\cos 2x -$ $- xe^{x}(\sin 2x + 2\cos 2x)\big)$

3.2.44. Решить задачу Коши:

1). $\begin{cases} x'''+x'' = e^{-t}, \\ x''(0) = -2, x'(0) = 0, x(0) = 1. \end{cases}$	Отв. $x(t) = 1 - t + te^{t}$.
2). $\begin{cases} 4y'''+y' = 2\sin\frac{x}{2}, \\ y''(0) = -\frac{5}{4}, y'(0) = 0, y(0) = 5. \end{cases}$	Отв. $y(x) = 4 + \cos\frac{x}{2} - x\sin\frac{x}{2}$.
3). $\begin{cases} y'' - y = 2\,\mathrm{sh}x \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$	Отв. $y = x\,\mathrm{ch}x$

3.2.45. Определить закон движения материальной точки массы m, перемещающейся по прямой под влиянием восстанавливающей силы, направленной к началу отсчета перемещений и прямо пропорциональной расстоянию точки от начала отсчета, если сопротивление среды отсутствует, а на точку действует внешняя сила $F = A\sin\omega t$.

Отв. $x = C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t + \left(\frac{A}{a - m\omega^2}\right)\cdot\sin\omega t$, если $\omega \neq \beta = \sqrt{\frac{a}{m}}$

3.2.46. Найти общее решение системы уравнений: $\begin{cases} x' = 4y - 2x, \\ y' = 3y - x. \end{cases}$

Отв. $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}, y = \frac{1}{4}C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$.

3.2.47. Найти решение задачи Коши: $\begin{cases} x' = -3x - y, \\ y' = x - y. \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = -1.$

Отв. $x = e^{-2t}, y = -e^{-2t}$.

3.2.48. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x' - x - 7y + 5 = 0, \\ 2y' + x + y - z = 0, \\ 3z' - x + 2y - z = 0. \end{cases}$$

Отв. $x = C_1 + C_2\cos(t) + C_3\sin(t), y = 2C_1 + \dfrac{C_3 - C_2}{2}\cos(t) - \dfrac{C_3 + C_2}{2}\sin(t),$

$z = 3C_1 - \dfrac{C_2 + C_3}{2}\cos(t) + \dfrac{C_2 - C_3}{2}\sin(t).$

3.2.49. Найти общее решение системы уравнений $\begin{cases} y' = -2y - 3z \\ z' = -y \end{cases}.$

Отв. $y = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{t},\quad y = \dfrac{1}{3}C_1 e^{-3t} - C_2 e^{t}.$

3.2.50. Найти общее решение системы уравнений $\begin{cases} u' = 2y + 4v, \\ v' = -u - 2v. \end{cases}$

Отв. $u = C_1(1 + 2x) - 2C_2,\quad y = -C_1 x + C_2.$

3.2.51. Выяснить, являются ли приведенные ниже равенства дифференциальными уравнениями в частных производных:

а) $\mathrm{Ln}\left|U_x \cdot U_y\right| - \mathrm{Ln}\left|U_x\right| + 5U - 6 = 0;$

б) $\sin^2(U_{xx} + U_{xy}) + \cos^2(U_{xx} + U_{xy}) - U = 1;$

в) $U_{xy} + U_y + U - xy = 0.$

Ответы: а) нет; б) нет; в) да.

3.2.52. Определить порядок уравнений:

а) $2\left(U_x - 2U\right)\cdot U_{xy} - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(U_x - 2U\right)^2 - xy = 0;$

б) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(U_{yy}^2 - U_y\right) - 2U_{yy} \cdot \dfrac{\partial}{\partial y}\left(U_{xy} - U_x\right)^2 - 2U_x + 2 = 0.$

Ответы: а) первый; б) второй.

3.2.53. Выяснить, какие из следующих уравнений являются линейными (однородными или неоднородными) и какие нелинейными:

а) $U_{xx}\, U_{xy} - 3U_{yy} - 6x\,U_y - xy \cdot U = 0$;

б) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(y\,U_y + U_y^2\right) - 2\,U_x\,U_{xy} + U_x - 6\,U = 0$.

Ответы: а) нелинейное уравнение; б) линейное однородное.

3.2.54. Решить уравнения:

а) $\dfrac{\partial U}{\partial y} = x$; б) $\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2y$; в) $\dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = 1$.

Ответы: а) $U(x, y) = \dfrac{x^2}{2} + \varphi(y^2)$; б) $U(x, y) = \dfrac{y^3}{3} + y \cdot \varphi(x) + \psi(x)$;

в) $U(x, y) = \int \varphi(y)\,dy + \psi(x) + xy$, где φ и ψ – произвольные функции.

3.2.55. Проверить, что функция

а) $U(x, y) = x\,\varphi(x + y) + y\,\psi(x + y)$, где φ и ψ – произвольные дважды дифференцируемые функции, является общим решением уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0;$$

б) $U(x, y) = \varphi(x + ay) + \psi(x - ay)$ является общим решением уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0;$$

в) $U(x, y) = \varphi\left(\sqrt{2x} - t\right) + \psi\left(\sqrt{2x} + t\right)$ – общее решение уравнения

$$2x\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

В задачах 3.2.56 – 3.2.58 определить тип уравнений и привести их к каноническому виду

3.2.56. $x^2\,U_{xx} - y\,U_{yy} = 0$.

Ответ: $U_{\eta\eta} = 0$; $\xi = \dfrac{y}{x}$, $\eta = y$.

3.2.57. $U_{xx}+2U_{xy}-3U_{yy}+2U_x+6U_y=0$.

Ответ: $U_{\xi\eta}+\frac{1}{2}U_{\xi}=0;\ \xi=x+y,\ \eta=3x-y$.

3.2.58. $U_{xx}-2U_{xy}+2U_{yy}=0$.

Ответ: $U_{\eta\eta}+U_{\xi\xi}=0;\ \xi=x+y;\ \eta=x$.

3.2.59. Упругий прямолинейный стержень длины ℓ выведен из состояния покоя тем, что его поперечным сечениям в момент времени $t=0$ сообщены малые продольные смещения и скорости. Предполагая, что поперечные сечения стержня все время остаются плоскими, поставить задачу для определения продольных колебаний сечений стержня при $t>0$. Рассмотреть случаи:

а) концы стержня закреплены жестко;

б) концы движутся в продольном направлении по заданному закону;

в) к концам приложены заданные силы;

г) концы свободны;

д) концы закреплены упруго, т.е. каждый из концов испытывает со стороны заделки действия продольной силы, пропорциональной смещению и направленной противоположно смещению. Сделать математическую подстановку задачи.

Ответы:

а) $U_{tt}(x,t)=a^2U_{xx}(x,t),\ 0<x<\ell,\ t>0$

$a^2=E/\rho$, E - модуль упругости, ρ - плотность стержня

$U(x,0)=\varphi(x),\ U_t(x,0)=\psi(x),\ 0<x<\ell$

$U(0,t)=U(\ell,t)=0,\ t>0;$

б) $U_{tt}(x,t)=a^2U_{xx}(x,t)$.

$U(x,0)=\varphi(x),\ U_t(x,0)=\psi(x),\ 0<x<\ell$

$U(0,t)=\mu_1(t),\ U(\ell,t)=\mu_2(t),\ t>0;$

где $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ - заданные функции;

в) $U_{tt}(x,t)=a^2U_{xx}(x,t)$.

$U(x,0)=\varphi(x),\ U_t(x,0)=\psi(x),\ 0<x<\ell$

$$U_x(0,t) = -\frac{F_1(t)}{E\cdot S},\ \ U_x(\ell,t) = \frac{F_2(t)}{E\cdot S},\ \ t>0;$$

где $F_1(t)$ и $F_2(t)$ - внешние силы, приложенные к концам стержня, S - площадь поперечного сечения.

г) $U_{tt} = a^2 U_{xx}$.

$$U(x,0) = \varphi(x),\ \ U_t(x,0) = \psi(x),\ \ 0 \le x \le \ell$$

$$U_x(0,t) = 0,\ \ U_x(\ell,t) = 0,\ \ t>0;$$

д) $U_{tt} = a^2 U_{xx}$.

$$U(x,0) = \varphi(x),\ \ U_t(x,0) = \psi(x),\ \ 0 \le x \le \ell$$

$$U_x(0,t) - h\cdot U(0,t) = 0,$$

$$U_x(\ell,t) + h\cdot U(\ell,t) = 0,$$

где $h = \frac{K}{E\cdot S}$, K – коэффициент упругости заделки.

3.2.60. Поставить задачу о малых поперечных колебаниях струны длины ℓ с закрепленными концами, которая оттягивается в точке $x = C$ на небольшое расстояние h от положения равновесия и в момент $t = 0$ отпускается без начальной скорости. Сделать математическую подстановку задачи.

Ответ: $U_{tt} = a^2 U_{xx}$

$U(0,t) = U(\ell,t) = 0$, $\quad U_t(x,0) = 0$

$$U(x,0) = \begin{cases} \frac{h}{c}x, & 0 \le x \le c \\ h\frac{x-\ell}{c-\ell}, & c \le x \le \ell. \end{cases}$$

3.2.61. Однородная струна длины ℓ, закрепленная на обоих концах, находится в прямолинейном положении равновесия. В момент $t = 0$ она получает удар от плоского молоточка, имеющего постоянную скорость V_0. Поставить задачу для определения отклонения $U(x,t)$ струны при $t > 0$, если ширина молоточка равна $\frac{\pi}{h}$, а его центр ударяет в точке $x = c$. Сделать математическую подстановку задачи.

Ответ: $U_{tt} = a^2 U_{xx}, \quad U(0,t) = U(\ell,t) = 0, \quad U(x,0) = 0,$

$$U_t(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < c - \pi/2h \\ V_0, & c - \pi/2h < x < c + \pi/2h \\ 0, & c + \pi/2h < x \le \ell. \end{cases}$$

Используя формулу Даламбера, найти решение $U(x,t)$ следующих задач Коши ($-\infty < x < \infty$, $t > 0$), в задачах 3.2.61 – 3.2.64.

3.2.62. Неограниченная струна возбуждена локальным начальным отклонением, изображенным на рис. 3.1. Построить профиль струны в моме1

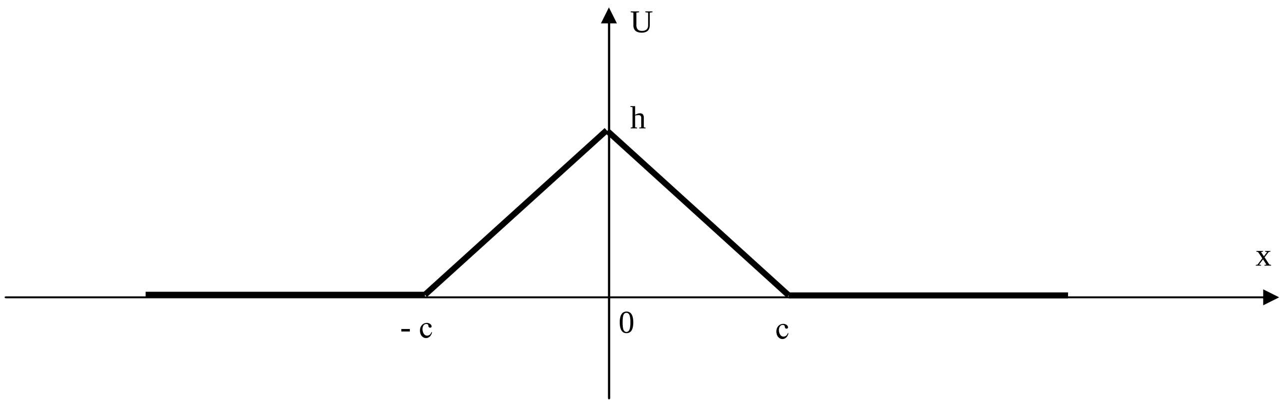


Рис. 3.1.

Ответ: $\psi(x) = 0, \quad U(x,t) = \dfrac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2}.$

3.2.63. Найти решение уравнения $U_{xx} = U_{tt}$ при начальных условиях $U(x,0) = \dfrac{x}{1+x^2}, \quad U_t(x,0) = \sin x.$

Ответ: $U(x,t) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x+t}{1+(x+t)^2} + \dfrac{x-t}{1+(x-t)^2}\right] + \sin x \cdot \sin t.$

3.2.64. Найти форму струны, определяемую уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

в момент времени $t=\pi/(2a)$, если

а) $U(x,0)=\sin x, \quad U_t(x,0)=1;$

б) $U(x,0)=\sin x, \quad U_t(x,0)=0;$

в) $U(x,0)=0, \quad U_t(x,0)=1$

Ответ: а) $U=\pi/(2a)$; б) $U=0$; в) $U=\pi/(2a)$.

3.2.65. Полуограниченному упругому стержню $0<x<\infty$ со свободным концом $x=0$ сообщена начальная осевая скорость, равная υ_0 на отрезке $[c,\ 2c]$ и нулю вне этого отрезка.

Величину продольного смещения $U(x,t)$ поперечных сечений стержня можно откладывать для наглядности в направлении, перпендикулярном к оси OX, т.е. поступать так же, как это делается в случае струны. Пользуясь этим приемом изображения, начертить график $U=U(x,t)$ для моментов времени $t=0,\ c/a$.

Ответ: Решение задачи Коши для полубесконечной области может быть найдено с помощью формулы Даламбера при четном продолжении начальных условий.

$$U(x,t)=\psi(x+at)-\psi(x-at),$$

где $$\psi(z)=\frac{1}{2a}\cdot\int_{-2c}^{z}\varphi(\alpha)d\alpha, \quad \varphi(z)=\begin{cases}0, & -\infty<z<-2c\\ \vartheta_0, & -2c<z<-c\\ 0, & -c<z<c\\ \vartheta_0, & c<z<2c\\ 0, & 2c<z<\infty.\end{cases}$$

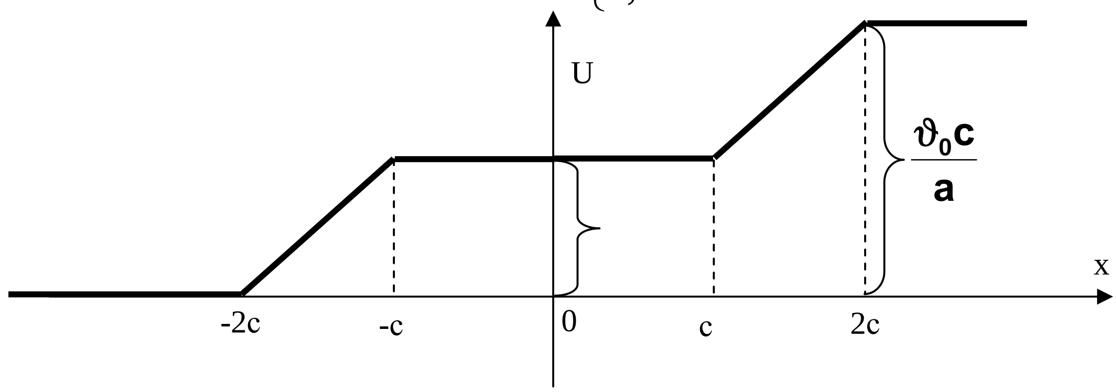


Рис. 3.2.

Профиль отклонений в любой момент времени получается вычитанием графика прямой волны из графика обратной волны. График $V = V(x,t)$

3.2.66. Найти отклонение $U(x,t)$ закрепленной на концах $x = 0$ и $x = \ell$ однородной струны от положения равновесия, если в начальный момент струна имела форму параболы с вершиной в точке $x = \ell/2$ и отклонением от положения равновесия h, начальная скорость равна нулю.

Ответ: $U(x,t) = \dfrac{32h}{\pi^3} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^3} \cdot \operatorname{Sin} \dfrac{2n+1}{\ell} \pi x \cdot \operatorname{Cos} \dfrac{2n+1}{\ell} \pi a t.$

3.2.67. Однородная струна с закрепленными концами $x = 0$ и $x = \ell$ возбуждается ударом жесткого плоского молоточка в точке $x = \ell/3$, сообщающего ей начальное распределение скоростей:

$$\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \begin{cases} \upsilon_0 \text{ (const)} & \text{при} \quad \left| x - \dfrac{\ell}{3} \right| < \dfrac{\pi}{2h}, \\ 0 & \text{при} \quad \left| x - \dfrac{\ell}{3} \right| > \dfrac{\pi}{2h}, \end{cases}$$

где π/h - ширина молоточка.

Найти закон свободных колебаний, если начальные отклонения равны нулю.

Ответ:

$$U(x,t) = \frac{4\upsilon_0 \ell}{\pi^2 a} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \operatorname{Sin} \frac{k\pi}{3} \cdot \operatorname{Sin} \frac{k\pi^2}{2\ell h} \cdot \operatorname{Sin} \frac{k\pi a t}{\ell} \cdot \operatorname{Sin} \frac{k\pi x}{\ell},$$

3.2.68. Однородная струна, закрепленная на концах $x = 0$ и $x = 1$, в начальный момент имеет форму $U = h \cdot (x^4 - 2x^3 + x)$. Найти форму струны для любого момента времени t, если начальные скорости равны нулю.

Ответ: $U(x,t) = \dfrac{96h}{\pi^5} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\operatorname{Sin}(2n+1) \cdot \pi x \cdot \operatorname{Cos}(2n+1) \cdot \pi a t}{(2n+1)^5}.$

3.2.69. Однородная струна закреплена в точках $x = 0$ и $x = \ell$. Начальные отклонения точек струны равны нулю, а начальная скорость выражается формулой

$$\frac{\partial U(x,0)}{\partial t}=\begin{cases}\operatorname{Cos}\dfrac{\pi(x-\ell/2)}{h} & \text{при} \quad \left|x-\dfrac{\ell}{2}\right|<\dfrac{h}{2}\\ 0 & \text{при} \quad \left|x-\dfrac{\ell}{2}\right|<\dfrac{h}{2}\end{cases}.$$

Найти форму струны для любого момента времени t.

Ответ:

$$U(x,t)=\frac{4h\ell^2}{\pi^2 a}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\cdot\left(\ell^2-k^2h^2\right)}\cdot \operatorname{Sin}\frac{k\pi}{2}\cdot \operatorname{Cos}\frac{k\pi h}{\ell}\cdot \operatorname{Sin}\frac{k\pi x}{\ell}\cdot \operatorname{Sin}\frac{k\pi a t}{\ell}$$

.

3.2.70. Найти продольные колебания однородного стержня, один конец которого ($x=0$) закреплен жестко, а другой ($x=\ell$) свободен, при начальных условиях

$$U(x,0)=kx, \quad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t}=0 \quad \text{при} \quad 0\le x\le \ell.$$

Указание. Найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма - Лиувилля.

Ответ: $U(x,t)=\dfrac{8k\ell}{\pi^2}\cdot\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\cdot \operatorname{Sin}\frac{2n+1}{2\ell}\pi x\cdot \operatorname{Cos}\frac{2n+1}{2\ell}\pi a t$.

3.2.71. Исследовать свободные колебания закрепленной струны, колеблющейся в среде, сопротивление которой пропорционально скорости.

Указание. Если колебания струны или продольные колебания стержня происходят в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, то уравнение колебания имеет вид $U_{tt}+2hU_t=a^2U_{xx}$, где $h<\pi a/\ell$, а граничные условия записываются так же, как и в случае колебаний в среде без сопротивления. Применить метод Фурье к интегрированию этого уравнения.

Ответ: $U(x,t)=e^{-ht}\cdot\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left[a_k \operatorname{Cos}(q_k t)+b_k \operatorname{Sin}(q_k t)\right]\cdot \operatorname{Sin}\frac{k\pi x}{\ell}$,

где $a_k=\dfrac{2}{\ell}\displaystyle\int_0^{\ell}\varphi(x)\cdot \operatorname{Sin}\frac{k\pi}{\ell}x\,dx$,

$$b_k=\frac{h}{q_k}+\frac{2}{\ell q_k}\int_0^{\ell}\varphi(x)\cdot \operatorname{Sin}\frac{k\pi}{\ell}x\,dx, \qquad q_k=\sqrt{\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2-h^2}.$$

3.2.72. Стержень длиной ℓ, конец которого $x = 0$ закреплен, находится в состоянии покоя. В момент времени $t = 0$ к свободному концу приложена сила $F_0 = \text{const}$ (на единицу площади), направленная вдоль стержня. Найти смещение $U(x,t)$ стержня (продольные колебания) в любой момент времени $t > 0$.

Ответ:

$$U(x,t) = \frac{F_0 x}{E} - \frac{8F_0\ell}{E\,\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\cdot \text{Sin}\,\frac{2n+1}{2\ell}\,\pi x\cdot \text{Cos}\,\frac{2n+1}{2\ell}\,\pi a t,$$

где $E -$ модуль упругости.

3.2.73. (Задача о гидравлическом ударе вязкой жидкости). В конце $x = \ell$ трубопровода $0 \le x \le \ell$ массовый расход жидкости $Q = \rho\cdot\omega$ ($\rho -$ плотность жидкости, $\omega -$ скорость ее движения) изменяется в момент времени $t = 0$ скачком на величину $A = \text{const}$; конец $x = 0$ соединен с большим резервуаром, где давление жидкости остается неизменным. Считая, что до изменения расхода в конце $x = \ell$ давление и расход в трубопроводе были постоянными, найти изменение расхода в трубопроводе при $t > 0$ и изменение давления в сечении $x = \ell$ при $t > 0$.

Указание. Для определения давления и расхода воспользоваться дифференциальными уравнениями движения сжимаемой жидкости

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial t} + 2aQ \\ -\dfrac{\partial P}{\partial t} = c^2\,\dfrac{\partial Q}{\partial x}. \end{cases}$$

Найти решение этой системы уравнения, удовлетворяющее
начальным условиям $P(x,0) = 0,\ \ Q(x,0) = 0,\ \ 0 \le x \le \ell$
и граничным условиям $P(0,t) = 0,\ \ Q(\ell,t) = A,\ \ t > 0$
Исключив давление $P(x,t)$ из уравнений, решить краевую задачу относительно расхода $Q(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - 2a\frac{\partial Q}{\partial t},$$

$$Q(x,0)=0,\quad \frac{\partial Q(x,0)}{\partial t}=0,\quad 0\le x\le \ell,$$
$$\frac{\partial Q(0,t)}{\partial x}=0,\quad Q(\ell,t)=A,\quad t>0.$$

Ответ: $$Q(x,t)=A\cdot\rho-\frac{4A\rho}{\pi}\cdot e^{-at}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\mathrm{Cos}\,\xi_n t+\right.$$
$$\left.+\frac{a}{\xi_n}\mathrm{Sin}\,\xi_n t\right]\cdot\mathrm{Sin}\frac{\pi(2n+1)(\ell-x)}{2\ell},$$

где $\xi_n=\sqrt{\left[\frac{\pi c(2n+1)}{2\ell}\right]^2-a^2}$, а давление P в сечении $x=\ell$ равно

$$P(\ell,t)=P(0,t)-\int_0^\ell\left(\frac{\partial Q}{\partial t}+2aQ\right)dx=$$
$$=-\left[2a\rho\,\ell A+\frac{4\rho cA}{\pi}\cdot e^{-at}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{Sin}(\xi_n t-2\varphi_n)}{(2n+1)\,\mathrm{Cos}\,\varphi_n}\right],$$

где $\mathrm{tg}\,\varphi_n=\frac{a}{\xi_n}$.

3.2.74. Поставить задачу о распределении температуры внутри стержня $0\le x\le\ell$, поверхность которого теплоизолирована, если на одном конце $(x=0)$ поддерживается постоянная температура U_0 , а на другой конец $(x=\ell)$ подается извне постоянный тепловой поток q_0. Начальная температура произвольна.

Ответ: $$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\quad 0<x<\ell,\ t>0,$$
$$U(0,t)=U_0,\ U_x(\ell,t)=\frac{q_0}{k\sigma},\ t>0;$$
$$U(x,0)=f(x),\quad 0\le x\le\ell,$$

где $k-$ коэффициент теплопроводности материала стержня; $\sigma-$ площадь поперечного сечения.

3.2.75. Сформулировать задачу, математическая постановка которой имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \ell, \; t > 0$$
$$U(0,t) = U(\ell,t) = 0, \quad t > 0;$$
$$U(x,0) = U_0 = \text{const}, \quad 0 \le x \le \ell.$$

3.2.76. Поставить задачу об отыскании закона изменения температуры стержня $0 \le x \le \ell$ с теплоизолированной поверхностью и теплоизолированными концами, если его начальная температура является произвольной функцией x.

Ответ: $\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \ell, \; t > 0$
$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial U(\ell,t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0;$$
$$U(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le \ell.$$

3.2.77. Уравнение диффузии в неподвижной среде (в предположении, что поверхностями равной плотности в каждый момент времени t являются плоскости, перпендикулярные к оси OX) имеет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = D \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0$$ (D - коэффициент диффузии).

Написать граничные условия, полагая, что диффузия происходит в плоском слое $0 \le x \le \ell$, для следующих случаев:

а) на граничных плоскостях концентрация диффундирующего вещества поддерживается нулевая;

б) граничные плоскости непроницаемы;

в) граничные плоскости полупроницаемы, причем диффузия через эти плоскости происходит по закону, подобному закону Ньютона для конвективного теплообмена.

Ответ: $\frac{\partial U}{\partial t} = D \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0.$

$$U(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le \ell,$$

а) $U(0,t) = U(\ell,t) = 0, \quad t > 0,$

б) $\dfrac{\partial U(0,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial U(\ell,t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0,$

в) $\begin{cases} \left.\dfrac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = \quad h\left[U(0,t) - \varphi_1(t)\right] \\ \left.\dfrac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=\ell} = -h\left[U(\ell,t) - \varphi_2(t)\right] \end{cases}, \quad t > 0.$

где $h = \alpha/D$, α - коэффициент проницаемости на концах.

3.2.78. В грунт забита однородная свая высотой ℓ для надземного трубопровода. Начальная температура сваи $f(x)$. Поставить краевую задачу об определении температуры сваи, если на нижнем конце $x = 0$ поддерживается постоянная температура U_1, равная температуре грунта, а на верхнем конце $x = \ell$ происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с окружающей средой нулевой температуры.

Ответ: $\dfrac{\partial U}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \dfrac{\alpha p}{cqs}, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0.$

$U(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le \ell,$

$U(0,t) = U_1, \quad \left.\left(\dfrac{\partial U}{\partial x} + hU\right)\right|_{x=\ell} = 0, \quad t > 0,$

где $p-$периметр поперечного сечения; $h = \alpha/k$; $\alpha-$коэффициент теплообмена; $k-$ коэффициент теплопроводности материала стержня.

3.2.79. Дан тонкий однородный стержень длиной $\ell = 4$, поверхность которого теплоизолирована. Начальная температура определяется по закону

$$f(x) = \begin{cases} x^2/2, & 0 \le x \le 2 \\ 4 - x, & 2 \le x \le 4. \end{cases}$$

Концы стержня поддерживаются при нулевой температуре. Найти распределение температуры в стержне. (Принять коэффициент температуропроводности a равным **2**).

Ответ: $U(x,t) = \dfrac{8}{\pi^2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}\left[3\mathrm{Sin}\dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{4}{k\pi}\mathrm{Cos}\dfrac{k\pi}{2} - 4\right] \times$

$$\times \exp\left(-\frac{k^2 \pi^2 t}{4}\right) \cdot \mathrm{Sin}\,\frac{k \pi x}{4}.$$

3.2.80. При тех же условиях, что и в задаче 9.4, положить

$$f(x) = \begin{cases} U_0 & 0 \le x \le \ell/2 \\ 0, & \ell/2 \le x \le \ell. \end{cases}$$

Ответ: $$U(x,t) = \frac{U_0}{2} + \frac{2U_0}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \cdot \mathrm{Cos}\left(\frac{2m+1}{\ell} \cdot \pi x\right) \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{(2m+1)^2 a^2 \pi^2 t}{\ell^2}\right].$$

3.2.81. В стержне $0 \le x \le \ell$ с теплоизолированной поверхностью левый конец ($x = 0$) теплоизолирован, а на правом конце ($x = \ell$) поддерживается постоянная температура U_1; начальная температура U_0 постоянна по всей длине стержня. Найти распределение температуры в стержне ($t > 0$).

Ответ: $$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0.$$

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = 0, \quad U(\ell, t) = U_1, \quad U(x,0) = U_0;$$

$$U(x,t) = U_1 + \frac{4(U_0 - U_1)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \mathrm{Cos}\left(\frac{2n+1}{2\ell} \cdot \pi x\right) \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{(2n+1)^2 a^2 \pi^2 t}{4\ell^2}\right].$$

3.2.82. В стержне $0 \le x \le \ell$ с теплоизолированной поверхностью, левый конец которого теплоизолирован, а правый поддерживается при температуре U_1, начальная температура $\varphi(x) = U_0\, x/\ell$. Найти распределение температуры по длине стержня.

Ответ: $$U(x,t) = U_1 + \frac{4(U_0 + U_1)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \mathrm{Cos}\left(\frac{2n+1}{2\ell} \cdot \pi x\right) \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{(2n+1)^2 a^2 \pi^2 t}{4\ell^2}\right] - \frac{8U_0}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \times$$

2.

$$\times \operatorname{Cos}\left(\frac{2n+1}{2\ell}\cdot \pi x\right)\cdot \exp\left[-\frac{(2n+1)^2 a^2 \pi^2 t}{4\ell^2}\right].$$

3.2.83. Найти распределение температуры в стержне $0 \le x \le \ell$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на его конце $x = 0$ поддерживается температура, равная нулю, а на конце $x = \ell$ температура меняется по закону $A t$, $A = \text{const}$, $t > 0$. Начальная температура стержня равна нулю.

Ответ: решением краевой задачи

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0.$$

$$U(0,t) = 0, \quad U(\ell,t) = A t, \quad t > 0;$$

$$U(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \ell$$

является функция:

$$U(x,t) = \frac{A x t}{\ell} + \frac{A x}{6a^2\ell}\cdot\left(x^2 - \ell^2\right) + V(x,t), \; 0 \le x \le \ell, \; t > 0,$$

$$V(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \exp\left[-\left(\frac{na\pi}{\ell}\right)^2 t\right]\cdot \operatorname{Sin}\frac{\pi n}{\ell} x,$$

где $$a_n = \frac{A}{3a^2\ell^2}\cdot\int_0^{\ell} z\left(z^2 - \ell^2\right)\cdot \operatorname{Sin}\frac{\pi n}{\ell} z \, dz.$$

3.2.84. Дан тонкий однородный стержень длины ℓ, с боковой поверхности которого происходит лучеиспускание тепла в окружающую среду, имеющую нулевую температуру; левый конец стрежня поддерживается при постоянной температуре U_1. Определить температуру $U(x,t)$ стержня, если

а) правый конец стержня $x = \ell$ поддерживается при температуре $U_2 = \text{const}$, начальная температура равна $U_0(x)$;

б) на правом конце происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой равна нулю; начальная температура равна нулю.

Указание. Решение задачи с граничными условиями $U(0,t)=\alpha_1(t)$ и $U(\ell,t)=\alpha_2(t)$ можно искать в виде $U=v+w$, где функция w определяется формулой $w=\alpha_1(t)+\frac{x}{\ell}\cdot[\alpha_2(t)-\alpha_1(t)]$.

а) Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-h^2U \qquad 0<x<\ell, \quad t>0. \tag{*}$$

при граничных условиях $U(0,t)=U_1$, $U(\ell,t)=U_2$

и в начальном условии $U(x,0)=U_0(x)$.

Решение этой задачи искать в виде $U(x,t)=v(x)+w(x,t)$, где v- решение уравнения $a^2v''-h^2v=0$, удовлетворяющее заданным граничным условиям, а $w(x,t)$– решение уравнения при нулевых граничных условиях и при начальном условии $w(x,0)=U_0(x)-v(x)$.

б) Граничные условия имеют вид

$$U(0,t)=U_1, \quad \left.\left(\frac{\partial U}{\partial x}+h_1U\right)\right|_{x=\ell}=0,$$

Решение искать в виде $U(x,t)=v(x)+w(x,t)$, где $v(x)$– решение уравнения $a^2v''-h^2v=0$, удовлетворяющее краевым условиям

$$v\big|_{x=0}=U_1, \quad \left.\left(\frac{\partial v}{\partial x}+h_1v\right)\right|_{x=\ell}=0,$$

а $w(x,t)$ - решение уравнения (*) (см. пункт а) при условиях

$$w\big|_{x=0}=0, \quad \left.\left(\frac{\partial w}{\partial x}+h_1w\right)\right|_{x=\ell}=0, \quad w(x,0)=-v(x).$$

Ответ: а) $$U(x,t)=\frac{U_2\cdot \mathrm{Sh}\frac{h}{a}x-U_1\cdot \mathrm{Sh}\frac{h}{a}(x-\ell)}{\mathrm{Sh}\frac{h}{a}\ell}+$$

$$+\frac{2}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\pi n}{\ell}\cdot\frac{(-1)^nU_2-U_1}{\lambda_n^2}+a_n\right]\cdot\exp\left(-a^2\lambda_n^2t\right)\cdot \mathrm{Sin}\frac{\pi n x}{\ell},$$

где $$\lambda_n^2 = \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{h}{a}\right)^2, \qquad a_n = \int_o^{\ell} U_0(x) \cdot \mathrm{Sin}\frac{\pi n\, x}{\ell}\, dx;$$

б) $$U(x,t) = \frac{h \cdot \mathrm{Ch}\frac{h}{a}(\ell - x) + h_1 \cdot a \cdot \mathrm{Sh}\frac{h}{a}(\ell - x)}{h \cdot \mathrm{Ch}\frac{h}{a}\ell + h_1 \cdot a \cdot \mathrm{Sh}\frac{h}{a}\ell} -$$

$$-2U_1 a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n\left(\mu_n^2 + h_1^2\right)}{a\mu_n^2 + h^2} \cdot \frac{\mathrm{Sin}(\mu_n x)}{\ell\left(\mu_n^2 + h_1^2\right) + h_1} \cdot \exp\left[-\left(a^2\mu_n^2 + h^2\right)t\right]$$

где $\mu_n \ (n = 1, 2, \ldots)$ - положительные корни уравнения $\mathrm{tg}(\ell\mu) = -\mu/h_1$.

3.3 РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание №1

Решить дифференциальные уравнения

1.1. $e^{x+3y}\,dy = x\,dx.$

1.2. $y' \cdot \sin x = y \cdot \ln y.$

1.3. $y' = (2x-1) \cdot \operatorname{ctg} y.$

1.4. $\left(1+e^{x}\right) \cdot y \cdot dy - e^{y} \cdot dx = 0;$

1.5. $\sec^2 x \cdot \operatorname{tg} y \cdot dy + \sec^2 y \cdot \operatorname{tg} x \cdot dx = 0.$

1.6. $x \cdot \left(y^2+3\right) \cdot dx - e^{x} \cdot y \cdot dy = 0.$

1.7. $\sin y \cdot \cos x \cdot dy = \sin x \cdot \cos y \cdot dx.$

1.8. $y' = (2y+1) \cdot \operatorname{tg} x.$

1.9. $[\sin(x+y) + \sin(x-y)] \cdot dx + \dfrac{dy}{\cos y} = 0.$

1.10. $\left(1+e^{x}\right) \cdot y \cdot y' = e^{x}.$

1.11. $\sin x \cdot \operatorname{tg} y \cdot dx - \dfrac{dy}{\sin x} = 0.$

1.12. $3 \cdot e^{x} \cdot \sin y \cdot dx + \left(1-e^{x}\right) \cdot \cos y \cdot dy = 0.$

1.13. $y' \cdot \ln y = e^{2x}.$

1.14. $3^{x^2+y} \cdot dy + x \cdot dx = 0.$

1.15. $[\cos(x-2y) + \cos(x+2y)] \cdot y' = \sec x.$

1.16. $y' = e^{x^2} \cdot x \cdot \left(1+y^2\right).$

1.17. $\cos^2 y \cdot \operatorname{ctg} x \cdot dx + \sin^2 x \cdot \operatorname{tg} y \cdot dy = 0.$

1.18. $\sin x \cdot y' = y \cdot \cos x + 2\cos x.$

1.19. $1 + (1+y') \cdot e^{x} = 0.$

1.20. $y' \cdot \operatorname{ctg} x + y = 2.$

1.21. $\dfrac{e^{-x^2}\,dy}{x} + \dfrac{dx}{\cos^2 y} = 0.$

1.22. $e^{x} \cdot \sin y \cdot dx + \operatorname{ctg} y \cdot dy = 0.$

1.23. $\left(1+e^{3y}\right) \cdot x \cdot dx = e^{3y} \cdot dy.$

1.24. $[\sin(2x+y) - \sin(2x-y)] \cdot dx = \dfrac{dy}{\sin y}.$

1.25. $\cos y \cdot dx = 2\sqrt{1+x^2} \cdot dy + \cos y \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot dy.$

1.26. $y' \cdot \sqrt{1-x^2} - \cos^2 y = 0.$

1.27. $e^x \cdot \operatorname{tg} y \cdot dx = \left(1-e^x\right) \cdot \sec^2 y \cdot dy.$

1.28. $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y).$

1.29. $\cos^3 y \cdot y' - \cos(2x+y) = \cos(2x-y).$

1.30. $x \cdot 3^{y^2-x^2} = y \cdot y'.$

Задание №2

Решить дифференциальные уравнения

2.1. $\left(xy + x^3 y\right) y' = 1 + y^2;$

2.2. $\dfrac{y'}{7^{y-x}} = 3;$

2.3. $y - xy' = 2\left(1 + x^2 y'\right);$

2.4. $y - xy' = 1 + x^2 y';$

2.5. $(x+4)dy - x \cdot y \cdot dx = 0;$

2.6. $y' + y + y^2 = 0;$

2.7. $y^2 \ln x\, dx - (y-1)x\, dy = 0;$

2.8. $(x + xy)^2 dy + y\, dx - y^2 dx = 0;$

2.9. $y' + 2y - y^2 = 0;$

2.10. $\left(x^2 + x\right) y\, dx + \left(y^2 + 1\right) dy = 0;$

2.11. $\left(xy^3 + x\right) dx + \left(x^2 y - y\right) dy = 0;$

2.12. $\left(1 + y^2\right) dx - \left(y + yx^2\right) dy = 0;$

2.13. $y' = 2xy + x;$

2.14. $y - xy' = 3\left(1 + x^2 y'\right);$

2.15. $2xyy' = 1 - x^2;$

2.16. $\left(x^2 - 1\right) y' - xy = 0;$

2.17. $\left(y^2 x + y^2\right) dy + x\, dx = 0;$

2.18. $\left(1 + x^3\right) y^3 dx - \left(y^2 - 1\right) x^3 dy = 0;$

2.19. $xy' - y = y^2;$

2.20. $\sqrt{y^2 + 1}\, dx = xy\, dy;$

2.21. $y' - xy^2 = 2xy;$

2.22. $2x^2 yy' + y^2 = 2;$

2.23. $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2};$

2.24. $y'\sqrt{1+y^2} = \dfrac{x^2}{y};$

2.25. $(y+1)y' = \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}} + xy;$

2.26. $\left(1 + x^2\right) y' + y\sqrt{1+x^2} = xy;$

2.27. $xyy' = \dfrac{1+x^2}{1-y^2};$

2.28. $(xy - x)^2 dy + y(1-x) \cdot dx = 0;$

2.29. $\left(x^2 y - y\right)^2 y' = x^2 y - y + x^2 - 1;$

2.30. $\sqrt{1-y^2}\, dx + y\sqrt{1-x^2}\, dy = 0.$

Задание №3

Решить дифференциальные уравнения

3.1. $y - xy' = x \cdot \sec\frac{y}{x};$

3.2. $\left(y^2 - 3x^2\right) \cdot dy + 2xy \cdot dx = 0;$

3.3. $(x + 2y) \cdot dx - x \cdot dy = 0;$

3.4. $(x - y) \cdot dx + (x + y) \cdot dy = 0;$

3.5. $\left(y^2 - 2xy\right) \cdot dx + x^2 \cdot dy = 0;$

3.6. $y^2 + x^2 y' = xyy';$

3.7. $xy' - y = x \cdot \operatorname{tg}\frac{y}{x};$

3.8. $xy' = y - x \cdot e^{y/x};$

3.9. $xy' - y = (x + y) \cdot \ln\frac{x + y}{x};$

3.10. $xy' = y \cdot \ln\frac{y}{x};$

3.11. $\left(y + \sqrt{xy}\right) \cdot dx = x\,dy;$

3.12. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y;$

3.13. $y = x\left(y' - e^{y/x}\right);$

3.14. $y' = \frac{x}{y} - 1;$

3.15. $xy' + x + y = 0;$

3.16. $y\,dx + \left(2\sqrt{xy} - x\right)dy = 0;$

3.17. $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot dx;$

3.18. $(x - y)y\,dx = x^2\,dy;$

3.19. $\left(4x^2 + 3xy + y^2\right)dx = \left(4y^2 + 3xy + x^2\right)dy;$

3.20. $xy + y^2 = \left(2x^2 + xy\right) \cdot y';$

3.21. $\left(x^2 - 2xy\right) \cdot y' = xy - y^2;$

3.22. $\left(2\sqrt{xy} - y\right)dx + x\,dy = 0;$

3.23. $xy' + y \cdot \ln\frac{y}{x} = 0;$

3.24. $\left(x^2 + y^2\right)dx + 2xy\,dy = 0;$

3.25. $\left(y^2 - 2xy\right)dx - x^2\,dy = 0;$

3.26. $(x + 2y)dx + x\,dy = 0;$

3.27. $(2x - y)dx + (x + y)dy = 0;$

3.28. $2x^3 \cdot y' = y \cdot \left(2x^2 - y^2\right);$

3.29. $x^2 \cdot y' = y(x + y);$

3.30. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$

Задание №4

Решить дифференциальные уравнения

4.1. $\left(x^2 + 1\right)y' + 4xy = 3,$ $\qquad y(0) = 0;$

4.2. $y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \sec x,$ $\qquad y(0) = 0;$

4.3. $(1 - x) \cdot (y' + y) = e^{-x},$ $\qquad y(0) = 0;$

4.4. $xy' - 2y = 2x^4,$ $\qquad y(1) = 0;$

4.5. $y' = 2x\left(x^2 + y\right),$ $\qquad y(0) = 0;$

4.6. $y' - y = e^{x}$, $\quad y(0) = 1;$

4.7. $x\,y' + y = -x\,e^{-x^2}$, $\quad y(1) = \dfrac{1}{2e};$

4.8. $x^2 y' + x\,y + 1 = 0$, $\quad y(1) = 0;$

4.9. $y\,x' + x = 4y^3 + 3y^2$, $\quad y(2) = 1;$

4.10. $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$, $\quad y(0) = 1;$

4.11. $(1 - 2xy)y' = y(y-1)$, $\quad y(0) = 2;$

4.12. $x(y' - y) = e^{x}$, $\quad y(1) = 0;$

4.13. $y = x(y' - x\cos x)$, $\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0;$

4.14. $(x\,y' - 1)\cdot \ln x = 2y$, $\quad y(e) = 0;$

4.15. $\left(2e^{y} - x\right)y' = 1$, $\quad y(0) = 0;$

4.16. $\left(x + y^2\right)dy = y\,dx$, $\quad y(0) = 1;$

4.17. $x\,y' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$, $\quad y(1) = 0;$

4.18. $x\,y' - 2y + x^2 = 0$, $\quad y(1) = 0;$

4.19. $\left(\sin^2 y + x\,\mathrm{ctg}\,y\right)y' = 1$, $\quad y(0) = \dfrac{\pi}{2};$

4.20. $(x+1)y' + y = x^3 + x^2$, $\quad y(0) = 0;$

4.21. $x\,y' + y = \sin x$, $\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2}{\pi};$

4.22. $\left(x^2 - 1\right)y' - x\,y = x^3 - x$, $\quad y\left(\sqrt{2}\right) = 1;$

4.23. $\left(1 - x^2\right)y' + x\,y = 1 - x^2$, $\quad y\left(\sqrt{2}\right) = 1;$

4.24. $y'\,\mathrm{ctg}\,x + y = 2\cos^2 x \cdot \mathrm{ctg}\,x$, $\quad y(0) = 2;$

4.25. $x^2\,y' = 2x\,y + 3$, $\quad y(1) = 1;$

4.26. $y' + 2x\,y = x\,e^{-x^2}$, $\quad y(0) = 0;$

4.27. $y' - 3x^2 y - x^2 e^{x^3} = 0$, $\quad y(0) = 0;$

4.28. $x\,y' + y = \ln x + 1$, $\quad y(1) = 0;$

4.29. $\cos y\,dx = (x + 2\cos y)\sin y\,dy$, $\quad y(0) = \dfrac{\pi}{4};$

4.30. $x\,y' + y = \ln x$, $\quad y(1) = 0.$

Задание №5

Решить дифференциальные уравнения

5.1. $y' + y = x y^2;$

5.2. $y\,dx + 2x\,dy = 2y\sqrt{x}\sec^2 y\,dy;$

5.3. $y' + 2y = y^2 e^x;$

5.4. $y' = y^4 \cos x + y \cdot \operatorname{tg} x;$

5.5. $x y\,dy = \left(y^2 + x\right)dx;$

5.6. $x y' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0;$

5.7. $y' x^3 \sin y = x y' - 2y;$

5.8. $\left(2x^2 y \ln y - x\right) \cdot y' = y;$

5.9. $y' - \frac{2x}{y} = \frac{x y}{x^2 - 1};$

5.10. $x y' - 2x^2\sqrt{y} = 4y;$

5.11. $x y^2 y' = x^2 + y^3;$

5.12. $(x+1) \cdot \left(y' + y^2\right) = -y;$

5.13. $y' x + y = -x y^2;$

5.14. $y' - x y = -y^3 e^{-2x^2};$

5.15. $x y' - 2\sqrt{x^3 y} = y;$

5.16. $y' + x y = x^3 y^3;$

5.17. $y' = \frac{x}{y} e^{2x} + y;$

5.18. $y' = x\sqrt{y} + \frac{x y}{x^2 - 1};$

5.19. $x(x-1) \cdot y' + y^3 = x y;$

5.20. $2x^3 y y' + 3x^2 y^2 + 1 = 0;$

5.21. $\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{y} - 2x\right)dy;$

5.22. $y' + \frac{2y}{x} = 2\sqrt{y};$

5.23. $x y' + y = y^2 \ln x;$

5.24. $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y;$

5.25. $y' + 2x y = 2x\, y^3;$

5.26. $y' + y = \frac{x}{y^2};$

5.27. $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0;$

5.28. $x\,dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^2\right) \cdot dy;$

5.29. $y' - y + y^2 \cos x = 0;$

5.30. $y x' + x = -y x^2;$

Задание №6

Решить дифференциальные уравнения

6.1. $\left(2x + 4y^2\right)dx + 8x y\,dy = 0;$

6.2. $\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 0;$

6.3. $x\,dx + y\,dy + \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = 0;$

6.4. $\left(3x^2+4y^2\right)dx+8xy\,dy=0;$

6.5. $\dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2-y^2}}-\dfrac{y\,dy}{\sqrt{x^2-y^2}}=0;$

6.6. $\dfrac{2x\left(1-e^y\right)}{\left(1+x^2\right)^2}dx+\dfrac{e^y}{1+x^2}dy=0;$

6.7. $\dfrac{2x}{y^3}dx-\dfrac{3x^2+y^2}{y^4}dy=0;$

6.8. $\left(1+e^{x/y}\right)dx+e^{x/y}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0;$

6.9. $x\left(2x^2+y^2\right)+y\left(x^2+2y^2\right)y'=0;$

6.10. $\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+4y^3\right)dy=0;$

6.11. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2}\right)dy=0;$

6.12. $\left(3x^2\,\mathrm{tg}\,y+\dfrac{2y^3}{x^3}\right)dx+\left(x^3\sec^2y+4y^3-\dfrac{3y^2}{x^2}\right)dy=0;$

6.13. $\left(3x^2y+y^2\right)dx+\left(x^3+2xy\right)dy=0;$

6.14. $\left(\dfrac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\dfrac{\sin^2x}{y^2}\right)dy=0;$

6.15. $\left(3x^2-2x-y\right)dx+\left(2y-x+3y^2\right)dy=0;$

6.16. $\left(3x^2y+y^3\right)dx+\left(x^3+3xy^2\right)dy=0;$

6.17. $\dfrac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=0;$

6.18. $y\left(x^2+y^2+a^2\right)dy+x\left(x^2+y^2-a^2\right)dx=0;$

6.19. $\left(\sin y+y\sin x+\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\dfrac{1}{y}\right)dy=0;$

6.20. $\dfrac{y+\sin x\cdot\cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}dx+\left(\dfrac{x}{\cos^2(xy)}-\sin y\right)dy=0;$

6.21. $\left(3x^2-y\cos(xy)+y\right)dx+\left(x-x\cos(xy)\right)dy=0;$

6.22. $\left(12x^3 - e^{y/x}\cdot\frac{1}{y}\right)dx + \left(16y + e^{y/x}\cdot\frac{x}{y^2}\right)dy = 0;$

6.23. $\left(\frac{y}{2\sqrt{xy}} + 2xy\cdot\sin\left(x^2y\right) + 4\right)dx + \left(\frac{x}{2\sqrt{xy}} + x^2\cdot\sin\left(x^2y\right)\right)dy = 0;$

6.24. $\left(y\cdot 3^{xy}\ln 3\right)dx + \left(x\cdot 3^{xy}\ln 3 - 3\right)dy = 0;$

6.25. $\left(\frac{1}{x-y} + 3x^2y^7\right)dx + \left(7x^3y^6 - \frac{1}{x-y}\right)dy = 0;$

6.26. $\left(\frac{2y}{x^3} + y\cdot\cos xy\right)dx - \left(\frac{1}{x^2} - x\cdot\cos xy\right)dy = 0;$

6.27. $\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} - 2x\right)dx + \frac{x\,dy}{\sqrt{1-x^2y^2}} = 0;$

6.28. $\left(5x^4y^4 + 28x^6\right)dx + \left(4x^5y^3 - 3y^2\right)dy = 0;$

6.29. $\left(2x\cdot e^{x^2+y^2} + 2\right)dx + \left(2y\cdot e^{x^2+y^2} - 3\right)dy = 0;$

6.30. $\left(3y^2\cos 3x + 7\right)dx + \left(2y\sin 3x - 2y\right)dy = 0.$

Задание №7

Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0; y_0)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке равняется ординате этой точки, увеличенной в k раз.

7.1. $A(0;2)$, $k = 3$.

7.2. $A(0;5)$, $k = 7$.

7.3. $A(-1;3)$, $k = 2$.

7.4. $A(-2;4)$, $k = 6$.

7.5. $A(-2;1)$, $k = 5$.

7.6. $A(3;-2)$, $k = 4$.

Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0; y_0)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке в n раз больше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат.

7.7. $A(2;5)$, $n = 8$.

7.8. $A(3;-1)$, $n = 3/2$.

7.9. $A(2;4)$, $n = 2$.

7.10. $A(-2;-8)$, $n = 3$.

Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0; y_0)$, если известно, что длина отрезка, отсекаемого на оси ординат нормалью, проведенной в любой точке кривой, равна расстоянию от этой точки до начала координат.

7.11. $A(4;0)$. 7.12. $A(16;0)$.
7.13. $A(1;0)$. 7.14. $A(9;0)$.

Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0;y_0)$ и обладающей следующим свойством: длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную к кривой, равна абсциссе точки касания.

7.15. $A(2;4)$. 7.16. $A(-4;2)$. 7.17. $A(1;2)$.
7.18. $A(-2;2)$. 7.19. $A(-2;4)$. 7.20. $A(5;0)$.

Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0;y_0)$ и обладающей следующим свойством: длина отрезка, отсекаемого касательной от оси $0Y$, равна квадрату абсциссы точки касания.

7.21. $A(4;1)$. 7.22. $A(-2;5)$. 7.23. $A(3;-2)$.
7.24. $A(-2;-4)$. 7.25. $A(3;0)$. 7.26. $A(2;8)$.

Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0;y_0)$, если известно, что длина отрезка, отсекаемого касательной к кривой от оси ординат, равна полусумме координат точки касания.

7.27. $A(9;-6)$. 7.28. $A(4;10)$.
7.29. $A(-4;16)$. 7.30. $A(1;-7)$.

Задание №8

Решить дифференциальные уравнения

8.1. $y''' = \sin x,\ y(0)=1,\ y'(0)=0,\ y''(0)=0;$

8.2. $y''' = \dfrac{1}{x},\ y(1)=\dfrac{1}{4},\ y'(1)=0,\ y''(1)=0;$

8.3. $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x},\ y(0)=1,\ y'(0)=\dfrac{3}{5};$

8.4. $y''' = \dfrac{6}{x^3},\ y(1)=0,\ y'(1)=5,\ y''(1)=1;$

8.5. $y'' = 4\cos 2x,\ y(0)=1,\ y'(0)=3;$

8.6. $y'' = \dfrac{1}{1+x^2},\ y(0)=0,\ y'(0)=0;$

8.7. $x y''' = 2,\ y(1)=\dfrac{1}{2},\ y'(1)=y''(1)=0;$

8.8. $y''' = e^{2x},\ y(0)=\dfrac{9}{8},\ y'(0)=\dfrac{1}{4},\ y''(0)=-\dfrac{1}{2};$

8.9. $y''' = \cos x,\ y(0)=1,\ y'(0)=-\dfrac{1}{8},\ y''(0)=0;$

8.10. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ y(0) = 2, \ y'(0) = 3;$

8.11. $y'' = \dfrac{1}{\sin^2 2x}, \ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}, \ y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1;$

8.12. $y'' = x + \sin x, \ y(0) = -3, \ y'(0) = 0;$

8.13. $y'' = \operatorname{arctg} x, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 0;$

8.14. $y'' = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}, \ y(0) = \dfrac{1}{2}, \ y'(0) = 0;$

8.15. $y''' = e^{\frac{x}{2}} + 1, \ y(0) = 8, \ y'(0) = 5, \ y''(0) = 2;$

8.16. $y'' = \dfrac{x}{e^{2x}}, \ y(0) = \dfrac{1}{4}, \ y'(0) = -\dfrac{1}{4};$

8.17. $y'' = \sin^2 3x, \ y(0) = \dfrac{1}{72}, \ y'(0) = 0;$

8.18. $y''' = x \sin x, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ y''(0) = 0;$

8.19. $y''' \sin^4 x = \sin 2x, \ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}, \ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1, \ y''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1;$

8.20. $y'' = \cos x + e^{-x}, \ y(0) = 2, \ y'(0) = 1;$

8.21. $y'' = \sin^3 x, \ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{7}{9}, \ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0;$

8.22. $y''' = \sqrt{x} - \sin 2x, \ y(0) = -\dfrac{1}{8}, \ y'(0) = 0, \ y''(0) = \dfrac{1}{2};$

8.23. $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 (x/2)}, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1;$

8.24. $y'' = 2 \sin x \cdot \cos^2 x, \ y(0) = -\dfrac{5}{9}, \ y'(0) = -\dfrac{2}{3};$

8.25. $y'' = 2 \sin^2 x \cdot \cos x, \ y(0) = \dfrac{1}{9}, \ y'(0) = 1;$

8.26. $y'' = 2 \sin x \cdot \cos^2 x - \sin^3 x, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1;$

8.27. $y'' = 2 \cos x \cdot \sin^2 x - \cos^3 x, \ y(0) = \dfrac{2}{3}, \ y'(0) = 2;$

8.28. $y'' = x - \ln x, \ y(1) = -\dfrac{5}{12}, \ y'(1) = \dfrac{3}{2};$

8.29. $y''=\dfrac{1}{x^2},\ \ y(1)=3,\ \ y'(1)=1;$

8.30. $y'''=\cos 4x,\ \ y(0)=2,\ \ y'(0)=\dfrac{15}{16},\ \ y''(0)=0.$

Задание №9

Решить дифференциальные уравнения

9.1. $\left(1-x^2\right)\cdot y''-x\,y'=2;$

9.2. $2\,x\,y'\cdot y''=(y')^2-1;$

9.3. $x^3\,y''+x^2\,y'=1;$

9.4. $y''+y'\operatorname{tg}x=\sin 2x;$

9.5. $y''x\cdot\ln x=y';$

9.6. $x\,y''-y'=x^2\,e^x;$

9.7. $x\,y''\ln x=2\,y';$

9.8. $x^2\,y''+x\,y'=1;$

9.9. $y''=-\dfrac{x}{y'};$

9.10. $x\,y''=y';$

9.11. $y''=y'+x;$

9.12. $x\,y''=y'+x^2;$

9.13. $x\,y''=y'\cdot\ln\dfrac{y'}{x};$

9.14. $x\,y''+y'=\ln x;$

9.15. $y''\cdot\operatorname{tg}x=y'+1;$

9.16. $y''+2\,x\,(y')^2=0;$

9.17. $2\,x\,y\,y''=(y')^2+1;$

9.18. $y''-\dfrac{y'}{x-1}=x\cdot(x-1);$

9.19. $y''+y'\cdot\operatorname{tg}x=\sec x;$

9.20. $y''-2\,y'\operatorname{ctg}x=\sin^3 x;$

9.21. $y''+4\,y'=2\,x^2;$

9.22. $x\,y''-y'=2\,x^2\,e^x;$

9.23. $x\cdot(y''+1)+y'=0;$

9.24. $y''+4\,y'=\cos 2x;$

9.25. $y''+y'=\sin x;$

9.26. $x^2\,y''=(y')^2;$

9.27. $2\,x\,y\,y''=(y')^2-4;$

9.28. $x\,y''\ln x=4y';$

9.29. $y''\operatorname{ctg}x+y'=2;$

9.30. $y''\left(x^2+1\right)=2\,x\,y'.$

Задание №10

Решить дифференциальные уравнения

10.1. $y''=e^y\cdot y',\ \ \ y(0)=0,\ \ \ y'(0)=1;$

10.2. $(y')^2+2\,y\,y''=0,\ \ \ y(0)=1,\ \ \ y'(0)=1;$

10.3. $y\,y''+(y')^2=0,\ \ \ y(0)=1,\ \ \ y'(0)=1;$

10.4. $y'' + 2y(y')^3 = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \frac{1}{3};$

10.5. $y''\operatorname{tg} y = 2 \cdot (y')^2, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 2;$

10.6. $2yy'' = (y')^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$

10.7. $yy'' - (y')^2 = y^4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$

10.8. $y'' = -\frac{1}{2y^3}, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = \sqrt{2};$

10.9. $y'' = 1 - (y')^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0;$

10.10. $y' = (y'')^2, \quad y(0) = \frac{2}{3}, \quad y'(0) = 1;$

10.11. $2yy'' - (y')^2 + 1 = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1;$

10.12. $y'' = 2 - y, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2;$

10.13. $y'' = -\frac{1}{y^3}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$

10.14. $yy'' - 2(y')^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2;$

10.15. $y'' = (y')^2 + y', \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

10.16. $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

10.17. $y'' \cdot (1 + y) = (y')^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

10.18. $y'' \cdot (2y + 3) - 2 \cdot (y')^2 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

10.19. $4 \cdot y'' = 1 + (y')^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$

10.20. $2 \cdot (y')^2 = y'' \cdot (y - 1), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2;$

10.21. $1 + (y')^2 = y''y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$

10.22. $y'' + y(y')^3 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2;$

10.23. $yy'' + (y')^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2;$

10.24. $yy'' - (y')^2 = y^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$

10.25. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y) \cdot (y')^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$

10.26. $y''(1 + y) = (y')^2 + y', \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2;$

10.27. $y'' = \frac{y'}{\sqrt{y}}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2;$

10.28. $y'' = 1 + (y')^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

10.29. $y\,y'' - 2\,y\,y' \ln y = (y')^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$

10.30. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{y}}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

Задание №11

Решить дифференциальные уравнения

11.1. а) $y'' + 6y = 0,$ б) $y'' - 10y' + 25y = 0,$ в) $y'' + 3y' + 2y = 0;$
11.2. а) $y'' - y' - 2y = 0,$ б) $y'' + 9y = 0,$ в) $y'' + 4y' + 4y = 0;$
11.3. а) $y'' - 4y' = 0,$ б) $y'' - 4y' + 13y = 0,$ в) $y'' - 3y' + 2y = 0;$
11.4. а) $y'' - 5y' + 6y = 0,$ б) $y'' + 3y' + 6y = 0,$ в) $y'' + 2y' + 5y = 0;$
11.5. а) $y'' - 2y' + 10y = 0,$ б) $y'' + y' - 2y = 0,$ в) $y'' - 2y' = 0;$
11.6. а) $y'' - 4y = 0,$ б) $y'' + 2y' + 17y = 0,$ в) $y'' - y' - 12y = 0;$
11.7. а) $y'' + y'' - 6y = 0,$ б) $y'' + 9y' = 0,$ в) $y'' - 4y' + 20y = 0;$
11.8. а) $y'' - 49y = 0,$ б) $y'' - 4y' + 5y = 0,$ в) $y'' + 2y' - 3y = 0;$
11.9. а) $y'' + 7y' = 0,$ б) $y'' - 5y' + 4y = 0,$ в) $y'' + 16y = 0;$
11.10. а) $y'' - 6y' + 8y = 0,$ б) $y'' + 4y' + 5y = 0,$ в) $y'' + 5y' = 0;$
11.11.а) $4y'' - 8y' + 3y = 0,$ б) $y'' - 3y' = 0,$ в) $y'' - 2y' + 10y = 0;$
11.12. а) $y'' + 4y' + 20y = 0,$ б) $y'' - 3y' - 10y = 0,$ в) $y'' - 16y = 0;$
11.13. а) $9y'' + 6y' + y = 0,$ б) $y'' - 4y' - 21y = 0,$ в) $y'' + y' = 0;$
11.14. а) $2y'' + 3y' + y = 0,$ б) $y'' + 4y' + 8y = 0,$ в) $y'' - 6y' + 9y = 0;$
11.15. а) $y'' - 10y + 21y = 0,$ б) $y'' - 2y' + 2y = 0,$ в) $y'' + 4y' = 0;$
11.16. а) $y'' + 5y' = 0,$ б) $y'' + 10y' + 29y = 0,$ в) $y'' - 8y' + 7y = 0;$
11.17. а) $y'' + 25y = 0,$ б) $y'' + 6y' + 9y = 0,$ в) $y'' + 2y' + 2y = 0;$
11.18. а) $y'' - 3y' = 0,$ б) $y'' - 7y' + 6y = 0,$ в) $y'' + 4y' + 13y = 0;$
11.19. а) $y'' - 3y' - 4y = 0,$ б) $y'' + 6y' + 13y = 0,$ в) $y'' + 2y' = 0;$
11.20. а) $y'' + 25y' = 0,$ б) $y'' - 10y' + 16y = 0,$ в) $y'' - 8y' + 16y = 0;$
11.21. а) $y'' - 3y' - 18y = 0,$ б) $y'' - 6y' = 0,$ в) $y'' + 2y' + 5y = 0;$
11.22. а) $y'' - 6y' + 13y = 0,$ б) $y'' - 2y' - 15y = 0,$ в) $y'' - 8y' = 0;$
11.23. а) $y'' + 2y' + y = 0,$ б) $y'' + 6y' + 25y = 0,$ в) $y'' - 4y' = 0;$
11.24. а) $y'' + 10y' = 0,$ б) $y'' - 6y' + 8y = 0,$ в) $4y'' + 4y' + y = 0;$
11.25. а) $y'' + 5y = 0,$ б) $9y'' - 6y' + y = 0,$ в) $y'' + 6y' + 8y = 0;$
11.26. а) $y'' + 6y'' + 10 = 0,$ б) $y'' - 4y' + 4y = 0,$ в) $y'' - 5y' + 4y = 0;$
11.27. а) $y'' - y = 0,$ б) $4y'' + 3y' - 5y = 0,$ в) $y'' - 6y' + 10y = 0;$
11.28. а) $y'' + 8y' + 25y = 0,$ б) $y'' + 9y' = 0,$ в) $y'' + 3y' - 2y = 0;$

11.29. а) $6y'' + 7y' - 3y = 0$, б) $y'' + 16y' = 0$, в) $4y'' - 4y' + y = 0$;

11.30. а) $9y'' - 6y' + y = 0$, б) $y'' + 12y' + 37y = 0$, в) $y'' - 2y' = 0$.

Задание №12

Решить дифференциальные уравнения

12.1. $y'' + y' = 2x - 1$;

12.2. $y'' - 2y' + 5y = 10e^{-x}\cos 2x$;

12.3. $y'' - 2y' - 8y = 12\sin 2x - 36\cos 2x$;

12.4. $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}$;

12.5. $y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x)\cdot e^{-x}$;

12.6. $y'' - 6y' + 10y = 51\cdot e^{-x}$;

12.7. $y'' + y = 2\cos x - (4x + 4)\cdot\sin x$;

12.8. $y'' + 6y' + 10y = 74e^{3x}$;

12.9. $y'' - 3y' + 2y = 19\sin x + 3\cos x$;

12.10. $y'' + 6y' + 9y = (48x + 8)\cdot e^{x}$;

12.11. $y'' + 6y' = 72\cdot e^{2x}$;

12.12. $y'' - 5y' - 6y = 3\cos x + 19\sin x$;

12.13. $y'' - 8y' + 12y = 36x^4 - 96x^3 + 24x^2 + 16x - 2$;

12.14. $y'' + 8y' + 25y = 18\cdot e^{5x}$;

12.15. $y'' - 9y' + 20y = 126e^{-2x}$;

12.16. $y'' + 36y = 36 + 68x - 36x^2$;

12.17. $y'' + y = -4\cos x - 2\sin x$;

12.18. $y'' + 2y' - 24y = 6\cos 3x - 33\sin 3x$;

12.19. $y'' + 6y' + 13y = -75\sin 2x$;

12.20. $y'' + 5y' = 39\cos 3x - 105\sin 3x$;

12.21. $y'' + 2y' + y = 6\cdot e^{-x}$;

12.22. $y'' - 4y' + 5y = (24\sin x + 8\cos x)\cdot e^{-2x}$;

12.23. $y'' + 16y = 8\cos 4x$;

12.24. $y'' + 9y = 9x^4 + 12x^2 - 27$;

12.25. $y'' - 12y' + 40y = 2\cdot e^{6x}$;

12.26. $y'' + 4y' = e^{x}\cdot(2\sin 2x + 24\cos 2x)$;

12.27. $y'' + 2y' + y = 6\cdot e^{-x}$;

12.28. $y'' + 2y' + 37y = 37x^2 - 33x + 74;$

12.29. $6y'' - y' - y = 3 \cdot e^{2x};$

12.30. $2y'' + 7y' + 3y = 222 \sin 3x.$

Задание №13

Решить дифференциальные уравнения

13.1. $y'' - 8y' + 17y = 10e^{2x};$

13.2. $y'' + y' - 6y = (6x+1) \cdot e^{3x};$

13.3. $y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x};$

13.4. $y'' - 2y' = 6 + 12x - 24x^2;$

13.5. $y'' - 6y' + 34y = 60 \sin 5x + 18 \cos 5x;$

13.6. $y'' - 2y' = (4x+4) \cdot e^{2x};$

13.7. $y'' + y' + y = 4x^3 + 24x^2 + 22x - 4;$

13.8. $y'' - 4y' = 8 - 16x;$

13.9. $y'' - 8y' + 20y = 16(\sin 2x - \cos 2x);$

13.10. $y'' - 2y' + y = 4e^x;$

13.11. $y'' - 6y' + 13y = 34 \cdot e^{-3x} \sin 2x;$

13.12. $y'' + 4y' + 4y = 6e^{-2x};$

13.13. $4y'' + 3y' - y = 11 \cos x - 7 \sin x;$

13.14. $y'' + 3y' = 10 - 6x;$

13.15. $y'' + 10y' + 25y = 40 + 52x - 240x^2 - 200x^3;$

13.16. $y'' + 4y' + 20y = 4 \cos 4x - 52 \sin 4x;$

13.17. $y'' + 6y' + 9y = 72e^{3x};$

13.18. $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5;$

13.19. $y'' + 16y = 80e^{2x};$

13.20. $y'' + 2y' + y = (12x - 10) \cdot e^{2x};$

13.21. $y'' + 4y' = 15e^x;$

13.22. $y'' - 4y = (-24x - 10) \cdot e^{2x};$

13.23. $y'' + 9y = 10e^{3x};$

13.24. $y'' + y' - 2y = 9 \cos x - 7 \sin x;$

13.25. $y'' + 2y' + y = (18x + 8) \cdot e^{2x};$

13.26. $y'' - 14y' + 49y = 144 \sin 7x;$

13.27. $4y'' - 4y' + y = -25 \cos x;$

13.28. $3y'' - 5y' - 2y = 6 \cos 2x + 36 \sin 2x;$

13.29. $4y'' + 3y' - y = 11 \cos x - 7 \sin x;$

13.30. $y'' + 4y' + 29y = 26 \cdot e^{-x}.$

Задание №14

Решить дифференциальные уравнения

14.1. $y'' - 2y' + y = -12 \cos 2x - 9 \sin 2x,$ $\quad y(0) = -2,\ y'(0) = 0;$

14.2. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65,$ $\quad y(0) = -1,\ y'(0) = 1;$

14.3. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6,$ $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 4;$

14.4. $y'' - 6y' + 25y = 9 \sin 4x - 24 \cos 4x,$ $\quad y(0) = 2,\ y'(0) = -2;$

14.5. $y'' - 14y' + 53y = 53x^3 - 42x^2 + 59x - 14,$ $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 7;$

14.6. $y'' + 16y = e^x \cdot (\cos 4x - 8 \sin 4x),$ $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 5;$

14.7. $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x}$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 2;$

14.8. $y'' - 12y' + 36y = 32\cos 2x + 24\sin 2x$, $y(0) = 2,\ y'(0) = 4;$

14.9. $y'' + y = x^3 - 4x^2 + 7x - 10$, $y(0) = 3,\ y'(0) = 3;$

14.10. $y'' - y = (12 - 16x)\cdot e^{-x}$, $y(0) = 0,\ y'(0) = -1;$

14.11. $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66$, $y(0) = 3,\ y'(0) = 0;$

14.12. $y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x}$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 6;$

14.13. $y'' - 6y' + 25y = (32x - 12)\cdot \sin x - 36x\cos x$, $y(0) = 4,\ y'(0) = 5;$

14.14. $y'' + 25y = e^{x}\cdot(\cos 5x - 10\sin 5x)$, $y(0) = 3,\ y'(0) = -4;$

14.15. $y'' + 2y' + 5y = -8\cdot e^{-x}\sin 2x$, $y(0) = 2,\ y'(0) = 6;$

14.16. $y'' + 10y' + 25y = e^{-5x}$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0;$

14.17. $y'' + y' - 12y = (16x + 22)\cdot e^{4x}$, $y(0) = 3,\ y'(0) = 5;$

14.18. $y'' - 2y' + 37y = 36\cdot e^{4x}\cos 6x$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 6;$

14.19. $y'' + 8y' + 16y = 16x^3 + 24x^2 - 10x + 8$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 3;$

14.20. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 2;$

14.21. $y'' - 8y' = 16 + 48x^2 - 128x^3$, $y(0) = -1,\ y'(0) = 0;$

14.22. $y'' + 12y' + 36y = 72x^3 - 18$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0;$

14.23. $y'' + 3y' = (40x + 56)\cdot e^{2x}$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 2;$

14.24. $y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 2;$

14.25. $y'' - 8y' = 18x + 60x^2 - 32x^3$, $y(0) = 5,\ y'(0) = 2;$

14.26. $y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x$, $y(0) = 2,\ y'(0) = 7;$

14.27. $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1$, $y(0) = 2,\ y'(0) = 2;$

14.28. $y'' + 16y = 32e^{4x}$, $y(0) = 2,\ y'(0) = 0;$

14.29. $y'' + 5y' + 6y = 52\sin 2x$, $y(0) = -2,\ y'(0) = -2;$

14.30. $y'' - 4y = 8\cdot e^{2x}$, $y(0) = 1,\ y'(0) = -8.$

Задание №15

Решить дифференциальные уравнения

15.1. $y''' - 7y'' + 6y' = 0,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 0,\quad y''(0) = 30;$

15.2. $y^{IV} - 9y''' = 0,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 0,\quad y''(0) = 0,\quad y'''(0) = 1;$

15.3. $y''' - y'' = 0,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = -1,\quad y''(0) = 1;$

15.4. $y''' - 4y' = 0,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 2,\quad y''(0) = 4;$

15.5. $y''' + y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 1;$

15.6. $y''' - y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 4;$

15.7. $y^{IV} + 2y''' - y' - 2y = 0, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ y''(0) = 0, y'''(0) = 8;$

15.8. $y''' + y'' - 5y' + 3y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 14;$

15.9. $y''' + y'' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -1;$

15.10. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 0;$

15.11. $y''' + 3y'' + 2y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2;$

15.12. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1;$

15.13. $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0, \quad y(0) = -2{,}5, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0;$

15.14. $y''' + 9y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 9, \quad y''(0) = -18;$

15.15. $y''' - 13y'' + 12y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 133;$

15.16. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0, \ y(0) = -2, \ y'(0) = 1, \ y''(0) = 2, y'''(0) = 0;$

15.17. $y^{IV} - 10y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, y'''(0) = 1;$

15.18. $y''' - y'' + y' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 8;$

15.19. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 4;$

15.20. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -6;$

15.21. $y^{IV} - 2y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1, \ y'''(0) = 2;$

15.22. $y^{IV} - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -4, \ y'''(0) = 0;$

15.23. $y^{IV} - 16y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \ y'''(0) = -8;$

15.24. $y''' + y'' - 4y' - 4 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 12;$

15.25. $y''' + 2y'' + y' + 12y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -3, \quad y''(0) = -9;$

15.26. $y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 0, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 2;$

15.27. $y''' + 2y'' + y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = -3;$

15.28. $y''' - y'' - y' + y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1;$

15.29. $y^{IV} + 5y''' + 4y'' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 4, y''(0) = -1, y'''(0) = -16;$

15.30. $y^{IV} - 10y'' + 9y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3, y''(0) = -9, y'''(0) = -27.$

Задание №16

Решить дифференциальные уравнения

16.1. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y; \end{cases}$

16.2. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + y; \end{cases}$

16.3. $\begin{cases} x' = -2x - 3y, \\ y' = x + y; \end{cases}$

16.4. $\begin{cases} x' = -2x - 3y, \\ y' = -x; \end{cases}$

16.5. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + 4y; \end{cases}$

16.6. $\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = -3x + 2y; \end{cases}$

16.7. $\begin{cases} x' = 6x - y, \\ y' = 3x + 2y; \end{cases}$

16.8. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -x - 3y; \end{cases}$

16.9. $\begin{cases} x' = y, \\ y' = x; \end{cases}$

16.10. $\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = 3x + 4y; \end{cases}$

16.11. $\begin{cases} x' = -2y, \\ y' = x; \end{cases}$

16.12. $\begin{cases} x' = 4x + 2y, \\ y' = 4x + 6y; \end{cases}$

16.13. $\begin{cases} x' = 8x - 3y, \\ y' = 2x + y; \end{cases}$

16.14. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = x + 3y; \end{cases}$

16.15. $\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = 5x + 4y; \end{cases}$

16.16. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 3x + 6y; \end{cases}$

16.17. $\begin{cases} x' = 5x + 4y, \\ y' = 4x + 5y; \end{cases}$

16.18. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 4x + 3y; \end{cases}$

16.19. $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = x + y; \end{cases}$

16.20. $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x + 8y; \end{cases}$

16.21. $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 2x + 3y; \end{cases}$

16.22. $\begin{cases} x' = 7x + 3y, \\ y' = x + 5y; \end{cases}$

16.23. $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = -x + 4y; \end{cases}$

16.24. $\begin{cases} x' = 2x + 8y, \\ y' = x + 4y; \end{cases}$

16.25. $\begin{cases} x' = 5x + 8y, \\ y' = 3x + 3y; \end{cases}$

16.26. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = 8x + y; \end{cases}$

16.27. $\begin{cases} x' = x - 5y, \\ y' = x - 6y; \end{cases}$

16.28. $\begin{cases} x' = -5x + 2y, \\ y' = x - 6y; \end{cases}$

16.29. $\begin{cases} x' = 6x + 3y, \\ y' = -8x - 5y; \end{cases}$

16.30. $\begin{cases} x' = 4x - 8y, \\ y' = -8x + 4y. \end{cases}$

Задание №17

Решить дифференциальные уравнения

17.1. $y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}$;

17.2. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$;

17.3. $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\sin x}$;

17.4. $y'' + y = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$;

17.5. $y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}$;

17.6. $y'' + 2y' + y = \frac{1}{x \cdot e^x}$;

17.7. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{\cos x}$;

17.8. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sin^2 x}$;

17.9. $y'' + 2y' + y = e^{-x} \operatorname{ctg} x$;

17.10. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}$;

17.11. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}$;

17.12. $y'' + y = \operatorname{tg} x$;

17.13. $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$;

17.14. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$;

17.15. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$;

17.16. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$;

17.17. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$;

17.18. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$;

17.19. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$;

17.20. $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$;

17.21. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$;

17.22. $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^3}$;

17.23. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$;

17.24. $y'' + y = -\operatorname{ctg}^2 x$;

17.25. $y'' - y = e^{2x} \cdot \cos\left(e^x\right)$;

17.26. $y'' - y' = e^{2x} \cdot \sin\left(e^x\right)$;

17.27. $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$;

17.28. $y'' + y = \frac{2}{\sin^2 x}$;

17.29. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$;

17.30. $y'' + 9y = \frac{1}{\cos 3x}$.

Задание №18

Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения на отрезке.

18.1
$$\begin{aligned}&u_{tt}=u_{xx},0<x<1,\ \ 0<t<\infty,\\&u(x,0)=x(x-1),\ \ u_t(x,0)=0,\\&u(0,t)=0,\ \ u(1,t)=0.\end{aligned}$$

18.2
$$\begin{aligned}&u_{tt}=u_{xx},0<x<3/2,\ \ 0<t<\infty,\\&u(x,0)=x(x-3/2),\ \ u_t(x,0)=0,\\&u(0,t)=0,\ \ u(3/2,t)=0.\end{aligned}$$

18.3
$$\begin{aligned}&u_{tt}=9u_{xx},0<x<3,\ \ 0<t<\infty,\\&u(x,0)=x(x-3),\ \ u_t(x,0)=0,\\&u(0,t)=0,\ \ u(3,t)=0.\end{aligned}$$

18.4
$$\begin{aligned}&u_{tt}=4u_{xx},0<x<2,\ \ 0<t<\infty,\\&u(x,0)=x(x-2),\ \ u_t(x,0)=0,\\&u(0,t)=0,\ \ u(2,t)=0.\end{aligned}$$

18.5
$$\begin{aligned}&u_{tt}=1/4u_{xx},0<x<1/2,\ \ 0<t<\infty,\\&u(x,0)=x(x-1/2),\ \ u_t(x,0)=0,\\&u(0,t)=0,\ \ u(1/2,t)=0.\end{aligned}$$

18.6
$$\begin{aligned}&u_{tt}=4u_{xx},0<x<1,\ \ 0<t<\infty,\\&u(x,0)=x(x-1),\ \ u_t(x,0)=0,\\&u(0,t)=0,\ \ u(1,t)=0.\end{aligned}$$

18.7
$$\begin{aligned}&u_{tt}=4/9u_{xx},0<x<2/3,\ \ 0<t<\infty,\\&u(x,0)=x(x-2/3),\ \ u_t(x,0)=0,\\&u(0,t)=0,\ \ u(2/3,t)=0.\end{aligned}$$

18.8
$$\begin{aligned}&u_{tt}=4u_{xx},0<x<1/2,\ \ 0<t<\infty,\\&u(x,0)=x(x-1/2),\ \ u_t(x,0)=0,\\&u(0,t)=0,\ \ u(1/2,t)=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&u_{tt}=u_{xx},0<x<2,\ \ 0<t<\infty,\\ 18.9\ \ &u(x,0)=x(x-2),\ \ u_t(x,0)=0,\\ &u(0,t)=0,\ \ u(2,t)=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&u_{tt}=16u_{xx},0<x<3,\ \ 0<t<\infty,\\ 18.10\ \ &u(x,0)=x(x-3),\ \ u_t(x,0)=0,\\ &u(0,t)=0,\ \ u(3,t)=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&u_{tt}=16u_{xx},0<x<2,\ \ 0<t<\infty,\\ 18.11\ \ &u(x,0)=x(x-2),\ \ u_t(x,0)=0,\\ &u(0,t)=0,\ \ u(2,t)=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&u_{tt}=9u_{xx},0<x<1,\ \ 0<t<\infty,\\ 18.12\ \ &u(x,0)=x(x-1),\ \ u_t(x,0)=0,\\ &u(0,t)=0,\ \ u(1,t)=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&u_{tt}=1/9u_{xx},0<x<1/2,\ \ 0<t<\infty,\\ 18.13\ \ &u(x,0)=x(x-1/2),\ \ u_t(x,0)=0,\\ &u(0,t)=0,\ \ u(1/2,t)=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&u_{tt}=u_{xx},0<x<3,\ \ 0<t<\infty,\\ 18.14\ \ &u(x,0)=x(x-3),\ \ u_t(x,0)=0,\\ &u(0,t)=0,\ \ u(3,t)=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&u_{tt}=16u_{xx},0<x<1,\ \ 0<t<\infty,\\ 18.15\ \ &u(x,0)=x(x-1),\ \ u_t(x,0)=0,\\ &u(0,t)=0,\ \ u(1,t)=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&u_{tt}=9u_{xx},0<x<3/2,\ \ 0<t<\infty,\\ 18.16\ \ &u(x,0)=x(x3/2),\ \ u_t(x,0)=0,\\ &u(0,t)=0,\ \ u(3/2,t)=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&u_{tt}=4u_{xx},0<x<3,\ \ 0<t<\infty,\\ 18.17\ \ &u(x,0)=x(x-3),\ \ u_t(x,0)=0,\\ &u(0,t)=0,\ \ u(3,t)=0.\end{aligned}$$

18.18 $$\begin{aligned} &u_{tt} = 1/4u_{xx}, 0 < x < 2, \ \ 0 < t < \infty, \\ &u(x,0) = x(x-2), \ \ u_t(x,0) = 0, \\ &u(0,t) = 0, \ \ u(2,t) = 0. \end{aligned}$$

18.19 $$\begin{aligned} &u_{tt} = 1/4u_{xx}, 0 < x < 1, \ \ 0 < t < \infty, \\ &u(x,0) = x(x-1), \ \ u_t(x,0) = 0, \\ &u(0,t) = 0, \ \ u(1,t) = 0. \end{aligned}$$

18.20 $$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}, 0 < x < 1/2, \ \ 0 < t < \infty, \\ &u(x,0) = x(x-1/2), \ \ u_t(x,0) = 0, \\ &u(0,t) = 0, \ \ u(1/2,t) = 0. \end{aligned}$$

18.21 $$\begin{aligned} &u_{tt} = 1/9u_{xx}, 0 < x < 2, \ \ 0 < t < \infty, \\ &u(x,0) = x(x-2), \ \ u_t(x,0) = 0, \\ &u(0,t) = 0, \ \ u(2,t) = 0. \end{aligned}$$

18.22 $$\begin{aligned} &u_{tt} = 9/1u_{xx}, 0 < x < 3/2, \ \ 0 < t < \infty, \\ &u(x,0) = x(x-3/2), \ \ u_t(x,0) = 0, \\ &u(0,t) = 0, \ \ u(3/2,t) = 0. \end{aligned}$$

18.23 $$\begin{aligned} &u_{tt} = 1/9u_{xx}, 0 < x < 1, \ \ 0 < t < \infty, \\ &u(x,0) = x(x-1), \ \ u_t(x,0) = 0, \\ &u(0,t) = 0, \ \ u(1,t) = 0. \end{aligned}$$

18.24 $$\begin{aligned} &u_{tt} = 9/1u_{xx}, 0 < x < 3, \ \ 0 < t < \infty, \\ &u(x,0) = x(x-3), \ \ u_t(x,0) = 0, \\ &u(0,t) = 0, \ \ u(3,t) = 0. \end{aligned}$$

18.25 $$\begin{aligned} &u_{tt} = 9u_{xx}, 0 < x < 1/2, \ \ 0 < t < \infty, \\ &u(x,0) = x(x-1/2), \ \ u_t(x,0) = 0, \\ &u(0,t) = 0, \ \ u(1/2,t) = 0. \end{aligned}$$

18.26 $$\begin{aligned} &u_{tt} = 9u_{xx}, 0 < x < 2, \ \ 0 < t < \infty, \\ &u(x,0) = x(x-2), \ \ u_t(x,0) = 0, \\ &u(0,t) = 0, \ \ u(2,t) = 0. \end{aligned}$$

18.27 $$\begin{aligned}&u_{tt}=1/4u_{xx},0<x<3,\ 0<t<\infty,\\&u(x,0)=x(x-3),\ u_t(x,0)=0,\\&u(0,t)=0,\ u(3,t)=0.\end{aligned}$$

18.28 $$\begin{aligned}&u_{tt}=1/9u_{xx},0<x<1,\ 0<t<\infty,\\&u(x,0)=x(x-1),\ u_t(x,0)=0,\\&u(0,t)=0,\ u(1,t)=0.\end{aligned}$$

18.29 $$\begin{aligned}&u_{tt}=4/9u_{xx},0<x<3/2,\ 0<t<\infty,\\&u(x,0)=x(x-3/2),\ u_t(x,0)=0,\\&u(0,t)=0,\ u(3/2,t)=0.\end{aligned}$$

18.30 $$\begin{aligned}&u_{tt}=1/9u_{xx},0<x<2,\ 0<t<\infty,\\&u(x,0)=x(x-2),\ u_t(x,0)=0,\\&u(0,t)=0,\ u(2,t)=0.\end{aligned}$$

18.31 $$\begin{aligned}&u_{tt}=9/4u_{xx},0<x<1,\ 0<t<\infty,\\&u(x,0)=x(x-1),\ u_t(x,0)=0,\\&u(0,t)=0,\ u(1,t)=0.\end{aligned}$$

Задание №19

Найти решение первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности на отрезке:

19.1 $u'_t=16u''_{xx},\ 0<x<3,\ t>0,$

$$u(x,0)=\begin{cases}x^2/3, 0\le x\le 3/2\\ 3-x,\ 3/2<x\le 3\end{cases}$$

$$u(0,t)=u(3,t)=0$$

19.2 $u'_t=u''_{xx},\ 0<x<2,\ t>0,$

$$u(x,0)=\begin{cases}x^2, 0\le x\le 1\\ 2-x,\ 1<x\le 2\end{cases}$$

$$u(0,t)=u(2,t)=0$$

19.3 $u'_t=25u''_{xx},\ 0<x<5,\ t>0,$

$$u(x,0)=\begin{cases}2x^2/5, 0\le x\le 5/2\\ 5-x,\ 5/2<x\le 5\end{cases}$$

$$u(0,t)=u(5,t)=0$$

19.4 $u'_t=16u''_{xx},\ 0<x<4,\ t>0,$

$$u(x,0)=\begin{cases}x^2/2, 0\le x\le 2\\ 4-x,\ 2<x\le 4\end{cases}$$

$$u(0,t)=u(4,t)=0$$

19.5 $u'_t=4u''_{xx},\ 0<x<5,\ t>0,$

$$u(x,0)=\begin{cases}2x^2/3, 0\le x\le 5/2\\ 5-x,\ 5/2<x\le 5\end{cases}$$

$$u(0,t)=u(5,t)=0$$

19.6 $u'_t=u''_{xx},\ 0<x<3,\ t>0,$

$$u(x,0)=\begin{cases}2x^2/3, 0\le x\le 3/2\\ 3-x,\ 3/2<x\le 3\end{cases}$$

$$u(0,t)=u(3,t)=0$$

19.7 $u'_t=25u''_{xx},\ 0<x<8,\ t>0,$

$$u(x,0)=\begin{cases}x^2/4, 0\le x\le 4\\ 8-x,\ 4<x\le 8\end{cases}$$

$$u(0,t)=u(8,t)=0$$

19.8 $u'_t=9u''_{xx},\ 0<x<2,\ t>0,$

$$u(x,0)=\begin{cases}x^2, 0\le x\le 1\\ 2-x,\ 1<x\le 2\end{cases}$$

$$u(0,t)=u(2,t)=0$$

19.9 $u'_t=16u''_{xx},\ 0<x<1,\ t>0,$

$$u(x,0)=\begin{cases}2x^2, 0\le x\le 1/2\\ 1-x,\ 1/2<x\le 1\end{cases}$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0$$

19.10 $u'_t = 4u''_{xx},\ 0 < x < 4,\ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2/2, 0 \le x \le 2 \\ 4 - x,\ 2 < x \le 4 \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(4,t) = 0$$

19.11 $u'_t = 9u''_{xx},\ 0 < x < 10,\ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2/5, 0 \le x \le 5 \\ 10 - x,\ 5 < x \le 10 \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(10,t) = 0$$

19.12 $u'_t = 25u''_{xx},\ 0 < x < 9,\ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2/9, 0 \le x \le 9/2 \\ 9 - x,\ 9/2 < x \le 9 \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(9,t) = 0$$

19.13 $u'_t = 9u''_{xx},\ 0 < x < 3,\ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} 2x^2/3, 0 \le x \le 3/2 \\ 3 - x,\ 3/2 < x \le 3 \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(3,t) = 0$$

19.14 $u'_t = u''_{xx},\ 0 < x < 5,\ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} 2x^2/5, 0 \le x \le 5/2 \\ 5 - x,\ 5/2 < x \le 5 \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(5,t) = 0$$

19.15 $u'_t = 4u''_{xx},\ 0 < x < 7,\ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} 2x^2/7, 0 \le x \le 7/2 \\ 7 - x,\ 7/2 < x \le 7 \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(7,t) = 0$$

19.16 $u'_t = 25u''_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} 2x^2, 0 \le x \le 1/2 \\ 1 - x,\ 1/2 < x \le 1 \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

19.17 $u'_t = 9u''_{xx},\ 0 < x < 4,\ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2/2, 0 \le x \le 2 \\ 4 - x,\ 2 < x \le 4 \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(4,t) = 0$$

19.18 $u'_t = u''_{xx},\ 0 < x < 10,\ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2/5, 0 \le x \le 5 \\ 10 - x,\ 5 < x \le 10 \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(10,t) = 0$$

19.19 $u'_t = 4u''_{xx},\ 0 < x < 2,\ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2, 0 \le x \le 1 \\ 2 - x,\ 1 < x \le 2 \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(2,t) = 0$$

19.20 $u'_t = 16u''_{xx},\ 0 < x < 8,\ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2/4, 0 \le x \le 4 \\ 8 - x,\ 4 < x \le 8 \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(8,t) = 0$$

19.21 $u'_t = u''_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} 2x^2, 0 \le x \le 3/2 \\ 3 - x,\ 3/2 < x \le 3 \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

19.22 $u'_t = 25u''_{xx},\ 0 < x < 4,\ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2/2, 0 \le x \le 2 \\ 4 - x,\ 2 < x \le 4 \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(4,t) = 0$$

19.23 $u'_t = 16u''_{xx},\ 0 < x < 16,\ t > 0,$

$$u(x,0)=\begin{cases} x^2/3, 0\le x\le 3 \\ 6-x,\ 3<x\le 6 \end{cases}$$

$$u(0,t)=u(6,t)=0$$

19.24 $u'_t = 4u''_{xx},\ 0<x<1,\ t>0,$

$$u(x,0)=\begin{cases} 2x^2, 0\le x\le 1/2 \\ 1-x,\ 1/2<x\le 1 \end{cases}$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0$$

19.25 $u'_t = 9u''_{xx},\ 0<x<5,\ t>0,$

$$u(x,0)=\begin{cases} 2x^2/5, 0\le x\le 5/2 \\ 5-x,\ 5/2<x\le 5 \end{cases}$$

$$u(0,t)=u(5,t)=0$$

19.26 $u'_t = 25u''_{xx},\ 0<x<6,\ t>0,$

$$u(x,0)=\begin{cases} x^2/3, 0\le x\le 3 \\ 6-x,\ 3<x\le 6 \end{cases}$$

$$u(0,t)=u(6,t)=0$$

19.27 $u'_t = 16u''_{xx},\ 0<x<12,\ t>0,$

$$u(x,0)=\begin{cases} x^2/6, 0\le x\le 6 \\ 12-x,\ 6<x\le 12 \end{cases}$$

$$u(0,t)=u(12,t)=0$$

19.28 $u'_t = 16u''_{xx},\ 0<x<2,\ t>0,$

$$u(x,0)=\begin{cases} x^2, 0\le x\le 1 \\ 2-x,\ 1<x\le 2 \end{cases}$$

$$u(0,t)=u(2,t)=0$$

19.29 $u'_t = 4u''_{xx},\ 0<x<6,\ t>0,$

$$u(x,0)=\begin{cases} x^2/3, 0\le x\le 3 \\ 6-x,\ 3<x\le 6 \end{cases}$$

$$u(0,t)=u(6,t)=0$$

19.30 $u'_t = 36u''_{xx}$, $0 < x < 3,\ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2/3, 0 \le x \le 3/2 \\ 3 - x,\ 3/2 < x \le 3 \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(3,t) = 0$$

19.31 $u'_t = 9u''_{xx}$, $0 < x < 8,\ t > 0,$

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2/4, 0 \le x \le 4 \\ 8 - x,\ 4 < x \le 8 \end{cases}$$

$$u(0,t) = u(8,t) = 0$$

3.4. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

3.4.1. Лабораторная работа №1

«Приближенное решение дифференциального уравнения 1 – го порядка, удовлетворяющее условию задачи Коши. Метод Эйлера»

Пусть требуется найти приближенное решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Численное решение задачи состоит в построении таблицы приближенных значений $y_1; y_2; ...; y_n$ решения уравнения $y(x)$ в точках $x_1; x_2; ...; x_n$. Чаще всего $x_i = x_0 + ih,\ i = 1,2...; n.$ Точки x_i называются узлами сетки, а величина h – шагом $(h > 0)$.

В методе Эйлера величины y_i вычисляются по формуле

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i; y_i),\ i = 0,1,2,... \qquad (3.4.1)$$

Этот метод относится к группе одношаговых методов, в которых для расчета точки $(x_{i+1}; y_{i+1})$ требуется информация о последней вычисленной точке $(x_i; y_i)$. Для оценки погрешности метода на одном шаге сетки разложим точное решение в ряд Тейлора в окрестности узла x_i:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + y'(x_i) \cdot h + 0(h^2) =$$
$$= y(x_i) + h \cdot f(x_i y_i) + 0(h^2) \qquad (3.4.2)$$

Сравнение формул (3.4.1) с разложением (3.4.2) показывает, что они согласуются до членов первого порядка по h, а погрешность формулы (3.4.1) равна $0(h^2)$. Если расчетные формулы численного метода согласуются с разложением в ряд Тейлора до членов порядка h^p, то число p называется порядком метода. Таким образом, метод Эйлера метод первого порядка.

Задание к лабораторной работе №1

Найти приближенное решение дифференциального уравнения 1 – го порядка, удовлетворяющее условию задачи Коши методом Эйлера на отрезке [0;3] с шагом 0,1

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x, y_1, y_2\right), \quad y(0) = y_0$$

<table>
<tr><th>Номер вар.</th><th>$f\left(x, y_1, y_2\right)$</th><th>$y_1$</th><th>$y_2$</th><th>$y_0$</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="10">$-y_2 \cdot e^{0,8x} + 2y_1$</td><td rowspan="10">$\sin 2x$</td><td>0,01</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,02</td><td>1/3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,03</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,04</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0,05</td><td>1/6</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0,06</td><td>1/7</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0,07</td><td>0,125</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0,08</td><td>1/9</td></tr>
<tr><td>9</td><td>0,09</td><td>0,1</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0,10</td><td>1/11</td></tr>
<tr><td>11</td><td rowspan="10">$\operatorname{tg}\left(x \cdot y_2\right) + e^{y_1}$</td><td rowspan="10">$2x^2 - 1$</td><td>0,01</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>12</td><td>0,02</td><td>1/3</td></tr>
<tr><td>13</td><td>0,03</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>14</td><td>0,04</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td>15</td><td>0,05</td><td>1/6</td></tr>
<tr><td>16</td><td>0,06</td><td>1/7</td></tr>
<tr><td>17</td><td>0,07</td><td>0,125</td></tr>
<tr><td>18</td><td>0,08</td><td>1/9</td></tr>
<tr><td>19</td><td>0,09</td><td>0,1</td></tr>
<tr><td>20</td><td>0,10</td><td>1/11</td></tr>
<tr><td>21</td><td rowspan="2">$\cos\left(x y_2\right) - y_1 \cdot \left(x^2 - \pi\right)$</td><td rowspan="2">$e^{-x^3}$</td><td>0,01</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>22</td><td>0,02</td><td>1/3</td></tr>
<tr><td>23</td><td rowspan="8">$\cos\left(x y_2\right) - y_1 \cdot \left(x^2 - \pi\right)$</td><td rowspan="8">$e^{-x^3}$</td><td>0,03</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>24</td><td>0,04</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td>25</td><td>0,05</td><td>1/6</td></tr>
<tr><td>26</td><td>0,06</td><td>1/7</td></tr>
<tr><td>27</td><td>0,07</td><td>0,125</td></tr>
<tr><td>28</td><td>0,08</td><td>1/9</td></tr>
<tr><td>29</td><td>0,09</td><td>0,1</td></tr>
<tr><td>30</td><td>0,10</td><td>1/11</td></tr>
</table>

3.4.2. Лабораторная работа №2

«Приближенное решение задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений методом Эйлера»

Пусть требуется найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_i' = f_1(x; y_1; y_2; ...; y_n), \\ \dfrac{1}{y_2'} = f_2(x; y_1; y_2; ...; y_n), \\ y_n' = f_n(x; y_1; y_2; ...; y_n), \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условием $y_1(x_0) = y_{10}$, $y_2(x_0) = y_{20}$, $y_n(x_0) = y_{n0}$.

Приближенные значения y_{ki} точного решения $y_k(x_i)$ в точках x_i вычисляются по формулам

$$y_{ki} = y_{ki-1} + hf_k(x_{1-i}, y_{1(i-1)}, y_{2(i-1)}, y_{n(i-1)}), \qquad (3.4.3.)$$

$$k = 1,2,..., n, \; i = 1,2,...$$

Задание к лабораторной работе №2

Приближенные решения задачи Коши системы дифференциальных уравнений методом Эйлера на отрезке $[0;3]$ с шагом h=0,3

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f(x, y_1, y_2); \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(0) = 0, \\ y_2(0) = y_{20}. \end{cases}$$

Номер вар.	$f(x, y_1, y_2)$	a	y_{20}
1	$-a \cdot e^{0,8 \cdot x}$	0,01	0,5
2		0,02	1/3
3		0,03	0,25
4		0,04	0,2
5		0,05	1/6
6		0,06	1/7
7		0,07	0,125
8		0,08	1/9
9		0,09	0,1
10	$-a \cdot x \cdot y_2 - y_1$	0,01	0,5
11		0,02	1/3
12		0,03	0,25

13		0,04	0,2
14		0,05	1/6
15		0,01	0,5
16	$-a\cdot y_1\cdot e^{-x}$	0,02	1/3
17		0,03	0,25
18	$-0{,}04\cdot e^{-1{,}2x}$	-	0,2
19	$-0{,}04\cdot e^{-0{,}8x}$	-	0,2
20		0,01	0,5
21		0,02	1/3
22		0,03	0,25
23		0,04	0,2
24		0,05	1/6
25	$-a\cdot x\cdot y_2-x^2 y_1$	0,06	1/7
26		0,07	0,125
27		0,08	1/9
28		0,09	0,1
29		0,10	1/11
30		0,10	1/12

3.4.3. Лабораторная работа №3

«Решение краевой задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка методом прогонки»

Пусть на отрезке $[a,b]$ требуется найти решение дифференциального уравнения

$$y''+p(x)y'+g(x)\cdot y=f(x), \qquad (3.4.4)$$

удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned} &c_1y(a)+c_2y'(a)=c; \quad d_1y(b)+d_2y'(b)=d \\ &|c_1|+|c_2|\neq 0; \qquad\qquad |d_1|+|d_2|\neq 0 \end{aligned} \qquad (3.4.5)$$

Численное решение задачи состоит в нахождении приближенных значений $y_0,y_1,y_2,...,y_n$ неполного решения $y(x)$ в точках $x_0,x_1,...,x_n$. Точки $x_0,x_1,...,x_n$ - узлы сетки. Используем равномерную сетку, образованную системой равноотстоящих узлов $x_i=x_0+ih,\ i=0,1,2,...,n.$ При этом $x_0=a, x_n=b, h=(b-a)/n$. Величина h – шаг сетки. Пусть

$$p(x_i)=p_i; g(x_i)=g_i; f(x_i)=f_i; y(x_i)=y_i; y'(x_i)=y'_i; u''(x_i)=y''_i.$$

Аппроксимируем $y'(x_i)$ и $y''(x_i)$ в каждом внутреннем узле центральными разностными производными

$$y'(x_i)=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+0(h^2),\ y''(x_i)=\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+0(h^2)$$

и на концах отрезка – односторонними производными $y'_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{h} + 0(h)$,

$y'_n = \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} + 0(h)$.

Используя эти формулы, получаем разностную аппроксимацию исходной задачи

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i; \ i = 1,2,..., n-1$$

$$c_1 y_0 + c_1 \frac{y_1 - y_2}{h} = c, \ d_1 y_n + d_2 \frac{y_n - y_1}{h} = d. \qquad (3.4.6)$$

Чтобы найти приближенные значения $y_0, y_1, \ldots, y_n$ искомого решения, необходимо решить систему n+1 линейных уравнений (3.4.5) с n+1 неизвестным. Эту систему можно решить одним из стандартных методов решения систем линейных уравнений. Однако матрица системы (3.4.6) трехдиагональная, поэтому для ее решения применим специальный метод, называемый методом прогонки.

Перепишем систему (3.4.6) следующим образом:

$$\begin{cases} \beta_0 y_0 + \gamma_0 y_1 = \varphi_0 \\ \alpha_1 y_{i-1} + \beta_i \cdot y_i + \gamma_i \cdot y_{i+1} = \varphi_i; \ \ i = 1,2,..., n-1 \\ \alpha_n y_{n-1} + \beta_n y_n = \varphi_n \end{cases} \qquad (3.4.7)$$

где

$$\beta_0 = c_1 h - c_2; \ \gamma_0 = c_2; \ \varphi_0 = hc, \ \varphi_i = \gamma_i h^2; \ \alpha_i = 1 - \frac{1}{2} p_i h,$$

$$\beta_i = d_i h - 2, \ \gamma_i = 1 + \frac{1}{2} p_i h, \ i = 1,2,..., n-1, \ \alpha_n = -d_2,$$

$$\beta_n = hq_1 + d_2; \varphi_n = hd.$$

Будем искать решение системы в виде

$$y_i = U_i + Vi \cdot y_{i+1} \qquad (3.4.8)$$

тогда для U_i и V_i получаем следующее рекуррентные формулы:

$$V_i = -\frac{\gamma_i}{\beta_i + \alpha_i V_{i-1}}, \ U_i = \frac{\varphi_i - \alpha_i U_{i-1}}{\beta_i + \alpha_i V_i}; \ i = 0,1,2,..., n.$$

Чтобы сделать схему счета однородной, положим $\alpha_0 = 0, \gamma_n = 0$. Прямой ход прогонки состоит в последовательном вычислении коэффициентов V_i и U_i, исходя из значений $V_0 = -\gamma_0 / \beta_0$; $U_0 = \varphi_0 / \beta_0$. При обратном ходе прогонки по формуле (3.4.8.) последовательно определяются величины $y_n, y_{n-1}, ..., y_n$. Так как $\gamma_n = 0$, то $V_n = 0$ и $y_n = U_n$, т.е. в прямом ходе прогонки вычисляются величины U_i, V_i и приближенное значение y_n на правом конце отрезка. Остальные величины $y_{n-1}, y_{n-2}, ..., y_0$ вычисляются в обратном ходе прогонки по рекуррентной формуле (3.4.8). Таким образом, метод прогонки позволяют найти точное решение системы (3.4.6), значит, погрешность решения краевой задачи (3.4.4) – (3.4.5) определяется только погрешностью разностной аппроксимации исходной задачи (3.4.6) и равна 0(h). Так как h=(b-a)/n, то выбирая n достаточно большим, можно добиться уменьшения погрешности ценой увеличения объема вычислений при решении системы (3.4.6).

При практической оценке погрешности найденного решения обычно используется двойной пересчет и правило Рунге. Если $y(x_i)$ – точное значение решения в узле $x_i; a_{yi}$ и $\overline{y_i}$ приближением значения решения в том же узле, полученные соответственно с шагом h и h/2, то оценка погрешности решения y_i определяется формулой

$$\left|\overline{y_i} - y(x_i)\right| \approx \left|y_i - \overline{y_i}\right| / 3.$$

Задание к лабораторной работе №3

На отрезке [a; b] решить методом прогонки линейную краевую задачу

$$y'' + p(x)\cdot y' + q(x)\cdot y = f(x),$$
$$c_1 \cdot y(a) + c_2 \cdot y'(a) = c,$$
$$d_1 \cdot y(b) + d_2 \cdot y'(b) = d.$$

Здесь $c_1 = d_1 = 1,\ c_2 = d_2 = 0,\ f(x) = 0.$

Номер вар.	$p(x)$	$q(x)$	a	b	c	d	α_1	α_2	β
1	$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 x}{x^2 - 1}$	$\frac{\beta}{\sqrt{1 - x^2}}$	0	0,8	-0,5	0,5	2	0	6
2			0	0,8	0	0,1	2	0	12
3			0	0,8	-0,37	-0,2	2	0	20
4			0	0,8	0	-0,4	2	0	30
5			0	0,8	0	-0,1	1,4	0	27
6			0	0,8	0	-0,3	1,8	0	29
7			0	0,8	0	-0,5	2,2	0	31
8			0	0,8	0	-0,8	2,6	0	33
9			0	0,8	0	-1,3	3	0	35
10			0	0,6	0,2	0,8	1,5	2,5	33
11			0	0,6	0,15	0,2	1,7	2,7	33,5
12			0	0,6	-,05	0,2	1,9	2,9	34,5
13			0	0,6	-0,1	-0,6	2,1	3,1	35,5
14			0	0,6	-0,2	-1,2	2,3	3,3	36,5
15			0	0,6	-0,5	-1,2	2,5	3,5	37,5
16			0	0,6	0,4	-0,9	2,3	2,7	33,5
17	$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 x}{x^2 - 1}$	$\frac{\beta}{\sqrt{1 - x^2}}$	0	0,8	0	0,89	0	3	15
18			0	0,8	1	-0,13	0	3	24
19			0	0,8	0	-1,1	0	3	35

20			0	0,8	0	-0,35	0	1	9
21			0	0,8	0	-0,84	0	1	16
22			0	0,8	0	-0,99	0	1	25
23			0	0,8	0	-0,75	0	1	49
24			0	0,8	0	-0,21	0	1	
25	$-2x$	2	0,5	3	1	6			
26		4	0,5	3	-1	3,4			
27		6	0,5	3	-5	1,8			
28	$\frac{1-x}{x}$	$\frac{\beta}{x}$	1	5	-0,5				2
29			1	5	-0,67				3
30			1	5	-0,63				4

3.4.4. Лабораторная работа №4

«Табулирование решений уравнений математической физики»

Постановка задачи: Наиболее распространенным методом решения уравнений математической физики является метод Фурье (метод разделения переменных).

Метод Фурье позволяет записать решение уравнения в частных производных в виде бесконечного ряда. Для наглядной интерпретации полученного решения требуется умение получать числовые значения решения и строить его график. Эта задача, в свою очередь, сводится к необходимости нахождения суммы ряда с заданной точностью при различных значениях аргументов. Указанная процедура требует достаточно большого количества вычислений. Поэтому табулирование методом Фурье с высокой точностью возможно только с применением ЭВМ.

Алгоритм решения

1. Уравнения гиперболического типа

Рассмотрим одномерное волновое уравнение (уравнение колебаний струны)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ 0 < x < \ell,\ t > 0 \tag{3.4.9}$$

при следующих начальных:

$$U(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \tag{3.4.10}$$

и граничных условиях:

$$U(0,t)=0,\ U(\ell,t)=0. \tag{3.4.11}$$

Условия (3.4.11) соответствуют закреплению струны на ее концах.
Решение задачи (3.4.9) – (3.4.11) получается методом Фурье и имеет вид

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n\cos\frac{\pi nct}{\ell}+\frac{\ell}{\pi nc}\psi_n\sin\frac{\pi nct}{\ell}\right)\sin\frac{\pi nx}{\ell}, \tag{3.4.12}$$

где φ_n и ψ_n - коэффициенты Фурье $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$\varphi_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\sin\frac{\pi nx}{\ell}dx,$$

$$\psi_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\psi(x)\sin\frac{\pi nx}{\ell}dx.$$

Задачей табулирования является получение решения с точностью ε в узловых точках $x_i=ih$, $t_j=j\tau$, $i=1,\dots,m$; $j=1,\dots,n$, где $h=\frac{\ell}{m}$ - шаг табулирования по x, τ - шаг табулирования по t. Для этой цели необходимо в каждой точке (x_i,t_j) найти конечную сумму

$$\tilde{U}_{ij}=\sum_{n=1}^{N}\left(\varphi_n\cos\frac{\pi nct_j}{\ell}+\frac{\ell\psi_n}{\pi nc}\sin\frac{\pi nct_j}{\ell}\right)\sin\frac{\pi nx_i}{\ell}, \tag{3.4.13}$$

где N выбирается из условия, что остаток ряда по абсолютной величине меньше требуемой точности ε, т.е.

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\varphi_n\cos\frac{\pi nct_j}{\ell}+\frac{\psi_n\ell}{\pi nc}\sin\frac{\pi nct_j}{\ell}\right)\sin\frac{\pi n}{\ell}x_i\right|<\varepsilon.$$

Алгоритм нахождения (3.4.13) на ЭВМ достаточно прост.

Основная сложность, которая может возникнуть, - это определение числа N. Для решения этого вопроса необходимо найти некоторую функцию $F(N,x_i,t_j)$ несложного для расчета вида, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\lim_{N\to\infty}F=0,\quad \left|r_N^*(x_i,t_j)\right|<F(N,x_i,t_j).$$

Тогда число N (количество слагаемых в сумме (3.4.13) можно для каждой узловой точки определить как наименьшее число n, для которого выполняется неравенство

$$F(n,x_i,t_j)<\varepsilon.$$

Рассмотрим, как строится такая функция, на конкретном примере.

ПРИМЕР 3.4.1. $\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ 0 < x < \ell,\ t > 0;$

$$U(x,0) = \frac{x(\ell - x)}{\ell^2},\ \ \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = 0;$$

$$U(0,t) = U(\ell,t) = 0.$$

<u>Решение:</u> Решение этой задачи согласно (3.4.12) имеет вид

$$U(x,t) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \cos\frac{\pi(2k+1)ct}{\ell} \sin\frac{\pi(2k+1)x}{\ell}.$$

Найдем оценку остатка ряда

$$\left| r_N(x_i, t_j) \right| \le \frac{8}{\pi^3} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \le \frac{8}{\pi^3} \int_N^{\infty} \frac{dx}{(2k+1)^3} = \frac{2}{\pi^3 (2N+1)^2}.$$

2. <u>Уравнения параболического типа</u>

Рассмотрим одномерное неоднородное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t),\ 0 < x < \ell,\ t > 0$$

с граничными условиями

$$\left.\left(\alpha_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \beta_1 U\right)\right|_{x=0} = \psi_1(t),$$

$$\left.\left(\alpha_2 \frac{\partial U}{\partial x} + \beta_2 U\right)\right|_{x=\ell} = \psi_2(t)$$

и начальным условием

$$U(x,0) = \varphi(x).$$

Его решение методом Фурье имеет вид

$$U(x,t) = U_0(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot T_k(t) \cdot X_k(x), \tag{3.4.14}$$

где $U_0(x,t)$, $T_k(t)$, $X_k(x)$ - известные функции, зависящие от $f(x,t)$ и граничных условий; $\tilde{N}_k$ - коэффициенты, определяемые из начальных условий.

Схема вычислений при табулировании функции $U(x,t)$ по формуле (3.4.14) аналогична п.1.

ПРИМЕР 3.4.2. $\dfrac{\partial U}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t),\ 0 < x < \ell,\ t > 0;$

$$U(x,0) = 1,\ \ t > 0;$$

$$U(0,t) = 0,\ U(\ell,t) = 1,\ 0 < x < \ell.$$

<u>Решение.</u> Решая эту задачу методом Фурье, получим

$$U(x,t)=\frac{x}{\ell}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-(\pi n a)^2 t}}{n}\sin\frac{\pi n}{\ell}x .$$

Найдем оценку остатка ряда

$$\left|r_N(x,t)\right|\le\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{2}{\pi k}e^{-\left(\frac{\pi k a}{\ell}\right)^2\cdot t}\left|\sin\frac{\pi k}{\ell}x\right|\le\frac{2}{\pi(N+1)}\sum_{k=N+1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi k a}{\ell}\right)^2 t} .$$

Для оценки скорости сходимости оставшегося ряда применим интегральную оценку для знакоположительных рядов

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi a}{\ell}\right)^2 tk^2}\le\int_N^{\infty}e^{-tx^2}dx\le\int_N^{\infty}e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha N},\text{ где }\alpha=\left(\frac{\pi a}{\ell}\right)^2 t .$$

Таким образом,

$$\left|r_N(x,t)\right|\le\frac{2}{\pi(N+1)t}\left(\frac{\ell}{\pi a}\right)^2\exp\left(-\left(\frac{\pi a}{\ell}\right)tN\right).$$

Задание к лабораторной работе №4

1. Протабулировать решение увеличения колебаний струны с закрепленными концами, имеющей в начальный момент форму

$$\varphi(x)=U(x,0)=\frac{x}{\ell}\left(\alpha\frac{\left(\ell^2-x^2\right)}{\ell^2}+\beta\frac{(\ell-x)}{\ell}\right),$$

которая начала колебаться без начальной скорости $(\psi(x)\equiv 0)$.

Ниже приведены значения параметров α и β (значения ℓ и с взять равными 1).

Вариант	α	β
1	0,45	0,1
2	0,4	0,2
3	0,375	0,25
4	0,35	0,3
5	0,325	0,35
6	0,3	0,4
7	0,25	0,5
8	0,2	0,6
9	0,15	0,7
10	0,125	0,75
11	0,1	0,8
12	0,075	0,85
13	0,05	0,9
14	0,025	0,95
15	0	1

2. Протабулировать решение уравнения теплопроводности при начальных условиях

$$U(x,0) = U_1 - \frac{\ell - x}{\ell}(U_1 - U_0)$$

и граничных условиях

$$U(\ell, t) = U_1; \quad U(0, t) = U_2.$$

Значения параметров U_0, U_1, U_2, соответствующих данному варианту, приведены ниже. Значения параметров ℓ и α положим равны 1.

Вариант	U_0	U_1	U_2
16	0,9	0,4	0
17	0,8	0,5	0,1
18	0,7	0,4	0,2
19	0,6	0,1	0,3
20	0,5	0,9	0,9
21	0,9	0,5	0,5
22	0,2	0,1	0,5
23	1,0	0,7	0,5
24	0,8	0,1	0,5
25	0,8	0,5	0,4
26	0,2	0,4	0,7
27	0,1	0,3	0,6
28	0,2	0,2	0,7
29	0,1	0,4	0,8
30	0	1	0,9

Порядок выполнения работы:

1. В соответствии с вариантом составляется краевая задача.
2. Находится решение поставленной краевой задачи методом Фурье.
3. Производится оценка погрешности остатка ряда Фурье.
4. Проводятся расчеты и анализ результатов.

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература:

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. –т. 2. М. Наука, 2003. – 416 с.
2. Игнатьева А.В. и др. Курс высшей математики. М. Высшая школа, 1964. – 688 с.
3. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Высшая школа, 1983. – 126 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. М. высшая школа. 2004. – 415 с.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
6. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. – М.: Наука 1969. – 286 с.
7. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Наука, 1962. – 767 с.
8. Будак Б.М. – М.: Наука, 1980. – 687 с.

Дополнительная литература:

1. Очан Ю.С. Методы математической физики. – М.: Высшая школа, 1965. – 283 с.

Учебные пособия кафедры:

1. Методические указания к разделу «уравнения математической физики» (уравнения гиперболического типа)/Сост. Л.А. Сахарова, М.Ф. Степанова – Уфа: УНИ, 1989. – 41 с.
2. Математические указания к разделу «Уравнения математической физики» (уравнения параболического и эллиптического типов)/Сост. М.Ф. Степанова, Л.А. Сахарова. – Уфа: УНИ, 1991. – 40 с.
3. Методические указания к проведению лабораторной работы «Табулирование решений уравнений математической физики»/Сост. Р.Н. Бахтизин, Р.Я. Хайбуллин, А.Ф. Юкин – Уфа: УНИ, 1987.
4. Практикум по уравнениям математической физики. Сост. М.Ф. Степанова, В.А. Буренин, Л.А. Сахарова. – Уфа: УГНТУ, 2000.