

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ



Государственное образовательное учреждение высшего образования
"УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЯНОЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ"
(УГНТУ)

Кафедра математики

УЧЕБНО – МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
дисциплины «Математика»

РАЗДЕЛ 8 «ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ»

Теоретические основы
Методические указания для студентов
Материалы для самостоятельной работы студентов

Уфа 2017

УДК 514.742(07)
ББК 22.151.5я7
У90

Ответственный редактор д. ф.-м. наук, проф. Р.Н. Бахтизин

Редколлегия:

Акмадиева Т.Р., Аносова Е.П., Байрамгулова Р.С., Галиуллин М.М., Галиева Л.М., Галиакбарова Э.В., Гимаев Р.Г., Гудкова Е.В., Егорова Р.А., Жданова Т.Г., Зарипов Э.М., Зарипов Р.М., Исламгулова Г.Ф., Ковалева Э.А., Майский Р.А., Мухаметзянов И.З., Нагаева З.М., Савлучинская Н.М., Сахарова Л.А., Степанова М.Ф., Сокова И.А., Сулейманов И.Н., Умергалина Т.В., Фаткуллин Н.Ю., Хайбуллин Р.Я., Хакимов Д.К., Хакимова З.Р., Чернятьева М.Р., Юлдыбаев Л.Х., Шамшович В.Ф., Якубова Д.Ф., Якупов В.М., Янчушка А.П., Яфаров Ш.А.

Рецензенты: Кафедра программирования и вычислительной математики Башкирского государственного педагогического университета.
Заведующий кафедрой д. ф.-м. наук, профессор Р.М. Асадуллин
Кафедра вычислительной математики Башкирского государственного университета.
Заведующий кафедрой д. ф.-м. наук, профессор Н.Д. Морозкин

Учебно-методический комплекс дисциплины «Математика». Раздел 8 «Элементы теории поля». Теоретические основы. Методические указания для студентов. Материалы для самостоятельной работы студентов. – Уфа: Издательство УГНТУ, 2007. – 69 с.

Содержит теоретические материалы, способы и методы решения практических задач, задания для самостоятельной работы студентов, контрольные вопросы для самопроверки, список рекомендуемой литературы.

Разработан для студентов, обучающихся по всем формам обучения по направлениям подготовки и специальностям, реализуемым в УГНТУ.

УДК 514.742(07)
ББК 22.151.5я7

СОДЕРЖАНИЕ

1. Теоретические основы

1.1.	Скалярное и векторное поля. Исходные понятия	5
1.2.	Линии и поверхности уровня. Векторные линии и трубки	6
1.3.	Производная по направлению	8
1.4.	Градиент скалярного поля	10
1.5.	Поверхностные интегралы второго рода	13
1.6.	Поток векторного поля	18
1.7.	Формула Остроградского – Гаусса	20
1.8.	Дивергенция векторного поля	21
1.9.	Вычисление дивергенции	23
1.10.	Формула Стокса	24
1.11.	Линейный интеграл и циркуляция векторного поля	25
1.12.	Плотность циркуляции векторного поля. Ротор	28
1.13.	Потенциальное поле	31
1.14.	Оператор Гамильтона	32
1.15.	Дифференциальные операции второго порядка	33

2. Методические указания для студентов

2.1.	Скалярное поле. Производная по направлению.	35
2.2.	Градиент	37
2.3.	Векторные линии. Поток векторного поля через поверхность	39
2.4.	Дивергенция векторного поля. Поток векторного поля через замкнутую поверхность. Формула Гаусса-Остроградского	43
2.5.	Циркуляция векторного поля. Ротор	48

3. Материалы для самостоятельной работы студентов

3.1.	Контрольные вопросы	53
3.2.	Задачи и упражнения для самостоятельной работы	55
3.3.	Расчетные задания	59
3.4.	Список литературы	70

УЧЕБНО - МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

РАЗДЕЛ 8 «ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ»

1. Теоретические основы

1.1. СКАЛЯРНОЕ И ВЕКТОРНОЕ ПОЛЯ ИСХОДНЫЕ ПОНЯТИЯ

Понятие поля лежит в основе многих представлений современной физики. Изложим элементы того математического аппарата, которым приходится пользоваться при изучении физических полей.

Математическая теория поля изучает два типа полей – скалярные и векторные. Полем называют часть пространства (двух, трех или n измерений), с каждой точкой которого связано определенное значение некоторой физической величины. Если физическая величина скалярная, то поле называется скалярным, а если векторная, то векторным.

Говорят, что в области G задано скалярное поле, если указан закон, в силу которого каждой точке M этой области поставлено в соответствие определенное число $U(M)$, иначе, если задана числовая функция точки $U = U(M)$. Если каждой точке $M \in G$ поставлен в соответствие вектор $\vec{a}(M)$, то говорят, что в области G задано векторное поле, определяемое векторной функцией $\vec{a} = \vec{a}(M)$.

Примерами скалярных полей могут служить поле температур внутри нагретого тела (в каждой точке пространства, занятого телом, которое имеет определенное значение), внутри некоторого помещения, в котором имеются источники тепла, поле освещенности, создаваемое каким-либо источником света, поле плотности массы внутри неоднородного твердого тела. Поле электростатического потенциала вокруг электрического заряда и т.д.

Примеры векторных полей: поле скоростей потока жидкости (любая частица жидкости, протекающая через точку M области G , имеет один и тот же вектор скорости $\vec{a}(M)$), поле тяготения (на материальную точку, помещенную в точку M , действует некоторая гравитационная сила), поле напряженности вокруг тела, заряженного электричеством.

Скалярное или векторное поле называется стационарным, если рассматриваемая величина зависит только от положения точки в пространстве, но не зависит от времени. Если величина зависит также и от времени, то поле называется нестационарным. В дальнейшем будем изучать только стационарные поля.

Если выбрана некоторая декартова система координат, то задание скалярного поля эквивалентно, заданию функции трех переменных

$$U(M) = U(x, y, z)$$

в пространстве или заданию функции двух переменных

$$U(M) = U(x, y)$$

на плоскости; в этом случае поле $U(M)$ называется плоским. Функцию $U(M)$ предполагаем непрерывной и имеющей в рассматриваемой области непрерывные частные производные первого порядка по x, y, z .

Чтобы задать векторное поле, надо знать проекции переменного вектора на оси координат. Так как эти проекции, в свою очередь, зависят от положения

точки в пространстве (то есть от координат x, y, z), то поле определяется векторной функцией

$$\bar{a} = \bar{a}(M) = a_x(x, y, z)\bar{i} + a_y(x, y, z)\bar{j} + a_z(x, y, z)\bar{k}.$$

Функции a_x, a_y, a_z трех переменных – координат вектора $\bar{a}$ – считаем непрерывно дифференцируемыми в рассматриваемой области.

1.2. ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ УРОВНЯ. ВЕКТОРНЫЕ ЛИНИИ И ТРУБКИ

Задание функции $U(M)$ и $\bar{a}(M)$ в системе координат не всегда дает достаточно ясное представление о поведении поля. Для получения наглядной картины пользуются геометрическими характеристиками. Простейшими геометрическими характеристиками полей являются линии, поверхности уровня и векторные трубки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Поверхностью уровня* пространственного скалярного поля $U = U(M)$ называется множество точек M , в которых функция этого поля принимает одно и то же числовое значение C .

Поверхность уровня определяется уравнением

$$U(x, y, z) = C. \quad (1.1)$$

Придавая в уравнении (1.1) параметру C различные значения $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$, получим совокупность поверхностей, на каждой из которых физическое явление протекает одинаково.

ПРИМЕР 1.1. Для поля $U(M) = x^2 + y^2 - z$ поверхности уровня определяются уравнением

$$x^2 + y^2 - z = C;$$

это семейство параболоидов вращения, осью которых служит ось Oz и вершины которых расположены на ней в точках $(0; 0; C)$ (рис. 1.1).

Взаимное расположение поверхностей уровня дает наглядное представление о поле. Такой способ изображения поля особенно удобен тогда, когда оно плоское.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. *Линией уровня* плоского поля $U = U(x, y)$ называется множество точек C , в которых функция имеет одинаковые значения.

Согласно определению линия уровня имеет уравнение

$$U(x, y) = C.$$

Распределение температур, давлений и т.д. обычно изображается на картах с помощью соответствующих линий уровня, называемых изотермами (линии равной температуры), изобарами (линии одинакового давления) эквипотенциальными линиями (линии равного потенциала).

ПРИМЕР 1.2. Для плоского поля

$$U(x, y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$$

семейство линий уровня задается уравнением

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = C, \quad (C \geq 0).$$

Это эллипсы с полуосями $3\sqrt{C}$ и $2\sqrt{C}$ (рис. 1.2).

При $C = 0$ линия уровня выродилась в точку $O(0;0)$.

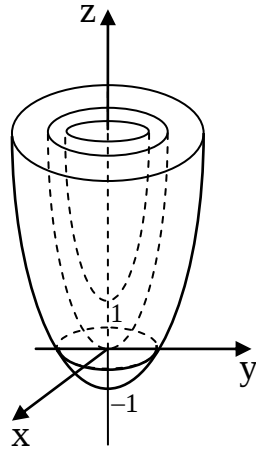


Рис. 1.1

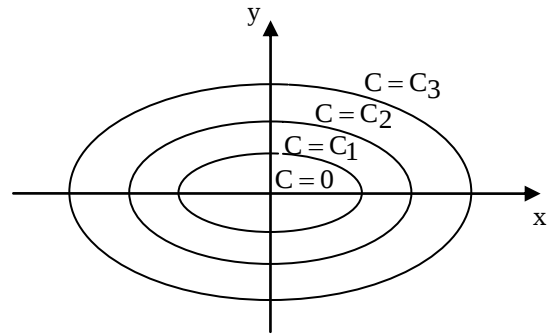


Рис. 1.2

Через каждую точку проходит одна поверхность (линия) уровня; они заполняют всю область G и не пересекаются между собой.

Информацию о структуре векторного поля дают векторные линии и трубки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. *Векторной линией* поля $\bar{a} = \bar{a}(M)$ называется такая линия, у которой касательная в каждой точке M совпадает с вектором $\bar{a}(M)$ (рис. 1.3).

В поле скоростей при стационарном течении жидкости векторными линиями, очевидно, являются траектории частиц жидкости; называются они в этом случае линиями тока.

Пусть уравнения искомой линии таковы:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Тогда вектор касательной $\bar{\tau}$ в произвольной точке $M(x, y)$ этой линии имеет вид

$$\bar{\tau} = \frac{dx}{dt} \bar{i} + \frac{dy}{dt} \bar{j} + \frac{dz}{dt} \bar{k}.$$

По определению векторной линии, вектор $\bar{\tau}$ коллинеарен вектору $\bar{a}(M)$. Поэтому одноименные координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt}.$$

$$a_x \quad a_y \quad a_z$$

Следовательно, семейство векторных линий поля $\vec{a}(M)$ определяется дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z)}. \quad (1.2)$$

В случае плоского поля векторные линии удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z)}, \quad dz = 0. \quad (1.3)$$

ПРИМЕР 1.3. Найти линию тока плоского потока жидкости, характеризуемого вектором скорости $\vec{a}(M) = xy\vec{i} - 2x(x-1)\vec{j}$.

Дифференциальное уравнение векторных линий в данном случае таково:

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-2x(x-1)}, \quad dz = 0.$$

Интегрируя уравнение с разделяющимися переменными

$$y dy = -2(x-1)dx,$$

Получим

$$\frac{y^2}{2} = -(x-1)^2 + C \quad \text{или} \quad (x-1)^2 + \frac{y^2}{2} = C, \quad (C \geq 0), \quad C_1 = z$$

Введем еще одно понятие – векторной трубки. Пусть в векторном поле задан замкнутый контур C ; проводя через его точки векторные линии, получим поверхность, называемую **векторной трубкой**. Сечением δ векторной трубки называется часть секущей поверхности, лежащая внутри трубки (рис. 1.4).

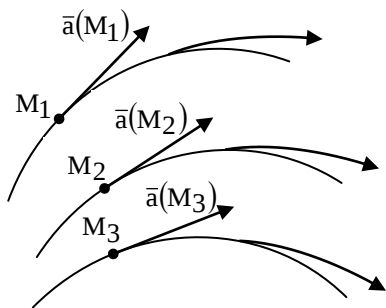


Рис. 1.3

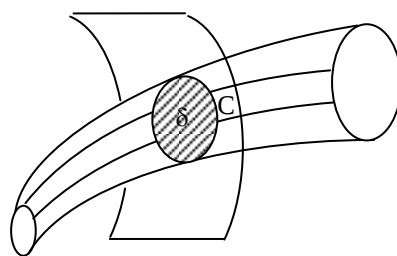


Рис. 1.4

1.3. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

При перемещении точки скалярного поля $M(x, y, z)$ в точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ вдоль кривой поверхности уровня значение функции не изменяется. При движении вдоль кривой L , соединяющей точки на различных поверхностях уровня, значение функции меняется с той или иной быстротой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Отношение приращения функции U к длине дуги $\cup MM_1$ называется средней скоростью изменения функции $U(x, y, z)$ вдоль дуги $\cup MM_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Предел, к которому стремится отношение $\frac{U(M_1) - U(M)}{\cup MM_1} = \frac{\Delta U}{\cup MM_1}$, когда точка M_1 , двигаясь вдоль дуги L , стремится к точке M , называется производной по дуге L :

$$\lim_{M_1 \rightarrow M \text{ вдоль } L} \frac{U(M_1) - U(M)}{\cup MM_1} = \lim_{M_1 \rightarrow M \text{ вдоль } L} \frac{\Delta U}{\cup MM_1} = \frac{\partial U}{\partial L}. \quad (1.4)$$

Найдем аналитическое выражение для производной по направлению. Пусть функция $U = U(x, y, z)$ дифференцируема. Запишем полное приращение функции ΔU .

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \Delta z + \delta,$$

где δ - бесконечно малая величина высшего порядка малости, чем $r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

В силу (1.4) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial L} &= \lim_{M_1 \rightarrow M \text{ вдоль } L} \frac{\frac{\partial U}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \Delta z + \delta}{\cup MM_1} = \frac{\partial U}{\partial x} \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{\Delta x}{\cup MM_1} + \\ &+ \frac{\partial U}{\partial y} \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{\Delta y}{\cup MM_1} + \frac{\partial U}{\partial z} \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{\Delta z}{\cup MM_1} + \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{\delta}{\cup MM_1}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

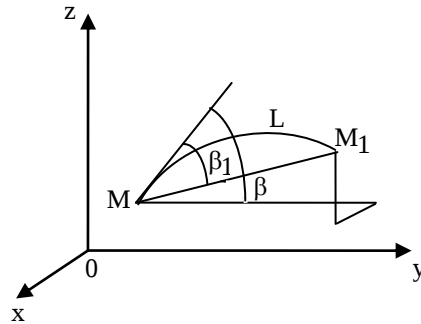


Рис. 1.5

Рассмотрим

$$\lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{\Delta y}{\cup MM_1} = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{\Delta y}{|MM_1|} \cdot \frac{|MM_1|}{\cup MM_1}, \quad \text{где}$$

$|MM_1|$ - длина хорды, стягивающей дугу $\cup MM_1$.

Так как кривая гладкая, то есть имеющая непрерывно меняющуюся касательную, то $\lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{|MM_1|}{|MM_1|} = 1$, а $\frac{\Delta y}{|MM_1|} = \cos \beta_1$, где β_1 - угол между хордой и осью Oy . При $M_1 \rightarrow M$ угол $\beta_1 \rightarrow \beta$, где β - угол между касательной и осью Oy . Тогда

$$\lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{\Delta y}{|MM_1|} = \cos \beta. \quad (1.6)$$

Рассуждая аналогично, получим

$$\lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{\Delta x}{|MM_1|} = \cos \alpha; \quad (1.7)$$

$$\lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{\Delta z}{|MM_1|} = \cos \gamma. \quad (1.8)$$

Найдем

$$\lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{\delta}{|MM_1|} = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{\delta}{|MM_1|} \cdot \frac{|MM_1|}{|MM_1|} = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{\delta}{|MM_1|} = 0. \quad (1.9)$$

Подставляя в (1.5), (1.6) – (1.9), получим формулу для вычисления производной по дуге

$$\frac{\partial U}{\partial L} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma, \quad (1.10)$$

где α, β, γ - углы между касательным вектором к L и осями координат.

Производная по дуге L в точке M не зависит от вида дуги, а зависит от направления касательного вектора $\bar{b}$ к L в точке M . Это значит, что производные по дугам L_1 и L_2 , проходящим через точку M и имеющим в этой точке один и тот же касательный вектор, равны между собой.

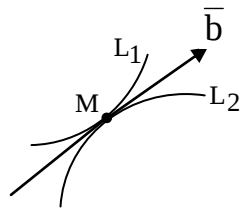


Рис. 1.6

$$\left. \frac{\partial U}{\partial L_1} \right|_M = \left. \frac{\partial U}{\partial L_2} \right|_M. \quad (1.11)$$

В силу (1.11) можно говорить о производной не по дуге, а по направлению $\bar{b}$, то есть

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{b}} = \frac{\partial U}{\partial L} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma. \quad (1.12)$$

Если $\frac{\partial U}{\partial \bar{b}} > 0$, то функция U возрастает в направлении вектора $\bar{b}$.

1.4. ГРАДИЕНТ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Правую часть (1.12) можно рассматривать как скалярное произведение двух векторов следующего вида:

Первый вектор $\frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k}$ - называется градиентом скалярного поля и обозначается

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k}. \quad (1.13)$$

Второй вектор $\cos \alpha \cdot \bar{i} + \cos \beta \cdot \bar{j} + \cos \gamma \cdot \bar{k}$ - единичный вектор того же направления, что и вектор $\bar{b}$:

$$\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} = \cos \alpha \cdot \bar{i} + \cos \beta \cdot \bar{j} + \cos \gamma \cdot \bar{k}. \quad (1.14)$$

По определению скалярного произведения имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \bar{b}} &= \text{grad } U \cdot \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} = |\text{grad } U| \cdot \left| \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} \right| \cos(\text{grad } U, \bar{b}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \bar{b}} &= |\text{grad } U| \cdot \cos(\text{grad } U, \bar{b}) \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\text{или } \frac{\partial U}{\partial \bar{b}} = \text{pr}_{\bar{b}} \text{ grad } U. \quad (1.16)$$

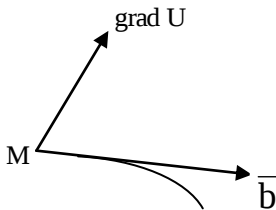


Рис. 1.7

Итак, производная по направлению равна проекции градиента на это направление (рис. 1.7).

Если направление $\text{grad } U$ совпадает с направлением вектора $\bar{b}$, то $\cos(\text{grad } U, \bar{b}) = 1$ и производная по направлению принимает наибольшее значение, равное $|\text{grad } U|$, то есть

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{b}} = |\text{grad } U|.$$

Наибольшая скорость изменения функции U в точке M равна

$$|\text{grad } U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}. \quad (1.17)$$

Производная по направлению вектора, перпендикулярного к вектору $\text{grad } U$, равна нулю, так как $\cos(\text{grad } U, \bar{b}) = 0$.

Рассмотрим основные свойства градиента:

1. Градиент в данной точке поля направлен по нормали к поверхности уровня в этой точке.

Доказательство. На поверхности уровня поля $U(x, y, z) = 0$ возьмем какую-нибудь точку $M(x, y, z)$ и произвольно проведем через нее линию L , расположенную на поверхности (рис. 1.8).

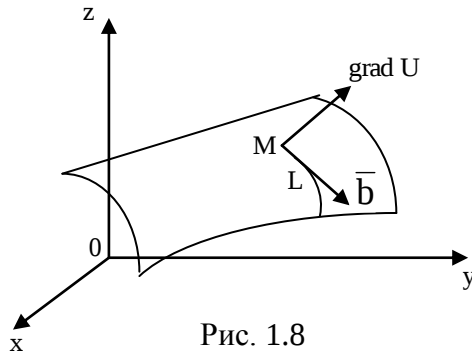


Рис. 1.8

Так как функция постоянна на L и $\bar{b}$ - касательный вектор к L в точке M , то $\frac{\partial U}{\partial L} = 0$.

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{b}} = \frac{\partial U}{\partial L} = 0; \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial U}{\partial L} = |\text{grad } U| \cdot \cos(\angle \text{grad } U, \bar{b}).$$

С учетом (1.18) получим, что $|\text{grad } U| \cdot \cos(\angle \text{grad } U, \bar{b}) = 0$, но

$|\text{grad } U| \neq 0 \Rightarrow \cos(\angle \text{grad } U, \bar{b}) = 0$; это значит, вектор $\text{grad } U \perp \bar{b}$. Градиент в

данной точке поля направлен по нормали к поверхности уровня.

2. Градиент алгебраической суммы скалярных функций равен сумме градиентов:

$$\text{grad}(U + V) = \text{grad } U + \text{grad } V.$$

Справедливость данного свойства вытекает непосредственно из его определения.

3. Градиент произведения скалярных функций

$$\text{grad}(U \cdot V) = U \cdot \text{grad } V + V \cdot \text{grad } U.$$

ПРИМЕР 1.4. Найти $\text{grad}(\bar{r} \cdot \bar{a})$, где $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$ - постоянный вектор, а $\bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$ - радиус-вектор точки.

Решение. Найдем скалярное произведение векторов:

$$\bar{r} \cdot \bar{a} = x \cdot a_x + y \cdot a_y + z \cdot a_z = U.$$

Определим $\frac{\partial U}{\partial x} = a_x$; $\frac{\partial U}{\partial y} = a_y$; $\frac{\partial U}{\partial z} = a_z$ и по формуле (1.13) опре-

делим

$$\text{grad}(\bar{r} \cdot \bar{a}) = \text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \bar{k} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$$

(сохраняет во всех точках поля одинаковое направление, совпадающее с направлением вектора $\vec{a}$, так что поверхностями уровня скалярного произведения $\vec{r} \cdot \vec{a}$ являются плоскости, перпендикулярные вектору $\vec{a}$) (рис. 1.9)

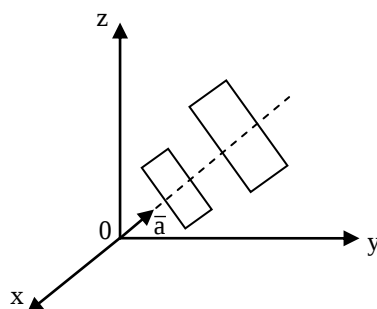


Рис. 1.9

1.5. ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ И ЕГО ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА

Для изучения векторного поля введены интегральные характеристики; некоторые из них выражаются через поверхностные интегралы. Теория поверхностного 1-го рода (интеграла по площади поверхности) рассмотрена в [1]. Здесь будет дано определение поверхностного интеграла 2-го рода (интеграла по координатам), в связи с чем введем сначала понятие стороны поверхности.

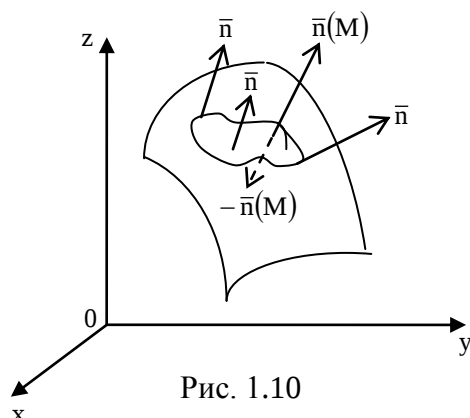


Рис. 1.10

Пусть σ - гладкая поверхность (поверхность называется гладкой, если она обладает непрерывно изменяющейся нормалью). Возьмем на ней точку M , проведем через нее нормаль σ и выберем на этой нормали одно из двух возможных направлений: $\vec{n}(M)$ и $-\vec{n}(M)$ (рис.1.10). Проведем на поверхности σ через точку M какой-либо замкнутый контур L , не имеющий общих точек с границей поверхности и будем передвигать вектор $\vec{n}$ из точки M вдоль L .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Гладкая поверхность называется двусторонней, если при обходе по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности и не имеющему общих точек с ее границей, вектор нормали $\vec{n}$ возвращается в исходную точку с тем же направлением $\vec{n}(M)$.

Если же в результате обхода по какому-либо контуру L вектор $\vec{n}$ меняет свое направление на противоположное, то поверхность называется односторонней.

Двусторонней является, например, всякая замкнутая поверхность (она имеет внешнюю и внутреннюю стороны), всякая поверхность, задаваемая уравнением $z = f(x, y)$, имеющая внешнюю и внутреннюю стороны (сфера, эллипсоид, параболоид и т.д.). Примером односторонней поверхности является лист Мёбиуса (прямоугольный лист $ABCD$, перекрученный один раз и склеенный

по линии AB и DC) (рис. 1.11). При обходе листа Мёбиуса по его средней линии направление нормали $\bar{n}(M)$ к нему меняется на противоположное.

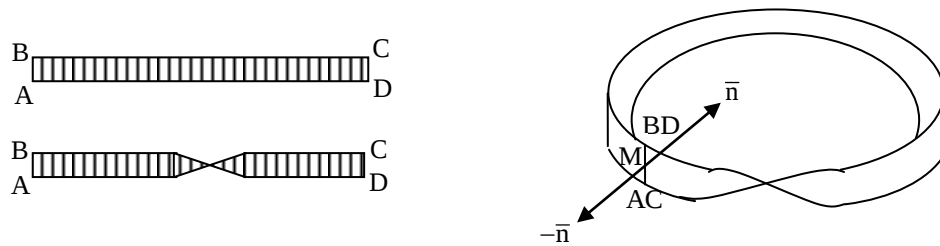


Рис. 1.11

Выбор определенной стороны поверхности, то есть выбор одного из двух направлений $\bar{n}$ или $-\bar{n}$, называется ориентацией поверхности. Условимся сторону поверхности называть положительно ориентированной, если нормаль к поверхности образует с положительным направлением координатной оси Oz острый угол, и отрицательно ориентированной, если этот угол тупой, и обозначать ее σ^+ и σ^- соответственно.

Поверхностный интеграл 2-го рода можно определить непосредственно, то есть с помощью интегральных сумм, как это делалось прежде при введении всех типов интегралов. Определим поверхностный интеграл 2-го рода, опираясь на понятие поверхностного интеграла 1-го рода.

Пусть в каждой точке M гладкой ориентированной поверхности σ определена и непрерывна функция $\Phi(M) = \Phi(x, y, z)$. Направляющие косинусы вектора $\bar{n}(M)$ предполагаются непрерывными функциями координат точек

поверхности. Обозначим через $\left(\bar{n}, z\right)^{\wedge}$ - угол между нормалью $\bar{n}$ и осью Oz , а

через $\left(\bar{n}, y\right)^{\wedge}$, $\left(\bar{n}, x\right)^{\wedge}$ - угол между нормалью и осями Oy и Ox соответственно.

Рассмотрим поверхностные интегралы 1-го рода от функции $\Phi(x, y, z)\cos\left(\bar{n}, z\right)^{\wedge}$ и $\Phi(x, y, z)\cos\left(-\bar{n}, z\right)^{\wedge}$. Они существуют, поскольку подынтегральные функции непрерывны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Интеграл 1-го рода $\iint_{\sigma} \Phi(x, y, z)\cos\left(\bar{n}, z\right)^{\wedge} d\sigma$ и

$\iint_{\sigma} \Phi(x, y, z)\cos\left(-\bar{n}, z\right)^{\wedge} d\sigma$ назовем поверхностным интегралом 2-го рода, рас-

пространенным на выбранную сторону поверхности, и будем обозначать соответственно $\iint_{\sigma^+} \Phi(x, y, z) dx dy$, $\iint_{\sigma^-} \Phi(x, y, z) dx dy$.

Итак,

$$\left. \begin{aligned} \iint_{\sigma^+} \Phi(x, y, z) dx dy &= \iint_{\sigma} \Phi(x, y, z) \cos\left(\hat{\bar{n}}, z\right) d\sigma \\ \iint_{\sigma^-} \Phi(x, y, z) dx dy &= \iint_{\sigma} \Phi(x, y, z) \cos\left(-\hat{\bar{n}}, z\right) d\sigma \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Выделим специфическое свойство интеграла 2-го рода. Так как $\left(\hat{\bar{n}}, z\right) + \left(-\hat{\bar{n}}, z\right) = \pi$, то $\cos\left(-\hat{\bar{n}}, z\right) = \cos\left(\pi - \left(\hat{\bar{n}}, z\right)\right) = -\cos\left(\hat{\bar{n}}, z\right)$. Поэтому $\iint_{\sigma^-} \Phi(x, y, z) dx dy = -\iint_{\sigma^+} \Phi(x, y, z) dx dy$.

Значит, интегралы, взятые по разным сторонам поверхности, отличаются друг от друга только знаком. В остальных свойствах интеграла 2-го рода аналогичны свойствам интеграла 1-го рода.

Заметим, когда из контекста ясна ориентация поверхности, то вместо записи (1.19) используют запись $\iint_{\sigma} \Phi(x, y, z) dx dy$.

Аналогично определяются интегралы

$$\iint_{\sigma} \Phi(x, y, z) dy dz = \iint_{\sigma} \Phi(x, y, z) \cos\left(\hat{\bar{n}}, x\right) d\sigma, \quad (1.20)$$

$$\iint_{\sigma} \Phi(x, y, z) dx dz = \iint_{\sigma} \Phi(x, y, z) \cos\left(\hat{\bar{n}}, y\right) d\sigma. \quad (1.21)$$

Покажем, что поверхностный интеграл 2-го рода, как и интеграл 1-го рода, вычисляется сведением его к двойному интегралу.

Пусть гладкая поверхность σ задана уравнением $z = z(x, y)$, причем берется верхняя сторона σ^+ . Тогда координаты нормали $\bar{n}$ таковы:

$$\bar{n} = \{-Z'_x; -Z'_y; 1\}.$$

По известной формуле найдем

$$\cos\left(\hat{\bar{n}}, z\right) = \frac{\bar{n} \cdot \bar{k}}{|\bar{n}| \cdot |\bar{k}|} = \frac{1}{\sqrt{Z'^2_x + Z'^2_y + 1}} > 0.$$

Воспользовавшись правилом вычисления интеграла 1-го рода [1], исходя из (1.20), получаем

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma^+} \Phi(x, y, z) dx dy &= \iint_{\sigma} \Phi(x, y, z) \cos\left(\hat{\bar{n}}, z\right) d\sigma = \\ &= \iint_{D_{xy}} \Phi(x, y, z(x, y)) \frac{1}{\sqrt{1 + Z'^2_x + Z'^2_y}} \cdot \sqrt{1 + Z'^2_x + Z'^2_y} dx dy = \end{aligned}$$

$$= \iint_{D_{xy}} \Phi(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

Таким образом, чтобы поверхностный интеграл $\iint_{\sigma} \Phi(x, y, z) dx dy$, взятый по верхней стороне поверхности σ , определенной уравнением $z = z(x, y)$, преобразовать в двойной, следует в подынтегральную функцию вместо z поставить соответствующую функцию $z(x, y)$, а интегрирование по поверхности σ^+ заменить интегрирование по ее проекции D_{xy} на плоскость xOy :

$$\iint_{\sigma} \Phi(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} \Phi(x, y, z(x, y)) dx dy. \quad (1.22)$$

Если интеграл берется по нижней стороне σ^- поверхности σ , то, в силу указанного свойства, имеем

$$\iint_{\sigma^-} \Phi(x, y, z) dx dy = - \iint_{D_{xy}} \Phi(x, y, z(x, y)) dx dy. \quad (1.23)$$

Аналогично получаются формулы

$$\iint_{\sigma} \Phi(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} \Phi(x(y, z), y, z) dy dz; \quad (1.24)$$

$$\iint_{\sigma} \Phi(x, y, z) dz dx = \pm \iint_{D_{zx}} \Phi(x, y(x, z), z) dz dx. \quad (1.25)$$

В формуле (1.24) под σ понимается поверхность, заданная уравнением $x = x(y, z)$, в формуле (1.25) – поверхность, заданная уравнением $y = y(x, z)$. Знак плюс берется в том случае, когда нормаль поверхности образует с осью Ox (соответственно с осью Oy) острый угол, знак минус, когда этот угол тупой; D_{yz} и D_{zx} – проекции поверхности σ на плоскости yOz и zOx соответственно.

Формулами 1.22 - 1.25 можно пользоваться и в том случае, когда ориентированная поверхность σ состоит из нескольких кусков $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. Тогда рассматриваемый интеграл следует представить как сумму интегралов, отвечающих этим кускам, и затем к каждому из слагаемых применить одну из приведенных формул.

В приложениях чаще всего встречаются соединениями (сумма) интегралов всех видов 1.19 – 1.21 от различных функций $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, заданных на выбранной стороне поверхности σ :

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy. \quad (1.26)$$

Итак, связь между интегралами 1-го и 2-го рода определяется формулой

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy =$$

$$= \iint_{\sigma} \left(P \cos \left(\hat{\vec{n}}, x \right) + Q \cos \left(\hat{\vec{n}}, y \right) + R \cos \left(\hat{\vec{n}}, z \right) \right) d\sigma. \quad (1.27)$$

Или в других обозначениях:

$$\iint_{\sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iint_{\sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma. \quad (1.28)$$

Поверхностный интеграл 2-го рода (1.26) называют также потоком векторного поля

$$\bar{a}(\mathbf{M}) = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$$

через поверхность σ .

1.6. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим теперь важное понятие потока векторного поля. Пусть поле определено векторной функцией $\bar{a} = \bar{a}(\mathbf{M})$. Для наглядности будем считать $\bar{a}$ вектором скорости стационарного потока движущейся жидкости. В этом случае скорость $\bar{a}$ частицы жидкости зависит только от координат точки $\mathbf{M}$

$$\bar{a} = a_x(x, y, z)\bar{i} + a_y(x, y, z)\bar{j} + a_z(x, y, z)\bar{k}.$$

Вычислим количество жидкости, протекающей через некоторую поверхность σ за единицу времени, считая плотность $\rho = 1$. С этой целью разобьем поверхность σ на элементарные площадки $\Delta\sigma_i$ и рассмотрим векторную трубку поля $\bar{a}(\mathbf{M})$, проходящую через элемент $\Delta\sigma_i$ (рис. 1.12). Как это обычно делается в интегральном исчислении, каждую площадку $\Delta\sigma_i$ будем считать плоской, а вектор $\bar{a}$ - постоянным по модулю и одинаково направленным в каждой точке площадки.

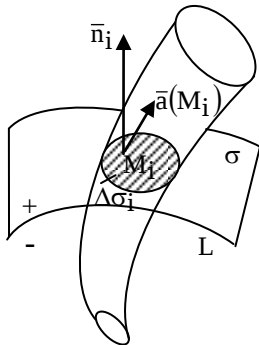


Рис.1.12

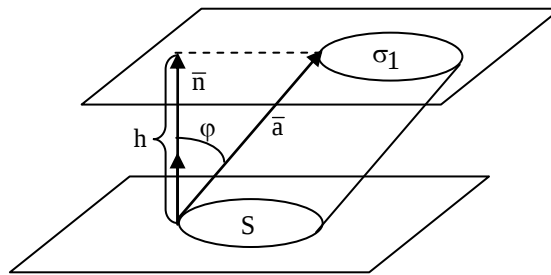


Рис. 1.13

В таком случае за единицу времени частицы жидкости, лежащие на площадке σ (рис. 1.13) переместятся в направлении вектора $\bar{a}$ на расстояние, равное его длине, и расположатся на площадке σ_1 . Количество жидкости Π , которое за единицу времени пройдет через площадку σ , численно равно объему цилиндра с основанием S и образующей $\bar{a}$: $\Pi = S \cdot h$, где h - высота цилиндра. Так как

$$h = |\bar{a}| \cos \varphi = |\bar{n}^0| \cdot |\bar{a}| \cos \varphi = \bar{a} \cdot \bar{n}^0, \text{ то}$$

$$\Pi = (\bar{a}, \bar{n}^0) S \quad (1.29)$$

($\bar{n}^0$ - орт нормального вектора).

При этих предположениях количество жидкости $\Delta \Pi_i$, протекающей через $\Delta \sigma_i$, можно приближенно подсчитать по формуле (1.29)

$$\Delta \Pi_i \approx (\bar{a}_i, \bar{n}_i^0) \Delta \sigma_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где $\bar{a}_i = \bar{a}(M) = a_x(x_i, y_i, z_i)\bar{i} + a_y(x_i, y_i, z_i)\bar{j} + a_z(x_i, y_i, z_i)\bar{k}$,

$\bar{n}_i^0 = \cos \alpha_i \bar{i} + \cos \beta_i \bar{j} + \cos \gamma_i \bar{k}$ - единичный вектор нормали.

Суммируя эти выражения, найдем приближенное значение количества жидкости Π , протекающей через поверхность S за единицу времени:

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \Delta \Pi_i \approx \sum_{i=1}^n (\bar{a}_i, \bar{n}_i^0) \Delta \sigma_i.$$

Переходя к пределу при условии, что каждая часть $\Delta \sigma_i$ стягивается в точку ($n \rightarrow \infty$), находим точное значение количества жидкости:

$$\Pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\bar{a}_i, \bar{n}_i^0) \Delta \sigma_i.$$

Выражая скалярное произведение в координатной форме, получим

$$\Pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (a_x(x_i, y_i, z_i) \cos \alpha_i + a_y(x_i, y_i, z_i) \cos \beta_i + a_z(x_i, y_i, z_i) \cos \gamma_i) \Delta \sigma_i \quad (1.30)$$

Направляющие косинусы вектора $\bar{n}^0$, а также координаты a_x, a_y, a_z вектора $\bar{a}$ предполагаются непрерывными функциями. Поэтому скалярное произведение

$$(\bar{a}, \bar{n}^0) = a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma$$

есть непрерывная функция, определенная в точках поверхности σ . Следовательно, предел суммы (1.30) существует и равен интегралу по поверхности σ от функций $\bar{a} \cdot \bar{n}^0$:

$$\Pi = \iint_{\sigma} \bar{a} \cdot \bar{n}^0 d\sigma. \quad (1.31)$$

Итак, количество жидкости, протекающей в единицу времени через данную поверхность σ , или, как говорят, поток жидкости через эту поверхность, есть интеграл по поверхности (поверхностный интеграл 1-го рода) (1.31).

По аналогии с потоком текущей жидкости вводится понятие потока вектора

$$\bar{a}_i = a_x(x, y, z)\bar{i} + a_y(x, y, z)\bar{j} + a_z(x, y, z)\bar{k}$$

через поверхность σ . Предполагается, что в каждой точке этой поверхности определен единичный нормальный вектор $\bar{n}^0 = \cos \alpha \bar{i} + \cos \beta \bar{j} + \cos \gamma \bar{k}$, координаты

наты которого являются непрерывными функциями координат точки поверхности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Поток вектора $\vec{a}$ (или потоком векторного поля) через двустороннюю поверхность называется поверхностный интеграл от скалярного произведения вектора поля на единичный вектор нормали к поверхности

$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}^0 d\sigma. \quad (1.32)$$

Формуле (1.32) можно придать различные формы.

Будем называть векторной площадью элемента $d\sigma$ поверхности σ вектор $d\vec{\sigma} = \vec{n} d\sigma$, направленный по нормали $\vec{n}$, модуль которого численно равен площади $d\sigma$. Поэтому подынтегральное выражение в (1.32) можно представить в виде

$$\vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma = \vec{a}(\vec{n} d\sigma) = \vec{a} d\vec{\sigma}.$$

Тогда формула (1.32) примет вид

$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{a} d\vec{\sigma}. \quad (1.33)$$

Так как скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на единичный вектор $\vec{n}^0$ равен проекции вектора $\vec{a}$ на направление $\vec{n}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{n}^0 = |\vec{n}^0| \text{пр}_{\vec{n}} \vec{a} = \text{пр}_{\vec{n}} \vec{a} = a_n,$$

то поток можно записать в виде

$$\Pi = \iint_{\sigma} a_n d\sigma. \quad (1.34)$$

Записав скалярное произведение в координатной форме, из (1.32) получим формулу

$$\Pi = \iint_{\sigma} (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) d\sigma. \quad (1.35)$$

В силу известной связи поверхностного интеграла 1-го рода с интегралом 2-го рода (1.27) формуле (1.35) можно придать вид

$$\Pi = \iint_{\sigma} a_x dydz + a_y dxdz + a_z dxdy. \quad (1.36)$$

Вычисление поверхностных интегралов 1-го и 2-го рода, как было отмечено, сводится к вычислению двойных интегралов.

Особый интерес представляет тот случай, когда поверхность σ замкнута и ограничивает некоторый объем V . Тогда поток Π обозначается так:

$$\Pi = \oiint_{\sigma} \vec{a} d\vec{\sigma}, \quad \Pi = \oiint_{\sigma} a_n d\sigma, \quad \Pi = \oiint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}^0 d\sigma.$$

В случае замкнутой поверхности σ условимся в качестве $\vec{n}$ брать вектор внешней нормали. При этом говорят о потоке изнутри поверхности.

1.7. ФОРМУЛА ОСТРОГРАДСКОГО – ГАУССА

Для вычисления потока через внешнюю сторону замкнутой поверхности σ , ограничивающей объем V , удобно применять формулу Остроградского – Гаусса, в связи с чем приведем здесь формулировку теоремы (доказательство см. в [1], [3]).

Теорема. Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в ограниченной замкнутой области V , то имеет место формула

$$\oint_{\sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV. \quad (1.37)$$

Формула (1.37) называется формулой Остроградского – Гаусса.

1.8. ДИВЕРГЕНЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Пусть $\bar{a}$ – некоторое векторное поле. Поток векторного поля через замкнутую поверхность σ иногда называют производительностью той части пространства V , которая ограничена поверхностью σ . Это объясняется тем, что если векторное поле рассматривается как поле скоростей несжимаемой текущей жидкости, то поток Π через поверхность σ равен количеству жидкости «произведенной» внутри V . В самом деле, величина Π дает количество жидкости, протекающей в единицу времени с внутренней стороны σ на внешнюю. Поскольку жидкость несжимаема, то количество жидкости внутри объема V должно все время оставаться неизменным. Если $\Pi > 0$, то это значит, что из объема V вытекает больше жидкости, чем втекает. И наоборот, если $\Pi < 0$, то количество вытекающей жидкости меньше количества жидкости втекающей; значит, внутри V имеются стоки, поглощающие излишки жидкости. Однако возможно, что в обоих случаях внутри объема находятся и источники, и стоки, но при положительности потока общая обильность источников превосходит обильность стоков. А при отрицательности потока, наоборот, преобладают стоки. Поэтому величина потока Π характеризует обильность источников и стоков лишь суммарно.

Отношение потока вектора $\bar{a}$ к объему V , ограниченному поверхностью σ ,

$$\frac{\oint_{\sigma} \bar{a} d\bar{\sigma}}{V}$$

определяет среднюю производительность области V , иначе, если воспользоваться гидродинамической интерпретацией, среднюю обильность потока (плотность источников или стоков).

Переходя к пределу при условии, что область V стягивается в точку M , получим число, достаточно хорошо характеризующее «производительность» векторного поля в окрестности точки M . Это число называется дивергенцией поля $\bar{a}$ в точке M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Дивергенцией (или расходимостью) векторного поля $\bar{a}(M)$ в точке M называется предел отношения потока Π вектора $\bar{a}$ через поверхность, окружающую точку M , к объему, ограниченному этой поверхностью, при условии, что поверхность стягивается в точку M .

Дивергенция обозначается символически $\operatorname{div} \bar{a}(M)$. Итак, по определению,

$$\operatorname{div} \bar{a}(M) = \lim_{\substack{\sigma \rightarrow M \\ (V \rightarrow 0)}} \frac{\oiint \bar{a} d\sigma}{V}. \quad (1.38)$$

Подчеркнем, что дивергенция векторного поля есть величина скалярная.

Если $\operatorname{div} \bar{a}(M) < 0$, то точку M называют стоком. Дивергенция характеризует мощность источника (при $\operatorname{div} \bar{a}(M) > 0$) или стока (при $\operatorname{div} \bar{a}(M) < 0$).

Если в каждой точке некоторого объема V дивергенция вектора равна нулю ($\operatorname{div} \bar{a} = 0$), то, как следует из (1.38), $\Pi = 0$, а это значит, что количества жидкости вытекающей и втекающей равны. Следовательно, в области V нет ни источников, ни стоков.

Векторное поле $\bar{a} = \bar{a}(M)$, в каждой точке которого $\operatorname{div} \bar{a} = 0$, называется соленоидальным (или трубчатым).

1.9. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИВЕРГЕНЦИИ

Теорема 1.1. Если в области V определено векторное поле $\bar{a}(M) = a_x(x, y, z)\bar{i} + a_y(x, y, z)\bar{j} + a_z(x, y, z)\bar{k}$, такое, что функции a_x, a_y, a_z непрерывны в V вместе со своими частными производными, то $\operatorname{div} \bar{a}$ существует и вычисляется по формуле

$$\operatorname{div} \bar{a}(M) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Остроградского – Гаусса

$$\oiint_{\sigma} a_n d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dV.$$

Рассмотрим правую часть этой формулы. Пусть

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \varphi(x, y, z).$$

Перепишем формулу

$$\oiint_{\sigma} a_n d\sigma = \iiint_V \varphi(x, y, z) dV.$$

К тройному интегралу применим теорему о среднем, согласно которой имеем

$$\iiint_V \varphi(x, y, z) dV = \varphi(M_0) \cdot V,$$

где $M_0 \in V$. Следовательно,

$$\oiint_{\sigma} a_n d\sigma = \varphi(M_0) \cdot V,$$

откуда

$$\varphi(M_0) = \frac{\oiint_{\sigma} a_n d\sigma}{V}.$$

Переходя к пределу при условии, что область V стягивается в точку M , получим

$$\lim_{V \rightarrow 0} \varphi(M_0) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\sigma} a_n d\sigma}{V}.$$

Так как при этом $M_0 \rightarrow M$, то в силу непрерывности частных производных $\frac{\partial a_x}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial y}, \frac{\partial a_z}{\partial z}$ в точке M получим

$$\lim_{M_0 \rightarrow M} \varphi(M) = \varphi(M_0) = \varphi(x, y, z) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{div} \bar{a}(M) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (1.40)$$

Пользуясь выражением для дивергенции (1.40), формулу Остроградского – Гаусса можно записать в векторной форме

$$\oiint_{\sigma} a_n \cdot d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \bar{a} dV. \quad (1.41)$$

Поток вектора изнутри замкнутой поверхности равен тройному интегралу по объему, ограниченному этой поверхностью, от дивергенции поля.

$$\Pi = \iiint_V \operatorname{div} \bar{a} dV.$$

1.10. ФОРМУЛА СТОКСА

Для поверхностных интегралов имеет место формула, аналогичная формуле Грина (последняя, как было отмечено ранее в [1], определяет связь между двойным интегралом по области D и криволинейным интегралом по замкнутому контуру L , ограничивающему эту область), позволяющая свести вычисление интеграла по поверхности σ к вычислению криволинейного интеграла по контуру, ограничивающему эту поверхность.

Теорема 1.2. Пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой трехмерной области. Тогда для любой гладкой поверхности σ , лежащей в этой области, имеет место формула

$$\iint_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma =$$

$$= \oint_L P dx + Q dy + R dz, \quad (1.42)$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ - направляющие косинусы нормали $\bar{n}$ к поверхности σ , а L - граница поверхности (рис. 1.14).

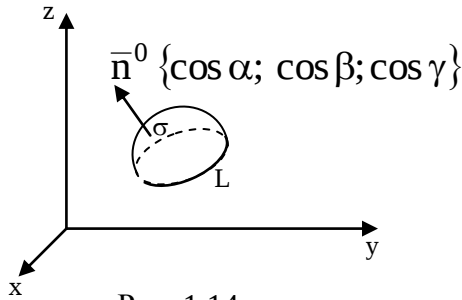


Рис. 1.14

Формула (1.42) называется формулой Стокса. Доказательство этой теоремы не приводим. Читателя отсылаем к [1]. Формула Стокса позволяет интеграл по поверхности σ заменить криволинейным интегралом по границе L этой поверхности и, наоборот, криволинейный интеграл по замкнутой пространственной линии L заменить интегралом, по поверхности σ , «натянутой» на контур интегрирования.

Воспользовавшись формулой (1.27) связи поверхностного интеграла 1-го рода с интегралом 2-го рода, формулу Стокса можно записать в виде

$$\iint_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial z} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) dx dy =$$

$$= \oint_L P dx + Q dy + R dz. \quad (1.43)$$

1.11. ЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Пусть поле образовано вектором

$$\bar{a}(M) = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}.$$

Возьмем в этом поле некоторую линию L и установим на ней начальную точку A и конечную точку B . Пусть $\bar{\tau}^0(M)$ - орт касательной в точке M кривой L . Разобьем кривую L произвольным образом на n элементарных дуг длиной ΔL_i ($i = \overline{1, n}$) в направлении от A к B и на каждой из них выберем точку M_i (рис. 1.15). Для i -й элементарной дуги составим скалярное произведение

$$\bar{a}(M_i) \cdot \bar{\tau}^0(M_i) \Delta L_i,$$

а затем просуммируем эти произведения по всем i :

$$\sum_{i=1}^n \bar{a}(M_i) \cdot \bar{\tau}^0(M_i) \Delta L_i.$$

Составленная сумма является интегральной суммой для функции $\bar{a}(M) \cdot \bar{\tau}^0(M)$ по кривой L . Предел ее при условии, что $\max \Delta L_i \rightarrow 0$, является криволинейным интегралом 1-го рода по дуге L .

$$\int_L \bar{a} \cdot \bar{\tau}^0 dL. \quad (1.44)$$

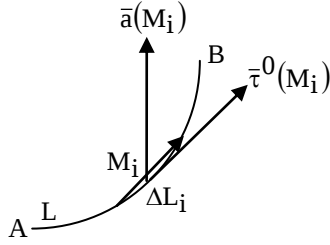


Рис. 1.15

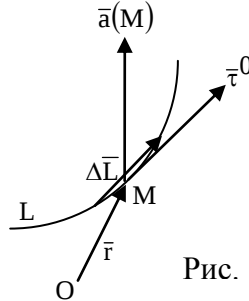


Рис. 1.16

Введем в рассмотрение векторный элемент $d\bar{L} = \bar{\tau}^0 dL$ линии L , определяемый как вектор, имеющий направление касательной к линии и модуль, равный дифференциалу длины дуги ($|d\bar{L}| = dL$). Но дифференциал длины дуги, известно, равен дифференциалу радиус – вектора $\bar{r}$ точки M кривой L (рис. 1.16). Тогда

$$\bar{a} \cdot \bar{\tau}^0 dL = \bar{a} \cdot (\bar{\tau}^0 \cdot dL) = \bar{a} d\bar{L} = \bar{a} d\bar{r}.$$

С другой стороны, $\bar{a} \cdot \bar{\tau}^0 = |\bar{\tau}^0| \text{пр}_{\bar{\tau}^0} \bar{a} = \text{пр}_{\bar{\tau}^0} \bar{a} = \bar{a}_\tau$. Поэтому криволинейному интегралу (1.44) можно придать одну из следующих форм:

$$\int_L \bar{a} \cdot \bar{\tau}^0 dL = \int_L \bar{a} d\bar{L} = \int_L \bar{a} d\bar{r} = \int_L \bar{a}_\tau dL. \quad (1.45)$$

Линейным интегралом W поля $\bar{a}(M)$ вдоль линии L называется криволинейный интеграл от скалярного произведения $\bar{a}(M)$ на единичный касательный вектор $\bar{\tau}^0(M)$ к линии L :

$$W = \int_L \bar{a} \cdot \bar{\tau}^0 dL = \int_L \bar{a} d\bar{r}. \quad (1.46)$$

Учитывая, что $d\bar{r} = d\bar{L} = dx \bar{i} + dy \bar{j} + dz \bar{k}$, линейный интеграл можно записать в координатной форме:

$$W = \int_L a_x dx + a_y dy + a_z dz. \quad (1.47)$$

Если $\bar{a} = \bar{a}(M)$ - силовое поле, то линейный интеграл (1.47) выражает работу при перемещении материальной точки вдоль линии L (см. [1], [2]).

Если $\bar{a}(M)$ - произвольное векторное поле, а L - замкнутый контур, то интеграл (1.46) или (1.47) носит специальное название – циркуляция вектора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.10. Линейный интеграл вектора $\vec{a}$, взятый по замкнутому контуру L , называется циркуляцией векторного поля по данному контуру и обозначается символом

$$\Gamma = \oint_L \vec{a} d\vec{r}. \quad (1.48)$$

Направление обхода контура указывается заранее, причем положительным считается обход против часовой стрелки, а отрицательным – по часовой стрелке.

Для силового поля $\vec{a} \{a_x, a_y, a_z\}$ циркуляции представляет работу этого поля вдоль контура L . Для полей иной природы циркуляция имеет другой физический смысл.

ПРИМЕР 1.5. Рассмотрим поле линейных скоростей твердого тела, вращающегося вокруг оси с постоянной угловой скоростью ω_0 . Вычислим циркуляцию вектора скорости $\vec{V}$ по произвольной линии L , лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси вращения.

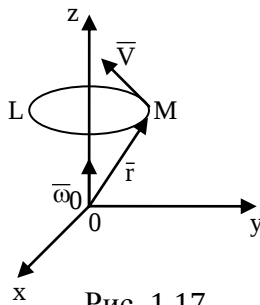


Рис. 1.17

Не уменьшая общности рассуждений, можно считать, что ось вращения совпадает с осью Oz (рис. 1.17). Из кинематики известно, что линейная скорость $\vec{V}$ равна векторному произведению

$$\vec{V} = \vec{\omega}_0 \times \vec{r},$$

где $\vec{\omega}_0$ – вектор угловой скорости, то есть вектор, отложенный на оси вращения, по модулю равный величине угловой скорости (этот вектор направлен так, что если смотреть из его конца, вращение кажется происходящим против часовой стрелки), а $\vec{r}$ – радиус – вектор точки $M(x, y, z)$ вращающегося твердого тела.

Имеем $\vec{\omega} = \omega_0 \vec{k}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, тогда

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega_0 y \vec{i} + \omega_0 x \vec{j}.$$

Таким образом, $V_x = -\omega_0 y$, $V_y = \omega_0 x$, $V_z = 0$.

Скорость $\vec{V}$ каждой точки M вращающегося тела зависит от положения этой области.

Согласно определению, циркуляция Γ равна

$$\Gamma = \oint_L -\omega_0 y dx + \omega_0 x dy.$$

Для вычисления этого интеграла применим теорему Стокса, приняв в качестве σ плоскую область, ограниченную кривой L ; тогда нормаль к поверхности совпадает с вектором $\vec{k}$ и поэтому $\cos \alpha = \cos \beta = 0$, $\cos \gamma = 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\Omega &= \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \cos \gamma d\sigma = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial(\omega_0 x)}{\partial x} - \frac{\partial(-\omega_0 y)}{\partial y} \right) d\sigma = \\ &= \omega_0 \iint_{\sigma} (1 + 1) d\sigma = 2\omega_0 \iint_{\sigma} d\sigma = 2\omega_0 \cdot \sigma.\end{aligned}$$

Таким же образом можно установить, что если замкнутый контур L лежит в плоскости, параллельной вращению, то $\oint_L \bar{a} d\bar{L} = 0$.

1.12. ПЛОТНОСТЬ ЦИРКУЛЯЦИИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. РОТОР

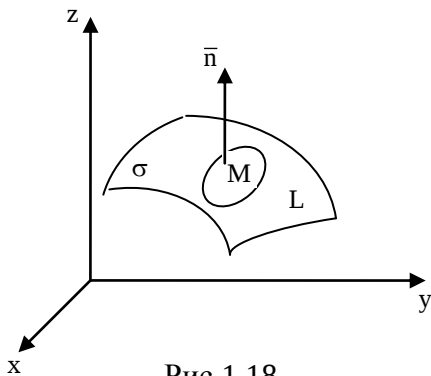


Рис.1.18

Рассмотрим векторное поле $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$, где a_x , a_y , a_z и их частные производные – непрерывные в точке $M(x, y, z)$. Проведем через точку M какую-либо поверхность σ и построим на ней контур L , окружающий точку M (рис.1.18). Вычислим циркуляцию

$$\oint \bar{a} d\bar{L}.$$

Отношение циркуляции по контуру L к площади δ той части поверхности σ , которая ограничена данным контуром, называется средней плотностью циркуляции.

$$\text{Средняя плотность равна } \frac{\oint \bar{a} d\bar{L}}{\delta}.$$

Предел, к которому стремится средняя плотность циркуляции, когда контур L стягивается к точке M , называется плотностью циркуляции в точке M по поверхности σ :

$$\text{Плотность циркуляции равна } \lim_{L \rightarrow M} \frac{\oint \bar{a} d\bar{L}}{\delta}.$$

Чтобы вычислить указанный предел, преобразуем криволинейный интеграл в поверхностный, воспользовавшись формулой Стокса, а затем применим теорему о среднем:

$$\lim_{L \rightarrow M} \frac{\oint \bar{a} d\bar{L}}{\delta} = \lim_{L \rightarrow M} \frac{\oint a_x dx + a_y dy + a_z dz}{\delta} =$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\text{diam } \delta \rightarrow 0} \frac{\iint_{\sigma} \left(\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) d\delta}{\delta} = \\
& = \lim_{\text{diam } \delta \rightarrow 0} \frac{\left(\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \cos \gamma \right)_{M_0} \cdot \delta}{\delta} = \\
& = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \cos \gamma.
\end{aligned}$$

(При стягивании площадки δ точка $M_0 \in \delta$ стремится к точке M . При этом значение функции, представленной в квадратных скобках, в точке M_0 стремится к значению этой же функции в точке M в силу непрерывности частных производных и направляющих косинусов нормали).

Итак,

$$\lim_{L \rightarrow M} \frac{\oint \bar{a} d\bar{L}}{\delta} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \cos \gamma. \quad (1.49)$$

Полученный результат показывает, что плотность циркуляции в точке M зависит от заданного векторного поля $\bar{a} = \bar{a}(M) = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$, поскольку в выражение (1.49) входят частные производные $\frac{\partial a_x}{\partial y}$, $\frac{\partial a_y}{\partial x}$ и т.д., и от вектора нормали $\bar{n}$ к поверхности σ в точке M , поскольку в выражение входят его направляющие косинусы.

Вместе с тем формула (1.49) показывает, что плотность циркуляции не зависит от поверхности, а только от вектора нормали к этой поверхности. Это значит, что если через точку M провести две различные поверхности σ_1 и σ_2 , имеющие один и тот же вектор нормали $\bar{n}$ в этой точке, то плотность циркуляции в точке M по каждой из поверхностей будет одна и та же. Поэтому можно говорить не о плотности циркуляции по поверхности σ , а о плотности циркуляции в направлении вектора $\bar{n}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.11. Плотностью циркуляции векторного поля $\bar{a}$ в точке M в направлении вектора $\bar{n}$ называется плотность циркуляции в этой точке по любой поверхности, имеющей в качестве нормали (в точке M) вектор $\bar{n}$.

Таким образом, плотность циркуляции поля $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$ в точке M в направлении вектора $\bar{n}$ равна

$$\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \cos \gamma.$$

Это выражение представляет собой скалярное произведение двух векторов: орта $\bar{n}^0 = \cos \alpha \bar{i} + \cos \beta \bar{j} + \cos \gamma \bar{k}$ и вектора

$$\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \bar{k}.$$

Последний вектор называется ротором поля $\bar{a}(M)$ и обозначается символом $\text{rot } \bar{a}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.12. Ротором (или вихрем) векторного поля $\bar{a}(M) = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$ называется вектор

$$\text{rot } \bar{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \bar{k}. \quad (1.50)$$

Ротор поля $\bar{a}$ удобно записывать в виде символического определителя

$$\text{rot } \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}, \quad (1.51)$$

в котором под умножением символа $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ или $\frac{\partial}{\partial z}$ на некоторую функцию понимается выполнение соответствующей операции дифференцирования $\left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot a_y = \frac{\partial a_y}{\partial x} \right)$. Действительно, разложив определитель по элементам первой

строки, получим, что

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \bar{k}.$$

Плотность циркуляции в точке M в направлении $\bar{n}$ равна

$$\text{rot } \bar{a} \cdot \bar{n}^0 = |\text{rot } \bar{a}| \cdot |\bar{n}^0| \cos \left(\text{rot } \bar{a}, \bar{n}^0 \right) = \text{pr}_{\bar{n}^0} \text{rot } \bar{a} = \text{rot}_{\bar{n}^0} \bar{a},$$

а это проекция ротора на направление $\bar{n}$. Следовательно, плотность циркуляции в направлении $\bar{n}$ равна проекции ротора на это направление.

Отсюда ясно, плотность циркуляции в точке M будет наибольшей в направлении ротора, и в этом случае равна $|\text{rot } \bar{a}|$. Сделанное заключение раскрывает физический смысл ротора: это – вектор, в направлении которого плотность циркуляции в данной точке является наибольшей, модуль которого равен наибольшей плотности циркуляции в этой точке.

Ротор имеет вполне определенное значение в каждой точке данного поля $\bar{a}$; Следовательно, сам ротор образует новое векторное поле.

С помощью определения ротора формулу Стокса можно записать в векторной форме:

$$\iint_{\sigma} \text{rot } \bar{a} d\sigma = \oint_L \bar{a} d\bar{r}. \quad (1.52)$$

Поток ротора поля через поверхность σ равен циркуляции вектора по границе этой поверхности.

ПРИМЕР 1.6. Вычислить ротор поля скоростей точек твердого тела, вращающегося с угловой скоростью ω_0 вокруг оси Oz .

Как установлено было в приведенном выше примере, поле задается функцией

$$\bar{a} = -\omega_0 y \bar{i} + \omega_0 x \bar{j}.$$

Следовательно,

$$\text{rot } \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega_0 y & \omega_0 x & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(\omega_0 x)}{\partial x} - \frac{\partial(-\omega_0 y)}{\partial y} \right) \bar{k} = (\omega_0 + \omega_0) \bar{k} = 2\omega_0 \bar{k} = 2\bar{\omega}_0.$$

Итак, ротор поля скоростей твердого тела в любой его точке равен удвоенной угловой скорости

$$\text{rot } \bar{a} = 2\bar{\omega}_0.$$

1.13. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ПОЛЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.13. Векторное поле $\bar{a}$ называется потенциальным, если существует такая функция $u(M)$ в области V , что для всех точек области $\bar{a}(M) = \text{grad } u(M)$.

Потенциальное поле называют также вихревым полем.

Теорема об условии потенциальности. Для того, чтобы векторное поле $\bar{a}$ было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым, то есть $\text{rot } \bar{a} = 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть векторное поле $\bar{a}$ является потенциальным. Тогда существует такая скалярная функция $u = u(x, y, z)$, что $\bar{a} = \text{grad } u$, тогда

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{a} &= \text{rot}(\text{grad } u) = \text{rot} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} - \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \bar{k} = 0. \end{aligned}$$

Достаточность. Пусть $\text{rot } \bar{a} = 0$, тогда из (1.52) $\oint_L \bar{a} d\vec{r} = 0$, то есть кри-

волинейный интеграл не зависит от пути интегрирования.

$$\oint_L \bar{a} d\vec{r} = \oint_L a_x dx + a_y dy + a_z dz = 0 \Rightarrow a_x dx + a_y dy + a_z dz = du =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \Rightarrow a_x = \frac{\partial u}{\partial x}, a_y = \frac{\partial u}{\partial y}, a_z = \frac{\partial u}{\partial z},$$

а это значит, что $\bar{a} = \text{grad } u$.

1.14. ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА

Основные понятия теории поля: градиент скалярной функции, дивергенция вектора, вихрь вектора можно просто записать при помощи символического вектора – оператора ∇ (читается «набла»), предложенного математиком Гамильтоном.

$$\nabla = \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.53)$$

$$\text{где } \nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}; \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}; \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}.$$

1. «Произведение» вектора ∇ на скалярную функцию $u = u(x, y, z)$ есть $\text{grad } u$.

$$\begin{aligned} \nabla u &= \bar{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial u}{\partial z} \\ \nabla u &= \text{grad } u. \end{aligned} \quad (1.54)$$

2. Скалярное «произведение» вектора набла на вектор поля дает дивергенцию векторного поля $\bar{a}$.

$$\nabla \bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \text{div } \bar{a}. \quad (1.55)$$

3. Векторное «произведение» оператора ∇ на вектор поля дает $\text{rot } \bar{a}$.

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{a} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \bar{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \bar{k} = \text{rot } \bar{a}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\nabla \times \bar{a} = \text{rot } \bar{a}. \quad (1.56)$$

1.15. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

$$1. \quad \operatorname{div}(\operatorname{rot} \bar{a}) = \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \times \bar{a}) \quad (1.57)$$

Известно, что смешанное произведение трех векторов обладает свойством $\bar{a}(\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}(\bar{c} \times \bar{a}) = \bar{c}(\bar{a} \times \bar{b})$; кроме того, векторное произведение двух одинаковых векторов равно нулю. Следовательно,

$$\bar{\nabla}(\bar{\nabla} \times \bar{a}) = \bar{a}(\bar{\nabla} \times \bar{\nabla}) = 0. \quad (1.58)$$

Аналогично

$$2. \quad \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot u) = (\bar{\nabla} \times \bar{\nabla})u = 0 \quad (1.59)$$

3. Определим $\operatorname{div}(\operatorname{grad} \bar{u})$:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \bar{u}) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (1.60)$$

Запишем (1.60) через оператор Гамильтона:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot u) = (\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla})u = \nabla^2 u;$$

тогда

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (1.61)$$

В правой части (1.61) имеем оператор Лапласа от функции u , который обозначается

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

тогда

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u. \quad (1.62)$$

УЧЕБНО - МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

РАЗДЕЛ 8 «ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ»

2. Методические указания для студентов

2.1. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

Пусть D – некоторая область в пространстве двух или трех измерений и M любая точка этой области.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Область D называется скалярным полем, если в каждой точке $M \in D$ определена некоторая скалярная величина $U(M)$.

Если поле отнесено к декартовой системе координат, то скалярное поле аналитически задается функцией двух переменных в R^2 :

$$U = U(x, y) \quad (2.1)$$

и функцией трех переменных в R^3 :

$$U = U(x, y, z) \quad (2.2)$$

Простейшими геометрическими характеристиками скалярного поля являются линии и поверхности уровня.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Линиями уровня называются линии (множество точек) в R^2 , в точках которых скалярное поле имеет постоянное значение:

$$U = U(x, y) = C \quad (2.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Поверхностями уровня называются поверхности (множество точек) в R^3 , в точках которых скалярное поле имеет постоянное значение:

$$U = U(x, y, z) = C \quad (2.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Производной скалярного поля $U = U(M)$ в точке M по направлению вектора $\vec{S}$, называется предел:

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{S}} = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{U(M_1) - U(M)}{|\vec{MM}_1|}. \quad (2.5)$$

Формула для вычисления производной по направлению имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{S}} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma. \quad (2.6)$$

Производная по направлению $\frac{\partial U}{\partial \vec{S}}$ характеризует скорость изменения скалярного поля в направлении $\vec{S}$.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.1. Дано скалярное поле $U = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Найти линии уровня этого поля. Найти линию уровня, проходящую через т. $P_0(1,1)$.

Решение. Согласно определению линии уровня (2.3) имеем уравнения линий уровня $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C$, откуда $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} C = k$ и окончательно $y = kx$.

Т.е. линиями уровня в данном скалярном поле будет пучок прямых, проходящих через начало координат.

Для точки $P_0(1,1)$ имеем $C_0 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ и $k_0 = \operatorname{tg} C_0 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$. И линия уровня, соответствующая данной точке, $y = x$.

ПРИМЕР 2.2. Найти поверхности уровня скалярного поля $U = z - x^2 - y^2$ и выделить поверхность с точкой $P_0(0,0,0)$.

Решение. Уравнения поверхностей уровня в этом поле получим из (2.4): $z - x^2 - y^2 = C$. Эти уравнения определяют множество параболоидов вращения относительно оси Z , вершины которых находятся на оси Z , полученных друг из друга параллельным переносом вдоль оси Z . Для точки $(0,0,0)$ имеем $C_0 = 0$. Таким образом, этой точке соответствует параболоид с вершиной в начале координат.

ПРИМЕР 2.3. Найти производные от следующих полей в заданных точках по заданному направлению:

а) $U = \frac{x^2 y^3}{z}$ в точке $P_0(1,4,3)$ по направлению $\overline{P_0 P_1}$, где $P_1(1,0,0)$.

б) $U = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + z$ в точке $P_0(2,1,1)$ по направлению прямой

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{2} \text{ в сторону возрастания поля.}$$

Решение. а) Направление задано вектором $\overline{P_0 P_1} = \{0, -4, -3\}$, для которого направляющие косинусы равны: $\cos \alpha = 0$; $\cos \beta = \frac{-4}{5}$; $\cos \gamma = \frac{-3}{5}$.

Далее: $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2xy^3}{z}$; $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{3x^2 y^2}{z}$; $\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{x^2 y^3}{z^2}$ и в точке

$$P_0(1,4,3) \text{ имеем } \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{P_0} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4^3}{3} = \frac{128}{3}; \quad \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{P_0} = 16; \quad \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{P_0} = -\frac{64}{9}.$$

Подставляя полученные величины в (2.6), получим

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \ell} \right|_{P_0} = \frac{128}{3} \cdot 0 + 16 \cdot \frac{(-4)}{5} + \left(-\frac{64}{9} \right) \cdot \frac{(-3)}{5} = \frac{-128}{15}.$$

Итак, производная данного поля по направлению $\overline{P_0 P_1}$ в точке P_0 равна $-\frac{128}{15}$.

б) Направляющий вектор прямой $\bar{\ell} = \{1, 0, 2\}$, его направляющие косинусы: $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\cos\beta = 0$; $\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Далее $\frac{\partial U}{\partial x} = x$, $\frac{\partial U}{\partial y} = -y$, $\frac{\partial U}{\partial z} = 1$ и в точке $P_0(2, 1, 1)$ имеем

$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{P_0} = 2$; $\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{P_0} = -1$; $\left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{P_0} = 1$. Подставляя полученные величины в (1.6), получим $\left. \frac{\partial U}{\partial \ell} \right|_{P_0} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - 1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

2.2. ГРАДИЕНТ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Градиентом скалярного поля $U = U(x, y, z)$ называется вектор вида:

$$\text{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k}. \quad (2.7)$$

Этот вектор связан с производной по направлению так:

$$\frac{\partial U}{\partial L} = \text{grad} U \cdot \bar{n}^0, \quad (2.8)$$

где $\bar{n}^0$ – единичный вектор направления L :

$$\bar{n}^0 = \bar{i} \cos\alpha + \bar{j} \cos\beta + \bar{k} \cos\gamma.$$

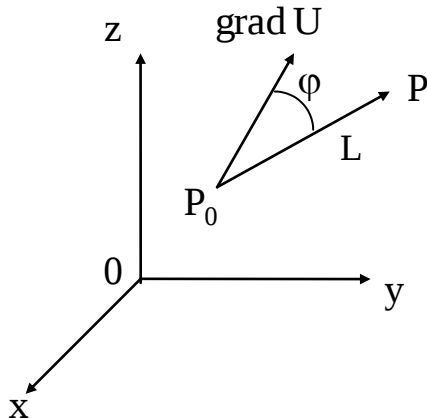


Рис. 2.1

Из (2.8) $\frac{\partial U}{\partial L} = |\text{grad} U| \cdot \cos\varphi$, где φ – угол между вектором $\text{grad} U$ и лучом L (см. рис. 2.1).

Отсюда при $\varphi = 0$ $\frac{\partial U}{\partial L}$ имеет наибольшее значение по направлению градиента:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial L} \right|_{\max} = |\text{grad} U|.$$

Таким образом, направление градиента есть направление наибо́льшего возрастания функции и наибольшая скорость возрастания равна модулю градиента.

Известно, что в каждой точке поля градиент направлен по нормали к поверхности уровня поля.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.4. Найти градиент скалярного поля $U = xyz$ в данной точке $P_0(1,1,1)$. Определить наибольшую скорость возрастания поля в этой точке.

Решение. По формуле (1.7) определяем градиент скалярного поля:
$$\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k} = zy\bar{i} + xz\bar{j} + xy\bar{k}.$$
 В данной точке получим

$$\text{grad}U|_{P_0} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}.$$
 Направление наибыстрейшего возрастания скалярного

поля в точке P_0 определяется направлением градиента и наибольшая скорость возрастания поля равна модулю градиента, т.е.

$$V_{\max} = |\text{grad}U|_{P_0}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}.$$

ПРИМЕР 2.5. Найти направление наибыстрейшего возрастания скалярного поля $U = \arctg \frac{y}{x}$ и наибольшую скорость возрастания этого поля в точке $P_0(1,3)$.

Решение. Направление наибыстрейшего возрастания скалярного поля определяет $\text{grad}U$, вычисленный в данной точке. Таким образом, по формуле

(2.7) получим
$$\text{grad}U = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right)\bar{i} + \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x}\bar{j},$$
 откуда

$$\text{grad}U|_{P_0} = \frac{-3}{10}\bar{i} + \frac{1}{10}\bar{j} = \frac{-3\bar{i} + \bar{j}}{10}.$$
 Направляющие косинусы этого вектора:

$$\cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{10}}; \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Наибольшая скорость возрастания поля равна модулю градиента поля в этой точке, т.е.
$$v_{\max} = |\text{grad}U|_{P_0}| = \sqrt{\frac{9+1}{100}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

ПРИМЕР 2.6. Найти единичный вектор нормали к поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ в точке $P_0(1,1,1)$.

Решение. Рассмотрим скалярное поле $U = x^2 + y^2 - z^2 - 1$, в котором данная поверхность будет поверхностью уровня $U = C$ при $C = 0$. Известно, что $\text{grad}U$ направлен по нормали к поверхности уровня в скалярном поле, т.е. является нормальным вектором к поверхности уровня:

$$\bar{n} = \text{grad}U = 2x\bar{i} + 2y\bar{j} - 2z\bar{k}.$$

$$\text{Отсюда } \bar{n}^0 \Big|_{P_0} = \frac{\text{grad}U}{|\text{grad}U|} \Big|_{P_0} = \frac{2\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}}{\sqrt{4+4+4}} = \frac{\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{То есть } \bar{n}_0 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\}.$$

2.3. ВЕКТОРНЫЕ ЛИНИИ. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ЧЕРЕЗ ПОВЕРХНОСТЬ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Поле, в каждой точке которого задан вектор, называется векторным или силовым полем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Векторной или силовой линией векторного поля называется линия, в каждой точке которой касательная к ней совпадает с направлением векторного поля в точке касания.

Параметрическое дифференциальное уравнение векторных линий в векторной форме имеет вид

$$d\bar{r} = \lambda \bar{a} dt, \quad (2.9)$$

где $\bar{r} = \bar{r}(t)$ – уравнение векторной линии,

$\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ – вектор поля, направленный по касательной к линии $\bar{r}(t)$,

$\frac{d\bar{r}}{dt}$ – вектор, направленный по касательной, коллинеарный вектору $\bar{a}$.

$$(d\bar{r} = \{dx; dy; dz\}).$$

Спроектировав вектор $d\bar{r}$ на координатные оси и исключив из полученной системы λdt , получим систему дифференциальных уравнений векторных линий:

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z} \quad (2.10)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Потоком векторного поля $\bar{a}$ через поверхность σ называется поверхностный интеграл вида $\iint_{\sigma} \bar{a} d\bar{\sigma} = \iint_{\sigma} \bar{a} \cdot \bar{n}^0 d\sigma$.

Если векторное поле $\bar{a}$ есть поле скоростей текущей жидкости, то поток поля $\bar{a}$ через поверхность σ определяет количество жидкости, протекающей через σ в единицу времени. Если $\bar{a}$ означает вектор магнитного поля, то поток вектора выражает количество магнитных силовых линий, проходящих через σ и так далее.

ФОРМУЛЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОТОКА

$$1. \Pi = \iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{d\sigma} = \iint_{\sigma} a_n d\sigma, \quad (2.11)$$

где $\vec{a}$ — вектор поля,

$\vec{d\sigma}$ — вектор, направленный по нормали к поверхности в каждой точке и численно равный элементу площади σ ,

a_n — проекция вектора $\vec{a}$ на направление нормали к поверхности.

$$2. \Pi = \iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}^0 d\sigma = \iint_{\sigma} (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) d\sigma, \quad (2.12)$$

где $\vec{n}^0$ — нормальный единичный вектор к поверхности:

$$\left(\vec{n}^0 = \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\} \right).$$

$$3. \Pi = \iint_{\sigma} a_x dydz + a_y dxdz + a_z dxdy \quad (2.13)$$

4. Если уравнение поверхности разрешено относительно третьей координаты $z = f(x, y)$, то получается удобная формула:

$$\Pi = \iint_{\sigma} \left(-\frac{\partial z}{\partial x} a_x - \frac{\partial z}{\partial y} a_y + a_z \right) dxdy \quad (2.14)$$

ПРИМЕР 2.7. Определить векторные линии магнитного поля, образованного постоянным электрическим током с силой J , текущим по бесконечному длинному прямолинейному проводу.

Решение. Если принять провод за ось OZ , то вектор $\vec{H}$ напряженности искомого магнитного поля выражается формулой

$$\vec{H} = \frac{2J}{r^2} (-y\vec{i} + x\vec{j}).$$

В данном случае

$$a_x = -\frac{2Jy}{r^2}, \quad a_y = \frac{2Jx}{r^2}, \quad a_z = 0.$$

Составим систему $\frac{dx}{-\frac{2Jy}{r^2}} = \frac{dy}{\frac{2Jx}{r^2}} = \frac{dz}{0}$. Со-

кращая на общий множитель $\frac{2J}{r^2}$, получим $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}$. Полученная систе-

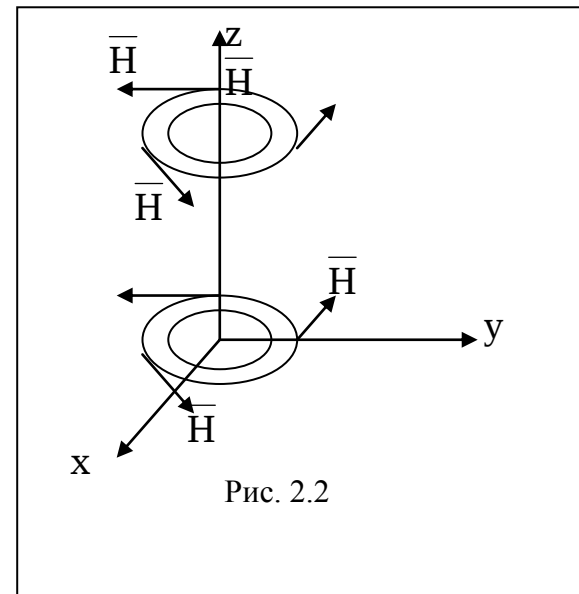


Рис. 2.2

ма распадается на два уравнения: $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}$ и $dz = 0$.

Из уравнения $dz = 0$ получаем $z = \text{const}$. Интегрируя уравнение $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}$, получим $\int x dx = -\int y dy \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c_1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x^2 + y^2 = 2c_1$

Следовательно, векторные линии напряженности магнитного поля определяются уравнениями $x^2 + y^2 = 2c_1$ и $z = c$; эти линии являются окружностями с центром на оси OZ , лежащими в плоскостях, перпендикулярных этой оси (рис.2.2).

ПРИМЕР 2.8. Найти поток радиуса - вектора $\vec{a} = \vec{r}$ точки через внешнюю сторону замкнутой поверхности прямого кругового цилиндра, если начало координат лежит в центре нижнего основания цилиндра. Размеры цилиндра: R — радиус основания цилиндра. H — его высота.

Решение. Для вычисления потока воспользуемся формулой (2.11)

$$\Pi = \iint_{\sigma} a_n d\sigma$$

В данном случае поверхность σ состоит из боковой поверхности σ_1 , верхнего основания σ_2 и нижнего основания σ_3 . Тогда поток через поверхность σ будет равен сумме трех потоков через поверхности $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (рис. 2.3).

$$\Pi = \iint_{\sigma} a_n d\sigma = \iint_{\sigma_1} a_n d\sigma + \iint_{\sigma_2} a_n d\sigma + \iint_{\sigma_3} a_n d\sigma$$

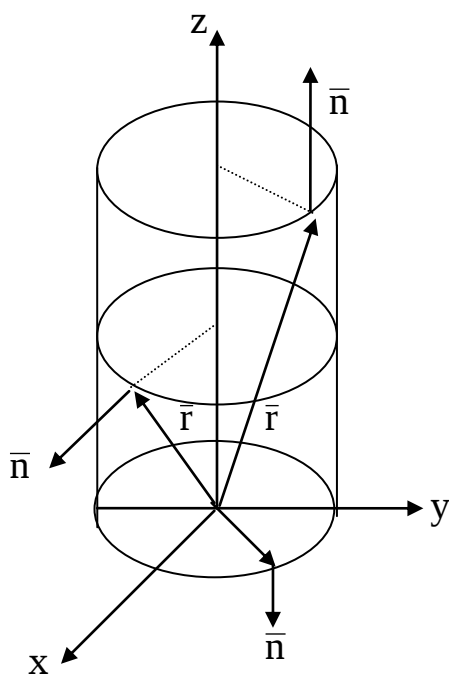


Рис. 2.3

Вычислим поток через боковую поверхность цилиндра, то есть через σ_1 .

На боковой поверхности внешняя нормаль параллельна плоскости XOY и проекция на нее радиуса вектора $r_n = R$. Поэтому

$$\Pi_1 = \iint_{\sigma_1} r_n d\sigma = R \iint_{\sigma_1} d\sigma = R \cdot 2\pi R H = 2\pi R^2 H$$

($2\pi R H$ — площадь боковой поверхности цилиндра).

Поток через верхнее основание σ_2 равен

$$\Pi_2 = \iint_{\sigma_2} r_n d\sigma = H \iint_{\sigma_2} d\sigma = H \pi R^2$$

(так как на верхнем основании нормаль направлена параллельно оси OZ вверх и $r_n = H$).

На нижнем основании радиус-вектор перпендикулярен нормали и его проекция на $\vec{n}$ равна

0. Значит $\Pi_3 = \iint_{\sigma_3} r_n d\sigma = 0$. Окончательно получим

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 3\pi R^2 \cdot H.$$

ПРИМЕР 2.9. Вычислить поток векторного поля

$\vec{a} = (x+y)\vec{i} + 2(y+z)\vec{j} + (2x+z)\vec{k}$ через треугольник σ , вырезанный из плоскости $3x - 2y + 2z - 6 = 0$ (α) координатными плоскостями в том направлении нормали к данной плоскости, которое образует с осью OY острый угол.

Решение. Построим треугольник σ , для чего приведем уравнение плоскости α к уравнению в отрезках $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{3} = 1$. Откладывая отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат и соединяя полученные точки, получим треугольник σ (рис .2.4).

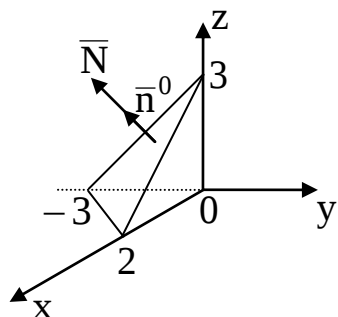


Рис 2.4

Известно, что $\Pi = \iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}^0 d\sigma$. Определим $\vec{n}^0$ – единичный вектор, направленный по нормали к плоскости α и образующий с осью OY острый угол.

$$\vec{N} = \text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} U = 3x - 2y + 2z - 6 \\ \frac{\partial U}{\partial x} = 3; \frac{\partial U}{\partial y} = -2; \frac{\partial U}{\partial z} = 2 \end{array} \right| =$$

$= 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ (вектор, перпендикулярный плоскости α)

$$\vec{n}_1^0 = \frac{\text{grad}U}{|\text{grad}U|} = \frac{3}{\sqrt{17}} \vec{i} - \frac{2}{\sqrt{17}} \vec{j} + \frac{2}{\sqrt{17}} \vec{k}.$$

Вектор $\vec{n}_1^0$ образует с осью OY тупой угол, а по условию угол должен быть острым, то есть проекция вектора на ось OY должна быть положительна, поэтому $\vec{n}^0 = -\vec{n}_1^0$

$$\vec{n}^0 = -\frac{3}{\sqrt{17}} \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{17}} \vec{j} - \frac{2}{\sqrt{17}} \vec{k}.$$

Тогда
$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}^0 d\sigma = \frac{1}{\sqrt{17}} \iint_{\sigma} (-3(x+y) + 4(y+z) - 2(2x+z)) d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{17}} \iint_{\sigma} (-7x + y + 2z) d\sigma = \left| \begin{array}{l} z = 3 - \frac{3}{2}x + y \\ d\sigma = \frac{dxdy}{|\cos(\vec{n}, \vec{z})|} = \frac{\sqrt{17}}{2} dxdy \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{17}}{2 \cdot \sqrt{17}} \iint_D (-7x + y + 6 - 3x + 2y) dx dy = \\
&= \frac{1}{2} \iint_D (-10x + 3y + 6) dx dy = \iint_D \left(-5x + \frac{3}{2}y + 3 \right) dx dy = \\
&\quad \begin{array}{c} y \\ \uparrow \\ \text{---} 2 \text{---} x \\ \text{---} -3 \end{array} \\
&\quad = \int_0^2 dx \int_{3/2x-3}^0 \left(-5x + \frac{3}{2}y + 3 \right) dy = \\
&\quad = \int_0^2 dx \left(-5xy + \frac{3}{2} \frac{y^2}{2} + 3y \right) \Big|_{3/2x-3}^0 = \\
&\quad = \int_0^2 \left(5x \left(\frac{3}{2}x - 3 \right) - \frac{3}{4} \left(\frac{3}{2}x - 3 \right)^2 - 3 \left(\frac{3}{2}x - 3 \right) \right) dx = \\
&\quad = \int_0^2 \left(\frac{15}{2}x^2 - 15x - \frac{3}{4} \left(\frac{9}{4}x^2 - 9x + 9 \right) - \frac{9}{2}x + 9 \right) dx = \\
&\quad = \int_0^2 \left(\frac{15x^2}{2} - 15x - \frac{27}{16}x^2 + \frac{27}{4}x - \frac{27}{4} - \frac{9}{2}x + 9 \right) dx = \\
&\quad = \int_0^2 \left(\frac{93}{16}x^2 - \frac{51}{4}x + \frac{9}{4} \right) dx = \frac{3}{4} \left(\frac{31}{4} \frac{x^3}{3} - 17 \frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_0^2 = \\
&\quad = \frac{3}{4} \left(\frac{31 \cdot 8}{4 \cdot 3} - 17 \cdot 2 + 6 \right) = -5,5.
\end{aligned}$$

Если речь идет о потоке жидкости, то знак “минус” указывает на то, что за единицу времени в выбранном направлении через поверхность протекает меньшее количество жидкости, чем в противоположном.

2.4. ДИВЕРГЕНЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ЧЕРЕЗ ЗАМКНУТУЮ ПОВЕРХНОСТЬ. ФОРМУЛА ГАУССА-ОСТРОГРАДСКОГО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Предел отношения потока поля через замкнутую поверхность σ , окружающую точку M к объему, ограниченному этой замкнутой поверхностью, при условии, что поверхность безгранично стягивается к данной точке, называется дивергенцией вектора $\vec{a}$ в данной точке M .

$$\text{div } \vec{a} \Big|_M = \lim_{V \rightarrow M} \frac{\iint_{\sigma} \vec{a} d\vec{\sigma}}{V} \quad (2.15)$$

Дан вектор $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, то $\text{div } \vec{a}$ вычисляется по следующей формуле:

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{a}} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (2.16)$$

Теорема Гаусса-Остроградского. Поток вектора $\bar{\mathbf{a}}$ через замкнутую поверхность σ равен тройному интегралу от $\operatorname{div} \bar{\mathbf{a}}$, взятому по объему V , ограниченному поверхностью σ .

$$\Pi = \oint_{\sigma} a_x dydz + a_y dx dz + a_z dx dy = \iiint_V \operatorname{div} \bar{\mathbf{a}} dx dy dz \quad (2.17)$$

ПРИМЕР 2.10. Найти $\operatorname{div}(U\bar{\mathbf{a}})$, если U – скалярная функция переменных (x, y, z) , а $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x; a_y; a_z\}$ – вектор векторного поля.

Решение

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(U \cdot \bar{\mathbf{a}}) &= \operatorname{div}(U a_x \bar{\mathbf{i}} + U a_y \bar{\mathbf{j}} + U a_z \bar{\mathbf{k}}) = \frac{\partial(U a_x)}{\partial x} + \frac{\partial(U a_y)}{\partial y} + \frac{\partial(U a_z)}{\partial z} = \\ &= U \frac{\partial a_x}{\partial x} + a_x \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial a_y}{\partial y} + a_y \frac{\partial U}{\partial y} + U \frac{\partial a_z}{\partial z} + a_z \frac{\partial U}{\partial z} = \\ &= U \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) + \left(a_x \frac{\partial U}{\partial x} + a_y \frac{\partial U}{\partial y} + a_z \frac{\partial U}{\partial z} \right) = U \operatorname{div} \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{a}} \cdot \operatorname{grad} U \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2.11. Найти дивергенцию поля линейных скоростей вращающейся вокруг оси жидкости и дивергенцию вектора напряжения магнитного поля, образованного электрическим током, текущим по бесконечному прямолинейному проводу.

Решение. Если принять за ось OZ ось вращения жидкости или, соответственно, провод, по которому течет ток, то проекции вектора линейной скорости и вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$ выразятся формулами

$$\vec{U} = \omega(-y\vec{i} + x\vec{j}) - \text{вектор линейной скорости,}$$

$$\vec{H} = \frac{2J}{r^2}(-y\vec{i} + x\vec{j}) - \text{вектор напряженности,}$$

где ω — модуль вектора $\vec{\omega}$, представляющего угловую скорость, лежащего на оси OZ (оси вращения) и направленного вверх; J — сила электрического тока, текущего по бесконечному проводу, совпадающему с осью OZ ; r — расстояние от точки до провода.

Рассмотрим первый случай: $V_x = -\omega y$, $V_y = x\omega$, $V_z = 0$

$$\operatorname{div} \vec{V} = -\omega \frac{\partial y}{\partial x} + \omega \frac{\partial x}{\partial y} = 0.$$

Рассмотрим второй случай: $H_x = -2J \frac{y}{r^2}$, $H_y = 2J \frac{x}{r^2}$, $H_z = 0$.

$$\operatorname{div} \vec{H} = -2J \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{r^2} \right) + 2J \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{r^2} \right) = 2J \frac{2xy}{x^2 + y^2} - 2J \frac{2xy}{x^2 + y^2} = 0$$

$$(r^2 = x^2 + y^2).$$

Дивергенция обоих полей равна нулю, отсюда следует, что эти поля соленоидальны.

ПРИМЕР 2.12. Найти поток вектора $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ через сферу $x^2 + y^2 + z^2 = x$.

Решение. Так как поверхность замкнутая, то для вычисления потока можно воспользоваться формулой Гаусса-Остроградского, а именно

$$\Pi = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV$$

Найдем дивергенцию вектора $\vec{a}$

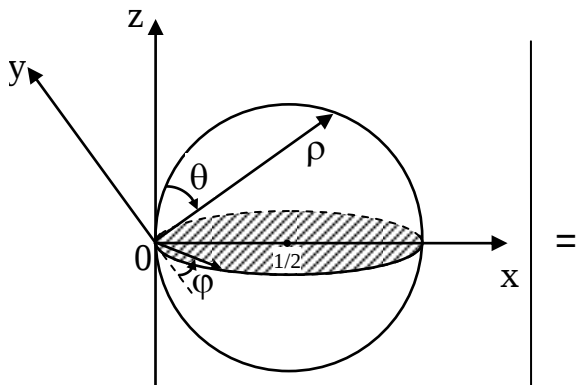
$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2), \text{ тогда}$$

$$\Pi = 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \left| x^2 + y^2 + z^2 = x \right| = 3 \iiint_V x dx dy dz \quad (*)$$

При вычислении интеграла (*) перейдем к сферическим координатам.

$$\Pi = 3 \iiint_V x \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta \\ dx \, dy \, dz = \rho^2 \cdot \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\ 0 \leq \rho \leq \cos \varphi \cdot \sin \theta \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \\ \text{уравнение сферы } x^2 + y^2 + z^2 = x \\ \text{или } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ \text{или } \rho = \cos \varphi \sin \theta \end{array} \right|$$



$$= 3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \, d\theta \int_0^{\cos \varphi \sin \theta} \rho^3 \, d\rho = 3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \theta \cos^4 \varphi \cdot \sin^4 \theta}{4} \, d\theta =$$

$$= \frac{3}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5 \varphi \, d\varphi \int_0^{\pi} \sin^6 \theta \, d\theta = \frac{3}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5 \varphi \, d\varphi \int_0^{\pi} \frac{(1 - \cos 2\theta)^3}{8} \, d\theta =$$

$$= \frac{3}{4 \cdot 8} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5 \varphi \, d\varphi \int_0^{\pi} (1 - 3\cos 2\theta + 3\cos^2 2\theta - \cos^3 2\theta) \, d\theta =$$

$$= \frac{3}{4 \cdot 8} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5 \varphi \, d\varphi \left(\theta \Big|_0^{\pi} - \frac{3}{2} \underbrace{\sin 2\theta \Big|_0^{\pi}}_0 + \frac{3}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 4\theta) \, d\theta - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \sin^2 2\theta) \, d(\sin 2\theta) \right) = \frac{3}{4 \cdot 8} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5 \varphi \, d\varphi \left(\pi + \frac{3}{2} \underbrace{(\theta \Big|_0^{\pi})}_{\pi} + \frac{1}{4} \underbrace{\sin 4\theta \Big|_0^{\pi}}_0 \right) =$$

$$= \frac{3}{4 \cdot 8} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5 \varphi \, d\varphi \left(\pi + \frac{3}{2} \pi \right) = \frac{3}{4 \cdot 8} \cdot \frac{5\pi}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{(1 - \sin^2 \varphi)^2}_{\cos^4 \varphi} \, d(\sin \varphi) =$$

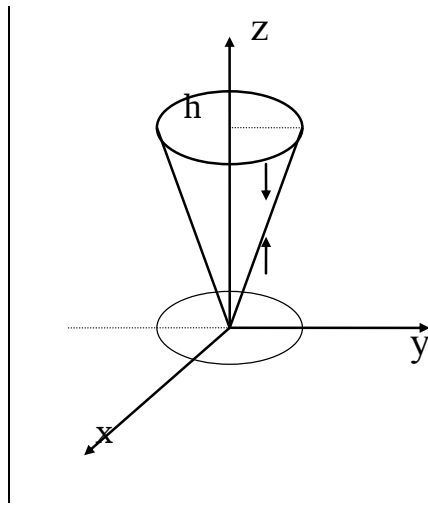
$$= \frac{3}{4 \cdot 8} \cdot \frac{5\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - 2\sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi) \, d(\sin \varphi) =$$

$$= \frac{15\pi}{128} \left(\sin \varphi - \frac{2\sin^3 \varphi}{3} + \frac{\sin^5 \varphi}{5} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{15\pi}{128} \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{15\pi}{128} \cdot \frac{8}{15} = \frac{\pi}{16}$$

$$\text{Ответ: } \Pi = \frac{\pi}{16}.$$

Замечание. По формуле Гаусса-Остроградского можно вычислять поток и через незамкнутую поверхность как разность потоков через замкнутую поверхность и через недостающую поверхность.

ПРИМЕР 2.13. Найти поток вектора $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ через боковую поверхность конуса



$$x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{h^2} z^2, \quad 0 \leq z \leq h.$$

Решение. Пусть Π_1 – поток через замкнутую поверхность;

Π_2 – поток через боковую поверхность;

Π_3 – поток через основание конуса.

$$\text{Тогда } \Pi_2 = \Pi_1 - \Pi_3.$$

Вычислим Π_1 поток через полную поверхность конуса по формуле Гаусса-Остроградского:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \left| \begin{array}{l} \vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k} \\ \operatorname{div} \vec{a} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2) \end{array} \right| = \\ &= 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = 3 \iint_D dx dy \int_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^h ((x^2 + y^2) + z^2) dz = \\ &= 3 \iint_D dx dy \left((x^2 + y^2)z + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^h = \\ &= 3 \iint_D \left((x^2 + y^2)h + \frac{h^3}{3} - (x^2 + y^2)^{3/2} \cdot \frac{h}{R} - \frac{h^3}{3R^3} (x^2 + y^2)^{3/2} \right) dx dy = \\ &= 3h \iint_D (x^2 + y^2) dx dy - \left(\frac{h}{R} + \frac{h^3}{3R^3} \right) \cdot 3 \iint_D (x^2 + y^2)^{3/2} dx dy + 3 \frac{h^3}{3} \iint_D dx dy = \end{aligned}$$

|Область D есть круг с центром в начале координат и радиусом R, при вычислении интегралов перейдем к полярным координатам, тогда

$$\begin{aligned} &= 3h \iint_D \rho^3 d\rho d\varphi - 3 \left(\frac{h}{R} + \frac{h^3}{3R^3} \right) \iint_D \rho^4 d\rho d\varphi + h^3 \iint_D \rho d\rho d\varphi = \\ &= 3h \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho - 3 \left(\frac{h}{R} + \frac{h^3}{3R^3} \right) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^4 d\rho + h^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho d\rho = \\ &= 6\pi h \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R - 6\pi \left(\frac{h}{R} + \frac{h^3}{3R^3} \right) \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^R + 2\pi h^3 \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^R = \\ &= \frac{3\pi h R^4}{2} - \frac{6\pi h R^4}{5} - \frac{2}{5} \pi h^3 R^2 + \pi h^3 R^2 = \frac{3}{10} \pi h R^4 + \frac{3}{5} \pi h^3 R^2. \end{aligned}$$

Вычислим Π_3 поток через верхнее основание. Так как уравнение поверхности $z = h$, воспользуемся для вычисления потока формулой

$$\Pi_3 = \iint_{\sigma} \left(-\frac{\partial z}{\partial x} a_x - \frac{\partial z}{\partial y} a_y + a_z \right) dx dy = \left. \begin{array}{l} z = h \quad a_z = z^3 \\ \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{array} \right| =$$

$$= \iint_{\sigma} z^3 dx dy = \iint_D h^3 dx dy = h^3 \pi R^2.$$

$$\text{Тогда } \Pi_2 = \Pi_1 - \Pi_3 = \frac{3}{10} \pi h R^4 + \frac{3}{5} \pi h^3 R^2 - h^3 \pi R^2 = \frac{1}{10} \pi h R^2 (3R^2 - 4h^2).$$

$$\text{Ответ: } \Pi_2 = \frac{1}{10} \pi h R^2 (3R^2 - 4h^2).$$

2.5. ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. РОТОР

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Циркуляцией векторного поля $\vec{a}(P)$ называется криволинейный интеграл по замкнутому контуру L :

$$\Gamma = \oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = \oint_L a_x dx + a_y dy + a_z dz \quad (2.17)$$

Направление обхода контура задается заранее, причем положительным считается обход против часовой стрелки, а отрицательным - по часовой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8. Ротором векторного поля $\vec{a}(P)$ называется вектор $\text{rot } \vec{a}$, который определяется равенством

$$\text{rot } \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (2.19)$$

Известна формула Стокса, которая в векторной форме приобретает следующий вид:

$$\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_{\sigma^+} (\text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}^0) d\sigma, \quad (2.20)$$

т.е. циркуляция векторного поля $\vec{a}(P)$ по замкнутому контуру L равна потоку его ротора через любую кусочно-гладкую поверхность σ , натянутую на этот контур.

ПРИМЕР 2.14. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = -y^2 \vec{i} + x^2 \vec{j} + \vec{k}$ вдоль замкнутого контура L , образованного пересечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ с координатными плоскостями (рис. 2.7).

Решение. Контур L – кусочно-гладкий, состоит из трех дуг окружностей $L_1: z = 0, x^2 + y^2 = R^2$; $L_2: x = 0, y^2 + z^2 = R^2$ и $L_3: y = 0, x^2 + z^2 = R^2$, поэтому

$$\oint_L \bar{a} \cdot d\bar{r} = \int_{L_1} \bar{a} \cdot d\bar{r} + \int_{L_2} \bar{a} \cdot d\bar{r} + \int_{L_3} \bar{a} \cdot d\bar{r} = J_1 + J_2 + J_3$$

Вычислим криволинейные интегралы J_1, J_2, J_3 :

$$J_1 = \int_{L_1} \bar{a} \cdot d\bar{r} = \left| \begin{array}{lll} z = 0 & dx = -R \sin t \, dt & dy = R \cos t \, dt \\ x = R \cos t & y = R \sin t & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

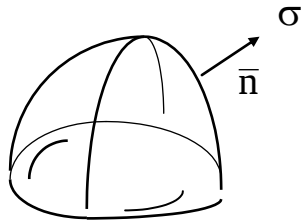


Рис. 2.6

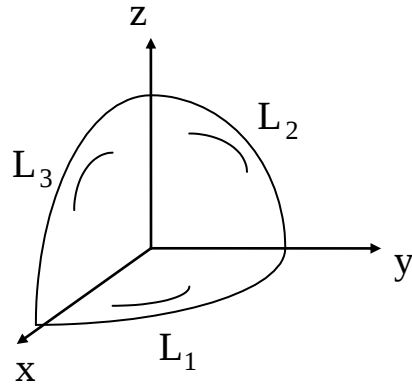


Рис. 2.7

$$= \int_{L_1} -y^2 dx + x^2 dy + dz = \int_0^{\pi/2} (R^3 \sin^3 t + R^3 \cos^3 t) dt = \frac{4}{3} R^3$$

$$J_2 = \int_{L_2} \bar{a} \cdot d\bar{r} = \int_{L_2} (-y^2 dx + x^2 dy + dz) = \left| \begin{array}{l} x = 0; \, dx = 0 \\ 0 \leq z \leq R \end{array} \right| = \int_0^R dz = R$$

$$J_3 = \int_{L_3} \bar{a} \cdot d\bar{r} = \int_{L_3} (-y^2 dx + x^2 dy + dz) = \left| \begin{array}{l} y = 0; \, dy = 0 \\ z_1 \leq z \leq z_2 \\ z_1 = R, \, z_2 = 0 \end{array} \right| = \int_R^0 dz = -R,$$

$$\text{следовательно, } \oint_L \bar{a} \cdot d\bar{r} = \frac{4}{3} R^3 + R - R = \frac{4}{3} R^3.$$

ПРИМЕР 2.15. Найти ротор векторного поля, заданного в задаче 1 в точке $P_0(1,1,1)$.

Решение.

$$\operatorname{rot} \bar{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \bar{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (2x + 2y)\bar{k}.$$

Отсюда: $\operatorname{rot} \bar{a} \Big|_{P_0} = (2 + 2)\bar{k} = 4\bar{k}.$

ПРИМЕР 2.16. Найти циркуляцию векторного поля задачи 1 с помощью формулы Стокса в векторной форме.

Решение. По формуле (2.20) имеем:

$$\Pi = \oint_C \bar{a} \cdot d\bar{r} = \iint_{\sigma} \operatorname{rot} \bar{a} \cdot \bar{n}^0 d\sigma = \left| \operatorname{rot} \bar{a} = 2(x + y)\bar{k}, u = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \right.$$

$$\bar{n}^0 = \frac{\operatorname{grad} U}{|\operatorname{grad} U|} = \frac{2x\bar{i} + 2y\bar{j} + 2z\bar{k}}{\sqrt{4(x^2 + y^2 + z^2)}} = \frac{x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}}{R}, \text{ где } \text{ в качестве поверх-}$$

ности σ , натянутой на контур L , выбираем часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, ограниченную контуром L , см. рис. 2.7. Найдем $\operatorname{rot} \bar{a} \cdot \bar{n}^0$

$$\operatorname{rot} \bar{a} \cdot \bar{n}^0 = \frac{2(x + y)z}{R}.$$

$$\iint_{\sigma} \frac{2}{R} (x + y)z d\sigma = \left| \begin{array}{l} \text{Ур. пов. - ти } \sigma : z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} \\ z'_x = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}}; \quad z'_y = \frac{-2y}{2\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} \\ d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2 - (x^2 + y^2)}} dx dy = \\ = \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} = \frac{2}{R} \iint_D (x + y) \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} \cdot \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} \end{array} \right| =$$

$$= 2 \iint_D (x + y) dx dy = \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ dx dy = \rho d\varphi d\rho \end{array} \right| = 2 \iint_D \rho^2 (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi d\rho =$$

$$= \frac{2R^3}{3} (\sin \varphi - \cos \varphi) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2R^3}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3} R^3$$

$$\text{Итак, } \Pi = \frac{4}{3} R^3.$$

ПРИМЕР 2.17. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ вдоль контура, полученного в сечении поверхности параболоида $z = 2(1 - x^2 - y^2)$ плоскостью $z = 0$ двумя способами: по определению циркуляции и по формуле Стокса, взяв за поверхность, натянутую на контур, поверхность параболоида.

Решение. 1. По формуле циркуляции (2.17):

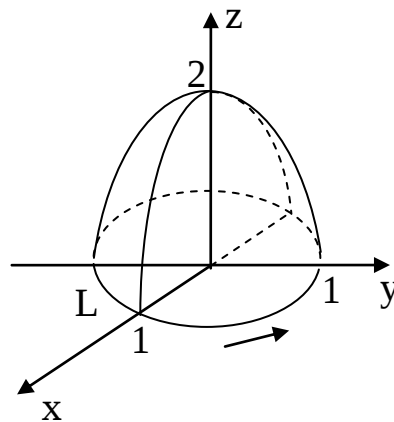


Рис. 2.8

$$\Pi : \int_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_L a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_L y dx + z dy + x dz =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Уравнение контура } L \\ \text{в параметрической форме :} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} x = \cos t; & dx = -\sin t dt \\ y = \sin t; & 0 \leq t \leq 2\pi; \quad dy = \cos t dt; \\ z = 0; & dz = 0 \end{array} \right. \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t dt) = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt = -\frac{1}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = -\frac{2\pi}{2} = -\pi.$$

Таким образом, $\Pi = -\pi$.

$$2. \text{ По формуле Стокса } \Pi = \int_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_{\sigma} (\text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}^0) d\sigma =$$

$$\left| \begin{aligned} \text{rot } \bar{a} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = 0 \cdot \bar{i} - \bar{j} - \bar{k} = \{0, -1, -1\}; \\ \bar{n}^0 &= \frac{\text{grad } U}{|\text{grad } U|}, \text{ где } U = z - 2(1 - x^2 - y^2), \text{ и} \\ \bar{n}^0 &= \frac{4x\bar{i} + 4y\bar{j} + 1\bar{k}}{\sqrt{1 + 4^2(x^2 + y^2)}}; \text{ rot } \bar{a} \cdot \bar{n}^0 = \frac{-4y - 1}{\sqrt{1 + 4^2(x^2 + y^2)}} \end{aligned} \right| =$$

$$= - \iint_{\sigma} \frac{d\sigma(-4y - 1)}{\sqrt{1 + 4^2(x^2 + y^2)}} = \left| \begin{aligned} &\text{Вычисляем поверхностный интеграл по} \\ &\text{площади поверхности } \sigma : z = 2(1 - x^2 - y^2), \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -4x = \\ &\frac{\partial z}{\partial y} = -4y; d\sigma = \sqrt{1 + 4^2(x^2 + y^2)} dx dy \end{aligned} \right| =$$

$$= - \iint_D \frac{(-4y - 1) \sqrt{1 + 4^2(x^2 + y^2)}}{\sqrt{1 + 4^2(x^2 + y^2)}} dx dy = \iint_D (-4y - 1) dx dy =$$

$$= \left| D \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi; & y = \sin \varphi \\ 0 \leq \rho \leq 1; & dx dy = \rho d\varphi d\rho \end{cases} \right| = \iint_D (-4 \sin \varphi - 1) \rho d\varphi d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (-4 \sin \varphi - 1) \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-4 \sin \varphi - 1) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} (-4 \cos t - \varphi) \Big|_0^{2\pi} = -\frac{2\pi}{2} = -\pi.$$

Итак, $\Pi = -\pi$.

УЧЕБНО - МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

РАЗДЕЛ 8 «ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ»

3. Материалы для самостоятельной работы студентов

3.1. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Скалярное поле. Линии и поверхности уровня.
2. Определение и формула вычисления производной по направлению.
3. Градиент. Определение, формула вычисления, свойства.
4. Векторное поле. Векторные линии и трубки.
5. Поверхностный интеграл второго рода.
6. Поток векторного поля.
7. Дивергенция. Определение, формула вычисления, свойства.
8. Формула Остроградского – Гаусса.
9. Формула Стокса.
10. Линейный интеграл и циркуляция векторного поля.
11. Плотность циркуляции векторного поля. Ротор.
12. Потенциальное поле.
13. Оператор Гамильтона.
14. Дифференциальные операции второго порядка.

3.2. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

3.2.1. Найти линии уровня скалярного поля $U = f(x, y)$ и выделить линию уровня для точки $P_0(x_0, y_0)$

а) $U = x^2 - y^2 - 1$; $P_0(1, 0)$

б) $U = x - 2y^2$; $P_0(2, 1)$

в) $U = x^2 + y^2$; $P_0(3; 4)$

Ответ: а) Семейство равнобочных гипербол $x^2 - y^2 = c + 1$ при $c > -1$ и сопряженных гипербол при $c < -1$; гипербола $x^2 - y^2 = 1$.

б) Семейство парабол $x - 2y^2 = c$; парабола $x = 2y^2$.

в) Семейство концентрических окружностей с центром в начале координат с радиусами $r = \sqrt{c}$ при $c > 0$; окружность $x^2 + y^2 = 5^2$.

3.2.2. Найти поверхность уровня следующих скалярных полей, определить поверхность с точкой $P_0(x_0, y_0, z_0)$

а) $U = x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3}$; $P_0(1, 0, 0)$

б) $U = x^2 + y^2 - 2z^2$; $P_0(1, 1, 1)$

в) $U = x^2 + y^2 + z^2$; $P_0(1, 1, 1)$.

Ответ: а) Множество плоскостей $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = c$; плоскость $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.

б) Множество однополостных гиперболоидов $x^2 + y^2 - 2z^2 = c$, при $c > 0$;

множество двуполостных гиперболоидов при $c < 0$, коническая поверхность $x^2 + y^2 = 2z^2$, соответствующая $c_0 = 0$ для точки $P_0(1, 1, 1)$.

в) Множество сфер $x^2 + y^2 + z^2 = c$ при $c > 0$; мнимых сфер при $c < 0$; сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

3.2.3. Найти $\text{grad}U$ следующих скалярных полей в данных точках:

а) $U = \ln(x + y^2)$ в т. $P_0(0, 1)$

б) $U = xy^2 + xy^2 - z^2y$ в т. $P_0(1, 2, 1)$.

Ответ: а) $\text{grad}U = \{1; 2\}$; б) $\text{grad}U = \{8; 4; -4\}$.

3.2.4. Найти единичный вектор нормали к поверхности $2x^2 - 4xy + y^2 - 2yz + 3z = 0$ в точке $P_0(1,1,1)$.

Ответ: $\vec{n}_0 = \left\{ 0; \frac{-4}{\sqrt{17}}; \frac{1}{\sqrt{17}} \right\}$.

3.2.5. Найти направление наибыстрейшего возрастания скалярного поля $U = xyz$ в т $P_0(1,2,2)$ и наибольшую скорость возрастания поля в этой точке.

Ответ. $\vec{n}_0 = \frac{\text{grad} U}{|\text{grad} U|} \Big|_{P_0} = \left\{ \frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}} \right\}; \quad V_{\max} = 2\sqrt{6}.$

3.2.6. В каких точках пространства $Oxyz$ градиент поля $U = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

- а) перпендикулярен к оси Oz ;
- б) параллелен оси Oz ;
- в) равен нулю?

Ответ: а) $x = y = z^2$; б) $x = y = 0$ и $x = y = a$; в) $x = y = z$.

3.2.7. Найти косинус угла φ между градиентами поля $U = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ в точках $A(1;2;2)$ и $B(-3;1;0)$.

Ответ: $\cos \varphi = -\frac{8}{9}.$

3.2.8. Доказать формулы:

- а) $\text{grad}(u + c) = \text{grad} u \quad (c = \text{const});$
- б) $\text{grad} c u = c \cdot \text{grad} u;$
- в) $\text{grad}(u^2) = 2u \text{grad} u.$

3.2.9. Определить силовые линии векторного поля

$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2z\vec{k}.$

Ответ: $y = c_1 x$
 $z = c_2 x^2.$

3.2.10. Найти поток вектора $\vec{a}$

- а) через боковую поверхность конуса $x^2 + y^2 \leq z^2 \quad (0 \leq z \leq h);$
- б) через основание этого конуса.

Ответ: а) 0

$$\text{б) } \pi h^3.$$

3.2.11. Найти поток вектора $\vec{a} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$ через полную поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями $\text{grad}(u+c) = \text{grad } u$ ($c = \text{const}$) $x + y + z = b$ ($b > 0$).
Ответ: $b^4/4$.

3.2.12. Найти поток вектора $\vec{a} = -\sqrt{x} \vec{i} + yz \vec{j} + \vec{k}$ через часть поверхности цилиндра $z^2 = 4x$, высеченную конусом $z^2 = 4(x^2 + y^2)$. При этом нормаль считается направленной в сторону выпуклости цилиндра.
Ответ: $\pi/2$.

3.2.13. Найти поток вектора $\vec{a} = xy \vec{i} + yz \vec{j} + xy \vec{k}$ через поверхность части шара $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, заключенной в первом октанте.
Ответ: $\frac{3\pi}{16}$.

3.2.14. Найти поток радиуса-вектора точки $\vec{r}$ через внешнюю сторону поверхности прямого конуса, вершина которого совпадает с началом координат, если известны радиус основания конуса R и его высота H .
Ответ: $\pi R^2 \cdot H$.

3.2.15. Доказать, что $\text{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{div } \vec{a} + \text{div } \vec{b}$.

3.2.16. Найти $\text{div}(\text{grad } U)$, где $U = U(x; y; z)$ – скалярная функция.
Ответ: $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$

3.2.17. Найти дивергенцию поля $\vec{a} = \frac{-\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ в точке $M(3; 4; 5)$.
 Чему приближенно равен поток вектора $\vec{a}$ через бесконечно малую сферу $(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = \varepsilon^2$?

$$\text{Ответ: } \text{div } \vec{a} = \frac{18}{125}; \quad Q = \frac{24}{125} \pi \varepsilon^3$$

3.2.18. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность σ (нормаль внешняя).

$$\bar{a} = (5x - 6y)\bar{i} + (11x^2 + 2y)\bar{j} + (x^2 - 4z)\bar{k}$$

$$\sigma: \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x = 0, y = 0, z = 0 \end{cases}$$

Ответ: 2

3.2.19. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{a} = y\bar{i} - x\bar{j}$ вдоль окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ в отрицательном направлении.

Ответ: $\Gamma = 2\pi R^2$.

3.2.20. Найти ротор векторного поля

а) $\bar{a} = y\bar{i} - 2z\bar{j} + x\bar{k}$

б) $\bar{a} = z^2\bar{i} + x^2\bar{j} + y^2\bar{k}$.

Ответ: а) $\text{rot } \bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}$

б) $\text{rot } \bar{a} = 2y\bar{i} + 2z\bar{j} + 2x\bar{k}$.

3.2.21. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{a} = x^2y^3\bar{i} + \bar{j} + z\bar{k}$ по замкнутому контуру $x^2 + y^2 = R^2, z = 0$ двумя способами: а) непосредственно и б) по формуле Стокса, взяв в качестве поверхности полусферу $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Ответ: $\frac{R^6 \pi}{8}$.

3.3. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание №1

Даны функция $z = f(x, y)$, точка A и вектор $\bar{a}$. Требуется найти:

1) $\text{grad } z$ в точке A ; 2) производную в точке A по направлению вектора $\bar{a}$.

1. $z = 3x^2 + 2xy$;	$A(1,2)$;	$\bar{a} = 4\bar{i} + 3\bar{j}$.
2. $z = 2x^2 + 3xy + y^2$;	$A(2,1)$;	$\bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$.
3. $z = \ln(x^2 + 3y^2)$;	$A(1,1)$;	$\bar{a} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$.
4. $z = x^2 + 3xy^2$;	$A(1,3)$;	$\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j}$.
5. $z = x^2 + y^2 + 2xy$;	$A(3,1)$;	$\bar{a} = -\bar{i} + \bar{j}$.
6. $z = xe^y$;	$A(2,0)$;	$\bar{a} = 5\bar{i} + 12\bar{j}$.
7. $z = \arctg(x^2y^2)$;	$A(1,-1)$;	$\bar{a} = 5\bar{i} - 12\bar{j}$.
8. $z = \arctg \frac{y}{x}$;	$A(2,-2)$;	$\bar{a} = -\bar{i} - 2\bar{j}$.
9. $z = \ln(5x^2 + 4y^2)$;	$A(1,1)$;	$\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$.
10. $z = \arcsin \frac{x}{y}$;	$A(3,5)$;	$\bar{a} = \bar{i} - \bar{j}$.
11. $z = x^2 + 3xy + y^2$;	$A(-1,2)$;	$\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$.
12. $z = 2x^2 + xy$;	$A(1,2)$;	$\bar{a} = -3\bar{i} + 4\bar{j}$.
13. $z = x^3y + xy^2$;	$A(1,3)$;	$\bar{a} = -5\bar{i} + 12\bar{j}$.
14. $z = \ln(2x + 3y)$;	$A(2,2)$;	$\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$.
15. $z = 5x^2y + 3xy^2$;	$A(1,1)$;	$\bar{a} = 6\bar{i} - 8\bar{j}$.
16. $z = \frac{3x}{y^2}$;	$A(3,4)$;	$\bar{a} = -3\bar{i} - 4\bar{j}$.
17. $z = \arctg(xy)$;	$A(2,3)$;	$\bar{a} = 4\bar{i} + 3\bar{j}$.
18. $z = \ln(3x^2 + 2xy^2)$;	$A(1,2)$;	$\bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$.
19. $z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$;	$A(1,-2)$;	$\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j}$.
20. $z = 5x^2 - 2xy + y^2$;	$A(1,1)$;	$\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$.
21. $z = \arcsin(x + 2y)$;	$A(-1, 1/2)$;	$\bar{a} = \bar{i} + \bar{j}$.
22. $z = ye^x$;	$A(0,2)$;	$\bar{a} = 12\bar{i} - 5\bar{j}$.
23. $z = xy + 2x - y$;	$A(2,2)$;	$\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j}$.

$$24. z = \frac{x-y}{x^2+y^2};$$

$$A(1,-2);$$

$$\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j}.$$

$$25. z = \arctg \frac{x}{y};$$

$$A(1,-1);$$

$$\bar{a} = \bar{i} - \bar{j}.$$

Задание №2

Найти векторные линии в векторном поле

$$1. \bar{a} = 4y\bar{i} - 9x\bar{j}$$

$$2. \bar{a} = 2y\bar{i} + 3x\bar{j}$$

$$3. \bar{a} = 4y\bar{j} + 8z\bar{k}$$

$$4. \bar{a} = x\bar{i} + 3y\bar{j}$$

$$5. \bar{a} = 2z\bar{i} + 3x\bar{k}$$

$$6. \bar{a} = y\bar{j} + 3z\bar{k}$$

$$7. \bar{a} = 2z\bar{j} + 3y\bar{k}$$

$$8. \bar{a} = 2x\bar{i} + 6y\bar{j}$$

$$9. \bar{a} = 5x\bar{i} + 10y\bar{j}$$

$$10. \bar{a} = y\bar{j} + 4z\bar{k}$$

$$11. \bar{a} = 5y\bar{i} + 7x\bar{j}$$

$$12. \bar{a} = 7y\bar{j} + 14z\bar{k}$$

$$13. \bar{a} = 2x\bar{i} + 6y\bar{j}$$

$$14. \bar{a} = 4z\bar{j} - 9y\bar{k}$$

$$15. \bar{a} = 2z\bar{j} + 3y\bar{k}$$

$$16. \bar{a} = 6x\bar{i} + 12z\bar{k}$$

$$17. \bar{a} = x\bar{i} + z\bar{k}$$

$$18. \bar{a} = 7y\bar{j} + 14z\bar{k}$$

$$19. \bar{a} = 2x\bar{i} + 6z\bar{k}$$

$$20. \bar{a} = 6x\bar{i} + 12z\bar{k}$$

$$21. \bar{a} = 9y\bar{i} - 4x\bar{j}$$

$$22. \bar{a} = 4x\bar{i} + z\bar{k}$$

$$23. \bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j}$$

$$24. \bar{a} = 9z\bar{i} - 4x\bar{k}$$

$$25. \bar{a} = 5y\bar{i} + 9x\bar{j}$$

Задание №3

Найти поток векторного поля $\bar{a}$ через часть плоскости P , расположенную в 1 октанте (нормаль образует острый угол с осью z).

$$1. \begin{cases} \bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \\ P: x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \bar{a} = -2x\bar{i} + y\bar{j} + 4z\bar{k} \\ P: \frac{x}{3} + y + \frac{z}{2} = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \bar{a} = 2x\bar{i} + 3y\bar{j} \\ P: x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} \bar{a} = 2x\bar{i} - 3y\bar{j} + 6z\bar{k} \\ P: \frac{x}{4} + \frac{y}{3} + z = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \bar{a} = y\bar{j} + z\bar{k} \\ \text{P: } x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \bar{a} = y\bar{j} + 3z\bar{k} \\ \text{P: } \frac{x}{2} + y + z = 1 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \bar{a} = 2x\bar{i} + 3y\bar{j} \\ \text{P: } x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \\ \text{P: } \frac{x}{2} + y + z = 1 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \\ \text{P: } x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \bar{a} = 3x\bar{i} + 2z\bar{k} \\ \text{P: } x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \bar{a} = 3x\bar{i} + 2z\bar{k} \\ \text{P: } x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \bar{a} = 2x\bar{i} + 3y\bar{j} + z\bar{k} \\ \text{P: } \frac{x}{3} + y + \frac{z}{2} = 1 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \bar{a} = x\bar{i} + 3y\bar{j} - z\bar{k} \\ \text{P: } \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = 1 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} \bar{a} = 2x\bar{i} + 5y\bar{j} + 5z\bar{k} \\ \text{P: } \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + z = 1 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} \bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \\ \text{P: } 2x + \frac{y}{2} + z = 1 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} \bar{a} = 2x\bar{i} + y\bar{j} - 2z\bar{k} \\ \text{P: } 2x + \frac{y}{2} + z = 1 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} \bar{a} = x\bar{i} + 2y\bar{j} + 5z\bar{k} \\ \text{P: } x + 2y + \frac{z}{2} = 1 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} \bar{a} = x\bar{i} + 4y\bar{j} + 5z\bar{k} \\ \text{P: } x + 2y + \frac{z}{2} = 1 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} \bar{a} = 2x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \\ \text{P: } 2x + 3y + z = 1 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} \bar{a} = 2x\bar{i} + 3y\bar{j} + z\bar{k} \\ \text{P: } 2x + 3y + z = 1 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} \bar{a} = -x\bar{i} + 2y\bar{j} + z\bar{k} \\ \text{P: } x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} \bar{a} = 8x\bar{i} + 11y\bar{j} + 17z\bar{k} \\ \text{P: } x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \bar{a} = 2x\bar{i} + 3y\bar{j} + z\bar{k} \\ P: \frac{x}{3} + \frac{y}{3} + z = 1 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} \bar{a} = 2x\bar{i} + 3y\bar{j} + 4z\bar{k} \\ P: 2x + 3y + z = 1 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + 6z\bar{k} \\ P: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = 1 \end{cases}$$

Задание №4

Найти поток векторного поля $\bar{a}$ через часть поверхности σ , вырезаемую плоскостями P_1, P_2 (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

$$1. \begin{cases} \bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \\ \sigma: x^2 + y^2 = 1 \\ P_1: z = 0, \quad P_2: z = 2 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \bar{a} = (x - y)\bar{i} + (x + y)\bar{j} + z^2\bar{k} \\ \sigma: x^2 + y^2 = 1 \\ P_1: z = 0, \quad P_2: z = 2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} - z\bar{k} \\ \sigma: x^2 + y^2 = 1 \\ P_1: z = 0, \quad P_2: z = 4 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \bar{a} = (x + y)\bar{i} - (x - y)\bar{j} + xyz\bar{k} \\ \sigma: x^2 + y^2 = 1 \\ P_1: z = 0, \quad P_2: z = 4 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + 2z\bar{k} \\ \sigma: x^2 + y^2 = 1 \\ P_1: z = 0, \quad P_2: z = 3 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \bar{a} = (x^3 + xy)\bar{i} + (y^3 + x^2y)\bar{j} + \\ + z^2\bar{k} \quad \sigma: x^2 + y^2 = 1 \\ P_1: z = 0, \quad P_2: z = 3 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z^3\bar{k} \\ \sigma: x^2 + y^2 = 1 \\ P_1: z = 0, \quad P_2: z = 1 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + \sin z\bar{k} \\ \sigma: x^2 + y^2 = 1 \\ P_1: z = 0, \quad P_2: z = 5 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + xyz\bar{k} \\ \sigma: x^2 + y^2 = 1 \\ P_1: z = 0, \quad P_2: z = 5 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \\ \sigma: x^2 + y^2 = 1 \\ P_1: z = 0, \quad P_2: z = 1 \end{cases}$$

Найти поток векторного поля $\mathbf{a}$ через часть поверхности σ вырезаемую плоскостью P (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой поверхностями).

$$11. \begin{cases} \bar{\mathbf{a}} = (x + xy^2)\bar{\mathbf{i}} + (y - yx^2)\bar{\mathbf{j}} + \\ + (z - 3)\bar{\mathbf{k}} \quad \sigma: x^2 + y^2 = 1 \\ (z \geq 0), \quad P: z = 1 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \bar{\mathbf{a}} = y\bar{\mathbf{i}} - x\bar{\mathbf{j}} + \bar{\mathbf{k}} \\ \sigma: x^2 + y^2 = z^2 \quad (z \geq 0) \\ P: z = 4 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \bar{\mathbf{a}} = xy\bar{\mathbf{i}} - x^2\bar{\mathbf{j}} + 3\bar{\mathbf{k}} \\ \sigma: x^2 + y^2 = z^2 \quad (z \geq 0) \\ P: z = 1 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \bar{\mathbf{a}} = xz\bar{\mathbf{i}} + yz\bar{\mathbf{j}} + (z^2 - 1)\bar{\mathbf{k}} \\ \sigma: x^2 + y^2 = z^2 \quad (z \geq 0) \\ P: z = 4 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} \bar{\mathbf{a}} = xy^2\bar{\mathbf{i}} - x^2y\bar{\mathbf{j}} + \bar{\mathbf{k}} \\ \sigma: x^2 + y^2 = z^2 \quad (z \geq 0) \\ P: z = 5 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} \bar{\mathbf{a}} = (xz + y)\bar{\mathbf{i}} - (yz - x)\bar{\mathbf{j}} + \\ + (z^2 - 2)\bar{\mathbf{k}} \quad \sigma: x^2 + y^2 = z^2 \\ (z \geq 0) \quad P: z = 3 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} \bar{\mathbf{a}} = xyz\bar{\mathbf{i}} - x^2z\bar{\mathbf{j}} + 3\bar{\mathbf{k}} \\ \sigma: x^2 + y^2 = z^2 \quad (z \geq 0) \\ P: z = 2 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} \bar{\mathbf{a}} = (x + y)\bar{\mathbf{i}} + (y - x)\bar{\mathbf{j}} + \\ + (z - 3)\bar{\mathbf{k}} \quad \sigma: x^2 + y^2 = z^2 \\ (z \geq 0) \quad P: z = 2 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} \bar{\mathbf{a}} = x\bar{\mathbf{i}} - y\bar{\mathbf{j}} + (z - 2)\bar{\mathbf{k}} \\ \sigma: x^2 + y^2 = z^2 \quad (z \geq 0) \\ P: z = 1 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} \bar{\mathbf{a}} = (x + xz)\bar{\mathbf{i}} + y\bar{\mathbf{j}} + \\ + (z - x^2)\bar{\mathbf{k}} \quad \sigma: x^2 + y^2 = 4 \\ (z \geq 0) \quad P: z = 5 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} \bar{\mathbf{a}} = x\bar{\mathbf{i}} + (y + yz^2)\bar{\mathbf{j}} + \\ + (z - zy^2)\bar{\mathbf{k}} \quad \sigma: x^2 + y^2 = 4 \\ (z \geq 0) \quad P: z = 2 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} \bar{\mathbf{a}} = (x + z)\bar{\mathbf{i}} + (y + z)\bar{\mathbf{j}} + \\ + (z - x - y)\bar{\mathbf{k}} \\ \sigma: x^2 + y^2 = 4 \quad (z \geq 0) \\ P: z = 2 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} \bar{\mathbf{a}} = (x + xy)\bar{\mathbf{i}} + (y - x^2)\bar{\mathbf{j}} + z\bar{\mathbf{k}} \\ \sigma: x^2 + y^2 = 1 \quad (z \geq 0) \\ P: z = 1 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} \bar{\mathbf{a}} = (x + z)\bar{\mathbf{i}} + y\bar{\mathbf{j}} + (z - x)\bar{\mathbf{k}} \\ \sigma: x^2 + y^2 = 1 \quad (z \geq 0) \\ P: z = 2 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} \bar{a} = (x + xy)\bar{i} + (y - x^2)\bar{j} + \\ + (z - 1)\bar{k} \quad \sigma: x^2 + y^2 = z^2 \\ (z \geq 0) \quad P: z = 3 \end{cases}$$

Задание №5

Найти поток векторного поля $\bar{a}$ через замкнутую поверхность σ (нормаль внешняя).

$$1. \bar{a} = (3x^2 + x)\bar{i} + (e^x - 2y)\bar{j} + (2z - xy)\bar{k}$$

$$\sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = 1, z = 4 \end{cases}$$

$$2. \bar{a} = (\ln y + 7x)\bar{i} + (\sin z - 2y)\bar{j} + (e^y - 2z)\bar{k}$$

$$\sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y + 2z - 2$$

$$3. \bar{a} = (\cos z + 3x)\bar{i} + (x - 2y)\bar{j} + (3z + y^2)\bar{k}$$

$$\sigma: \begin{cases} z^2 = 36(x^2 + y^2) \\ z = 6 \end{cases}$$

$$4. \bar{a} = (e^{-z} - x)\bar{i} + (xz + 3y)\bar{j} + (z + x^2)\bar{k}$$

$$\sigma: \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x = 0, y = 0, z = 0 \end{cases}$$

$$5. \bar{a} = (e^z + 2x)\bar{i} + e^x\bar{j} + e^y\bar{k}$$

$$\sigma: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x = 0, y = 0, z = 0 \end{cases}$$

$$6. \bar{a} = (6x - \cos y)\bar{i} - (e^x + z)\bar{j} + \left(x + \frac{3}{4}z\right)\bar{k}$$

$$\sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 3$$

$$7. \bar{a} = (4x - 2y^2)\bar{i} + (\ln z - 4y)\bar{j} - (2y + 3z)\bar{k}$$

$$\sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = 1, z = 2 \end{cases}$$

$$8. \bar{a} = (1 + \sqrt{z})\bar{i} + (4y - \sqrt{x})\bar{j} + xy\bar{k}$$

$$\sigma: \begin{cases} z^2 = 4(x^2 + y^2) \\ z = 3 \end{cases}$$

9. $\bar{a} = (\sqrt{z} - x)\bar{i} + (x - y)\bar{j} + (y^2 - z)\bar{k}$
 $\sigma: \begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ x = 0, y = 0, z = 0 \end{cases}$
10. $\bar{a} = (yz + x)\bar{i} + (x^2 + y)\bar{j} + (xy^2 + z)\bar{k}$
 $\sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 22$
11. $\bar{a} = (e^{2y} + x)\bar{i} + (x - 2y)\bar{j} + (y^2 + 3z)\bar{k}$
 $\sigma: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x = 0, y = 0, z = 0 \end{cases}$
12. $\bar{a} = (\sqrt{z} - 2x)\bar{i} + (e^x + 3y)\bar{j} + \sqrt{y + x} \bar{k}$
 $\sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = 2, z = 5 \end{cases}$
13. $\bar{a} = \left(e^z + \frac{x}{4}\right)\bar{i} + \left(\ln x + \frac{y}{4}\right)\bar{j} + \frac{z}{4}\bar{k}$
 $\sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y + 2z - 2$
14. $\bar{a} = (3x - 2z)\bar{i} + (z - 2y)\bar{j} + (1 + 2z)\bar{k}$
 $\sigma: \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x = 0, y = 0, z = 0 \end{cases}$
15. $\bar{a} = (e^y + 2x)\bar{i} + (x - y)\bar{j} + (2z - 1)\bar{k}$
 $\sigma: \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x = 0, y = 0, z = 0 \end{cases}$
16. $\bar{a} = (x + 2y)\bar{i} + (xz + y)\bar{j} + (\sqrt{x^2 + 1} + z)\bar{k}$
 $\sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = 2, z = 3 \end{cases}$
17. $\bar{a} = (e^y + 2x)\bar{i} + (xz - y)\bar{j} + \frac{1}{4}(e^{xy} - z)\bar{k}$
 $\sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 2y + 3$
18. $\bar{a} = (\sqrt{z} + y)\bar{i} + (x^2 - 1)\bar{j} + (3z + 5x)\bar{k}$
 $\sigma: \begin{cases} z^2 = 8(x^2 + y^2) \\ z = 2 \end{cases}$

$$19. \bar{a} = (5yz - x)\bar{i} + 3x\bar{j} + (xy - 2z)\bar{k}$$

$$\sigma: \begin{cases} 2x + 3y - z = 6 \\ x = 0, y = 0, z = 0 \end{cases}$$

$$20. \bar{a} = (y + z^2)\bar{i} + (x^2 + 3y)\bar{j} + xy\bar{k}$$

$$\sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 2x$$

$$21. \bar{a} = (2yz - x)\bar{i} + (xz + 2y)\bar{j} + (x^2 + z)\bar{k}$$

$$\sigma: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x = 0, y = 0, z = 0 \end{cases}$$

$$22. \bar{a} = (\sin z + 2x)\bar{i} + (\sin x - 3y)\bar{j} + (\sin y + 2z)\bar{k}$$

$$\sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = 3, (z \geq 0) \end{cases}$$

$$23. \bar{a} = \left(\cos z + \frac{x}{4}\right)\bar{i} + \left(e^x + \frac{y}{4}\right)\bar{j} + \left(\frac{z}{4} - 1\right)\bar{k}$$

$$\sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 2z + 3$$

$$24. \bar{a} = (\sqrt{z+1} + x)\bar{i} + (2x + y)\bar{j} + (\sin x + z)\bar{k}$$

$$\sigma: \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$25. \bar{a} = (5x - 6y)\bar{i} + (11x^2 + 2y)\bar{j} + (x^2 - 4z)\bar{k}$$

$$\sigma: \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x = 0, y = 0, z = 0 \end{cases}$$

Задание №6

Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a}$ вдоль контура L (в направлении, соответствующем возрастанию параметра t).

$$1. \bar{a} = y\bar{i} - x\bar{j} + z^2\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \\ z = \sin t \end{cases}$$

$$14. \bar{a} = x\bar{i} + 2z\bar{j} + y\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} x = \cos t, y = 3 \sin t \\ z = 2 \cos t - 3 \sin t - 2 \end{cases}$$

$$2. \quad \bar{a} = x^2 y \bar{i} + \bar{j} + z \bar{k}$$

$$L : \begin{cases} x = \sqrt[3]{4} \cos t, z = 3 \\ y = \sqrt[3]{4} \sin t \end{cases}$$

$$3. \quad \bar{a} = (y - z) \bar{i} + (z - x) \bar{j} + (x - y) \bar{k}$$

$$L : \begin{cases} x = \cos t, y = \sin t \\ z = 2(1 - \cos t) \end{cases}$$

$$4. \quad \bar{a} = x^2 \bar{i} + y \bar{j} - z \bar{k}$$

$$L : \begin{cases} x = \cos t, y = \sin t \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t \end{cases}$$

$$5. \quad \bar{a} = (y - z) \bar{i} + (z - x) \bar{j} + (x - y) \bar{k}$$

$$L : \begin{cases} x = 4 \cos t, y = 4 \sin t \\ z = 1 - \cos t \end{cases}$$

$$6. \quad \bar{a} = 2y \bar{i} - 3x \bar{j} + x \bar{k}$$

$$L : \begin{cases} x = 2 \cos t, y = 2 \sin t \\ z = 2 - 2 \cos t - 2 \sin t \end{cases}$$

$$7. \quad \bar{a} = 2z \bar{i} - x \bar{j} + y \bar{k}$$

$$L : \begin{cases} x = 2 \cos t, y = 2 \sin t \\ z = 1 \end{cases}$$

$$8. \quad \bar{a} = y \bar{i} - x \bar{j} + z \bar{k}$$

$$L : \begin{cases} x = \cos t, y = \sin t \\ z = 3 \end{cases}$$

$$9. \quad \bar{a} = x \bar{i} + z^2 \bar{j} + y \bar{k}$$

$$L : \begin{cases} x = \cos t, y = 2 \sin t \\ z = 2 \cos t - 2 \sin t - 1 \end{cases}$$

$$10. \quad \bar{a} = 3y \bar{i} - 3x \bar{j} + x \bar{k}$$

$$L : \begin{cases} x = 3 \cos t, y = 3 \sin t \\ z = 3 - 3 \cos t - 3 \sin t \end{cases}$$

$$15. \quad \bar{a} = x \bar{i} - \frac{z^2}{3} \bar{j} + y \bar{k}$$

$$L : \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t, y = \frac{1}{3} \sin t \\ z = \cos t - \frac{1}{3} \sin t - \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$16. \quad \bar{a} = 4y \bar{i} - 3x \bar{j} + x \bar{k}$$

$$L : \begin{cases} x = 4 \cos t, y = 4 \sin t \\ z = 4 - 4 \cos t - 4 \sin t \end{cases}$$

$$17. \quad \bar{a} = -2 \bar{i} - x \bar{j} + xz \bar{k}$$

$$L : \begin{cases} x = 5 \cos t, y = 5 \sin t \\ z = 4 \end{cases}$$

$$18. \quad \bar{a} = z \bar{i} + x \bar{j} + y \bar{k}$$

$$L : \begin{cases} x = 2 \cos t, y = 2 \sin t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$19. \quad \bar{a} = (y - z) \bar{i} + (z - x) \bar{j} + (x - y) \bar{k}$$

$$L : \begin{cases} x = 3 \cos t, y = 3 \sin t \\ z = 2(1 - \cos t) \end{cases}$$

$$20. \quad \bar{a} = 2y \bar{i} + z \bar{j} + x \bar{k}$$

$$L : \begin{cases} x = \cos t, y = \sin t \\ z = 4 - \cos t - \sin t \end{cases}$$

$$21. \quad \bar{a} = xz \bar{i} + x \bar{j} + z^2 \bar{k}$$

$$L : \begin{cases} x = \cos t, y = \sin t \\ z = \sin t \end{cases}$$

$$22. \quad \bar{a} = -x^2 y^3 \bar{i} + 3 \bar{j} + y \bar{k}$$

$$L : \begin{cases} x = \cos t, y = \sin t \\ z = 5 \end{cases}$$

$$23. \quad \bar{a} = 7z \bar{i} - x \bar{j} + yz \bar{k}$$

$$L : \begin{cases} x = 6 \cos t, y = 6 \sin t \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$11. \bar{a} = x^2 \cdot y^2 \bar{i} + 2\bar{j} + xz\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, y = \sqrt{2} \sin t \\ z = 1 \end{cases}$$

$$12. \bar{a} = 6z\bar{i} - x\bar{j} + xy\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} x = 3 \cos t, y = 3 \sin t \\ z = 3 \end{cases}$$

$$13. \bar{a} = z\bar{i} + y^2\bar{j} - x\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, y = 2 \sin t \\ z = \sqrt{2} \cos t \end{cases}$$

$$24. \bar{a} = xy\bar{i} + x\bar{j} + y^2\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} x = \cos t, y = \sin t \\ z = 5 \end{cases}$$

$$25. \bar{a} = x\bar{i} - z^2\bar{j} + y\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} x = 2 \cos t, y = 3 \sin t \\ z = 4 \cos t - 3 \sin t - 3 \end{cases}$$

Задание №7

Найти модуль циркуляции векторного поля $\bar{a}$ вдоль контура L (по формуле Стокса).

$$1. \bar{a} = (x^2 - y)\bar{i} + x\bar{j} + \bar{k}$$

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$2. \bar{a} = xz\bar{i} - \bar{j} + y\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} z = (x^2 + y^2) - 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

$$3. \bar{a} = (x - y)\bar{i} + x\bar{j} - z\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 5 \end{cases}$$

$$4. \bar{a} = x\bar{i} + yz\bar{j} - x\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$5. \bar{a} = y\bar{i} - x\bar{j} + z^2\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} z = 3(x^2 + y^2) + 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

$$14. \bar{a} = 2yz\bar{i} + xz\bar{j} - x^2\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$15. \bar{a} = y\bar{i} + 3x\bar{j} - z^2\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} z = x^2 + y^2 - 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$16. \bar{a} = -y\bar{i} + x\bar{j} + 3z^2\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} z = x^2 + y^2 - 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

$$17. \bar{a} = -x\bar{i} - 2y\bar{j} + 3z\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} z = x^2 + y^2 + 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

$$18. \bar{a} = x\bar{i} + 3y\bar{j} - z^2\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$6. \quad a = 4x\bar{i} + 2y\bar{j} - xy\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} z = 2(x^2 + y^2) + 1 \\ z = 7 \end{cases}$$

$$7. \quad a = -3z\bar{i} + y^2\bar{j} + 2y\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$8. \quad a = y\bar{i} - x\bar{j} + z^2\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

$$9. \quad a = -3z\bar{i} + y^2\bar{j} + 2y\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$10. \quad a = xy\bar{i} + yz\bar{j} + xz\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$11. \quad a = 2y\bar{i} + \bar{j} - 2yz\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$12. \quad a = (x - y)\bar{i} + x\bar{j} + z^2\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 - 4z^2 = 0 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$13. \quad a = xz\bar{i} - \bar{j} + y\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$19. \quad a = x^2\bar{i} + yz\bar{j} + 2z\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ z = 4 \end{cases}$$

$$20. \quad a = y\bar{i} - 2x\bar{j} + z^2\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} z = 4(x^2 + y^2 + 1) \\ z = 6 \end{cases}$$

$$21. \quad a = 4\bar{i} + 3x\bar{j} + xz\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ z = 4 \end{cases}$$

$$22. \quad a = 4z\bar{i} - z\bar{j} + xy\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$23. \quad a = y\bar{i} - x\bar{j} + 2z\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$24. \quad a = x^2\bar{i} + yz\bar{j} + 2z\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ z = 4 \end{cases}$$

$$25. \quad a = (x + y)\bar{i} - x\bar{j} + 6\bar{k}$$

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$