ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение высшего образования
"УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЯНОЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ"
(УГНТУ)

Кафедра математики

УЧЕБНО – МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

дисциплины «Математика»

РАЗДЕЛ 6 «ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

Теоретические основы
Методические указания для студентов
Материалы для самостоятельной работы студентов

Уфа 2017

УДК 517.3(07)
ББК 22.161.1я7
У90

Ответственный редактор д. ф.-м. наук, проф. Р.Н. Бахтизин

Редколлегия:

АкмадиеваТ.Р., Аносова Е.П., Байрамгулова Р.С., Галиуллин М.М., Галиева Л.М., Галиакбарова Э.В., Гимаев Р.Г., Гудкова Е.В., Егорова Р.А., Жданова Т.Г., Зарипов Э.М., Зарипов Р.М., Исламгулова Г.Ф., Ковалева Э.А., Майский Р.А., Мухаметзянов И.З., Нагаева З.М., Савлучинская Н.М., Сахарова Л.А., Степанова М.Ф., Сокова И.А., Сулейманов И.Н., Умергалина Т.В., Фаткуллин Н.Ю., Хайбуллин Р.Я., Хакимов Д.К., Хакимова З.Р., Чернятьева М.Р., Юлдыбаев Л.Х., Шамшович В.Ф., Якубова Д.Ф., Якупов В.М., Янчушка А.П., Яфаров Ш.А.

Рецензенты: Кафедра программирования и вычислительной математики Башкирского государственного педагогического университета.
Заведующий кафедрой д. ф.-м. наук, профессор Р.М. Асадуллин
Кафедра вычислительной математики Башкирского государственного университета.
Заведующий кафедрой д. ф.-м. наук, профессор Н.Д. Морозкин

Учебно-методический комплекс дисциплины «Математика». Раздел 6 «Интегральное исчисление функции одной переменной». Теоретические основы. Методические указания для студентов. Материалы для самостоятельной работы студентов. – Уфа: Издательство УГНТУ, 2007. – 205 с.

Содержит теоретические материалы, способы и методы решения практических задач, задания для самостоятельной работы студентов, контрольные вопросы для самопроверки, список рекомендуемой литературы.

Разработан для студентов, обучающихся по всем формам обучения по направлениям подготовки и специальностям, реализуемым в УГНТУ.

УДК 517.3(07)
ББК 22.161.1я7

© Уфимский государственный нефтяной технический университет, 2007

СОДЕРЖАНИЕ

1. Теоретические основы
1.1 Первообразная функция и неопределенный интеграл 7
1.2 Простейшие свойства неопределенного интеграла и его геометрический смысл 8
1.3 Таблица основных интегралов 10
1.4 Основные методы интегрирования 11
1.4.1 Интегрирование методом разложения 11
1.4.2 Интегрирование методом замены переменной 12
1.4.3 Метод интегрирования по частям 17
1.5 Интегрирование дробно - рациональной функции 21
1.5.1 Некоторые сведения о многочленах 21
1.5.2 Виды рациональных дробей 22
1.5.3 Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей 23
1.5.4 Интегрирование простейших дробей 26
1.5.5 Общий план интегрирования дробно - рациональной функции 29
1.6 Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций 31
1.6.1 Рациональная функция двух независимых переменных 31
1.6.2 Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ 32
1.6.3 Частные методы вычисления интегралов $\int R(\sin x, \cos x)dx$ 34
1.7 Интегрирование некоторых классов иррациональных функций 37
1.8 Задача, приводящая к понятию определенного интеграла 41
1.9 Определение определенного интеграла 42
1.10 Свойства определенного интеграла 43
1.11 Интеграл с переменным верхним пределом интегрирования 47
1.12 Формула Ньютона-Лейбница 48
1.13 Замена переменной в определенном интеграле 50
1.14 Интегрирование по частям в определенном интеграле 51
1.15 Несобственные интегралы 52
1.15.1 Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования 52
1.15.2 Несобственные интегралы от неограниченных функций 55
1.16 Геометрические приложения определенного интеграла 56
1.16.1 Вычисление площади в декартовых координатах 56
1.16.2 Площадь криволинейного сектора 59
1.16.3 Длина дуги плоской кривой 61
1.16.4 Объем тела вращения 64
1.17 Применение определенных интегралов к решению некоторых задач механики и физики 65
1.17.1 Схема применения определенного интеграла 65

1.17.2 Работа переменной силы 66
1.17.3 Статические моменты. Координаты центра тяжести системы материальных точек 69
1.17.4 Центр тяжести плоской линии 69
2. Методические указания для студентов 71
2.1 Непосредственное интегрирование 72
2.1.1 Основные определения 73
2.1.2 Свойства неопределенного интеграла 73
2.1.3 Таблица неопределенных интегралов 73
2.1.4 Метод непосредственного интегрирования 74
2.2 Инвариантность формул интегрирования. Методы интегрирования 77
2.2.1 Метод введения функции под знак дифференциала 77
2.2.2 Интегрирование методом подстановки 81
2.3 Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен 83
2.4 Интегрирование по частям 87
2.5 Интегрирование рациональных функций 90
2.5.1 Интегрирование простейших дробей 90
2.5.2 Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей. Интегрирование рациональных дробей 93
2.6 Интегрирование тригонометрических функций 97
2.6.1 Интегралы от функций $\sin mx \cos nx$, $\cos mx \cos nx$, $\sin mx \sin nx$ 98
2.6.2 Интегралы от функций $\sin^{2m} x \cos^{2n} x$ 98
2.6.3 Интегралы от функций $\sin^{m} x \cdot \cos^{n} x$ (m, n – целые числа) 99
2.6.4 Интегралы от рациональной функции $R(\sin x, \cos x)$ 103
2.7 Интегрирование иррациональных функций 106
2.7.1 Сведение иррациональных функций к рациональным 106
2.7.2 Сведение иррациональных функций к тригонометрическим 108
2.7.3 Интегрирование дифференциальных биномов 111
2.8 Определенный интеграл 114
2.8.1 Вычисление определенного интеграла 116
2.9 Несобственные интегралы 120
2.9.1 Интегралы с бесконечными пределами интегрирования 121
2.9.2 Интегралы от неограниченных функций 124
2.10 Геометрические приложения определенного интеграла 128
2.10.1 Вычисление площади плоской фигуры 128
2.10.2 Вычисление длины дуги кривой 136
2.10.3 Вычисление координат центра тяжести 141
2.10.4 Вычисление объема тела вращения 145
2.10.5 Вычисление площади поверхности вращения 149
2.11 Применение определенного интеграла к решению некоторых задач физики 151
2.11.1 Вычисление работы 151
2.11.2 Давление жидкости 153

2.11.3 Истечение жидкости из емкости 156

3. Материалы для самостоятельной работы студентов
3.1. Контрольные вопросы 158
3.2. Задачи и упражнения для самостоятельной работы 159
3.3. Расчетные задания 173
3.4. Лабораторная работа 203
3.5. Список литературы 205

УЧЕБНО - МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

РАЗДЕЛ 6 «ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

1. Теоретические основы

1.1 ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Одной из основных задач дифференциального исчисления является задача отыскания производной заданной функции.

Многочисленные вопросы науки и техники приводят к постановке обратной задачи: по заданной производной (дифференциалу) некоторой функции требуется определить саму функцию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если в каждой точке этого промежутка

$$F'(x) = f(x) \qquad (1.1)$$

или, что тоже,

$$dF(x) = f(x)dx \qquad (1.2)$$

Например, $F(x) = \sin x$ является первообразной для $f(x) = \cos x$ на всей числовой оси Ox, так как

$$(\sin x)' = \cos x$$

В курсе высшей математики доказано, что если $f(x)$ есть непрерывная на некотором отрезке функция, то на этом отрезке существует первообразная для данной функции.

Задача отыскания первообразной для заданной функции является одной из основных задач интегрального исчисления. Покажем, что эта задача решается неоднозначно. В самом деле, если функция $F(x)$ первообразная для $f(x)$, то функция $F(x)+C$, где C любое действительное число, также является первообразной для $f(x)$ при любом значении C. Действительно, если $F'(x) = f(x)$, то $\left(F(x)+C\right)' = F'(x)+C' = f(x)$ для любого числа $C \in R$. Тогда, согласно (1.1), $F(x)+C$ есть первообразная для $f(x)$.

Например, если $f(x) = 4x^3$, то функции $F_1(x) = x^4$, $F_2(x) = x^4 + 1$, $F_3(x) = x^4 - 2$ и вообще $F(x) = x^4 + C$, где C любое число, будут первообразными для $f(x)$.

Таким образом, если функция $f(x)$ имеет хотя бы одну первообразную, то она имеет их бесконечное множество. Естественно, возникает вопрос об отыскании всех первообразных для данной функции. Ответ на этот вопрос дается следующей теоремой.

Теорема 1.1 Если функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$ на $[a;b]$, то всякая другая первообразная для $f(x)$ отличается от $F(x)$ на постоянное слагаемое, то есть может быть представлена в виде $F(x)+C$, где C постоянная.

Доказательство. Пусть $\Phi(x)$ любая другая первообразная для функции $f(x)$, тогда $\Phi'(x) = f(x) = F'(x)$. Пусть $\varphi(x) = \Phi(x) - F(x)$ на $[a;b]$. Тогда $\varphi'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = 0$. Следовательно, функция $\varphi(x)$ постоянна на $[a;b]$, то есть

$\varphi(x) = C$ на этом отрезке. Тогда и $\Phi(x) - F(x) = C$ или $\Phi(x) = F(x) + C$, где C некоторое число. Теорема 1.1 доказана.

Из теоремы 1.1 следует, что выражение $F(x) + C$ охватывает всю совокупность первообразных для данной функции $f(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2 Если $F(x)$ одна из первообразных для функции $f(x)$ на $[a;b]$, то выражение $F(x) + C$, где C произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$ (читается: неопределенный интеграл от $f(x)$ на dx). Итак,

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ , \qquad (1.3)$$

где $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ - подынтегральным выражением, x - переменной интегрирования, а символ $\int$ - знаком неопределенного интеграла.

Отыскание всех первообразных или отыскание неопределенного интеграла для данной функции $f(x)$ называют интегрированием этой функции. Из определений 1.1 и 1.2 следует, что интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию. Это значит, что для проверки, правильно ли выполнено интегрирование некоторой функции $f(x)$, достаточно продифференцировать результат интегрирования $F(x) + C$ и сверить его с заданной функцией $f(x)$. Если $(F(x) + C)'$ будет равна $f(x)$, то интегрирование осуществлено верно. Например, $\int \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$, так как

$$\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2} \right)^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4 + x^2}$$

1.2 ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА И ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Из определения неопределенного интеграла следует, что:

1^0 Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x). \qquad (1.4)$$

Действительно, $F'(x) = f(x)$ и согласно (1.3) $\int f(x)dx = F(x) + C$. Тогда $\left(\int f(x)dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

2^0 Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$d\left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx. \qquad (1.5)$$

Действительно, $d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x)+C) = f(x)dx$.

3^0 Неопределенный интеграл от производной равен самой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int F'(x)dx = F(x)+C. \qquad (1.6)$$

Действительно, $F'(x) = f(x)$. Тогда, $\int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x)+C$ согласно определения 1.2.

4^0 Неопределенный интеграл от дифференциала равен дифференцируемой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int dF(x) = F(x)+C. \qquad (1.7)$$

Действительно, $dF(x) = f(x)dx$. Тогда, $\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x)+C$.

5^0 Постоянный множитель k $(k \neq 0)$ можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int k f(x)dx = k\int f(x)dx. \qquad (1.8)$$

Доказательство. Дифференцируя левую часть (1.8), согласно свойству 1^0, получим $\left(\int kf(x)dx\right)' = kf(x)$.

Дифференцируя правую часть (1.8), согласно свойству производной о постоянном множителе, получим

$$\left(k\int f(x)dx\right)' = k\left(\int f(x)dx\right)' = kf(x)$$

Итак, $\left(\int kf(x)dx\right)' = \left(k\int f(x)dx\right)'$

Из равенства производных следует, что сами функции отличаются друг от друга не более чем на постоянное слагаемое, то есть $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ с точностью до постоянного слагаемого.

6^0 Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функции равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int\left[f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_k(x)\right]dx = \\ = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_k(x)dx \qquad (1.9)$$

Доказательство. Дифференцируя левую часть (1.9), получим

$$\left(\int\left[f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_k(x)\right]dx\right)' = f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_k(x).$$

Дифференцируя правую часть (1.9), получим

$$\left(\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_k(x)dx\right)' = \left(\int f_1(x)dx\right)' + \\ + \left(\int f_2(x)dx\right)' + \ldots + \left(\int f_k(x)dx\right)' = f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_k(x).$$

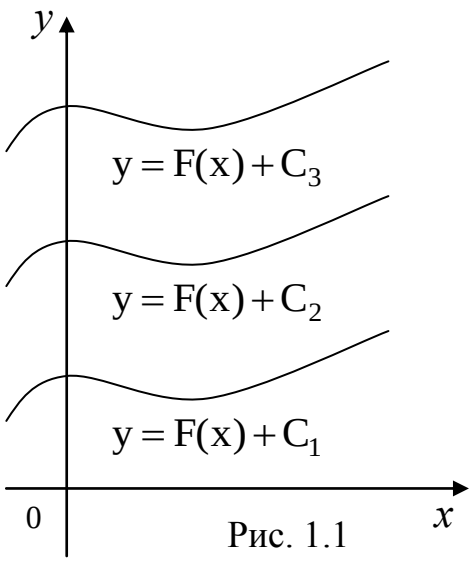


Рис. 1.1

Так как производные равны, то равенство (1.9) справедливо с точностью до постоянного слагаемого.

Выясним геометрический смысл неопределенного интеграла.

Пусть функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. Назовем график первообразной $F(x)$ интегральной кривой. График любой другой первообразной $y = F(x) + C$ при любом постоянном C может быть получен параллельным переносом интегральной кривой $y = F(x)$ вдоль оси Oy. Следовательно, неопределенный интеграл с геометрической позиции представляет собой семейство всех интегральных кривых, каждая из которых может быть получена параллельным переносом одной из интегральных кривых вдоль оси Oy (рис.1.1).

1.3 ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Так как в интегральном исчислении нет никаких определенных правил для нахождения первообразных от произведения, частного двух функций, сложной функции, то задача поиска первообразной является задачей более сложной, чем задача поиска производной. Поэтому в интегральном исчислении стремятся с помощью ряда приемов свести заданный интеграл к так называемым основным интегралам:

$$1\ \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \in R,\ \alpha \neq -1 \qquad (1.10)$$

$$2\ \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad (1.11)$$

$$3\ \int dx = x + C \qquad (1.12)$$

$$4\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1 \qquad (1.13)$$

$$5\ \int e^x dx = e^x + C \qquad (1.14)$$

$$6\ \int \sin x\, dx = -\cos x + C \qquad (1.15)$$

$$7\ \int \cos x\, dx = \sin x + C \qquad (1.16)$$

$$8\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \qquad (1.17)$$

$$9\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \qquad (1.18)$$

$$10\ \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0 \qquad (1.19)$$

$$11\ \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,\ a \neq 0 \qquad (1.20)$$

$$12\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0 \qquad (1.21)$$

$$13\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C,\ a \neq 0 \qquad (1.22)$$

$$14\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C,\ a \neq 0 \qquad (1.23)$$

$$15\ \int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C \qquad (1.24)$$

$$16\ \int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C \qquad (1.25)$$

$$17\ \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C \qquad (1.26)$$

$$18\ \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C \qquad (1.27)$$

$$19\ \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C \qquad (1.28)$$

$$20\ \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C \qquad (1.29)$$

Часть формул этой таблицы непосредственно следует из определения неопределенного интеграла и таблицы производных. Справедливость остальных можно проверить дифференцированием обеих частей равенств.

Например, для формулы (1.22) имеем

$$\left(\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Из равенства производных и следует справедливость равенства (1.22).

1.4 ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1.4.1 Интегрирование методом разложения

Метод основан на разложении подынтегральной функции на сумму функций от каждой из которых первообразную можно найти в основной таблице интегралов.

Пример 1.1 Найти $\int \frac{x^3+5x-2}{x}dx$.

Решение.

Разделив почленно числитель на знаменатель в подынтегральной функции, получим $\frac{x^3+5x-2}{x}=x^2+5-\frac{2}{x}$; тогда, согласно (1.8) и (1.9) имеем

$$\int \frac{x^3+5x-2}{x}dx=\int x^2dx+\int 5dx-\int \frac{2}{x}dx=\frac{x^3}{3}+5x-2\ln|x|+C$$

Пример 1.2 Найти $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx+$$

$$+\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int \frac{dx}{\cos^2 x}+\int \frac{dx}{\sin^2 x}=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$$

Пример 1.3 Найти $\int \frac{dx}{x^2\left(9+x^2\right)}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{x^2\left(9+x^2\right)}=\frac{1}{9}\int \frac{9dx}{x^2(9+x^2)}=\frac{1}{9}\int \frac{9+x^2-x^2}{x^2(9+x^2)}dx=\frac{1}{9}\int \frac{9+x^2}{x^2(9+x^2)}dx-$$

$$-\frac{1}{9}\int \frac{x^2}{x^2(9+x^2)}dx=\frac{1}{9}\int \frac{dx}{x^2}-\frac{1}{9}\int \frac{dx}{9+x^2}=-\frac{1}{9x}-\frac{1}{27}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$$

Пример 1.4 Найти $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Решение.

$$\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt[3]{x}}dx=\int \frac{1+3\sqrt{x}+3x+x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx=\int\left(x^{-\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{6}}+3x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{7}{6}}\right)dx=$$

$$=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+\frac{18}{7}x^{\frac{7}{6}}+\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}}+C$$

1.4.2 Интегрирование методом замены переменной

Введение новой переменной интегрирования, вместо переменной x, позволяет во многих случаях свести данный интеграл $\int f(x)dx$ в новому интегралу, который или содержится в основной таблице интегралов или легко сводится к нему.

Теорема 1.2 Если функция $x=\varphi(t)$ строго монотонна и непрерывно дифференцируема на некотором промежутке, а $f(x)$ интегрируема на соответствующем промежутке изменения x, то справедливо равенство

$$\int f(x)dx=\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt \qquad (1.30)$$

Доказательство. Найдем дифференциал левой части (1.30).

Согласно (1.5) $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$. Найдем дифференциал правой части (1.30). Имеем

$$d\left(\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt\right)\Rightarrow\left|\begin{matrix}\text{по}\\(1.5)\end{matrix}\right|=f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt\Rightarrow\left|\begin{matrix}\varphi(t)=x\\\varphi'(t)dt=dx\end{matrix}\right|=f(x)dx$$

Сравнивая правые части полученных равенств, найдем

$$d\left(\int f(x)dx\right)=d\left(\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt\right).$$

Отсюда следует, что сами интегралы отличаются друг от друга не более чем на постоянное слагаемое.

Допустим, что интеграл в правой части (1.30) найден, то есть

$$\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt=\Phi(t)+C$$

Тогда для нахождения $\int f(x)dx$ достаточно в первообразной осуществить обратный переход от новой переменной t к старой переменной x. Пусть $t=\psi(x)$ есть обратная функция по отношению к функции $x=\varphi(t)$, тогда $\int f(x)dx=\Phi\left[\psi(x)\right]+C.$

Рассмотрим на примерах наиболее часто встречающиеся виды замен переменной.

Пример 1.5 Найти $\int\frac{x}{(x-3)^2}dx$.

Решение.

Введем новую переменную, положив $x=t+3$. Ясно, что функция $\varphi(t)=t+3$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.2. Тогда, $dx=d(t+3)=dt$ и согласно этой теореме имеем

$$\int\frac{x}{(x-3)^2}dx=\int\frac{t+3}{(t+3-3)^2}dt=\int\frac{t+3}{t^2}dt=\int\left(\frac{1}{t}+\frac{3}{t^2}\right)dt=\int\frac{dt}{t}+3\int\frac{dt}{t^2}=$$

$$=\ln|t|-\frac{3}{t}+C\Rightarrow\left|\begin{matrix}x=t+3\Rightarrow\\t=x-3\end{matrix}\right|=\ln|x-3|-\frac{3}{x-3}+C.$$

Заметим, что при решении примера 1.5 использовалась линейная замена, то есть замена вида $x=kt+b$, где $k,\ b\in R,\ k\neq0$.

Пример 1.6 Найти $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

Решение.

Выполним тригонометрическую подстановку, положив $x = a\sin t$.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\ dt =$$

$$= \int \sqrt{a^2\cos^2 t}\cdot a\cos t\ dt = a^2\int \cos^2 t\,dt =$$

$$= a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\int \cos 2t\ dt = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{2}\int \cos 2t\,dt \Rightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} t = \dfrac{z}{2}, \\ dt = \dfrac{dz}{2} \end{array}\right| = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{2}\int \cos z\cdot\frac{dz}{2} = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4}\sin z + C \Rightarrow |z = 2t| =$$

$$= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C \Rightarrow \left|\begin{array}{c} x = a\sin t,\quad \sin t = \dfrac{x}{a}, \\ t = \arcsin\dfrac{x}{a},\quad \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}} \end{array}\right| =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\sin t\cos t + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{ax}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\cdot\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Пример 1.7 Найти $\int \dfrac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Решение.

Воспользуемся степенной функцией $x = t^2$, тогда $dx = 2t\ dt$ и

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2t\,dt}{1+t} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} t = z-1, \\ dt = dz \end{array}\right| = \int \frac{2(z-1)}{z}\,dz =$$

$$= 2\int\left(1 - \frac{1}{z}\right)dz = 2\int dz - 2\int \frac{dz}{z} = 2z - 2\ln|z| + C =$$

$$= 2(t+1) - 2\ln|t+1| + C \Rightarrow |t = \sqrt{x}| = 2(1+\sqrt{x}) - 2\ln|1+\sqrt{x}| + C.$$

В примерах 1.6 и 1.7 вместе с тригонометрической и степенной подстановками применялась и линейная замена.

Формула (1.30), наряду с заменой $x = \varphi(t)$, позволяет осуществлять и замены вида $t = \varphi(x)$. Действительно, поменяв в (1.30) x на t и наоборот, получим формулу вида

$$\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)dx \Rightarrow \left|\begin{matrix}\varphi(x)=t,\\ \varphi'(x)dx=dt\end{matrix}\right| = \int f(t)dt \qquad (1.31)$$

Пример 1.8 Найти $\int \sin^2 x \cos x\, dx$.

Решение.

Так как $\cos x dx = (\sin x)'dx = d(\sin x)$,

то положим: $\sin x = t$. Тогда $\cos x\, dx = dt$ и

$$\int \sin^2 x \cos x\, dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

Пример 1.9 Найти $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

Решение.

Так как $\frac{dx}{x} = (\ln x)'dx = d(\ln x)$, то положим $\ln x = t$. Тогда $d(\ln x) = \frac{dx}{x} = dt$

и $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int t\ dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$

Пример 1.10 Найти $\int \frac{\text{arctg}^3 x}{1+x^2} dx$.

Решение.

$\frac{dx}{1+x^2} = (\text{arctg}\ x)'dx = d(\text{arctg}\ x)$.

Тогда при $\text{arctg}\ x = t$, получим

$$\int \frac{\text{arctg}^3 x}{1+x^2} dx = \int \text{arctg}^3 x\, d(\text{arctg}\ x) = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4}\text{arctg}^4 x + C$$

Применение замены переменной вида $\varphi(x) = t$ особенно эффективно при вычислении интегралов вида $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx$.

Тогда $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \int \frac{d\left[\varphi(x)\right]}{\varphi(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\varphi(x)| + C$

Пример 1.11 Найти $\int \text{tg}\, x\, dx$

Решение.

$$\int \text{tg}\, x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\cos x = t\right| = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

Пример 1.12 Найти $\int \frac{2x}{1+x^2}dx$.

Решение.

$$\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \int \frac{(1+x^2)'dx}{1+x^2} = \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} \Rightarrow \left|1+x^2 = t\right| =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(1+x^2) + C$$

В заключение рассмотрим еще один из важных частных случаев вычисления интегралов методом замены переменной.

Пусть требуется найти $\int f(ax+b)dx$, где $a, b \in R$, $a \neq 0$, если известно, что $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Решение.

Введем линейную замену, положив $ax+b=t$, тогда $a\,dx = dt$ и $dx = \frac{1}{a}\cdot dt$.

Отсюда $\int f(ax+b)dx = \int f(t)\cdot\frac{1}{a}\cdot dt =$

$$= \frac{1}{a}\int f(t)dt = \frac{1}{a}\cdot F(t) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Итак, если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \qquad (1.32)$$

Формула (1.32) позволяет значительно расширить основную таблицу интегралов. Например, известно, что $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, тогда, согласно (1.32), $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$ или $\int \sin x dx = -\cos x + C$, тогда $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$.

Аналогично, $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$ и так далее.

Пример 1.13 Найти $\int \cos 3x\, dx$.

Решение.

Известно, что $\int \cos x\, dx = \sin x + C$. Тогда, полагая в формуле (1.2) $a = 3$, $b = 0$, получим $\int \cos 3x\, dx = \frac{1}{3}\sin 3x + C$.

В приведенных выше примерах метод замены переменной достаточно быстро привел к цели. Однако столь удачно подобрать новую переменную можно лишь при хорошем владении техникой дифференцирования, умении прикидывать результат той или иной подстановки и твердом знании основных табличных интегралов.

1.4.3 Метод интегрирования по частям

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемые функции на некотором промежутке. Тогда, как известно из дифференциального исчисления, $d(uv) = udv + vdu$.

Интегрируя обе части этого равенства и используя свойство (1.7), получим $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$ или $uv = \int u\, dv + \int v\, du$. Тогда,

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du \qquad (1.33)$$

Формула (1.33) называется *формулой интегрирования по частям*.

Рассмотрим общую схему применения этой формулы.

Пусть требуется найти $\int f(x)dx$. Обозначим подынтегральное выражение $f(x)dx$ через $u\, dv$, то есть, положим $\int f(x)dx = \int udv$. Выбрав какую-то часть $f(x)$, примем ее за функцию $u(x)$. Оставшуюся часть $f(x)$ и dx примем за dv. По назначенным таким образом функции $u(x)$ и дифференциалу функции $v(x)$ вычислим du и $v(x)$. Подставляя найденные величины в правую часть (1.33), получим

$$\int f(x)dx = uv - \int v\, du.$$

Таким образом, если нахождение функции $v(x)$ по известному ее дифференциалу dv и нахождение $\int v\, du$ в совокупности представляет собой, болеет простую задачу, чем исходная задача нахождения $\int f(x)dx = \int u\, dv$, то метод интегрирования по частям будет эффективен.

Пример 1.14 Найти $\int (x+1)\sin x\,dx$.

Решение.

Пусть $\int (x+1)\sin x\,dx = \int u\,dv$.

В данном примере за функцию $u(x)$ можно выбрать либо $\sin x$, либо $(x+1)$, либо $(x+1)\sin x$. Тогда на долю dv соответственно останутся выражения $(x+1)dx$, $\sin x\,dx$ и dx. Рассмотрим последовательно все три возможности.

1 Пусть $u(x) = \sin x$, $dv = (x+1)dx$. Тогда

$du = d(\sin x) = (\sin x)'dx = \cos x dx$ и

$$v(x) = \int (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x$$

Подставляя найденные величины в правую часть (1.33), получим

$$\int (x+1)\sin x dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\sin x - \frac{1}{2}\int (x+1)^2 \cos x\,dx$$

Заметим, что степень многочлена $(x+1)$ в новом интеграле увеличилась на одну единицу, следовательно, $\int (x+1)^2 \cos x dx$ является более "сложным", чем исходный. Итак, при выборе $\sin x$ в качестве функции $u(x)$ метод интегрирования по частям не приведет к цели.

2 Пусть $u(x) = x+1$, $dv = \sin x dx$. Тогда

$du = (x+1)'dx = dx$ и $v(x) = \int \sin x dx = -\cos x$.

Согласно, (1.33), получим

$$\int (x+1)\sin x dx = -(x+1)\cos x + \int \cos x dx.$$

Так как $\int \cos x dx = \sin x + C$, то

$$\int (x+1)\sin x dx = -(x+1)\cos x + \sin x + C$$

Следовательно, метод интегрирования при указанном назначении $u(x)$ и dv привел к цели.

3 Пусть $u(x) = (x+1)\sin x$, $dv = dx$.

Тогда $du = \left[(x+1)\sin x\right]' dx = \left[\sin x + (x+1)\cos x\right]dx$ и $v = \int dx = x$.

Согласно (1.33), получим

$$\int (x+1)\sin x dx = x(x+1)\sin x - \int x\left[\sin x + (x+1)\cos x\right]dx.$$

Ясно, что интеграл в правой части более "сложный", чем исходный; следовательно, выбор $(x+1)\sin x$ в качестве функции $u(x)$ является неудачным.

Итак, из трех возможностей только одна оказалась благоприятной. Прикидка, проведенная в этом примере, безусловно, необходима и при решении других примеров. Однако для некоторых классов функции можно воспользоваться готовыми указаниями выбора функции $u(x)$. Так, если $f(x)$ есть функция вида $P_n(x)\sin\alpha x$, $P_n(x)\cos\alpha x$, $P_n(x)e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$ многочлен степени n, $\alpha \in R$, то интегралы от этих функций берутся интегрированием по частям и за функцию $u(x)$ всегда выбирается многочлен $P_n(x)$. После однократного интегрирования получаются интегралы того же вида, но степень многочлена $P_n(x)$ понижается на единицу. Вновь выбирая многочлен степени $(n-1)$ за $u(x)$, применяют формулу интегрирования по частям и вновь понижают степень многочлена еще на одну единицу. После n - кратного применения формулы (1.33) получают интегралы $\int \sin\alpha x dx$, $\int \cos\alpha x dx$ и $\int e^{\alpha x} dx$, вычисляющиеся с помощью линейной подстановки $\alpha x = t$ или по формуле (1.32).

Если же $f(x)$ представляет собой функцию вида $P_n(x)\ln x$, $P_n(x)\arcsin x$, $P_n(x)\arccos x$, $P_n(x)\operatorname{arctg} x$, $P_n(x)\operatorname{arcctg} x$, где $P_n(x)$ многочлен степени n, то за функцию $u(x)$ принимают функцию, являющуюся множителем при $P_n(x)$.

Пример 1.15 Найти $\int (x^3 - 4x + 5)\ln x dx$.

Решение.

$f(x) = (x^3 - 4x + 5)\ln x = P_3(x)\ln x$

Согласно предыдущей рекомендации положим $u(x) = \ln x$, тогда $dv = (x^3 - 4x + 5)dx$. Вычислим

$$du = d(\ln x) = \frac{dx}{x} \text{ и } v(x) = \int (x^3 - 4x + 5)dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5x.$$

Согласно (1.33) получим

$$\int \left(x^2 - 4x + 5\right)\ln x\, dx = \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5x\right)\frac{dx}{x} =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^3}{4} - 2x + 5\right)dx = \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5x\right)\ln x - \frac{x^4}{16} + x^2 - 5x + C$$

В некоторых случаях применение метода интегрирования по частям позволяет находить интегралы с помощью алгебраических уравнений, в которых неизвестной величиной является исходный интеграл.

Пример 1.16 Найти $\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx$.

Решение.

Пусть $u(x)=e^{\alpha x}$, $dv=\sin\beta x dx$.

Тогда $du=\alpha\cdot e^{\alpha x}dx$ и $v(x)=\int\sin\beta x dx=-\frac{1}{\beta}\cos\beta x$.

По (1.33) получим

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx=-\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x+\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx.$$

В новом интеграле положим $u(x)=e^{\alpha x}$, $dv=\cos\beta x dx$.

Тогда $du=\alpha\cdot e^{\alpha x}dx$ и $v(x)=\int\cos\beta x dx=\frac{1}{\beta}\sin\beta x$.

По (1.33) получим

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx=\frac{1}{\beta}e^{ax}\sin\beta x-\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x\ dx$$

Подставляя в предыдущее равенство, получим

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx=-\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x+\frac{\alpha}{\beta^2}\ e^{\alpha x}\sin\beta x-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx \qquad (*)$$

Уравнение (*) есть алгебраическое уравнение относительно искомого интеграла. Приведя подобные члены в (*), найдем, что

$$\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx=-\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x+\frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Тогда

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx=\frac{(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}+C$$

Основные методы интегрирования позволяют определить целые классы элементарных функций, интегралы от которых вновь выражаются через элементарные функции. Как будет установлено ниже, таковыми являются: дробно-рациональные функции; функции, рациональным образом зависящие от

тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$; некоторые виды иррациональных функций и так далее. При этом наиболее важным классом является класс дробно-рациональных функций, так как к интегралам от них будут сводиться интегралы и от многих других классов функций.

1.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБНО - РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

1.5.1 Некоторые сведения о многочленах

Пусть задан многочлен степени n,

то есть $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$,

где $a_0, a_1, ..., a_n \in R, \quad a_0 \neq 0, \quad n \in N$.

Установлено, что всякий многочлен $P_n(x)$ с действительными коэффициентами может быть представлен в следующей форме:

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot ... \cdot (x - x_\alpha)^{k_\alpha} \cdot$$
$$\cdot \left(x^2 + p_1x + q_1\right)^{t_1} \cdot \left(x^2 + p_2x + q_2\right)^{t_2} \cdot ... \cdot (x^2 + p_\beta x + q_\beta)^{t_\beta} \qquad (1.34)$$

где

$k_1, k_2, ..., k_\alpha,\ t_1, t_2, ..., t_\beta \in N;\ \alpha, \beta \in N;$

$x_1, x_2, ..., x_\alpha \in R,\ p_1, q_1, ..., p_\beta, q_\beta \in R,$

причем $\frac{p_1^2}{4} - q_1 < 0,\ \frac{p_2^2}{4} - q_2 < 0, \ ... \ , \frac{p_\beta^2}{4} - q_\beta < 0,$

$k_1 + k_2 + ... + k_\alpha + 2t_1 + 2t_2 + ... + 2t_\beta = n.$

Разложение (1.34) называют разложением многочлена $P_n(x)$ на линейные и квадратичные множители, то есть множители вида $(x - x_i)$ и $\left(x^2 + p_jx + q_j\right)$, $i, j \in N$.

Числа $k_1, k_2, ..., k_\alpha$ называют кратностями линейных множителей, а числа $t_1, t_2, ..., t_\beta$ кратностями соответствующих квадратичных множителей. Эти числа показывают, сколько раз тот или иной множитель встречается в разложении исходного многочлена. Заметим, что формула (1.34) является обобщением формулы разложения многочлена второй степени $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, известной из школьного курса математики.

Пример 1.17. Разложить на линейные и квадратичные множители $P_3(x) = x^3 + x^2 + 9x + 9$.

Решение.

Число $x_1 = -1$ является корнем $P_3(x)$, так как $P_3(-1) = -1 + 1 - 9 + 9 = 0$. Тогда $P_3(x)$ делится без остатка на линейный множитель $(x + 1)$. Выполним это деление, воспользовавшись правилом деления двух многочленов:

$$
\begin{array}{l|l}
-\ x^3+x^2+9x+9 & x+1 \\
\cline{2-2}
\quad x^3+x^2 & x^2+9 \\
\cline{1-1}
\quad\quad -\ 9x+9 & \\
\quad\quad\quad 9x+9 & \\
\cline{1-1}
\quad\quad\quad\ 0 &
\end{array}
$$

Итак,

$x^3+x^2+9x+9=(x+1)(x^2+9)$

Множитель (x^2+9) не имеет действительных корней, так как его дискриминант $D=-36<0$. Следовательно, искомым разложением будет $x^3+x^2+9x+9=(x+1)(x^2+9)$.

1.5.2 Виды рациональных дробей

Как известно, дробно - рациональной функцией называется функция, представимая в виде отношения двух многочленов

$$R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \qquad (1.35)$$

где $P_m(x)$ многочлен степени m, $Q_n(x)$ многочлен степени n. Например,

$$\frac{3x^2-5x+6}{x^5+4x^3-8}=R(x), \text{ а } \frac{\sqrt{x}+5}{x^2+4x-8}\neq R(x).$$

Среди дробно - рациональных функций (рациональных дробей) различают так называемые правильные и неправильные дроби.

Рациональная дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя, в противном случае рациональная дробь называется неправильной.

В приведенном выше примере степень числителя $m=2$, степень знаменателя $n=5$. Следовательно, дробь правильная.

Пусть задана неправильная дробь $R(x)$. Тогда, воспользовавшись правилом деления двух многочленов и разделив ее числитель $P_m(x)$ на знаменатель $Q_n(x)$, $R(x)$ можно представить в виде суммы некоторого многочлена $L_p(x)$ называемого целой частью, и некоторой правильной дроби, то есть в виде

$$R(x)=L_p(x)+\frac{r_k(x)}{Q_n(x)}, \qquad (1.36)$$

где $L_p(x)$ целая часть, $\frac{r_k(x)}{Q_n(x)}$ правильная дробь.

Таким образом,

$$\int R(x)dx = \int L_p(x)dx + \int \frac{r_k(x)}{Q_n(x)}dx \qquad (1.37)$$

Так как $\int L_p(x)dx$ (как интеграл от многочлена) легко находится, то задача вычисления интеграла $\int R(x)dx$ сводится к интегрированию правильной дроби.

Среди правильных дробей в курсе высшей алгебры выделяют четыре вида так называемых простейших дробей:

Тип I: $\frac{A}{x - x_0}$; Тип II: $\frac{A}{(x - x_0)^n}$;

Тип III: $\frac{Mx + N}{x^2 + px + q}$; Тип IV: $\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n}$,

Где $A, M, N, x_0, p, q \in R$, $\frac{p^2}{4} - q < 0$, $n \in N$, $n \neq 1$.

В этой же дисциплине установлено, что любая правильная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей I – IV типов.

1.5.3 Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей

Пусть $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ ***есть правильная дробь. Допустим также, что знаменатель*** $Q_n(x)$ ***разложен на линейные и квадратичные множители (1.34), где*** $a_0 = 1$***, то есть***

$$Q_n(x) = (x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_\alpha)^{k_\alpha} (x^2 + p_1 x + q_1)^{t_1} \dots (x^2 + p_\beta x + q_\beta)^{t_\beta}.$$

Тогда справедлива теорема (принимается без доказательства).

Теорема 1.3 Если $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ есть правильная дробь, знаменатель которой представлен в виде

$$Q_n(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_\alpha)^{k_\alpha} (x^2 + p_1 x + q_1)^{t_1} \cdot$$

$$\cdot (x^2 + p_2 x + q_2)^{t_2} \dots (x^2 + p_\beta x + q_\beta)^{t_\beta},$$

то эта дробь может быть разложена на элементарные дроби по схеме:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{B_1}{x-x_2} +$$
$$+ \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} + \ldots + \frac{C_1}{x-x_\alpha} + \frac{C_2}{(x-x_\alpha)^2} + \ldots + \frac{C_{k_\alpha}}{(x-x_\alpha)^{k_\alpha}} +$$
$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \ldots + \frac{M_{t_1}x+N_{t_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}} + \ldots$$
$$+ \frac{D_1x+E_1}{x^2+p_\beta x+q_\beta} + \frac{D_2x+E_2}{(x^2+p_\beta x+q_\beta)^2} + \ldots + \frac{D_{t_\beta}x+E_{t_\beta}}{(x^2+p_\beta x+q_\beta)^{t_\beta}}, \qquad (1.38)$$

где $A_1, A_2, \ldots, C_{k_\alpha}, M_1, N_1, \ldots, D_{t_\beta}, E_{t_\beta}$ некоторые действительные числа.

Из (1.38) следует, что каждому линейному множителю $(x-x_i)$ в степени k_i соответствует k_i простейших дробей I и II видов, а квадратичным множителям $(x^2+p_jx+q_j)$ в степени t_j, соответствуют t_j простейших дробей III и IV видов.

Существуют несколько методов поиска неизвестных коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, C_1, C_2, \ldots, D_1, E_1, D_2, E_2, \ldots$ входящих в (1.38).

Одним из них является метод неопределенных коэффициентов. По этому методу приводят правую часть (1.38) к общему знаменателю. Так как общим знаменателем является $Q_n(x)$, то из равенства дробей следует равенство их числителей, иными словами, равенство двух многочленов $P_m(x)$ и многочлена, образующего в числителе правой части (1.38). Так как два многочлена тождественно равны друг другу только при равенстве коэффициентов при одинаковых степенях x, то приравнивая эти коэффициенты при x в нулевой степени, при x в первой степени, при x^2, и т.д. получим линейную систему из n уравнений с n неизвестными $A_1, A_2, \ldots, D_1, E_1, \ldots$ Решив эту систему и подставив найденные коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, D_1, E_1, \ldots$ в (1.38), получим искомое разложение правильной дроби на сумму простейших.

Пример 1.18 Разложить на простейшие дроби

$$R(x) = \frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x^2+3)}.$$

Решение.

Знаменатель $Q_n = (x-2)^2(x^2+3)$ содержит два множителя. Множитель $(x-2)$ является линейным множителем второй кратности. Множитель (x^2+3) является квадратичным множителем первой кратности. Тогда согласно (1.38)

$$R(x)=\frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x^2+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{Mx+N}{x^2+3} \qquad (1)$$

Приводя к общему знаменателю, получим

$$x^2+2x+2=A(x-2)(x^2+3)+B(x^2+3)+(Mx+N)(x-2)^2. \qquad (2)$$

Раскрывая скобки в правой части (2), получим

$$x^2+2x+2=(A+M)x^3+(-2A+B-4M+N)x^2+$$
$$+(3A+4M-4N)x+(-6A+3B+4N).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой части этого равенства, получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x^3: & A+M=0, \\ x^2: & -2A+B-4M+N=1, \\ x: & 3A+4M-4N=2, \\ x^0: & -6A+3B+4N=2. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем $A=\frac{2}{49}$, $B=\frac{10}{7}$, $M=-\frac{2}{49}$, $N=-\frac{25}{49}$. Подставляя найденные коэффициенты в разложение (1), получим

$$R(x)=\frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x^2+3)}=\frac{2}{49(x-2)}+\frac{10}{7(x-2)^2}-\frac{2x+25}{49(x^2+3)}$$

Иногда удается упростить нахождение коэффициентов в разложении $R(x)$ на простейшие дроби. Действительно, равенство (2) является тождеством относительно x. Следовательно, оно является справедливым при любом значении x. Полагая $x=2$, где 2 является корнем знаменателя, имеем $2^2+2\cdot 2+2=B(2^2+3)$ или $7B=10$. Тогда $B=\frac{10}{7}$.

Этот метод особенно эффективен, если знаменатель $Q_n(x)$ имеет только простые действительные корни. Если же не все корни знаменателя являются таковыми, то полезно применять комбинировано оба приема.

1.5.4 Интегрирование простейших дробей

Проблема нахождения интеграла от правильной рациональной дроби согласно равенству (1.38) сводится к последовательному вычислению интегралов от каждого слагаемого правой части этого равенства. Так как в правой части (1.38) каждое слагаемое представляет собой один из четырех видов простейших дробей, то для вычисления интеграла от правой части достаточно уметь находить интегралы от простейших дробей I – IV типов.

Пусть $R(x)=\dfrac{A}{x-x_0}$, где $A, x_0 \in R$. Тогда

$$\int R(x)dx=\int \frac{A}{x-x_0}dx=A\int \frac{dx}{x-x_0} \Rightarrow |(1.32)|=A\ln|x-x_0|+C \qquad (1.39)$$

Пусть $R(x)$ есть простейшая дробь второго типа. Тогда

$$\int R(x)dx=\int \frac{Adx}{(x-x_0)^k} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-x_0=t, \\ dx=dt \end{vmatrix} = A\int \frac{dt}{t^k}= \\ =A\cdot\frac{t^{-k+1}}{-k+1}+C=\frac{A}{(1-k)(x-x_0)^{k-1}}+C, \qquad (1.40)$$

где $A, x_0 \in R$, $k \in N$, $k \neq 1$.

Пусть $R(x)$ есть простейшая дробь третьего типа, то есть $R(x)=\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$,

где $M, N, p, q \in R$, $\dfrac{p^2}{4}-q<0$. Тогда

$$\int R(x)dx=\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int \frac{(Mx+N)dx}{x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q}= \\ =\int \frac{(Mx+N)dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}.$$

По условию $4q-p^2>0;$ тогда, полагая $q-\frac{p^2}{4}=m^2$, получим

$$\int\frac{(Mx+N)dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+m^2}\Rightarrow\left|\begin{matrix}x+\frac{p}{2}=t,\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+m^2}dt=\int\frac{Mt+N-\frac{Mp}{2}}{t^2+m^2}dt=$$

$$=M\int\frac{tdt}{t^2+m^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+m^2}=\frac{1}{m}\left(N-\frac{Mp}{2}\right)arctg\frac{t}{m}+$$

$$+M\int\frac{tdt}{t^2+m^2}\Rightarrow\left|\begin{matrix}t^2+m^2=z\\ 2tdt=dz\end{matrix}\right|=\frac{1}{m}\left(N-\frac{Mp}{2}\right)arctg\frac{t}{m}+\frac{M}{2}\int\frac{dz}{z}=$$

$$=\frac{2N-Mp}{2m}arctg\frac{t}{m}+\frac{M}{2}\ln|z|+C=\frac{2N-Mp}{2m}arctg\frac{t}{m}+\frac{M}{2}\ln(t^2+m^2)+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\begin{matrix}t=x+\frac{p}{2},\\ m^2=q-\frac{p^2}{4}\end{matrix}\right|\Rightarrow\frac{M}{2}\ln\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)+$$

$$+\frac{2N-Mp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+$$

$$+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C. \qquad (1.41)$$

Рассмотрим теперь схему вычисления интеграла от простейшей дроби четвертого типа:

$$\int R(x)dx=\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx \text{ , где } \frac{p^2}{4}-q<0.$$

Как в случае интегрирования простейшей дроби третьего типа, дополним знаменатель до полного квадрата и введем новую переменную, положив $x+\frac{p}{2}=t$.

Обозначая $q-\frac{p^2}{4}=m^2$, получим

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{(t^2+m^2)^k}dt = \tag{3}$$

$$= M\int \frac{tdt}{(t^2+m^2)^k} + \frac{2N-Mp}{2}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k}$$

Найдем первый из интегралов в (3).

$$\int \frac{tdt}{(t^2+m^2)^k} \Rightarrow \left|\begin{matrix} t^2+m^2=z \\ 2tdt=dz \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^k} = -\frac{z^{-k+1}}{2(k-1)} + C =$$

$$= -\frac{1}{2(k-1)z^{k-1}} + C = -\frac{1}{2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} + C.$$

Вычислим теперь второй интеграл в правой части (3), обозначив его через J_k. Имеем

$$J_k = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{m^2}\int \frac{(t^2+m^2)-t^2}{(t^2+m^2)^k}dt = \frac{1}{m^2}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} -$$

$$-\frac{1}{m^2}\int \frac{t^2}{(t^2+m^2)^k}dt$$

Заметим, что

$$\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} = J_{k-1}, \text{ тогда}$$

$$J_k = \frac{1}{m^2} J_{k-1} - \frac{1}{m^2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2+m^2)^k} \Rightarrow \left| u = t,\ du = dt,\ dv = \frac{tdt}{(t^2+m^2)^k}, \right.$$

$$\left. v = \int \frac{tdt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{2(1-k)(t^2+m^2)^{k-1}} \right| =$$

$$= \frac{1}{m^2} J_{k-1} - \frac{1}{m^2} \left[\frac{t}{2(1-k)(t^2+m^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)} \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} \right] =$$

$$= \frac{1}{m^2} J_{k-1} - \frac{t}{2m^2(1-k)(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{1}{2m^2(1-k)} \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} =$$

$$= \frac{1}{m^2} J_{k-1} - \frac{t}{2m^2(1-k)(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{1}{2m^2(1-k)} \cdot J_{k-1} =$$

$$= \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)m^2} \cdot J_{k-1}$$

Итак, если $J_k = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k}$, то

$$J_k = \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)} \cdot J_{k-1}. \qquad (1.42)$$

Формула (1.42) является *рекуррентной* формулой. Она позволяет свести нахождение интеграла $\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k}$ к нахождению интеграла $\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}$. После $(k-1)$ - кратного применения формулы (1.42) в правой части этого равенства образуется табличный интеграл

$$\int \frac{dt}{t^2+m^2} = \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{t}{m} + C$$

Пусть интеграл $J_k = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k}$ найден. Тогда, подставляя найденные выражения для первого и второго интегралов в основное соотношение (3) и осуществляя обратные замены, найдем искомый интеграл от простейшей дроби четвертого типа.

1.5.5 Общий план интегрирования дробно - рациональной функции

Для того, чтобы проинтегрировать дробно - рациональную функцию, необходимо следующее:

1 Если рассматриваемая функция есть неправильная дробь, то выделить целую часть, разделив ее числитель на знаменатель по правилу деления многочленов, то есть записать $R(x)$ в виде (1.36):

$$R(x) = L_p(x) + \frac{r_k(x)}{Q_n(x)},$$

где $L_p(x)$ многочлен, $\frac{r_k(x)}{Q_n(x)}$ правильная дробь.

2 Разложить знаменатель $Q_n(x)$ на линейные квадратичные множители в виде (1.34).

3 С учетом кратности линейных и квадратичных множителей знаменателя $Q_n(x)$ разложить правильную дробь на сумму простейших дробей по схеме (1.38) и определить, желательно комбинированным методом, все неизвестные коэффициенты этого разложения.

4 Вычислить интегралы от целой части $L_p(x)$ и от всех простейших дробей разложения (1.38), используя соответствующие методы интегрирования простейших дробей.

5 Просуммировать результаты вычислений и записать ответ.

Пример 1.19 Найти $\int \frac{3x^4 + 14x^2 + 7x + 15}{(x+3)(x^2+2)^2} dx$.

Решение.

1 Дробно - рациональная функция

$$R(x) = \frac{3x^4 + 14x^2 + 7x + 15}{(x+3)(x^2+2)^2}$$

есть правильная дробь, так как степень многочлена в числителе $m = 4$ меньше степени знаменателя $n = 5$.

2 Знаменатель $Q_5(x) = (x+3)(x^2+2)^2$ разложен на линейные и квадратичные множители. Их кратности равны соответственно 1 и 2.

3 Согласно схеме (1.38) имеем

$$\frac{3x^4+14x^2+7x+15}{(x+3)(x^2+2)^2}=\frac{A}{x+3}+\frac{Bx+C}{x^2+2}+\frac{Mx+N}{(x^2+2)^2}.$$

Отсюда

$$3x^4+14x^2+7x+15=A(x^2+2)^2+(Bx+C)(x+3)(x^2+2)+(Mx+N)(x+3)$$

Найдем коэффициенты этого разложения комбинированным методом. При $x=-3$ имеем $363=121A,\quad A=3$.

Для определения оставшихся неизвестных составим систему:

$$\begin{cases} x^4: & A+B=3,\\ x^3: & 3B+C=0,\\ x^2: & 4A+2B+3C+M=14,\\ x^1: & 6B+2C+3M+N=7, \end{cases}$$

откуда при $A=3$ последовательно получим $B=0,\ C=0,\ M=2,\ N=1.$

Подставляя в разложение, найдем, что

$$\int\frac{3x^4+14x^2+7x+15}{(x+3)(x^2+2)^2}dx=\int\frac{3dx}{x+3}+\int\frac{2x+1}{(x^2+2)^2}dx=$$

$$=3\ln|x+3|-\frac{1}{x^2+2}+\frac{x}{4(x^2+2)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

Каждый из интегралов от простейших дробей вычислен согласно соответствующим рекомендациям, приведенным в пункте 4.

1.6 ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1.6.1 Рациональная функция двух независимых переменных

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3 Многочленом или целой рациональной функцией относительно u и v называется сумма конечного числа слагаемых вида cu^mv^n, где m, n натуральные числа или нули, а c действительные числа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4 Отношение двух многочленов относительно u и v называется рациональной функцией относительно u и v, и обозначается $R(u;v)$.

Например, выражения $\frac{5u}{u^2+v}$, $\frac{uv}{4u+v}$ являются рациональными функциями относительно u и v. Выражения $\frac{\sin^2 x-\cos x}{5\sin x}$, $\frac{2\sin x-3}{\cos x}$ есть рациональные функции относительно $\sin x$ и $\cos x$. Из определений 1.3 и 1.4 следует, что функция $R(u,v)$ осуществляет над своими аргументами u и v только операции сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень.

Выражение $\frac{\sqrt{u}}{u^2+v^2} \notin R(u,v)$, так как над переменной u осуществляется операция возведения не в целую степень.

Легко заметить, что сумма, разность, произведение и частное нескольких рациональных функций есть рациональная функция от u и v.

Пусть $u=u(x)$, $v=v(x)$; тогда $R(u(x),v(x))$ называется рациональным выражением относительно u и v. Если $u(x)$ и $v(x)$ являются рациональными функциями, то сложная функция $R(u(x),v(x))$ есть рациональная функция относительно независимой переменной x.

1.6.2 Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Универсальная подстановка.

Теорема 1.4 Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ подстановкой $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ приводится к интегралу от рациональной функции t, следовательно, всегда выражается в элементарных функциях.

Доказательство. Пусть $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда

$$\sin x=\sin 2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \text{ или } \sin x=\frac{2t}{1+t^2}. \qquad (5)$$

Аналогично $\cos x = \cos 2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$

или $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$. (6)

Так как $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, то $x = 2\operatorname{arctg} t$ и $dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$. (7)

Выполнив замены переменной в заданном интеграле, с учетом (5), (6), (7) получим

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \Rightarrow \left| t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = \int R\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right) \frac{2}{1 + t^2} dt \qquad (8)$$

Так как в подынтегральной функции в (8) над новой переменной t выполняются только рациональные операции и по условию R рациональная функция, то подынтегральная функция есть рациональная функция $R_1(t)$ переменной t. В разделе 1.5, установлено, что $\int R_1(t)dt$ всегда выражается через элементарные функции.

Следовательно,

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \Rightarrow \left| t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = \int R_1(t)dt$$

всегда можно выразить через элементарные функции.

Пример 1.20 Найти $\int \frac{dx}{9 + 8\cos x + \sin x}$.

Решение.

Так как

$$\frac{1}{9 + 8\cos x + \sin x} = R(\sin x, \cos x),$$

то применим подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Согласно (5), (6), (7) получим

$$\int \frac{dx}{9+8\cos x+\sin x} \Rightarrow \left| t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \right| = \int \frac{1}{9+8\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+\dfrac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{2dt}{t^2+2t+17} = \int \frac{2dt}{(t+1)^2+16} \Rightarrow \left| \begin{matrix} t+1=z, \\ dt=dz \end{matrix} \right| = \int \frac{2dz}{z^2+4^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{z}{4}+C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t+1}{4}+C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{4}+C.$$

Подстановка $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ всегда позволяет найти $\int R(\sin x, \cos x)dx$. Поэтому она называется *универсальной подстановкой*.

1.6.3 Частные методы вычисления интегралов $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Универсальная подстановка, хотя и всегда позволяет находить интегралы указанного вида, но во многих случаях приводит к громоздким вычислениям. Поэтому уместно находить $\int R(\sin x, \cos x)dx$ для частных видов функции $R(\sin x, \cos x)$ другими методами (приемами).

1 Пусть

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_1(\sin x)\cos x\, dx \qquad (1.43)$$

Выполним замену $\sin x = t$. Тогда $\cos x dx = dt$ и $\int R_1(\sin x)\cos x\, dx = \int R_1(t)dt$, где последний интеграл является интегралом от дробно - рациональной функции, следовательно, вычисляется согласно приемам, изложенным в разделе 1.5.

2 Пусть

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_1(\cos x)\sin x\, dx \qquad (1.44)$$

Положим $\cos x = t$, тогда $-\sin x dx = dt$ и $\int R_1(\cos x)\sin x\, dx = -\int R_1(t)dt$. Интеграл $\int R_1(t)dt$ вычисляется по схеме, изложенной в разделе 1.5 .

3 Пусть

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_1(\operatorname{tg} x)\, dx \qquad (1.45)$$

Положим $\operatorname{tg} x = t$, тогда $x = \operatorname{arctg} t$ и $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$.

Выполняя замену, получим

$$\int R_1(\operatorname{tg} x)dx = \int R_1(t)\frac{dt}{1+t^2} = \int R_2(t)dt, \quad \text{где} \quad R_2(t) = \frac{R_1(t)}{1+t^2}$$ есть дробно - рациональная функция.

4 Пусть

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_1(\sin^2 x,\ \cos^2 x)\, dx \qquad (1.46)$$

Положим $\operatorname{tg} x = t$, тогда

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{1} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2},$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{1} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2},$$

$x = \operatorname{arctg} t$ и $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$.

Выполнив замену, получим

$$\int R_1(\sin^2 x,\ \cos^2 x)\, dx = \int R_1\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}dt = \int R_2(t)dt,$$ где

$R_2(t) = R_1\left(\dfrac{t^2}{1+t^2}, \dfrac{1}{1+t^2}\right)\dfrac{1}{1+t^2}$ есть дробно - рациональная функция.

5 Пусть

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int \sin^{2m} x \cdot \cos^{2n} x\, dx \qquad (1.47)$$

где $m, n \in N$ или нули.

Одночлен $\sin^{2m} x \cos^{2n} x$ имеет степень $(2m+2n)$.

Понизим степень этого одночлена, используя формулы связи $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ с $\cos 2x$. Имеем,

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$. Тогда

$$\int \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^m \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^n dx =$$

$$= \frac{1}{2^{m+n}} \int (1-\cos 2x)^m (1+\cos 2x)^n dx.$$

После возведения в подынтегральной функции получим многочлен степени $(m+n)$ относительно $\cos 2x$. Применяя к последнему интегралу методы вычисления интегралов (1.43), (1.44), … , (1.47), после серии шагов получим интегралы вида $\int \sin^2 kx\, dx$ и $\int \cos^2 px\, dx$, где $k, p \in N$. Тогда

$$\int \sin^2 kx\, dx = \int \frac{1-\cos 2kx}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2kx\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4k}\sin 2kx + C$$

$$\int \cos^2 px\, dx = \int \frac{1+\cos 2px}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2px\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4p}\sin 2px + C$$

6 Пусть

$$\int R(\sin x, \cos x) = \int \sin \alpha x \cos \beta x dx, \qquad (1.48)$$

где $\alpha, \beta \in R$. Преобразуем произведение тригонометрических функций в сумму. Имеем, $\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x}{2}$. Тогда

$$\int \sin \alpha x \cos \beta x dx = \frac{1}{2}\int \left[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\right] dx =$$

$$= -\frac{\cos(\alpha+\beta)x}{2(\alpha+\beta)} - \frac{\cos(\alpha-\beta)x}{2(\alpha-\beta)} + C.$$

Аналогично (1.48) вычисляются интегралы вида $\int \sin \alpha x \sin \beta x dx$ и $\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$, где $\alpha, \beta \in R$.

Пример 1.21 Найти $\int \cos^5 x dx$.

Решение.

$\int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x \cos x\, dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x dx$.

Так как образовавшийся интеграл относится к виду $\int R_1(\sin x)\cos x dx$, то применим подстановку $\sin x = t$. Тогда $\cos x\, dx = dt$ и

$$\int \cos^5 x dx = \int (1-t^2)^2 dt = \int (1-2t^2+t^4) dt =$$

$$= t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C = \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Пример 1.22 Найти $\int \mathrm{tg}^4 x dx$.

Решение.

$\int \mathrm{tg}^4 x dx = \int R(\mathrm{tg}x) dx$

Тогда, положим $\mathrm{tg}\ x = t$. Найдем $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$.

$$\int \mathrm{tg}^4 x dx = \int \frac{t^4}{1+t^2} dt = \int \frac{t^4 + t^2 - t^2 - 1 + 1}{1+t^2} dt =$$

$$= \int \frac{t^2(t^2+1) - (t^2+1) + 1}{t^2+1} dt = \int \left[t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1} \right] dt =$$

$$= \int t^2 dt - \int dt + \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{t^3}{3} - t + \mathrm{arctg}\ t + C =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} - \mathrm{tg}\ x + \mathrm{arctg}\ (\mathrm{tg}\ x) + C = \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} - \mathrm{tg}\ x + x + C$$

1.7 ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

1^0 Пусть подынтегральная функция $f(x)$ есть иррациональная функция вида

$$R\left(x,\ x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots,\ x^{\frac{m_k}{n_k}} \right), \text{ где } m_1, m_2, \ldots, m_k \in Z,$$

$n_1, n_2, \ldots, n_k \in N$, R символ дробно - рациональной функции.

Теорема 1.5 Интеграл вида

$$\int R\left(x,\ x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots,\ x^{\frac{m_k}{n_k}} \right) dx \qquad (1.49)$$

приводится подстановкой $x = t^s$, где s наименьшее общее кратное (НОК) чисел $n_1, \ldots, n_k$ к интегралу от дробно - рациональной функции, следовательно, выражается через элементарные функции.

Доказательство. Пусть $x = t^s$, где s НОК чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Тогда $dx = st^{s-1}dt$ и

$$\int R\left(x,\, x^{\frac{m_1}{n_1}},\, x^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots,\, x^{\frac{m_k}{n_k}} \right)dx = \int R\left(t^s, t^{\frac{m_1 s}{n_1}},\ldots,\, t^{\frac{m_k s}{n_k}} \right) s t^{s-1} dt .$$

Так как S делится без остатка на $n_1, n_2, \ldots, n_k$ и $m_1, m_2, \ldots, m_k \in Z$, то числа $s,\ s-1,\ \frac{m_1 s}{n_1},\ \ldots,\ \frac{m_k s}{n_k} \in Z$, следовательно, подынтегральная функция есть функция вида $R_1(t)$, где R_1 символ дробно - рациональной функции.

Пример 1.23 Найти $\int \frac{1+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}dx$.

Решение.

$\int \frac{1+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}dx = \int R\left(x,\, x^{\frac{m_1}{n_1}},\ldots, x^{\frac{m_k}{n_k}} \right)dx$, где $\frac{m_1}{n_1} = \frac{1}{2}$, $\frac{m_2}{n_2} = \frac{1}{2}$. Полагая $x = t^2$, получим $dx = 2tdt$ и $\int \frac{1+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}dx = \int \frac{1+t}{t^2-t}2tdt = 2\int \frac{t+1}{t-1}dt$.

Этот интеграл относится к классу интегралов от дробно - рациональной функции. Выделяя целую часть, найдем

$$2\int \frac{t+1}{t-1}dt = 2\int \frac{(t-1)+2}{t-1}dt = 2\int \left[1+\frac{2}{t-1}\right]dt = 2\int dt + 4\int \frac{dt}{t-1} =$$

$$= 2t + 4\ln|t-1| + C = 2\sqrt{x} + 4\ln\left|\sqrt{x}-1\right| + C$$

2^0 Пусть $f(x) = R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}} \right)$, где

$a, b, c, d \in R$, $m_1, m_2, \ldots, m_k \in Z$, $n_1, n_2, \ldots, n_k \in N$.

Теорема 1.6 Интеграл вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}} \right)dx \qquad (1.50)$$

"рационализируется" (сводится к интегралу от дробно - рациональной функции) подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, где s наименьшее общее кратное чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Действительно, из $\frac{ax+b}{cx+d}=t^s$ найдем, что $x=\frac{dt^s-b}{a-ct^s}$ и

$$dx=\frac{dst^{s-1}\left(a-ct^s\right)+cst^{s-1}\left(dt^s-b\right)}{\left(a-ct^s\right)^2}dt.$$

Подставляя найденные величины в заданный интеграл, получим

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx\Rightarrow\left|\frac{ax+b}{cx+d}=t^s\right|=$$

$$=\int R\left(\frac{dt^s-b}{a-ct^s},\,t^{\frac{m_1s}{n_1}},\ldots,t^{\frac{m_ks}{n_k}}\right)\frac{dst^{s-1}\left(a-ct^s\right)+cst^{s-1}\left(dt^s-b\right)}{\left(a-ct^s\right)^2}dt.$$

Вновь числа $\frac{m_1s}{n_1},\ldots,\frac{m_ks}{n_k},\ s,\ s-1\in Z$, следовательно, полученный интеграл вновь относится к интегралу от дробно - рациональной функции.

Пример 1.24 Найти $\int\frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$.

Решение.

Заданный интеграл относится к виду (1.50) при $a=1,\ b=1,\ c=0,\ d=1,\ m=1,\ n=2$. Тогда, полагая $x+1=t^2$, найдем, что $dx=2tdt$ и

$$\int\frac{\sqrt{x+1}}{x}dx=\int\frac{2t^2}{t^2-1}dt=2\int\frac{\left(t^2-1\right)+1}{t^2-1}dt=2\int dt+2\int\frac{dt}{t^2-1}=$$

$$=2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=2\sqrt{x+1}+\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C.$$

3^0 Интегрирование дифференциальных биномов

Выражение вида $x^m(a+bx^n)^p dx$, где $m,n,p,a,b\in R$, называется дифференциальным биномом.

Теорема 1.7 Интеграл вида

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx, \qquad (1.51)$$

где $m, n, p \in Q;\ a, b \in R$ "рационализируется" только в следующих случаях:

1) p целое число. Подстановка $x = t^s$, где s наименьшее общее кратное знаменателей чисел m и n;

2) $\frac{m+1}{n}$ целое число. Подстановка $a + bx^n = t^k$, где k знаменатель числа p;

3) $\frac{m+1}{n} + p$ целое число. Подстановка $ax^{-n} + b = t^k$, где k знаменатель числа p.

Теорема 1.7, доказанная академиком П.Л.Чебышевым (1821-1894), нами принимается без доказательства.

Пример 1.25 Найти $\int \frac{xdx}{(x^2-4)^{3/2}}$.

Решение.

$$\int \frac{xdx}{(x^2-4)^{3/2}} = \int x\left(x^2-4\right)^{-\frac{3}{2}} dx = \int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx,$$

при $m = 1,\ n = 2,\ p = -\frac{3}{2},\ a = -4,\ b = 1.$

Так как $\frac{m+1}{n} = \frac{1+1}{2} = 1 \in Z$, то выполним подстановку $a + bx^n = t^k$, где $k = 2$. Или $x^2 - 4 = t^2$, тогда $2xdx = 2tdt$ и

$$\int \frac{xdx}{\left(x^2-4\right)^{3/2}} = \int \frac{tdt}{\left(t^2\right)^{3/2}} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\sqrt{x^2-4}} + C.$$

Пример 1.26 Найти $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$.

Решение.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = \int x^{-2}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} dx = \int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx$$

при $m = -2,\ n = 2,\ p = \frac{1}{2},\ a = 1,\ b = -1.$

Число $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-2+1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \in Z.$

Тогда выполним подстановку $ax^{-n}+b=t^{к}$, где $k=2$ или $x^{-2}-1=t^2$. Отсюда $x^2=\dfrac{1}{1+t^2}$, $x=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ и $dx=-\dfrac{tdt}{\left(1+t^2\right)^{3/2}}$

Подставляя, получим

$$\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx=-\int\left(1+t^2\right)\sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}}\,\frac{tdt}{\left(1+t^2\right)^{3/2}}=$$

$$=-\int\left(1+t^2\right)\frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^{1/2}}\cdot\frac{dt}{\left(1+t^2\right)^{3/2}}=-\int\frac{t^2}{1+t^2}dt=-\int\frac{\left(t^2+1\right)-1}{1+t^2}dt=$$

$$=-\int dt+\int\frac{dt}{1+t^2}=-t+\operatorname{arctg}\,t+C\Rightarrow\left|t=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right|=$$

$$=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C.$$

1.8 ЗАДАЧА, ПРИВОДЯЩАЯ К ПОНЯТИЮ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана неотрицательная непрерывная функция $y=f(x)$ (рис. 1.2). Требуется вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком $y=f(x)$, снизу осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, где $a<b$.

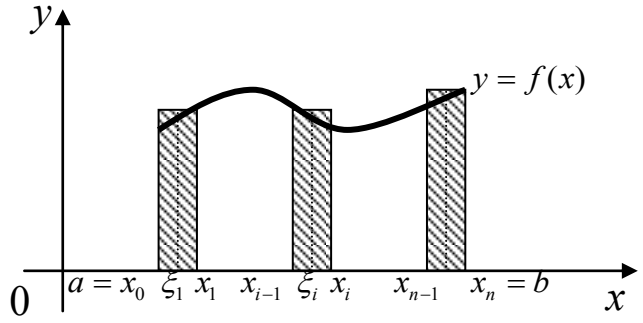


Рис. 1.2

Решим эту задачу по следующей схеме:

1. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_i<\ldots<x_n=b$;

выберем в каждом из частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ произвольную точку ξ_i и вычислим значение функции $f(\xi_i)$ в этой точке;

2. Найдем произведение $f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$;

3. Составим сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \qquad (1.52)$$

С геометрической позиции эта сумма равна сумме площадей прямоугольников (рис.1.2), площадь которых приближенно равна искомой площади криволинейной трапеции. Очевидно, что точность этой формулы зависит как от числа точек деления отрезка $[a, b]$ на элементарные части, так и от выбора точек ξ_i на этих частях;

4. Увеличивая число точек деления $[a, b]$ на элементарные части, можно улучшить точность формулы (1.52).

По этой схеме можно приближенно вычислить длину дуги кривой, объем тела вращения, работу, пройденный путь, момент инерции и так далее.

1.9 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$.

1 Разделим $[a, b]$ на n частей произвольными точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

2 На каждом элементарном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i и вычислим значение функции $f(\xi_i)$ в этой точке.

3 Вычислим $f(\xi_i)\Delta x_i$, для всех $i = 1, 2, ..., n$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Составим сумму $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ (1.53)

Эту сумму назовем интегральной суммой для $f(x)$ на $[a, b]$.

4 Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка для данного разбиения, то есть $\lambda = \max|\Delta x_i|$ и продолжим процесс разбиения $[a, b]$ на элементарные отрезки так, чтобы $\lambda \to 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5 Если существует конечный предел интегральной суммы (1.53) при $\lambda \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения $[a, b]$ на элементарные отрезки, ни от выбора точек ξ_i на этих отрезках, то этот предел называют определенным интегралом от функции $f(x)$ на $[a, b]$ и обозначают следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i , \qquad (1.54)$$

где числа a и b называют соответственно нижним и верхним пределами интегрирования; $[a, b]$ - промежутком интегрирования; $f(x)$ - подынтегральной функцией; x - переменной интегрирования.

Из решения задачи о площади криволинейной трапеции и определения определенного интеграла следует геометрический смысл определенного интеграла как площади криволинейной трапеции:

$$S = \int_a^b f(x)dx \text{ , где } f(x) \geq 0 \text{ на } [a, b] \qquad (1.55)$$

Из определения определенного интеграла следует, что величина интеграла (1.54) зависит только от подынтегральной функции $f(x)$ и от пределов интегрирования a и b. Следовательно, если заданы функция $f(x)$ и числа a и b, то интеграл определяется однозначно. Отсюда, в частности, следует, что определенный интеграл не зависит от выбора обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\xi)d\xi \qquad (1.56)$$

Примем без доказательства теорему существования определенного интеграла.

Теорема 1.8 Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ существует. В этом случае $f(x)$ называется интегрируемой функцией на этом отрезке.

1.10 СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1^0 $$\int_a^b dx = b - a \qquad (1.57)$$

Доказательство. По определению определенного интеграла имеем

$$\int_a^b dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} (b - a) = b - a$$

2^0 Для любых чисел a и b выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad (1.58)$$

(свойство 2^0 доказать самостоятельно).

3^0 Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \qquad (1.59)$$

Доказательство. По определению определенного интеграла и свойству предела суммы получим

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) + g(\xi_i)]\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Доказательство следующих двух свойств аналогично доказательству 3^0 Поэтому их примем без доказательства.

4^0 Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и C постоянная, то

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx, \qquad (1.60)$$

то есть постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла.

Замечание 1.1 Свойства $3^0 - 4^0$ можно обобщить на любое конечное число слагаемых функций в подынтегральном выражении. Например, если

$$y = f_1(x), \quad y = f_2(x), \quad \ldots\ldots\ldots, \quad y = f_n(x)$$

интегрируемые функции на отрезке $[a, b]$; $C_1, C_2, \ldots, C_n$ постоянные числа, то функция $y = C_1f_1(x) + C_2f_2(x) + \ldots + C_nf_n(x)$ также интегрируема на отрезке $[a, b]$; причем справедливо равенство

$$\int_a^b [C_1f_1(x) + C_2f_2(x) + \ldots + C_nf_n(x)]dx =$$

$$= C_1\int_a^b f_1(x)dx + C_2\int_a^b f_2(x)dx + \ldots + C_n\int_a^b f_n(x)dx.$$

5^0 Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

6^0 Если на отрезке $[a, b]$, где $a < b$, функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны и удовлетворяют условию $f(x) \ge g(x)$ при $\forall x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx. \qquad (1.61)$$

Доказательство. Используя свойство 3^0 определенного интеграла и его определение, имеем

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n \big[f(\xi_i) - g(\xi_i)\big]\Delta x_i$$

По условию $f(\xi_i) - g(\xi_i) \ge 0$ и $\Delta x_i > 0$.

Поэтому $\sum_{i=1}^n \big[f(\xi_i) - g(\xi_i)\big]\Delta x_i \ge 0$. Тогда

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n \big[f(\xi_i) - g(\xi_i)\big]\Delta x_i \ge 0.$$

Следовательно, $\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx \ge 0$ и $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$.

7^0 Если m и M наименьшее и наибольшее значения непрерывной функции на отрезке $[a, b]$ функции $y = f(x)$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a). \qquad (1.62)$$

Доказательство. Так как $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $m \le f(x) \le M$.

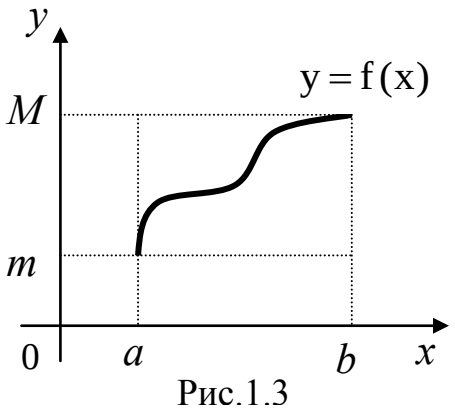


Рис.1.3

На основании свойства 6^0 имеем следующее двойное неравенство:

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx.$$

Используя свойства 1^0 и 4^0, имеем

$$\int_a^b m dx = m\int_a^b dx = m(b-a)$$

$$\int_a^b M dx = M\int_a^b dx = M(b-a)$$

Следовательно,

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Если $f(x)$ непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a, b]$, то свойство 7^0 имеет следующий геометрический смысл (рис. 1.3). Площадь криволинейной трапеции, опирающейся на отрезок $[a, b]$ и ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, не больше площади прямоугольника с высотой M и не меньше площади прямоугольника с высотой m, основаниями которых, служит тот же отрезок $[a, b]$.

8^0 (Теорема о среднем). Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке найдется такая точка ξ, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a). \qquad (1.63)$$

Доказательство. Пусть $a < b$ и m и M наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Тогда на основании 7^0 имеем следующее двойное неравенство:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Так как $b-a>0$, то $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$.

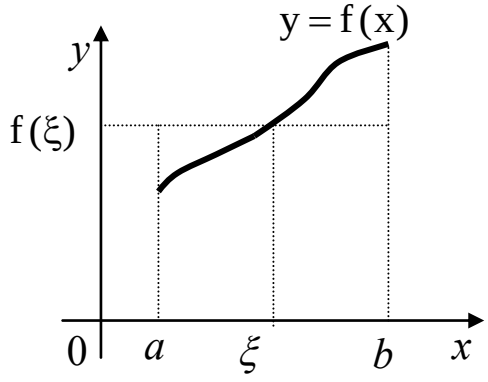


Рис. 1.4

Пусть $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$;

тогда $m \le \mu \le M$.

Так как непрерывная на $[a, b]$ функция принимает все свои значения между m и M, то найдется такая точка $\xi \in [a, b]$, что $f(\xi) = \mu$.

Тогда $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a)$

Если $f(x) \geq 0$, то равенство (1.63) означает, что площадь криволинейной трапеции равновелика площади некоторого прямоугольника, основанием которого служит отрезок $[a, b]$, а высотой $f(\xi)$ (рис. 1.4).

9^0 Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезках $[a, b]$, $[a, c]$, $[b, c]$. Тогда для любых чисел a, b, c справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

(свойство 9^0 доказать самостоятельно).

1.11 ИНТЕГРАЛ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Выберем произвольное $x \in [a, b]$. Тогда функция будет интегрируема и на отрезке $[a, x]$. Пусть

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt , \qquad (1.64)$$

где переменная интегрирования обозначена через t для того, чтобы отличить ее от переменного верхнего предела интегрирования. Ясно, что при изменении x на $[a, b]$ интеграл $\int_a^x f(t)dt$ является функцией от x.

Теорема 1.9 Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция $y = \Phi(x)$, определенная формулой (1.64), непрерывна на этом отрезке.

Доказательство. Функция $\Phi(x)$ непрерывна, если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta\Phi = 0$.

Докажем это равенство.

Вычислим приращения функции $\Phi(x)$:

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$

$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \qquad (1.65)$$

По теореме о среднем

$$\Delta\Phi = \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\cdot(x+\Delta x - x) = f(\xi)\Delta x, \qquad (1.66)$$

где $\xi \in [x,\ x+\Delta x]$.

Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta\Phi = \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi)\cdot\Delta x = 0$,

так как $f(x)$ непрерывная, а следовательно, и ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция.

Теорема 1.10 Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $\Phi(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$, то $\Phi'(x) = f(x)$ для $\forall x \in [a, b]$.

Доказательство. Согласно равенству (1.66) имеем

$$\Delta\Phi = \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\Delta x,$$

где $\xi \in [x,\ x+\Delta x]$. Тогда $\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(\xi)$, а

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(\xi) = \lim_{\xi\to x} f(\xi) = f(x).$$

Следовательно, $\Phi(x)$ дифференцируема при $\forall x \in [a, b]$, причем $\Phi'(x) = f(x)$

.

Следствие Так как $\Phi'(x) = f(x)$, то по определению первообразной функция $\Phi(x) = \int_{a}^{x} f(x)dx$ является первообразной для $f(x)$ на $[a, b]$. Следовательно, теорема 1.10 одновременно доказывает теорему о существовании первообразной для $f(x)$, то есть теорему существования неопределенного интеграла $\int f(x)dx$.

1.12 ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

Теорема 1.11 Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a), \qquad (1.67)$$

где $F(x)$ любая первообразная для функции $f(x)$ на $[a, b]$.

Доказательство. Согласно следствию из теоремы 1.10 функция $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ является одной из первообразных для $f(x)$ на $[a, b]$. Пусть $F(x)$ любая другая первообразная для $f(x)$. Тогда $\Phi(x)=F(x)+C$, где C произвольная постоянная.

Или $$\int_a^x f(t)dt = F(x)+C. \qquad (1.68)$$

Вычислим значение C, полагая в равенстве (1.68) $x=a$.

Тогда $\int_a^a f(t)dt = F(a)+C$. Следовательно, $F(a)+C=0 \Rightarrow C=-F(a)$.

Подставляя найденное значение C в равенство (1.68), получим

$$\int_a^x f(t)dt = F(x)-F(a).$$

В частности, при $x=b$ получим $\int_a^b F(t)dt = F(b)-F(a)$.

Возвращаясь к старому обозначению переменной интегрирования x, получим формулу Ньютона - Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Формула Ньютона - Лейбница открыла практически простой и очень удобный метод вычисления определенных интегралов. Согласно этой формуле достаточно найти любую первообразную для подынтегральной функции и вычислить ее приращение на заданном отрезке $[a, b]$.

Примеры*:*

$$\int_1^2 x dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2 = 2-\frac{1}{2}=1{,}5$$

$$\int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e-1\approx 1{,}7$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}7$$

1.13 ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Теорема 1.12 Пусть дан определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx,$$

где $f(x)$ непрерывная функция на отрезке $[a, b]$.

Тогда, если функция $x = \varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt. \qquad (1.69)$$

Формула (1.69) называется формулой замены переменной в определенном интеграле.

Доказательство. Пусть $F(x)$ первообразная на $[a, b]$ для подынтегральной функции $f(x)$. Тогда, применяя формулу Ньютона - Лейбница к интегралам равенства (1.69), получим

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a); \qquad (1.70)$$

$$\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt = F\left[\varphi(t)\right]\Big|_\alpha^\beta = F\left[\varphi(\beta)\right] - F\left[\varphi(\alpha)\right] = F(b) - F(a). \qquad (1.71)$$

Сравнивая правые части равенств (1.70) и (1.71), получим

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t)dt.$$

Пример 1.27 Вычислить интеграл

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}dx.$$

Решение.

Пусть $x = R\sin t$. Тогда $dx = R\cos dt$.

Найдем новые пределы интегрирования. Полагая $x = 0$ и $x = R$, вычислим соответствующие значения $t = 0$ и $t = \frac{\pi}{2}$. Тогда по формуле замены переменной, получим

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t}\,R\cos t\,dt =$$

$$= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{R^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{R^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^2}{4}.$$

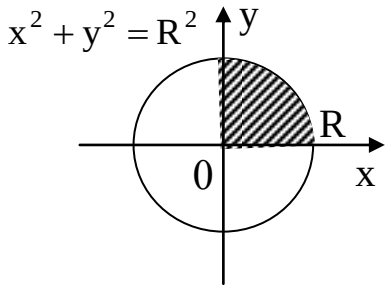


Рис. 1.5

Вычисленный интеграл, с геометрической точки зрения, численно равен площади $\frac{1}{4}$ круга, ограниченного окружностью $x^2 + y^2 = R^2$ (рис.1.5).

1.14 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ дифференцируемые функции на отрезке $[a, b]$. Тогда на этом отрезке

$$d[u(x)\cdot v(x)] = [u'(x)\cdot v(x) + u(x)v'(x)]dx.$$

Интегрируя это равенство по промежутку $[a, b]$, получим

$$\int_a^b d\big[u(x)\cdot v(x)\big] = \int_a^b u'(x)\cdot v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

По формуле Ньютона - Лейбница $\int_a^b d\big[u\cdot v\big] = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b$;

тогда
$$u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b = \int_a^b v(x)\cdot u'(x)dx + \int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx. \qquad (1.72)$$

Перепишем последнее равенство в следующем виде:

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\cdot u'(x)dx. \qquad (1.73)$$

Формула (1.73) называется формулой интегрирования по частям в определенном интеграле. Эту формулу можно написать в более короткой форме

$$\int_a^b u\ dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\ du, \qquad (1.74)$$

если воспользоваться равенствами

$$du = u'(x)dx,\ dv = v'(x)dx.$$

Пример 1.28 Найти $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos x\,dx$.

Решение.

Полагая $u = x$, $dv = \cos x dx$, вычислим $du = dx$, $v = \int \cos x\, dx = \sin x$.

Применяя формулу интегрирования по частям, найдем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

1.15 НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

При определении определенного интеграла как предела интегральных сумм, мы предполагаем, что отрезок интегрирования конечен, а подынтегральная функция ограничена на этом отрезке. Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то данное выше определение определенного интеграла теряет смысл. Обобщим понятие интеграла как на случай функций, определенных на неограниченных промежутках, так и на случай неограниченных на конечных промежутках функций.

1.15.1 Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, +\infty[$ и интегрируема по любому отрезку $[a, b]$, где $b > a$. Следовательно, существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, являющийся функцией своего верхнего предела интегрирования. Тогда $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$ называют несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом интегрирования и обозначают символом

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx. \qquad (1.75)$$

Следовательно, по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx. \qquad (1.76)$$

Если предел в (1.76) существует, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся. Аналогично интегралу (1.75) на промежутке $]-\infty, b]$ вводится несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом интегрирования:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx. \qquad (1.77)$$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными границами определяется формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx, \qquad (1.78)$$

где c любая фиксированная точка оси Ox. Интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ сходится только тогда, когда сходится каждый из интегралов:

$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ и $\int_{c}^{\infty} f(x)dx$

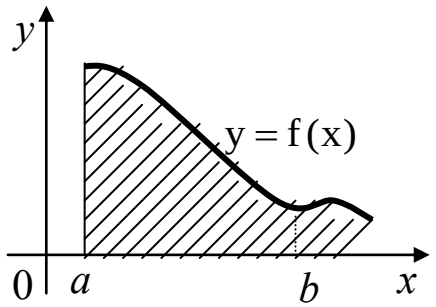


Рис. 1.6

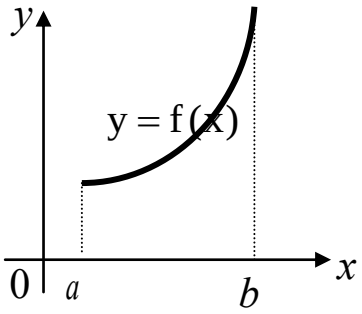


Рис. 1.7

Из определений следует, что несобственный интеграл является пределом определенного интеграла с переменной границей интегрирования.

Рассмотрим геометрический образ сходящегося несобственного интеграла. Пусть $f(x) > 0$ на $[a, b]$. Тогда определенный интеграл $\int_{a}^{b} f(x)dx$ выражает площадь криволинейной трапеции, опирающейся на отрезок $[a, b]$. Согласно определению естественно считать, что несобственный интеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ выражает площадь криволинейной трапеции, изображенной на
рис. 1.6. Аналогичная интерпретация имеет место для интегралов (1.77) и (1.78).

Пример 1.29 Исследовать на сходимость интегралы:

а) $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; б) $\int_{0}^{\infty} \cos x dx$; в) $\int_{-\infty}^{\infty} e^x dx$.

Решение.

а) по формуле (1.76) имеем

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} [\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0] = \frac{\pi}{2};$$

б) по определению

$$\int_{0}^{+\infty} \cos x\, dx = \lim_{a\to+\infty} \int_{0}^{a} \cos x\, dx = \lim_{a\to+\infty} \sin x\Big|_0^a = \lim_{a\to+\infty} \sin a,$$

так как предел функции $\sin a$ при $a \to +\infty$ не существует, то интеграл расходится;

в) представим данный интеграл по формуле (1.78) как сумму двух несобственных интегралов, взяв в качестве промежуточного предела интегрирования точку $x = 0$ $(c = 0)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = \int_{-\infty}^{0} e^x dx + \int_{0}^{+\infty} e^x dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} e^x dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} e^x dx =$$

$$= \lim_{a \to -\infty} e^x \Big|_a^0 + \lim_{b \to +\infty} e^x \Big|_0^b = e^0 - \lim_{a \to -\infty} e^a + \lim_{b \to +\infty} e^b - e^0 = \infty$$

Интеграл расходится.

Пример 1.30 Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ для различных значений $\alpha \in R$.

Решение.

1 Пусть $\alpha \neq 1$, тогда для любого $b > 0$.

$$\lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b \to +\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^b = \lim_{b \to +\infty} \frac{b^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha - 1}, & \text{при } \alpha > 1; \\ \infty, & \text{при } \alpha < 1. \end{cases}$$

2 Если $\alpha = 1$, то для любого $b > 0$

$$\lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \ln x\Big|_1^b = \lim_{b \to +\infty} \ln b = \infty.$$

Таким образом $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

В некоторых случаях достаточно установить только сходимость или расходимость заданного интеграла. Для решения такой задачи можно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 1.13 Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на промежутке $[a, +\infty[$ и удовлетворяет условию $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ (без доказательства).

Пример 1.31 Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}dx}{1+x^2}$.

Решение.

Введем функции $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$ и $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Тогда на $[0;+\infty[$ $0 \le f(x) \le g(x)$, так как $e^{-x} < 1$ на этом промежутке. Из примера 1.29 п. а) следует, что $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ сходится, тогда по теореме 1.13 $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}dx}{1+x^2}$ сходится.

1.15.2 Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, b[$. Точку $x = b$ будем называть особой, если функция $f(x)$ неограничена в любой окрестности этой точки, но ограниченна на любом отрезке $[a, b-\xi]$, заключенном в $[a, b]$ (рис. 1.7). Пусть на любом отрезке $[a, b-\xi]$, функция интегрируема, то есть существует определенный интеграл $\int_a^{b-\xi} f(x)dx$ при любом $\xi > 0$, таком, что $b-\xi > a$. Тогда

$$\lim_{\xi \to 0} \int_a^{b-\xi} f(x)dx \qquad (1.79)$$

называют несобственным интегралом от неограниченной при верхнем пределе интегрирования функции и обозначают $\int_a^b f(x)dx$.

Следовательно, по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\xi \to 0} \int_a^{b-\xi} f(x)dx. \qquad (1.80)$$

Если предел (1.79) существует, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Аналогично, если $x = a$ особая точка, то вводится несобственный интеграл от неограниченной при нижнем пределе интегрирования функции:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\xi \to 0} \int_{a+\xi}^b f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ не ограничена в окрестности какой-нибудь внутренней точке $C \in [a, b]$, то вводится понятие несобственного интеграла от неограниченной во внутренней точке функции по правилу

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

При этом интеграл в левой части считается сходящимся, если одновременно сходятся оба интеграла в правой части данного равенства. В противном случае интеграл является расходящимся.

Пример 1.32 Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ для различных значений $\alpha \in R$.

Решение.

1 Если $\alpha \neq 1$, то

$$\lim_{\xi \to +0} \int\limits_\xi^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\xi \to +0} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_\xi^1 = \lim_{\xi \to +0} \frac{1-\xi^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \text{при } \alpha > 1; \\ \dfrac{1}{1-\alpha}, & \text{при } 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

2 Если $\alpha = 1$, то

$$\lim_{\xi \to +0} \int\limits_\xi^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\xi \to +0} \ln x\Big|_\xi^1 = \lim_{\xi \to +0} (-\ln \xi) = \infty$$

Итак, данный интеграл сходится при $0 < \alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

1.16 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1.16.1 Вычисление площади в декартовых координатах

Выше было установлено, что если на сегменте $[a,b]$ функция $y = f(x)$ непрерывна и положительна, то площадь криволинейной трапеции с основанием $[a,b]$, ограниченной сверху графиком этой функции, вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b y\,dx. \qquad (1.81)$$

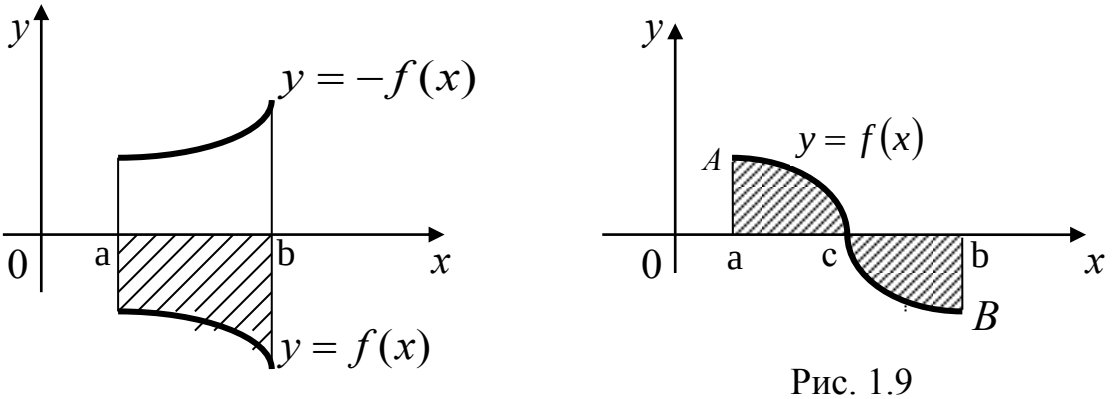


Рис. 1.9

Пусть $f(x) < 0$ на сегменте $[a,b]$ (рис.1.8)

Криволинейная трапеция с основанием $[a,b]$, ограниченная снизу

кривой $y = f(x)$, лежит ниже оси Ox. Её площадь S равна площади другой криволинейной трапеции, имеющей то же основание, но ограниченной сверху кривой $y = -f(x)$ (см. рис. 1.8). По условию $f(x) < 0$; следовательно, $-f(x) > 0$. По формуле (1.81) найдем

$$S = \int_a^b [-f(x)]dx = -\int_a^b f(x)dx. \qquad (1.82)$$

Формулы (1.81) и (1.82) можно объединить в одну:

$$S = \int_a^b |f(x)|dx. \qquad (1.83)$$

Эта формула остается справедливой и в том случае, когда функция $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ меняет знак (рис. 1.9).

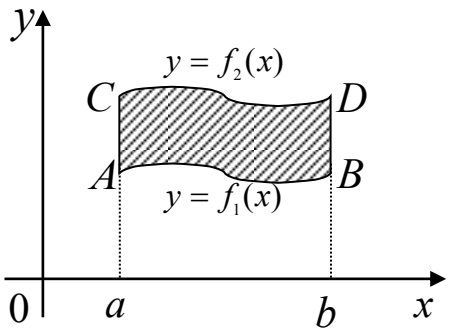


Рис. 1.10

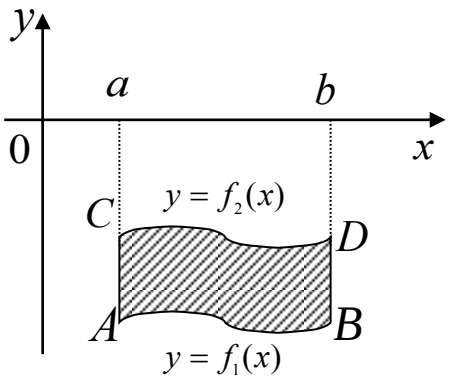


Рис. 1.11

Вычислим площадь фигуры, ограниченной снизу и сверху графиками функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, где $f_1(x)$, $f_2(x)$ непрерывные функции на $[a, b]$, причем всюду на этом отрезке $f_1(x) \le f_2(x)$ (рис. 1.10).

Искомая площадь равна разности площадей криволинейных трапеций $aCDb$ и $aABb$:

$$\text{пл } ACDB = \text{пл } aCDb - \text{пл } aABb =$$
$$= \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx. \qquad (1.84)$$

Формула справедлива при любом расположении графиков функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, лишь бы $f_1(x) \le f_2(x)$ на $[a, b]$ (рис. 1.11).

Замечание 1.2 Если криволинейная трапеция прилегает к оси Oy (рис. 1.12), то ее площадь может быть вычислена по формуле

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy = \int_c^d x\ dy. \qquad (1.85)$$

Площадь фигуры, изображенной на рис. 1.13, вычисляется по формуле

$$S = \int_c^d [\varphi_2(y) - \varphi_1(y)]dy. \qquad (1.86)$$

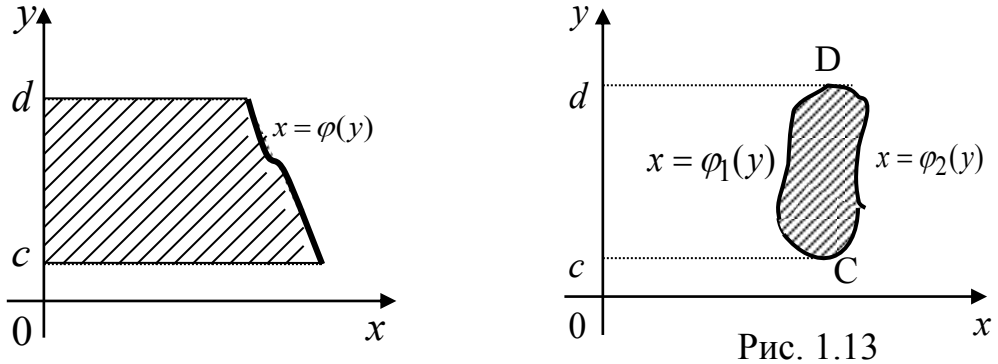


Рис. 1.13

Пример 1.33 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x + 1$ и $y - x + 1 = 0$ (рис. 1.14)

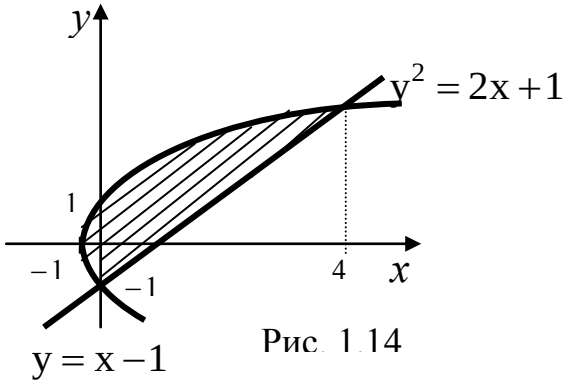


Рис. 1.14

Решение.

Уравнениями границы фигуры являются парабола $y^2 = 2x + 1$ с осью симметрии Ox и вершиной в точке $(-0{,}5;\ 0)$ и прямая $y = x - 1$.

Выбрав за независимую переменную y, перепишем уравнения границ в виде $x = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ и $x = y + 1$. Площадь фигуры найдем по формуле (1.86), где $\varphi_2(y) = y + 1,\ \varphi_1(y) = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$.

Решая совместно уравнения границ, найдем промежуток интегрирования. Имеем

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(y^2 - 1) \\ x = y + 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}(y^2 - 1) = y + 1 \Leftrightarrow y^2 - 1 = 2y + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow y_1 = c = -1, \quad y_2 = d = 3.$$

Подставляя найденные величины c, d, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ в расчетную формулу, получим

$$S=\int_{-1}^{3}\left[y+1-\frac{1}{2}\left(y^2-1\right)\right]dy=\int_{-1}^{3}\left(y-\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{2}\right)dy=$$

$$=\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6}+\frac{3}{2}y\right)\Bigg|_{-1}^{3}=\frac{9}{2}-\frac{27}{6}+\frac{9}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{3}{2}=\frac{16}{3}.$$

Ответ: $\frac{16}{3}$ кв. ед.

Замечание 1.3 Для вычисления площади криволинейной трапеции в случае, когда кривая AB задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, причем $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, в формуле (1.81) надо сделать замену переменной, положив $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)dt$.

Тогда получим

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\cdot\varphi'(t)dt. \qquad (1.87)$$

1.16.2 Площадь криволинейного сектора

Пусть кривая AB задана в полярных координатах уравнением $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$, причем функция $\rho(\varphi)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[\alpha,\beta]$. Плоскую фигуру, ограниченной кривой AB и двумя лучами $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$, составляющими с полярной осью углы α и β, соответственно будем называть криволинейным сектором (рис. 1.15).

Докажем, что площадь S криволинейного сектора вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi. \qquad (1.88)$$

Доказательство. Разобьем произвольно отрезок $[\alpha,\beta]$ на n частей точками: $\alpha=\varphi_0<\varphi_1<\varphi_2<\ldots<\varphi_{i-1}<\varphi_i<\ldots<\varphi_n=\beta$.

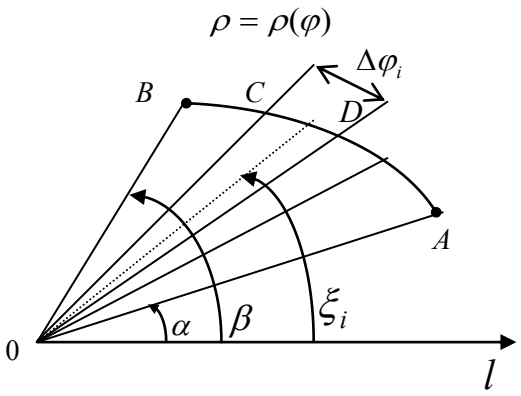


Рис. 1.15

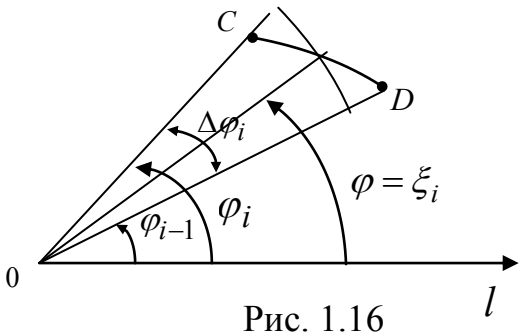


Рис. 1.16

Выберем на каждом частичном отрезке $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$ произвольную точку ξ_i и построим элементарные круговые секторы с радиусами $\rho_i = \varphi(\xi_i)$ (рис. 1.16). В результате получим веерообразную фигуру, площадь которой приближенно равна площади заданного криволинейного сектора. Площадь каждого элементарного кругового сектора равна $\frac{1}{2}\rho^2(\xi_i)\cdot\Delta\varphi_i$, где $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1},\ i = \overline{1,\ n}$.

Тогда площадь S данного криволинейного сектора приближенно равна

$$S \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho^2(\xi_i)\Delta\varphi_i . \qquad (1.89)$$

Сумма в правой части (1.89) является интегральной суммой для функции $\rho^2(\varphi)$ на $[\alpha, \beta]$. Так как функция $\rho^2(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, то существует предел этой суммы при $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}|\Delta\varphi_i| \to 0$ и равен определенному интегралу (1.88). Следовательно, и площадь криволинейного сектора численно равна этому интегралу:

$$S = \frac{1}{2}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho^2(\xi_i)\cdot\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi .$$

Пример 1.34 Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Решение.

Найдем уравнение границы фигуры в полярной системе координат, положив $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$.

Тогда

$$\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)\Leftrightarrow\left(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi\right)^2=$$
$$=a^2\left(\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi\right)\Leftrightarrow\rho^4\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)^2=$$
$$=a^2\rho^2\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right)\Leftrightarrow\rho^2=a^2\cos 2\varphi\Rightarrow\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

(см. рис. 1.17).

Так как изображенная на рис. 1.17 фигура является симметричной относительно осей x и y, то достаточно для решения всей задачи определить площадь четвертой части всей фигуры (заштрихованная часть). Для этой области переменная φ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{4}$, следовательно, площадь заштрихованной фигуры найдется по формуле

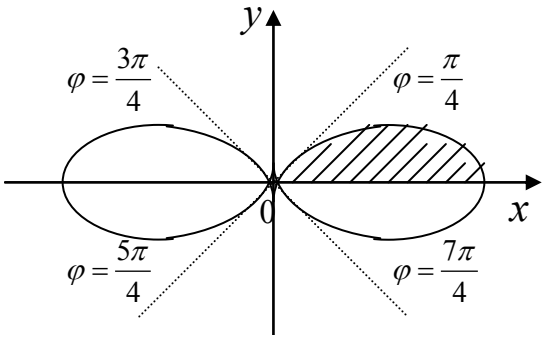


Рис. 1.17

$$S_1=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\varphi d\varphi,$$

а площадь всей фигуры по формуле

$$S=4S_1 \text{ или } S=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d\varphi=a^2\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=a^2.$$

Ответ: a^2.

1.16.3 Длина дуги плоской кривой

Пусть плоская кривая AB задана уравнением $y=f(x)$, $a\le x\le b$, где $f(x)$ непрерывная функция на отрезке $[a, b]$. Найдем длину дуги кривой AB. Разобьем кривую AB на n произвольных частей точками $A=M_0, M_1, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_n=B$ с абсциссами $a=x_0, x_1, \ldots x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n=b$ и проведем хорды $AM_1;\ M_1M_2; \ldots; M_{i-1}M_i; \ldots; M_{n-1}B,$ длины которых обозначим

$\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots, \Delta l_i, \ldots \Delta l_n$. Тогда получим ломаную, вписанную в дугу AB (рис. 1.18). Длина ломаной равна

$$l = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$$

Длиной l дуги AB называется предел, к которому стремится длина вписанной ломаной, когда число ее звеньев неограниченно растет, а длина ее наибольшего звена стремится к нулю.

$$l = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i, \text{ где } \lambda = \max |\Delta l_i| \qquad (1.90)$$

Докажем, что если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ непрерывны, то предел (1.90) существует и длина l дуги AB выражается формулой

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx. \qquad (1.91)$$

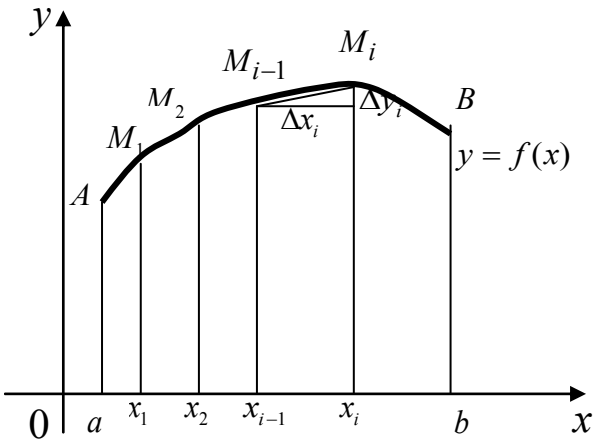


Рис. 1.18

Доказательство. Вычислим длину хорды $M_{i-1}M_i$. По формуле расстояния между двумя точками $M_{i-1}(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ и $M(x_i, f(x_i))$ имеем

$$\Delta l = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$

По формуле Лагранжа

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

где $x_{i-1} < \xi_i < x_i$

Следовательно,

$$\Delta l_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \cdot \Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Длина всей ломаной равна

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \sum_{i=1`}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \cdot \Delta x_i. \qquad (1.92)$$

Правая часть равенства (1.92) представляет собой интегральную сумму. Функция $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ непрерывна на $[a, b]$, поэтому предел суммы (1.92) при

$\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}|\Delta x_i| \to 0$ существует и равен определенному интегралу (1.91). Длина l кривой AB равна пределу длины, вписанный в нее ломаной при условии, что наибольшая из длин звеньев Δl_i стремится к нулю. Так как при $\Delta l_i \to 0$ и $\Delta x_i \to 0$, то

$$l = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+[f'(\xi)]^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

Таким образом,

$$l = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad (1.93)$$

Замечание 1.4 Пусть требуется вычислить длину дуги в случае, когда кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, где α и β значения параметра t, соответствующие значения $x = a$, $x = b$, то есть $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Тогда, если функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывны вместе со своими производными $\varphi'(t) \ne 0$ и $\psi'(t)$ на отрезке $[\alpha;\beta]$, по правилу дифференцирования функции, заданной параметрически, найдем

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Тогда, полагая в формуле (7.40) $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$, получим

$$l = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1+\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2}\cdot\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt. \qquad (1.94)$$

Замечание 1.5 Для вычисления длины дуги в случае, когда кривая AB задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, где $\rho(\varphi)$ имеет непрерывную производную $\rho'(\varphi)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, и точкам A и B кривой соответствуют значения φ, равные α и β, нужно кривую задать параметрически, принимая за параметр полярный угол φ. Полагая $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, где $\rho = \rho(\varphi)$, найдем параметрические уравнения кривой AB $x = \rho(\varphi)\cdot\cos\varphi$, $y = \rho(\varphi)\cdot\sin\varphi$, $\alpha \le \varphi \le \beta$.

Так как $x'(\varphi) = \rho'(\varphi)\cdot\cos\varphi - \rho(\varphi)\cdot\sin\varphi$,

$$y'(\varphi) = \rho'(\varphi)\cdot\sin\varphi + \rho(\varphi)\cdot\cos\varphi,$$

то формула (1.94) принимает вид

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2+y'^2}\,d\varphi=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho'^2\cos^2\varphi-2\rho\rho'\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi+\rho^2\sin^2\varphi+}$$

$$\overline{+\rho'^2\sin^2\varphi+2\rho\rho'\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi+\rho^2\cdot\cos^2\varphi}\;\;d\varphi.$$

Следовательно,

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}d\varphi. \qquad (1.95)$$

Пример 1.35 Вычислить длину дуги полукубической параболы $y=x^{3/2}$, если $0\le x\le 5$ (рис. 1.19).

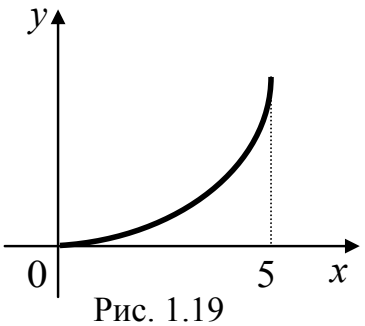


Рис. 1.19

Решение. Из уравнения $y=x^{3/2}$ находим $y'=\frac{3}{2}x^{1/2}$. Следовательно, по формуле (1.91) получим

$$l=\int_0^5\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^5\sqrt{1+\frac{9x}{4}}dx=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^5=\frac{335}{27}$$

Ответ: $\frac{335}{27}$.

1.16.4 Объем тела вращения

Рассмотрим криволинейную трапецию с основанием $[a, b]$, ограниченную сверху непрерывной кривой $y=f(x)$.

Докажем, что тело, которое образуется вращением вокруг оси Ox данной криволинейной трапеции, имеет объем

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx. \qquad (1.96)$$

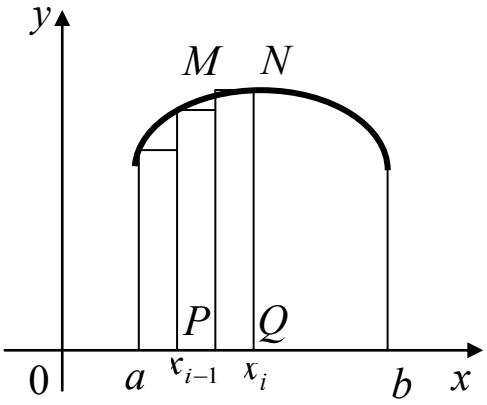


Рис. 1.20

Доказательство. Разобьем произвольно отрезок $[a, b]$ на n частей точками

$a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b.$

На каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ построим прямоугольник с основанием $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ и высотой $f(x_{i-1})$ (рис.1.20). При вращении вокруг оси Ox каждый прямоугольник

опишет цилиндр. Объем i-го цилиндра, образованного вращением прямоугольника $PMNQ$, равен

$$V_i = \pi f^2(x_{i-1}) \cdot \Delta x_i, \text{ где } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Сумма объемов всех цилиндров приближенно равна объему данного тела вращения:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(x_{i-1}) \cdot \Delta x_i . \qquad (1.97)$$

Сумма (1.97) является интегральной суммой для функции $\pi \cdot f^2(x)$. Так как функция $f^2(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то предел этой суммы при

$$\lambda = \max_{1 \le i \le n} |\Delta x_i| \to 0$$

существует и равен определенному интегралу (1.96).

Таким образом,

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(x_{i-1}) \Delta x_i = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Пример 1.36 Найти объем V шара радиуса r.

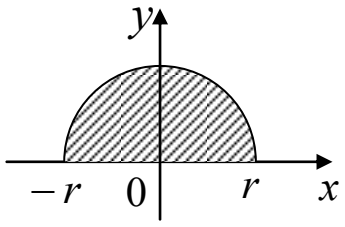


Рис. 1.21

Решение.

Рассматривая данный шар как тело, образованное вращением полукруга $y \le \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \le x \le r$ вокруг оси Ox (рис. 1.21), по формуле (1.96) получим

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx = \pi r^2 x \Big|_{-r}^{r} - \frac{\pi x^3}{3} \Big|_{-r}^{r} =$$

$$= 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Ответ: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

1.17 ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ И ФИЗИКИ

1.17.1 Схема применения определенного интеграла

Пусть требуется определить некоторую механическую или физическую величину Q, определенную на отрезке $[a, b]$. Предполагается, что величина Q является аддитивной, то есть, если отрезок $[a, b]$ делится на части, то величина Q складывается из суммы значений, соответствующих этим частям:

$$Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + ... + \Delta Q_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta Q_i$$

Предполагается, что величина ΔQ_i, соответствующая отрезку $[x_{i-1}, x_i]$, пропорциональна его длине Δx_i, то есть $\Delta Q_i \approx f(x_i) \cdot \Delta x_i$. Коэффициент пропорциональности $f(x)$ является непрерывной функцией x, определяемой из условия задачи.

Для величины Q получаем приближенное равенство

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \Delta Q_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i . \qquad (1.98)$$

В правой части равенства (1.98) стоит интегральная сумма для функции $f(x)$. Предел этой суммы при стремлении наибольшего из частичных промежутков к нулю есть определенный интеграл от функции $f(x)$ в пределах от a до b и дает точное значение величины Q:

$$Q = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Подынтегральное выражение $f(x)dx$, дающее приближенное значение ΔQ на отрезке $[x, x + dx]$, называют "элементом" величины Q и обозначают dQ. Часто при решении физических или химических задач интегральную сумму не составляют, а находят дифференциал рассматриваемой величины $dQ = f(x)dx$. Затем, интегрируя по отрезку $[a, b]$, получают значение величины

$$Q = \int_a^b dQ = \int_a^b f(x)dx .$$

Рассмотрим некоторые задачи.

1.17.2 Работа переменной силы

Если величина силы, действующей по направлению движения, постоянна, то под работой, произведенной силой, подразумевают произведение силы на путь, пройденный материальной точкой. Если же сила переменная, то работа может быть определена только с помощью предельного перехода.

Пусть материальная точка перемещается из точки a оси Ox в точку b этой оси под действием силы F, параллельной оси Ox. Будем считать, что эта сила является функцией от x, определенной на сегменте $[a, b]$. Как определить работу при перемещении материальной точки из точки a в точку b в этом случае?

Разобьем весь путь $[a, b]$ на n участков точками:

$a = x_0 < x_1 < ... < x_i < ... < x_n = b$ (рис. 1.22).

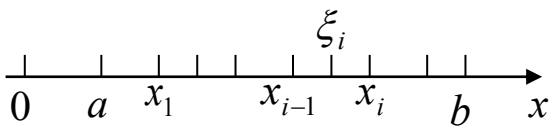


Рис. 1.22

Выберем на каждом частичном сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ произвольную точку ξ_i. Вместо действующей на пути $[a, b]$ переменной силы F, возьмем другую силу,

сохраняющую постоянное значение на каждом из малых участков, причем положим эти значения равными значениям действующей силы в точках ξ_i, то есть $F(\xi_i)$.

Таким образом, на участке $[x_{i-1}, x_i]$ на материальную точку действует сила, равная $F(\xi_i)$. Работа, совершаемая силой $F(\xi_i)$ на участке $[x_{i-1}, x_i]$, равна

$$\Delta A_i = F(\xi_i)\cdot \Delta x_i, \text{ где } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Тогда приближенное значение полной работы A переменной силы $F(x)$ на сегменте $[a, b]$

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\cdot \Delta x_i \qquad (1.99)$$

представляет интегральную сумму. Переходя в (1.99) к пределу при неограниченном возрастании числа частичных отрезков и при стремлении к нулю длины наибольшего из частичных участков, получим работу A переменной силы $F(x)$ на сегменте $[a, b]$

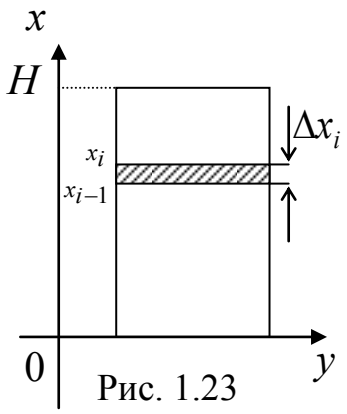


Рис. 1.23

$$A = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Пример 1.37 Вычислить работу, которую совершает насос, опорожняющий вертикальный цилиндрический резервуар высотой H и радиусом R от жидкости с удельным весом ρ.

Решение.

Работа, затрачиваемая на поднятие некоторого тела, зависит от высоты его подъема: $A = P\cdot h$, где P вес тела. Так как высота поднятия для различных слоев жидкости не одинакова, приведенная формула может быть использована лишь для подсчета "элемента" работы. Разделим резервуар на n слоев толщины Δx_i плоскостями, параллельными поверхности жидкости. Введем систему координат так, как показано на рис.1.23. Рассмотрим горизонтальную полоску (элементарный слой жидкости) толщиной Δx_i. Вес этого элементарного слоя равен

$$\Delta P_i = \Delta V_i \cdot \rho = \rho \cdot \pi R^2 \cdot \Delta x_i.$$

Тогда работа ΔA_i, необходимая для поднятия этого слоя жидкости на поверхность, равна

$$\Delta A_i \approx \Delta P_i (H - \xi_i) = \rho \pi R^2 \cdot (H - \xi_i)\Delta x_i, \text{ где } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Приближенное значение полной работы A насоса есть

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \approx \rho \pi R^2 \sum_{i=1}^{n} (H - \xi_i)\Delta x_i.$$

Перейдя в последней интегральной сумме к пределу при $\max \Delta x_i \to 0$ и $n \to \infty$, получим полную работу A насоса:

$$A = \rho\pi R^2 \cdot \int_0^H (H - x)dx = \rho\pi R^2 \left(Hx - \frac{x^2}{2} \right)\Big|_0^H = \rho\pi R^2 \left(H^2 - \frac{H^2}{2} \right) = \frac{\rho\pi R^2 H^2}{2} \quad (1.100)$$

Пример 1.38 Прямоугольный резервуар с площадью горизонтального сечения $S = 6\,м^2$ наполнен водой до высоты $H = 5\,м$. Определить время, в течение которого вся вода вытечет из резервуара через небольшое отверстие в его дне площадью $\delta = 0{,}01\ м^2$, если принять, что скорость истечения воды равна $0{,}6\sqrt{2gh}$, где h высота уровня воды над отверстием.

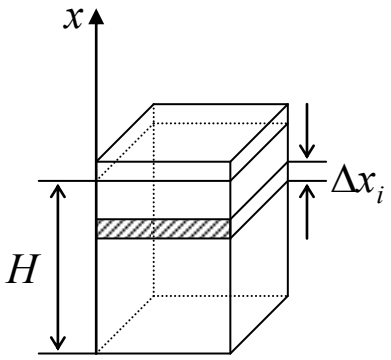


Рис. 1.24

Решение.

Разобьем искомое время T на большое число n малых промежутков $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_n$; пусть за каждый такой промежуток уровень воды в резервуаре понижается на величину Δx_i, где $i = \overline{1, n}$. (рис. 1.24).

Если допустить, что в течении каждого малого промежутка времени Δt_i скорость истечения воды через отверстие в дне остается постоянной, равной ее значению в начале промежутка $0{,}6\sqrt{2gx_i}$, то приравняв объем воды, вытекшей с такой скоростью через отверстие в дне за промежуток Δt_i, объему опорожнившейся за этот промежуток части резервуара, получим приближенное равенство

$$0{,}6\delta \cdot \sqrt{2gx_i} \cdot \Delta t_i \approx S \cdot \Delta x_i,$$

откуда

$$\Delta t_i \approx \frac{S \cdot \Delta x_i}{0{,}6\delta\sqrt{2gx_i}}.$$

Приближенное значение всего искомого времени T будет равно сумме:

$$T = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{S \cdot \Delta x_i}{0{,}6\delta\sqrt{2gx_i}}$$

Перейдя в последней интегральной сумме к пределу, получим точное значение времени T, в течение которого вся вода вытечет из резервуара, как соответствующий определенный интеграл:

$$T = \int_0^H \frac{S \cdot dx}{0{,}6\delta\sqrt{2gx}} = \frac{S}{0{,}6\delta\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2S}{0{,}6\delta\sqrt{2g}} x^{1/2}\Big|_0^H = \frac{S}{0{,}6\delta}\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Подставляя числовые значения параметров, получим $T \approx 1010\ с \approx 16{,}83$ мин.

Рассмотрим некоторые задачи механики

1.17.3 Статические моменты. Координаты центра тяжести системы материальных точек

Пусть на плоскости Oxy дана система материальных точек $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \ldots, P_n(x_n, y_n)$ (рис. 1.25) с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

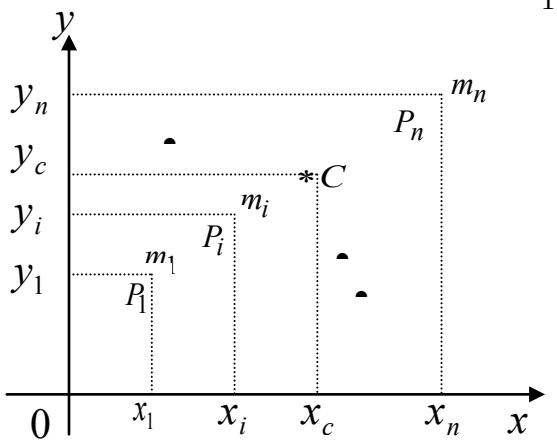


Рис. 1.25

Произведения $x_i m_i$ и $y_i m_i$ называются статическими моментами массы относительно осей Oy и Ox.

Суммарные статические моменты системы материальных точек относительно осей Oy и Ox выражаются соответственно формулами

$$M_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \; M_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i .$$

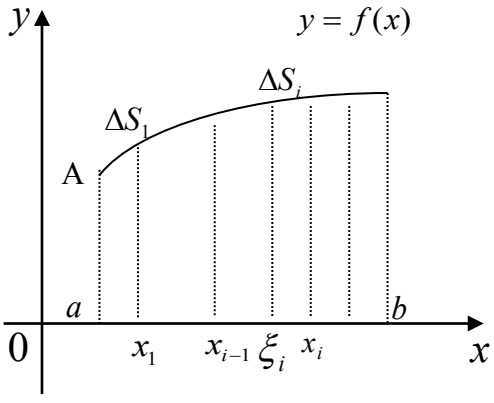
Обозначим через x_c и y_c координаты центра тяжести данной системы. Тогда, как известно из курса механики, координаты центра тяжести описанной материальной системы определяются формулами

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{M_{Oy}}{M}; \qquad (1.101)$$

$$y_c = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \ldots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{M_{Ox}}{M}; \qquad (1.102)$$

Используем эти формулы для отыскания центров тяжести различных фигур и тел.

1.17.4 Центр тяжести плоской линии



Пусть дана кривая AB уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$; пусть эта кривая представляет собой материальную линию. Предположим, что линейная плотность (масса единицы длины данной линии) такой материальной кривой равна ρ.

Разобьем линию на n частей с длинами $\Delta L_1, \Delta L_2, \ldots, \Delta L_n$ (рис. 1.26). Массы этих частей будут равняться произведению их длин на постоянную плотность: $\Delta m_i = \rho \cdot \Delta L_i$. На каждой

части дуги ΔL_i возьмем произвольную точку с абсциссой ξ_i. Представляя каждую часть дуги ΔL_i материальной точкой с массой $\rho \cdot \Delta L_i$ и подставляя в формулы (1.101) и (1.102) вместо x_i значение ξ_i, вместо y_i значение $f(\xi_i)$, а вместо m_i значение $\rho \cdot \Delta L_i$ (массы частей ΔL_i), получим приближенные формулы для определения центра тяжести дуги:

$$x_c \approx \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \cdot \rho \cdot \Delta_{Si}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho \cdot \Delta L_i}; \; y_c \approx \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \rho \cdot \Delta L_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho \cdot \Delta L_i}.$$

Если функция $y = f(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную, то стоящие в числителе и знаменателе каждой дроби суммы при $\max \Delta L_i \to 0$ имеют пределы, равные пределам соответствующих сумм. Таким образом, координаты центра тяжести дуги выражаются определенными интегралами:

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b x \; dL}{\int\limits_a^b dL} = \frac{\int\limits_a^b x \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)}dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx}; \qquad (1.103)$$

$$y_c = \frac{\int\limits_a^b f(x) \; dL}{\int\limits_a^b dL} = \frac{\int\limits_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)}dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx}. \qquad (1.104)$$

Эти формулы справедливы для любой однородной (имеющей постоянную плотность во всех точках) плоской дуги.

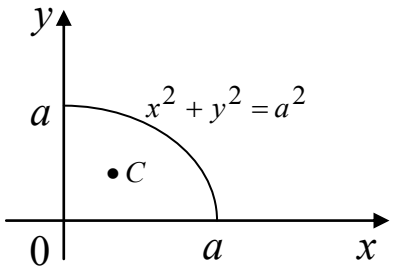


Рис. 1.27

Пример 1.39 Найти центр тяжести четверти окружности $x^2 + y^2 = a^2$, расположенной в первом квадрате (рис. 1.27), если в каждой ее точке линейная плотность пропорциональна произведению координат точки.

Решение.

Воспользуемся формулами (1.103) и (1.104). Для этого из уравнения окружности найдем y', затем dS:

$$\left(x^2\right)'_x + \left(y^2\right)'_x = \left(a^2\right)'_x; \; 2x + 2y \cdot y' = 0; \; y' = -\frac{x}{y};$$

$$dS = \sqrt{1 + f'^2(x)}dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}dx = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2}}dx = \sqrt{\frac{a^2}{y^2}}dx = \frac{a}{y}dx$$

Далее вычислим интегралы, содержащиеся в формулах (1.103) и (1.104), полагая согласно условию линейную плотность равной $\delta = kxy$:

$$\int_0^a \delta x \, dS = \int_0^a kxy \cdot x \cdot \frac{a}{y} \cdot dx = ka \int_0^a x^2 dx = \frac{ka}{3} \cdot x^3 \Big|_0^a = \frac{ka^4}{3};$$

$$\int_0^a \delta y \, dS = \int_0^a kxy \cdot y \cdot \frac{a}{y} \cdot dx = ka \int_0^a xy \, dx = ka \int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2} dx \cdot =$$

$$\frac{ka}{2} \cdot \int_a^0 \sqrt{a^2 - x^2} d\left(a^2 - x^2\right) = \frac{ka}{3} \cdot \left(a^2 - x^2\right)^{3/2} \Big|_0^a = \frac{ka^4}{3};$$

$$\int_0^a \delta dS = ka \int_0^a x \, dx = \frac{ka}{2} \cdot x^2 \Big|_0^a = \frac{ka^3}{2}$$

Подставляя значения интегралов в формулы (1.103) и (1.104), получим координаты центра тяжести дуги окружности $x_c = y_c = \frac{2}{3}a$.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

РАЗДЕЛ 6 «ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

2. Методические указания для студентов

2.1 НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

2.1.1 Основные определения

Отыскание функции $F(x)$ по известному ее дифференциалу $f(x)dx$, называется ***интегрированием***, а искомая функция $F(x)$ - ***первообразной функцией*** от функции $f(x)$.

Всякая непрерывная функция $f(x)$ имеет бесконечное множество первообразных функций, которые отличаются друг от друга постоянным слагаемым

$$(F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$$

Выражение $F(x)+C$ называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

Справедливость результата интегрирования можно проверить путем дифференцирования.

2.1.2 Свойства неопределенного интеграла

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx,\ \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
2. $\int k f(x)dx = k\int f(x)dx$ (k - постоянный множитель)
3. $\int[f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$
4. Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, а $u(x)$ - дифференцируемая функция, то $\int f(u)du = F(u)+C$

2.1.3 Таблица неопределенных интегралов

Таблица 2.1

Таблица неопределенных интегралов

1 $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha \neq -1),$ $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{x+1}+C,\ \alpha \in R,\ \alpha \neq -1$	**2** $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$

3 $\int dx = x + C$	**4** $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ \ (a > 0, a \neq 1)$
5 $\int e^x dx = e^x + C$	**6** $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
7 $\int \cos x \, dx = \sin x + C$	**8** $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
9 $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	**10** $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
11 $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{a + x}{a - x} \right\rvert + C$	**12** $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
13 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left\lvert x + \sqrt{x^2 + a^2} \right\rvert + C$	**14** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2} \right\rvert + C$
15 $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln \lvert \cos x \rvert + C$	**16** $\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln \lvert \sin x \rvert + C$
17 $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$	**18** $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
19 $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$	**20** $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$

2.1.4 Метод непосредственного интегрирования

Метод непосредственного интегрирования, связан с приведением подынтегрального выражения к табличной форме путем преобразований и применения свойств неопределенного интеграла.

Рассмотрим примеры на применение формулы (1)

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C$$

Пример 2.1 Вычислить интегралы:

Решение.

1) $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

2) $\int \sqrt{x^3} dx = \int x^{3/2} dx = \frac{x^{5/2}}{5/2} + C = \frac{2}{5} x^{5/2} + C = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C$

3) $\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4} dx = -\frac{x^{-3}}{3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C$

4) $\int 2x\sqrt{x} dx = 2\int x^{3/2} dx = 2\frac{x^{5/2}}{5/2} + C = \frac{4}{5} x^2 \sqrt{x} + C.$

5) $\int\left(2x-3\sqrt{x}\right)dx=2\int xdx-3\int x^{1/2}dx=x^2-3\frac{x^{3/2}}{3/2}+C=x^2-2x^{3/2}+C=$

$=x^2-2x\sqrt{x}+C.$

6) $\int\frac{\sqrt[3]{x}+x}{\sqrt[4]{x}}dx=\int\frac{x^{1/3}}{x^{1/4}}dx+\int\frac{x}{x^{1/4}}dx=\int x^{1/12}dx+\int x^{3/4}dx=\frac{12}{13}x^{13/12}+\frac{4}{7}x^{7/4}+$

$+C=\frac{12}{13}x^{12}\sqrt{x}+\frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3}+C$

Пример 2.2 Вычислить интегралы, применив формулы $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$, $\int e^x dx=e^x+C$

Решение.

1) $\int 3^x dx=\frac{3^x}{\ln 3}+C$

2) $\int\left(\sqrt{2}\right)^x dx=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^x}{\ln\sqrt{2}}+C=\frac{2\left(\sqrt{2}\right)^x}{\ln 2}+C$

3) $\int 2^{3x}dx=\int 8^x dx=\frac{8^x}{\ln 8}+C$

4) $\int 4^x\cdot e^x\,dx=\int(4e)^x dx=\frac{(4e)^x}{\ln(4e)}+C=\frac{(4e)^x}{\ln 4+1}+C$

5) $\int\frac{32^x-2^x}{4^x}dx=\int\frac{32^x}{4^x}dx-\int\frac{2^x}{4^x}dx=\int 8^x dx-\int\left(\frac{1}{2}\right)^x dx=\frac{8^x}{\ln 8}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln 2}+C$

При вычислении интегралов от тригонометрических функций используются тригонометрические формулы:

$\sin^2 x=1-\cos^2 x,\ \operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1,\ \operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}-1,$

$\cos^2 x=1-\sin^2 x,$

$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)],$

$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right],$$

$$\sin^3 x=\sin^2 x\sin x=\left(1-\cos^2 x\right)\sin x=\sin x-\cos^2 x\sin x,$$

$$1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2},\ 1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2},$$

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\ \operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}$$ и другие.

Пример 2.3 Вычислить интегралы, применяя известные тригонометрические формулы и табличные интегралы 6-12.

Решение.

1) $$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\underbrace{\int\frac{dx}{\cos^2 x}}_{\text{интеграл 8}}-\int\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\operatorname{tg} x-$$

$$-\underbrace{\int dx}_{\text{интеграл 1}}=\operatorname{tg} x-x+C$$

2) $$\int\frac{dx}{1-\cos 2x}=\int\frac{dx}{2\sin^2 x}=\frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{dx}{\sin^2 x}}_{\text{интеграл 9}}=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x+C$$

3) $$\int\left(\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x\right)dx=\int\frac{\pi}{2}dx=\frac{\pi}{2}\int dx=\frac{\pi}{2}x+C$$

4) $$\int 5\cos^2\frac{x}{2}dx=\frac{5}{2}\int(1+\cos x)dx=\frac{5}{2}\left(\int dx+\int\cos x\,dx\right)=\frac{5}{2}\left(x+\sin x\right)+C$$

5) $$\int\frac{\cos 9x+\cos 7x}{\cos 8x}dx=\int\frac{2\cos\frac{9x+7x}{2}\cdot\cos\frac{9x-7x}{2}}{\cos 8x}dx=$$

$$=2\int\frac{\cos 8x\cdot\cos x}{\cos 8x}dx=2\int\cos x\,dx=2\sin x+C$$

6) $$\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin x}dx=\int\frac{dx}{\sin x}-\int\sin x\,dx=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\cos x+C$$

Пример 2.4 Вычислить интегралы, применяя табличные интегралы 3, 4, 12-14.

Решение.

1) $$\int\frac{dx}{10+x^2}=\underbrace{\int\frac{dx}{\left(\sqrt{10}\right)^2+x^2}}_{\text{интеграл 10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{10}}+C$$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - x^2}}}_{\text{интеграл 12}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} + C$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x}{\sqrt{\frac{3}{2}}} + C$

4) $\int \frac{dx}{9-x^2} = \underbrace{\int \frac{dx}{3^2 - x^2}}_{\text{интеграл 11}} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right| + C$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 16}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 16}\right| + C$

2.2 ИНВАРИАНТНОСТЬ ФОРМУЛ ИНТЕГРИРОВАНИЯ. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Свойство (4) для неопределенных интегралов из п. 2.1.2 расширяет таблицу простейших интегралов, каждый из которых может быть записан в виде

$$\int du = u + C,\ \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq 1), \quad \int \mathrm{Cos}\, u\, du = \mathrm{Sin}\, u + C$$

и т.д., где во всех формулах под ***u*** понимается не только независимая переменная, но и произвольная функция любой независимой переменной, дифференцируемая в некотором промежутке. Рассмотрим два метода интегрирования, основанные на свойстве инвариантности формул интегрирования.

2.2.1 Метод введения функции под знак дифференциала

Из дифференциального исчисления известно, что дифференциал функции f(x) вычисляется по формуле $d[f(x)] = f'(x)\,dx$. Использование этой формулы в обратном порядке, т.е.

$$\boxed{f'(x)\,dx = d[f(x)]}$$

называется ***введением функции под знак дифференциала***. Таким образом, для известных функций справедливы следующие формулы:

$dx = d(x \pm C)$, $dx = \frac{1}{a}d(a \cdot x + b)$, где a, b, c = Const,

$e^x dx = d(e^x)$, $a^x dx = \frac{1}{\ln a}d(a^x)$, $\mathrm{Sin}\, x\, dx = -d(\mathrm{Cos}\, x)$,

$$\text{Cos}\,x\,dx = d(\text{Sin}\,x), \qquad \frac{dx}{\text{Cos}^2 x} = d(\text{tg}\,x), \qquad \frac{dx}{\text{Sin}^2 x} = -d(\text{ctg}\,x),$$

$$\frac{dx}{x} = d(\ln x), \qquad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x), \qquad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -d(\arccos x),$$

$$\frac{dx}{1+x^2} = d(\text{arctg}\,x), \qquad \frac{dx}{1+x^2} = -d(\text{arcctg}\,x) \qquad \text{и другие}$$

Тогда определенные типы нетабличных интегралов можно свести к табличным, т.е.

$$\int f(x)\cdot f'(x)dx = \underbrace{\int f(x)\,d[f(x)]}_{\text{табличный интеграл}}$$

Пример 2.5 Применяя метод введения под знак дифференциала, найти следующие интегралы:

Решение.

$$\int (x+3)^5 dx = \left|\begin{matrix} n=5 \\ dx = d(x+3) \end{matrix}\right| = \int (x+3)^5 d(x+3) = \frac{(x+3)^{5+1}}{5+1} + C =$$

$$= \frac{(x+3)^6}{6} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-3}} = \int (x-3)^{-1/2} dx = \int (x-3)^{-1/2} d(x-3) = 2\cdot(x-3)^{1/2} + C =$$

$$= 2\cdot\sqrt{x-3} + C$$

$$\int \frac{2x+5}{(x^2+5x+3)^2} dx = \int (\underbrace{x^2+5x+3}_{u})^{-2} \cdot \underbrace{(2x+5)dx}_{du} =$$

$$= \int (\underbrace{x^2+5x+3}_{u})^{-2} \cdot d(\underbrace{x^2+5x+3}_{u}) = \frac{(x^2+5x+3)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x^2+5x+3} + C.$$

$$\int \frac{dx}{(5x-2)^2} = \int (5x-2)^{-2} dx = \frac{1}{5}\cdot\int (5x-2)^{-2} 5dx = \left|dx = \frac{1}{5}\cdot 5dx = \frac{1}{5}d(5x-2)\right| =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\int (\underbrace{5x-2}_{u})^{-2} \underbrace{d(5x-2)}_{du} = \frac{1}{5}\cdot\frac{(5x-2)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{5\cdot(5x-2)} + C$$

$$\int \sin^2 x \cdot \underbrace{\cos x\,dx}_{d(\sin x)} = \int \underbrace{\sin^2 x}_{u^2} \cdot \underbrace{d(\sin x)}_{du} = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Пример 2.6 Применяя формулу $\int \frac{du}{u} = \int d(\ln u) = \ln|u| + C$,

найти следующие интегралы:

Решение.

1). $$\int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{d(\overbrace{x+1}^{u})}{\underbrace{x+1}_{u}} = \ln|x+1| + C.$$

2). $$\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \int \frac{d(\overbrace{x^2+1}^{u})}{\underbrace{x^2+1}_{u}} = \ln(x^2+1) + C.$$

3). $$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{d(\overbrace{x^2+1}^{u})}{\underbrace{x^2+1}_{u}} = \frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+1) + C.$$

4). $$\int \frac{4x^2}{8x^3+19}dx = \frac{1}{6}\cdot\int \frac{6\cdot 4x^2}{8x^3+19}dx = \frac{1}{6}\cdot\int \frac{d(\overbrace{8x^3+19}^{u})}{\underbrace{8x^3+19}_{u}} = \frac{1}{6}\cdot\ln|8x^3+19| + C.$$

5). $$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx = \int \frac{-d(\cos x+1)}{\underbrace{1+\cos x}_{u}} = -\ln(1+\cos x) + C.$$

6). $$\int \frac{e^x dx}{5+e^x} = \int \frac{d(e^x+5)}{e^x+5} = \ln(e^x+5) + C.$$

Пример 2.7 Применяя формулу $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C,$

найти следующие интегралы:

Решение.

1). $$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C.$$

2). $$\int 3^{2x}dx = \left|\begin{array}{l}\text{представим } dx \text{ в виде} \\ dx = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot d(2x)\end{array}\right| = \frac{1}{2}\cdot\int 3^{\overbrace{2x}^{u}} d(\underbrace{2x}_{u}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3^{2x}}{\ln 3} + C.$$

3). $$\int 2^{5x+4}dx = \left| \begin{array}{l} \text{представим dx в виде} \\ dx = \frac{1}{5}\cdot 5\cdot dx = \frac{1}{5}\cdot d(5x+4) \end{array} \right| = \frac{1}{5}\cdot \int 2^{\overbrace{5x+4}^{u}}\cdot d(\underbrace{5x+4}_{u}) =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot \frac{2^{5x+4}}{\ln 2} + C.$$

4). $$\int e^{\operatorname{Sin} x}\cdot \underbrace{\operatorname{Cos} x\, dx}_{d(\operatorname{Sin} x)} = \int e^{\overbrace{\operatorname{Sin} x}^{u}}\cdot d(\underbrace{\operatorname{Sin} x}_{u}) = e^{\operatorname{Sin} x} + C.$$

5). $$\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}dx}{\operatorname{Cos}^2 x} = \left| \frac{dx}{\operatorname{Cos}^2 x} = d(\operatorname{tg} x) \right| = \int e^{\operatorname{tg} x}\cdot d(\operatorname{tg} x) = e^{\operatorname{tg} x} + C.$$

Рассмотрим примеры на внесение функции под знак дифференциала с использованием других табличных интегралов.

Пример 2.8 Найти интегралы:

Решение.

1). $$\int \frac{dx}{(1+x^2)\cdot \operatorname{arctg} x} = \left| \frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x) \right| = \int \frac{d(\overbrace{\operatorname{arctg} x}^{u})}{\underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u}} = \ln\left|\operatorname{arctg} x\right| + C.$$

2). $$\int \frac{\operatorname{arcsin}^2 x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\operatorname{arcsin} x) \right| = \int (\underbrace{\operatorname{arcsin} x}_{u})^2\cdot d(\underbrace{\operatorname{arcsin} x}_{u}) =$$

$$= \frac{\operatorname{arcsin}^3 x}{3} + C.$$

3). $$\int \frac{dx}{\operatorname{Sin} x} = \int \frac{dx}{2\cdot \operatorname{Sin}\frac{x}{2}\cdot \operatorname{Cos}\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{\frac{\operatorname{Sin}\frac{x}{2}}{\operatorname{Cos}\frac{x}{2}}\cdot 2\cdot \operatorname{Cos}^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \left| \frac{dx}{2\cdot \operatorname{Cos}^2\frac{x}{2}} = d(\operatorname{tg}\frac{x}{2}) \right| = \int \frac{d(\operatorname{tg}\frac{x}{2})}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

4). $$\int \operatorname{Sin} 5x\, dx = \left| dx = \frac{1}{5}\cdot 5\, dx = \frac{1}{5}d(5x) \right| = \frac{1}{5}\cdot \int \operatorname{Sin} \underbrace{5x}_{u}\, d(\underbrace{5x}_{u}) = -\frac{1}{5}\operatorname{Cos} 5x + C.$$

5). $$\int \mathrm{Cos}\,(3x-7)\,dx = \left| dx = \frac{1}{3}\cdot 3\,dx = \frac{1}{3}\,d\,(3x-7) \right| =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot \int \mathrm{Cos}\,(\underbrace{3x-7}_{u})\,d\,(\underbrace{3x-7}_{u}) = \frac{1}{3}\cdot \mathrm{Sin}\,(3x-7) + C.$$

6). $$\int \mathrm{tg}\,2x\,dx = \int \frac{\mathrm{Sin}\,2x\,dx}{\mathrm{Cos}\,2x} = -\frac{1}{2}\cdot \int \frac{d\,(\mathrm{Cos}\,2x)}{\mathrm{Cos}\,2x} = -\frac{1}{2}\cdot \ln\left|\mathrm{Cos}\,2x\right| + C.$$

7). $$\int \frac{2x\,dx}{9+x^4} = \int \frac{d\,(\overbrace{x^2}^{u})}{3^2+(\underbrace{x^2}_{u})^2} = \left| \int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{u}{a} + C \right| = \frac{1}{3}\cdot \mathrm{arctg}\,\frac{x^2}{3} + C.$$

8). $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| x\,dx = -\frac{1}{2}\,d\,(1-x^2) \right| = -\frac{1}{2}\int \frac{d\,(\overbrace{1-x^2}^{u})}{\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{u}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2\cdot \sqrt{1-x^2} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Рассмотренные выше интегралы можно найти методом замены переменной.

2.2.2 Интегрирование методом подстановки

Если интеграл $\int f(x)\,dx$ не может быть найден непосредственно по формулам (1 – 18), то введением новой независимой переменной во многих случаях удается преобразовать подынтегральное выражение так, что интеграл становится табличным. Замена переменной интегрирования и составляют суть метода подстановки.

Замена переменной производится с помощью подстановок двух видов:

1) $x = \varphi(t)$, где t – новая переменная, $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция. Тогда $\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$.

Функцию $\varphi(t)$ стараются выбирать таким образом, чтобы правая часть формулы приобрела более удобный для интегрирования вид;

2) $t = \psi(x)$, где t – новая переменная. Тогда $\int f[\psi(x)]\psi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$.

Пример 2.9 Используя подстановку $x = \varphi(t)$ $(dx = \varphi'(t)\,dt)$, найти интегралы.

1) $\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ **; 2)** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

Решение.

$$1)\int \frac{\mathrm{Cos}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \left|\begin{array}{l}\text{используем подстановку } x = t^3,\\ \text{тогда} \quad dx = 3\cdot t^2\,dt\end{array}\right| = \int \frac{\mathrm{Cos}\sqrt[3]{t^3}}{\sqrt[3]{t^6}}\,3t^2\,dt =$$

$$= 3\cdot\int \frac{\mathrm{Cos}\,t}{t^2}\,t^2\,dt = 3\cdot\int \mathrm{Cos}\,t\,dt = 3\cdot\mathrm{Sin}\,t + C = 3\cdot\mathrm{Sin}\,\sqrt[3]{x} + C.$$

Этот пример можно решить, применяя метод внесения функции под знак дифференциала. Так как $\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3\cdot d(\sqrt[3]{x})$, то

$$\int \frac{\mathrm{Cos}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = 3\cdot\int \mathrm{Cos}\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{u}\cdot d(\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{u}) = 3\cdot\mathrm{Sin}\,\sqrt[3]{x} + C.$$

$$2)\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1+x^2}} = \left|\begin{array}{l}\text{используем подстановку } x = \frac{1}{t},\\ \text{тогда} \quad dx = -\frac{dt}{t^2}\end{array}\right| = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| + C = -\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}\right| + C = \ln\left|\frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}\right| + C$$

Пример 2.10 Используя подстановку $t = \psi(x)$ найти интегралы:

$$1)\int \frac{x^2}{8+x^3}dx = \left|\begin{array}{l} t = 8+x^3 \\ dt = 3\cdot x^2\,dx \\ \frac{1}{3}dt = x^2dx \end{array}\right| = \frac{1}{3}\cdot\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\cdot\ln|t| + C = \frac{1}{3}\cdot\ln\left|8+x^3\right| + C$$

$$2)\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9-e^{2x}}} = \left|\begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array}\right| = \underbrace{\int\frac{dt}{\sqrt{9-t^2}}} = \arcsin\frac{t}{3} + C = \arcsin\frac{e^x}{3} + C$$

$$3)\int \frac{\mathrm{Cos}\,x\,dx}{4+\mathrm{Sin}^2 x} = \left|\begin{array}{l} t = \mathrm{Sin}\,x \\ dt = \mathrm{Cos}\,x\cdot dx \end{array}\right| = \int\frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{arctg}\frac{\sin x}{2} + C$$

$$4)\int (x+3)^5 dx = \left|\begin{array}{l} t = x+3 \\ dt = dx \end{array}\right| = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{(x+3)^6}{6} + C$$

$$5)\int \frac{dx}{\sqrt{x-3}} = \left|\begin{array}{l} t = x-3 \\ dt = dx \end{array}\right| = \int\frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-1/2}dt = \frac{t^{1/2}}{1/2} + C = 2\cdot\sqrt{t} + C = 2\cdot\sqrt{x-3} + C.$$

$$6)\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}} = \left|\begin{array}{l} t^2 = x^3+1 \\ 2t\,dt = 3x^2 dx \\ \frac{2t}{3}dt = x^2 dx \end{array}\right| = \frac{2}{3}\cdot\int\frac{t\,dt}{t} = \frac{2}{3}\cdot t + C = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3+1} + C$$

$$7)\int e^{\mathrm{Sin}\,x}\mathrm{Cos}\,x\,dx = \left|\begin{array}{l} t = \mathrm{Sin}\,x \\ dt = \mathrm{Cos}\,x\,dx \end{array}\right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{\mathrm{Sin}\,x} + C$$

Выбор удачной подстановки имеет большое значение и достигается практикой интегрирования. В дальнейших параграфах будут даны рекомендации для замены переменных в зависимости от типа подынтегральной функции.

2.3 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

$(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2xa + a^2$ - полный квадрат суммы (разности)

Пример 2.11 Выделить полные квадраты в следующих квадратных трехчленах:

1) $x^2 + 6x + 5 = \underbrace{x^2 + 2\cdot 3x + 9} - 9 + 5 = (x+3)^2 - 4$

$$2)\ 2x^2-3x+1=2\left[x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right]=2\left[\underbrace{x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}}-\frac{9}{16}+\frac{1}{2}\right]=$$

$$=2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]$$

$$3)\ 9+6x-3x^2=-3\left[x^2-2x-3\right]=-3\left[(x-1)^2-4\right]=3\left[4-(x-1)^2\right]$$

1 Интеграл $\int\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{ax^2+bx+c}}$ находится путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе. В результате получается один из двух табличных интегралов:

$$\int\frac{dt}{t^2+k^2}=\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{t}{k}+C,\ \int\frac{dt}{t^2-k^2}=\frac{1}{2k}\ln\left|\frac{k-t}{k+t}\right|+C.$$

Пример 2.12 Найти интеграл $\int\frac{dx}{x^2+4x+8}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+8}=\left|x^2+4x+8=(x+2)^2+4\right|=\int\frac{dx}{(x+2)^2+4}=$$

$$=\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+4}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+C$$

При нахождении интеграла вместо внесения функции под знак дифференциала $dx=d(x+2)$ можно применить метод замены переменной:

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+8}=\left|\begin{matrix}x^2+4x+8=(x+2)^2+4\\ x+2=t,\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{t^2+2^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+C$$

2 Для нахождения интеграла $\int\frac{\mathbf{Ax+B}}{\mathbf{ax^2+bx+c}}\mathbf{dx}$ следует выделить в

числителе дроби производную знаменателя и разложить полученный интеграл на сумму двух интегралов: первый из них $\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c}$ подстановкой $ax^2+bx+c=t$ сводится к табличному интегралу $\int \frac{dt}{t}=\ln|t|$, а второй интеграл – это интеграл, рассмотренный в пункте 1 этого же параграфа.

Пример 2.13 Найти интеграл $\int \frac{x-2}{2x^2+5x+6}dx$

Решение.

Вычислим производную $(2x^2+5x+6)'=4x+5$. Выделяя в числителе производную квадратного трехчлена, получим $x-2=\frac{1}{4}(4x+5)-\frac{5}{4}-2=$

$\frac{1}{4}(4x+5)-\frac{13}{4}$

Следовательно $\int \frac{x-2}{2x^2+5x+6}dx=\int \frac{\frac{1}{4}(4x+5)-\frac{13}{4}}{2x^2+5x+6}dx=\frac{1}{4}\int \frac{\overbrace{(4x+5)dx}^{d(2x^2+5x+6)}}{2x^2+5x+6}-$

$-\frac{13}{4}\int \frac{dx}{2x^2+5x+6}=\frac{1}{4}\ln(2x^2+5x+6)-\frac{13}{8}\int \frac{dx}{x^2+\frac{5}{2}x+3}=$

выделим полный квадрат в знаменателе

$x^2+\frac{5x}{2}+3=\underbrace{x^2+2\cdot x\cdot\frac{5}{4}+\frac{25}{16}}-\frac{25}{16}+3=\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{23}{16}=\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{23}}{4}\right)^2$

$=\frac{1}{4}\ln(2x^2+5x+6)-\frac{13}{8}\int \underbrace{\frac{d\left(x+\frac{5}{4}\right)}{\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{23}}{4}\right)^2}}_{\text{табличный интеграл}}=$

$=\frac{1}{4}\ln(2x^2+5x+6)-\frac{13}{8}\cdot\frac{4}{\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{5}{4}}{\frac{\sqrt{23}}{4}}+C=$

$$= \frac{1}{4}\ln\left(2x^2+5x+6\right) - \frac{13}{2\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\frac{4x+5}{\sqrt{23}} + C$$

3 Интеграл $\int \frac{\mathbf{dx}}{\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}}$ находится с помощью выделения полного квадрата из подкоренного выражения и сводится к табличным интегралам вида $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2 \pm k^2}\right| + C,$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}} = \arcsin\frac{t}{k} + C.$$

Пример 2.14 Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x-2x^2}}$

Решение.

Выделяя из квадратного трехчлена полный квадрат, имеем

$$3-x-2x^2 = -2\left(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right) = -2\left(\underbrace{x^2+2\cdot\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}}-\frac{1}{16}-\frac{3}{2}\right) =$$

$$= -2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right] = 2\left[\frac{25}{16}-\left(x+\frac{1}{4}\right)^2\right].$$ Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-x-2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2\left[\frac{25}{16}-\left(x+\frac{1}{4}\right)^2\right]}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\int \frac{d\left(x+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(x+\frac{1}{4}\right)^2}}}_{\text{табличный интеграл}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x+\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x+1}{5} + C$$

4 Для нахождения интеграла $\int \frac{\mathbf{Ax+B}}{\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}}\mathbf{dx}$ следует выделить

в числителе производную подкоренного выражения и разложить полученный интеграл на сумму двух интегралов: первый из них $\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ сводится к табличному $\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}$, а второй – это интеграл, рассмотренный в пункте 3 этого же параграфа.

Пример 2.15 Найти интеграл $\int \frac{-4x+3}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx$

Решение.

Выделим в числителе производную квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе под знаком корня:

$$\left(4x^2+8x+9\right)' = 8x+8;\ -4x+3 = -\frac{1}{2}\left(8x+8\right)+4+3 = -\frac{1}{2}\left(8x+8\right)+7$$

Тогда

$$\int \frac{-4x+3}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx = \int \frac{-\frac{1}{2}\left(8x+8\right)+7}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{d\left(4x^2+8x+9\right)}}{\sqrt{4x^2+8x+9}} + \frac{(8x+8)dx}{}$$

$$+7\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+8x+9}} = -\frac{1}{2}2\sqrt{4x^2+8x+9}+\frac{7}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+\frac{9}{4}}} =$$

выделим полный квадрат в знаменателе под знаком корня

$$x^2+2x+\frac{9}{4} = \underbrace{x^2+2x+1}-1+\frac{9}{4} = (x+1)^2+\frac{5}{4} = (x+1)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$= -\sqrt{4x^2+8x+9}+\frac{7}{2}\underbrace{\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}}}_{\text{табличный интеграл}} =$$

$$= -\sqrt{4x^2+8x+9}+\frac{7}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+\frac{5}{4}}\right|+C$$

2.4 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Формула интегрирования по частям имеет вид

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

Применение этой формулы предполагает, что в правой части интеграл $\int v\,du$ может быть найден легче, чем исходный интеграл. Прежде всего надо установить какая функция принимается равной u и что относится к dv.

При нахождении интегралов вида

$$\int P_n(x)e^{ax}\,dx,\ \int P_n(x)\sin ax\,dx,\ \int P_n(x)\cos ax\,dx$$

принимаем $u = P_n(x)$ – многочлен степени n,

$$dv = \begin{cases} e^{ax}\,dx \\ \sin ax\,dx \\ \cos ax\,dx \end{cases}$$

Пример 2.16 Найти интеграл $\int x^2 \cdot \sin x\,dx$

Решение.

Так как $P_2(x) = x^2$ – многочлен второй степени, формулу интегрирования по частям надо применить последовательно два раза.

$$\int \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{\sin x\,dx}_{dv} = \left|\begin{matrix} x^2 = u,\ \ 2xdx = du \\ \sin xdx = dv,\ v = \int \sin xdx = -\cos x \end{matrix}\right| =$$

$$= -x^2\cos x + 2\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos xdx}_{dv} = \left|\begin{matrix} x = u,\ dx = du \\ \cos xdx = dv,\ \ v = \int \cos xdx = \sin x \end{matrix}\right| =$$

$$= -x^2\cos^2 x + 2\left[x\sin x - \int \sin x\,dx\right] = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

2 При нахождении интегралов вида

$$\boxed{\begin{matrix} \int P_n(x)\ln ax\,dx,\ \int P_n(x)\arcsin ax\,dx,\ \int P_n(x)\arccos ax\,dx, \\ \int P_n(x)\operatorname{arctg} ax\,dx,\ \int P_n(x)\operatorname{arcctg} ax\,dx. \end{matrix}}$$

принимаем $dv = P_n(x)dx$,

$$u = \begin{cases} \ln ax \\ \arcsin ax \\ \arccos ax \\ arctgax \\ arcctg\, ax \end{cases}$$

Пример 2.17 Найти интеграл $\int x arctgx dx$

Решение.

$$\int \underbrace{x arctgx}_{u} dx = \left| \begin{array}{l} u = arctgx,\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx,\ \ v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \frac{x^2}{2} arctg\, x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} arctg\, x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} arctg\, x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} arctg\, x + C$$

3 Интегралы, в которых двукратное применение формулы интегрирования по частям приводит к исходному интегралу

$$\boxed{\int e^{ax} \sin bx\, dx, \quad \int e^{ax} \cos bx\, dx}$$

Выбор u и dv в таких интегралах произволен.

Пример 2.18 Найти интеграл $\int e^x \sin x\, dx$

Решение.

$$J_1 = \int \underbrace{e^x}\underbrace{\sin x dx} = \left| \begin{array}{l} e^x = u,\ \ e^x dx = du \\ \sin x dx = dv,\ \ v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} e^x = u,\ \ e^x dx = du \\ dv = \cos x dx,\ \ v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= -e^x \cos x + \left[e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx \right] =$$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int \underbrace{e^x \sin x dx}_{J_1}$$

Получили равенство $J_1 = e^x(\sin x - \cos x) - J_1$. Перенесем последнее слагаемое $-J_1$ из правой части в левую, $2J_1 = e^x(\sin x - \cos x)$,

$$J_1 = \int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$

4 Интегралы от других видов функции

Рассмотрим нетрадиционное применение формулы интегрирования по частям на примере.

Пример 2.19 Найти интеграл $\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}$

Решение.

$$\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2} = \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}}_{dv} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \dfrac{x\,dx}{(1+x^2)^2} \\ V = \displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(1+x^2)^2} = \\ = -\dfrac{1}{2(1+x^2)} \end{array} \right| = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$$

2.5 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

2.5.1 Интегрирование простейших дробей

Рациональной дробью называется дробь вида $R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$, где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ – многочлены. Рациональная ***дробь*** называется ***правильной***, если степень $P_m(x)$ меньше степени $Q_n(x)$ **(m<n),** в противном случае $\mathbf{(m\geq n)}$ дробь называется ***неправильной.***

Дроби $\frac{x-4}{x^2+x-12}$ (m=1, n=2, m<n), $\frac{5}{x+6}$ (m=0, n=1, m<n) являются правильными, дроби $\frac{x^3}{3x^3-8}$ (m=3, n=3, m=n), $\frac{x^5-x^3+2}{x^2-1}$ (m=5, n=2, m>n) – неправильными.

Простейшими дробями I, II, III, IV типов называются правильные рациональные дроби следующего вида:

I. $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{x-a}}$;

II. $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{(x-a)^m}}$, где m – целое число, большее единицы;

III. $\frac{\mathbf{Ax+B}}{\mathbf{x^2+px+q}}$, где $D=\frac{p^2}{4}-q<0$, т.е. квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней;

IV. $\frac{\mathbf{Ax+B}}{\mathbf{\left(x^2+px+q\right)^n}}$, где n – целое число, большее единицы, и квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

Дроби I и II типов интегрируются с помощью подстановки **t=x-a** :

$$\int\frac{A}{x-a}dx=\left|\begin{matrix}t=x-a\\dt=dx\end{matrix}\right|=A\int\frac{dt}{t}=A\cdot\ln|t|+C=A\cdot\ln|x-a|+C;$$

$$\int\frac{A}{(x-a)^m}=\left|\begin{matrix}t=x-a\\dt=dx\end{matrix}\right|=A\int\frac{dt}{t^m}=A\cdot\int t^{-m}dt=A\cdot\frac{t^{-m+1}}{-m+1}+C=$$

$$=\frac{1}{1-m}\cdot\frac{A}{t^{m-1}}+C=\frac{1}{1-m}\cdot\frac{A}{(x-a)^{m-1}}+C$$

Пример 2.20 Найти интеграл $\int\frac{3}{x+8}dx$

Решение.

$$\int \frac{3}{x+8}dx = \left|\begin{matrix} x+8=t \\ dx=dt \end{matrix}\right| = 3\int \frac{dt}{t} = 3\ln|t| + C = 3\ln|x+8| + C$$

Пример 2.21 Найти интеграл $\int \frac{12}{(x-6)^5}dx$

Решение.

$$\int \frac{12}{(x-6)^5}dx = \left|\begin{matrix} x-6=t \\ dx=dt \end{matrix}\right| = 12\int \frac{dt}{t^5} = 12\int t^{-5}dt = 12\frac{t^{-4}}{-4} + C =$$

$$= -\frac{3}{t^4} + C = -\frac{3}{(x-6)^4} + C$$

Интегрирование простейшей дроби III вида было рассмотрено в 2.3. Напомним, что для этого нужно в числителе дроби выделить производную знаменателя и разложить полученный интеграл на сумму двух интегралов: тогда первый из них подстановкой $x^2 + px + q = t$ приведется к виду $\int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln\left(x^2 + px + q\right)$, а второй выделением полного квадрата в знаменателе – к виду $\int \frac{du}{u^2 + k^2} = \frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{u}{k}$.

Для интегрирования простейшей дроби IV типа в числителе дроби нужно записать производную квадратного трехчлена и разложить полученный интеграл на сумму двух интегралов. Первый из них подстановкой $x^2 + px + q = t$ приведется к виду $\int \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{(1-n)t^{n-1}}$, а второй имеет вид $\int \frac{dx}{\left(x^2 + px + q\right)^n}$. С помощью подстановки $x + \frac{p}{2} = u$ он преобразуется в интеграл вида $I_n = \int \frac{du}{\left(u^2 + a^2\right)^n}$, который интегрированием по частям можно свести к более простому интегралу $I_{n-1} = \int \frac{du}{\left(u^2 + a^2\right)^{n-1}}$ того же типа, но показатель в знаменателе уменьшается на единицу. При этом справедлива следующая рекуррентная формула:

$$I_n = \int \frac{du}{\left(u^2 + a^2\right)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)} \cdot \frac{u}{\left(u^2 + a^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$$

При большом n целесообразно применять эту формулу. Повторяя процесс (n-1) – раз, получим табличный интеграл $I_1 = \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a}$.

Пример 2.22 Найти интеграл $\int \frac{3x + 2}{\left(x^2 + 2x + 10\right)^2} dx$

Решение.

$$\int \frac{3x + 2}{\left(x^2 + 2x + 10\right)^2} dx = \left| \begin{array}{l} \left(x^2 + 2x + 10\right)' = 2x + 2 \\ 3x + 2 = \frac{3}{2}(2x + 2) - 3 + 2 = \frac{3}{2}(2x + 2) - 1 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{(2x + 2)dx}{\left(x^2 + 2x + 10\right)^2} - \int \frac{dx}{\left(x^2 + 2x + 10\right)^2} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x^2 + 2x + 10 = x^2 + 2x + 1 + 9 = \\ = (x + 1)^2 + 9 = (x + 1)^2 + 3^2 \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{В первом интеграле произведем замену } x^2 + 2x + 10 = z, \\ (2x + 2)dx = dz, \text{ а во втором положим } x + 1 = u, dx = du \end{array} \right| =$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{dz}{z^2} - \underbrace{\int \frac{du}{\left(u^2 + 3^2\right)^2}}_{I_2} = \frac{3}{2} \int z^{-2} dz - I_2 = -\frac{3}{2z} - I_2$$

Рассмотрим два способа вычисления интеграла I_2 от простейшей дроби четвертого типа.

1 способ

Применим рекуррентную формулу при n=2 и a=3:

$$I_2 = \int \frac{du}{\left(u^2 + 3^2\right)^2} = \frac{1}{2 \cdot 9(2 - 1)} \cdot \frac{u}{\left(u^2 + 3^2\right)^{2-1}} + \frac{1}{9} \cdot \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2 - 2} I_{2-1} =$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \frac{u}{u^2 + 9} + \frac{1}{18} \cdot I_1 = \frac{1}{18} \left(\frac{u}{u^2 + 9} + \int \frac{du}{u^2 + 3^2} \right) = \frac{1}{18} \left(\frac{u}{u^2 + 9} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{u}{3} \right) =$$

$$= \frac{1}{18} \left(\frac{x + 1}{(x + 1)^2 + 9} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{3} \right) = \frac{1}{18} \left(\frac{x + 1}{x^2 + 2x + 10} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{3} \right).$$

2 способ

Применим формулу интегрирования по частям, представив подынтегральное выражение интеграла I_2 в виде:

$$\frac{du}{\left(u^2+9\right)^2}=\frac{9}{9}\cdot\frac{du}{\left(u^2+9\right)^2}=\frac{1}{9}\frac{\left(9+u^2-u^2\right)du}{\left(u^2+9\right)^2}=\frac{1}{9}\cdot\frac{\left(9+u^2\right)du-u^2du}{\left(u^2+9\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{9}\left[\frac{\left(9+u^2\right)du}{\left(u^2+9\right)^2}-\frac{u^2du}{\left(u^2+9\right)^2}\right]=\frac{1}{9}\left[\frac{du}{u^2+9}-\frac{u^2du}{\left(u^2+9\right)^2}\right].$$

Тогда

$$I_2=\int\frac{du}{\left(u^2+9\right)^2}=\frac{1}{9}\left[\int\frac{du}{u^2+9}-\int\frac{u^2du}{\left(u^2+9\right)^2}\right]=\frac{1}{9}\left[\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{u}{3}-\int u\cdot\frac{u\cdot du}{\left(u^2+9\right)^2}\right]=$$

$$=\left|\begin{array}{ll}u_1=u & du_1=du\\ dv_1=\dfrac{udu}{\left(u^2+9\right)^2} & v_1=\displaystyle\int\frac{udu}{\left(u^2+9\right)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(u^2+9\right)}{\left(u^2+9\right)^2}=-\frac{1}{2\left(u^2+9\right)}\end{array}\right|=$$

|Применим формулу интегрирования по частям: $\int u_1dv_1=u_1v_1-\int v_1du_1$ |

$$=\frac{1}{9}\left[\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{u}{3}-\left(-\frac{u}{2\left(u^2+9\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+9}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{9}\left[\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{u}{3}+\frac{u}{2\left(u^2+9\right)}-\frac{1}{2\cdot3}\operatorname{arctg}\frac{u}{3}\right]=$$

$$=\frac{1}{9}\left[\frac{u}{2\left(u^2+9\right)}+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{u}{3}\right]=\frac{1}{18}\left(\frac{u}{\left(u^2+9\right)}+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{u}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{18}\left(\frac{x+1}{x^2+2x+10}+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}\right)$$

2.5.2 Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей. Интегрирование рациональных дробей

Для нахождения интеграла от рациональной дроби $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ следует прежде всего выделить из нее целую часть (если дробь неправильная), т.е. представить ее в виде $\frac{P_1(x)}{Q(x)}=M(x)+\frac{P(x)}{Q(x)}$, где M(x) – многочлен, а $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь. Если дробь $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ - правильная, то ее, как и дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, нужно разложить на простейшие дроби и проинтегрировать каждое слагаемое в отдельности.

Практическое правило разложения правильной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на простейшие дроби:

1 Разложить знаменатель Q(x) на линейные **x-a** и квадратичные множители x^2+px+q, не имеющие действительных корней, либо на множители, которые являются их степенями, т.е. на $\mathbf{(x-\alpha)^k}$, $\mathbf{\left(x^2+px+q\right)^m}$.

2 Записать разложение данной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на простейшие дроби с неопределенными (буквенными) коэффициентами, учитывая, что каждому сомножителю $(x-a)^k$ разложения Q(x) отвечает в разложении дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ выражение вида $\mathbf{\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}}$, а каждому сомножителю $\mathbf{\left(x^2+px+q\right)^m}$ - выражение вида

$$\mathbf{\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\cdots+\frac{B_mx+C_m}{\left(x^2+px+q\right)^m}}$$

1. Полученное равенство умножить на общий знаменатель.
2. Приравнять числители полученных дробей.
3. Раскрыть скобки, привести подобные члены и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x или, не раскрывая скобок, дать аргументу x столько различных значений, сколько имеется неопределенных коэффициентов, используя, прежде всего, корни знаменателя (метод частных подстановок).
4. Решить полученную систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов.

Пример 2.23 Найти интеграл $\int\frac{5-4x}{(x+1)(x-2)}dx$

Решение.

Представим подынтегральную дробь (она правильная) в виде суммы простейших дробей. Линейным множителям x+1 и x-2 знаменателя данной дроби отвечают соответственно дроби вида $\frac{A}{x+1}$ и $\frac{B}{x-2}$. Следовательно, $\frac{5-4x}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}$. Умножив обе части равенства на общий знаменатель, приходим к равенству

$$5-4x=A(x-2)+B(x+1) \qquad (*)$$

Коэффициенты A и B можно найти одним из двух способов.

1 способ Запишем предыдущее равенство (*) в виде

$$-4x+5=(A+B)x+(-2A+B)$$

Приравняем теперь коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{l|l} x & -4=A+B \\ x^0 & 5=-2A+B \end{array}.$$

Отсюда находим $A=-3,\ B=-1$, следовательно

$$\frac{5-4x}{(x+1)(x-2)}=-\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x-2}.$$

2 способ (метод частных подстановок). Полагая x=2 в тождестве (*), получим $5-4\cdot 2=3B \ \Rightarrow\ B=-1$. Полагая $x=-1$, получим

$5-4\cdot(-1)=-3A \ \Rightarrow\ A=-3$. Искомый интеграл сводится к интегрированию двух простейших дробей I типа:

$$\int\frac{5-4x}{(x+1)(x-2)}dx=-3\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{x-2}=-3\int\frac{d(x+1)}{x+1}-\int\frac{d(x-2)}{x-2}=$$

$$=-3\ln|x+1|-\ln|x-2|+C$$

Пример 2.24 Найти интеграл $\int\frac{x^2+6}{x(x-3)^2}dx$

Решение. Линейному множителю x знаменателя этой правильной дроби отвечает простейшая дробь I типа $\frac{A}{x}$, линейному множителю $(x-3)^2$ – сумма простейших дробей I и II типов $\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}$. Разложение дроби на простейшие имеет вид $\frac{x^2+6}{x(x-3)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}$. Освобождаясь от знаменателей, получаем $x^2+6=A(x-3)^2+Bx(x-3)+Cx$. Сравним коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 1=A+B \\ x & 0=-6A-3B+C \\ x^0 & 6=9A \end{array} \Rightarrow\ A=\frac{2}{3},\quad B=\frac{1}{3},\quad C=5.$$

Вычисляем интеграл:

$$\int \frac{x^2+6}{x(x-3)^2}dx = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-3} + 5\int \frac{dx}{(x-3)^2} =$$

$$= \frac{2}{3}\ln|x| + \frac{1}{3}\ln|x-3| - \frac{5}{x-3} + C.$$

Пример 2.25 Найти интеграл $\int \frac{2x\,dx}{(x+1)(x^2+1)^2}$

Решение.

Линейному множителю x+1 отвечает в разложении правильной дроби простейшая дробь I типа $\frac{A}{x+1}$, квадратичному множителю $(x^2+1)^2$, не имеющему действительных корней – сумма дробей III и IV типов $\frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$.

Разложение имеет вид

$$\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Освобождаясь от знаменателей, получим

$$2x = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x+1)(x^2+1) + (Dx+E)(x+1).$$

Приравниваем коэффициенты

$$\begin{array}{l|l} x^4 & A+B=0 \\ x^3 & C+B=0 \\ x^2 & 2A+B+C+D=0 \Rightarrow A=-\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{2},\ C=-\frac{1}{2},\ D=E=1, \\ x & C+B+E+D=2 \\ x^0 & A+C+E=0 \end{array}$$

$$\int \frac{2xdx}{(x+1)(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}dx + \int \frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} + \left(\frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right) +$$

$$+ C = \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{x-1}{2\left(x^2+1\right)} + C$$

Пример 2.26 Найти интеграл $\int \frac{6x^3 - 7x^2 + 3x - 1}{2x - 3x^2}dx$

Решение.

Подынтегральная дробь неправильная, выделим из нее целую часть, деля числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 - 7x^2 + 3x - 1 & -3x^2 + 2x \\ \underline{-\left(6x^3 - 4x^2\right)} & \underbrace{-2x + 1}_{\text{целая часть}} \\ -3x^2 + 3x - 1 & \\ \underline{-\left(-3x^2 + 2x\right)} & \\ \underbrace{x - 1}_{\text{числитель правильной дроби}} & \end{array} \quad \Rightarrow$$

$\frac{6x^3 - 7x^2 + 3x - 1}{2x - 3x^2} = -2x + 1 + \frac{x-1}{x(2-3x)}$. Последнюю дробь, как правильную разложим на сумму простейших дробей I и II типов

$$\frac{x-1}{x\left(\frac{2}{3} - x\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{\frac{2}{3} - x},\ x - 1 = A\left(\frac{2}{3} - x\right) + Bx$$

При $x = 0$ получаем $-1 = \frac{2}{3}A \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{3}{2}$,

при $x = \frac{2}{3}$ получаем $-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}B \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{2}$.

Тогда

$$\int \frac{6x^3 - 7x^2 + 3x - 1}{2x - 3x^2}dx = \int (-2x + 1)dx + \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\frac{2}{3} - x} \right) =$$

$$= -x^2 + x - \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{6}\int \frac{d\left(\frac{2}{3} - x\right)}{\frac{2}{3} - x} = -x^2 + x - \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{6}\ln\left|\frac{2}{3} - x\right| + C$$

2.6 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В параграфах 2.6.1. - 2.6.3. рассматриваются типы интегралов от тригонометрических функций, которые после элементарных преобразований сводятся к табличным интегралам.

2.6.1 Интегралы от функций $\sin mx \cdot \cos nx$, $\cos mx \cdot \cos nx$, $\sin mx \cdot \sin nx$.

Для нахождения интегралов от функции указанного вида применяются тригонометрические формулы:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

Пример 2.27 Найти интеграл $\int \sin 2x \cos 5x dx$

Решение.

$$\int \sin 2x \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int [\sin 7x + \sin(-3x)]dx = \frac{1}{2}\left[\int \sin 7x dx - \int \sin 3x dx\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{7}\int \sin 7x d(7x) - \frac{1}{3}\int \sin 3x d(3x)\right] = -\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{6}\cos 3x + C$$

2.6.2 Интегралы от функций $\sin^n x$, $\cos^n x$

Интегралы от четной степени синуса или косинуса $\int \sin^{2m} x dx$, $\int \cos^{2m} x dx$ можно найти путем понижения степени (вдвое) по следующим тригонометрическим формулам:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

Пример 2.28 Найти интеграл $\int \cos^4 x dx$

Решение.

Понизим степень подынтегральной функции:

$$\cos^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^2 = \frac{1}{4}(1+\cos 2x)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right) = \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right) =$$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)$, тогда

$$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\int dx+\int \cos 2x d(2x)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int \cos 4x d(4x)\right) = \frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$$

Интегралы от нечетной степени синуса или косинуса $\int \sin^{2m+1} x dx$, $\int \cos^{2m+1} x dx$ можно найти путем отделения от неё множителя $\sin x$ или $\cos x$ в первой степени и внесения его под знак дифференциала, т.е.

$$\sin^{2m+1} x dx = \sin^{2m} x \cdot \underbrace{\sin x dx}_{-d(\cos x)} = -(\sin^2 x)^m d(\cos x) = -(1-\cos^2 x)^m d(\cos x)$$

$$\cos^{2m+1} x dx = \cos^{2m} x \cdot \underbrace{\cos x dx}_{d(\sin x)} = (\cos^2 x)^m d(\sin x) = (1-\sin^2 x)^m d(\sin x)$$

Пример 2.29 Найти интеграл $\int \sin^5 x dx$

Решение.

Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\sin^5 x dx = \sin^4 x \cdot \underbrace{\sin x dx}_{-d(\cos x)} = -(\sin^2 x)^2 d(\cos x) = -(1-\cos^2 x)^2 d(\cos x) =$$

$$= -(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) d(\cos x).$$

Тогда

$$\int \sin^5 x\, dx = \int (\underbrace{2\cos^2}\, x - 1 - \cos^4 x) d(\cos x) = 2\int \underbrace{\cos^2 x d(\cos x)}_{t^2 \cdot dt} -$$

$$- \int \underbrace{d(\cos x)}_{dt} - \int \underbrace{\cos^4 x d}(\cos x) = \frac{2\cos^3 x}{3} - \cos x - \frac{\cos^5 x}{5} + C$$

2.6.3 Интегралы от функций $\sin^m x \cdot \cos^n x$ (m, n – целые числа)

Рассмотрим следующие случаи:

1. Один из показателей ***m*** или ***n*** – ***нечетное*** положительное число . В этом случае применяются подстановки

$\cos x = t$, если m - нечетное
$\sin x = t$, если n – нечетное

Пример 2.30 Найти интеграл $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$

Решение.

m=4, **n=5** – ***нечетное***, полагая $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$, получаем

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx = \int \sin^4 x \cdot \cos^4 x \cdot \underbrace{\cos x dx}_{d(\sin x)} = \int \sin^4 x \cdot (\cos^2 x)^2 d(\sin x) =$$

$$\int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) = \int t^4 (1 - t^2)^2 dt = \int t^4 dt - 2\int t^6 dt + \int t^8 dt =$$

$$= \frac{t^5}{5} - \frac{2t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + c = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9} + c$$

2. Оба показателя ***m*** и ***n*** – ***четные*** неотрицательные числа. Тогда следует преобразовать подынтегральную функцию с помощью тригонометрических формул:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Пример 2.31 Найти интеграл $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$

Решение.

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos^2 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx =$$

$$\int (\frac{\sin 2x}{2})^2 \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{8}[\int \sin^2 2x dx +$$

$$+ \int \sin^2 2x \underbrace{\cos 2x dx}_{\frac{1}{2}d(\sin 2x)}] = \frac{1}{8}[\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx + \frac{1}{2}\int \sin^2 2x d(\sin 2x)] =$$

$$= \frac{1}{16}[\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 4x d(4x) + \frac{\sin^3 2x}{3}] = \frac{1}{16}[x - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin^3 2x}{3}] + c$$

3. Показатели ***m*** и ***n*** – ***одинаковой четности*** (т.е. либо оба четные , либо оба нечетные), причем хотя бы один из них отрицателен. Здесь следует применять подстановку $\mathbf{tgx = t}$ или $\mathbf{ctg\,x = t}$. Если один из показателей – нечетное положительное число, то лучше использовать подстановку $\sin x = t$ (или $\cos x = t$).

Пример 2.32 Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$

Решение.

m=-3, n= - 1 – оба отрицательные нечетные, воспользуемся подстановкой $ctgx = t$ и формулой $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + ctg^2 x$:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^4 x \cos x} = \int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{dx}{\underbrace{\sin^2 x}_{-d(cthx)}} =$$

$$= -\int \left(1 + ctg^2 x\right) \cdot \frac{1}{ctgx} \cdot d(ctgx) = -\int \left(1 + t^2\right)\frac{1}{t} dt = -\int \left(\frac{1}{t} + t\right) dt = -\ln|t| - \frac{t^2}{2} + C =$$

$$= -\ln|ctgx| - \frac{ctg^2 x}{2} + C$$

4. Показатели ***m*** и ***n*** – числа ***различной четности***, причем нечетный показатель является отрицательными. При нахождении таких интегралов используются специальные приемы, один из которых рассмотрим в следующем примере.

Пример 2.33 Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^4 x}$

Решение.

Запишем единицу в числителе следующим образом:

$1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x$, тогда

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^4 x} = \int \frac{\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x}{\sin^3 x \cos^4 x} dx =$$

$$= \int \frac{\overbrace{\sin x\, dx}^{-d(\cos x)}}{\cos^4 x} + 2\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{3\cos^3 x} + 2\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos^2 x} dx +$$

$$+ \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x} dx = \frac{1}{3\cos^3 x} + 2\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x} + 2\int \frac{dx}{\sin x} + \int \frac{dx}{\sin x} + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx =$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{2}{\cos x} + 3\int \frac{dx}{\sin x} + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx =$$

$$= \left| \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx = \begin{vmatrix} u = \cos x, & du = -\sin x\, dx \\ dv = \frac{\cos x\, dx}{\sin^3 x}, & v = -\frac{1}{2\sin^2 x} \end{vmatrix} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x} \right| =$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{2}{\cos x} + 3\int \frac{dx}{\sin x} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x} =$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{2}{\cos x} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{2}{\cos x} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{5}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + c$$

В следующем параграфе рассматриваются интегралы от тригонометрических функций, которые с помощью подстановок сводятся к интегралам от рациональных функций

2.6.4 Интегралы от рациональной функции $R(\sin x, \cos x)$

Интегралы $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где R - рациональная функция, приводятся к интегралам от рациональных алгебраических функций с помощью соответствующих подстановок, приведенных в следующей таблице 2.2.

Таблица 2.2.

Четность, нечетность функции R относительно sin x, cos x	Подстановка	Используемые тригонометрические формулы
1.	$\cos x = t$ $-\sin x \cdot dx = dt$	

$R(-\sin x, \cos x) =$ $= -R(\sin x, \cos x)$		
2. $R(\sin x, -\cos x) =$ $= -R(\sin x, \cos x)$	$\sin x = t$ $\cos x \cdot dx = dt$	
3. $R(-\sin x, -\cos x) =$ $= R(\sin x, \cos x)$	$tgx = t$ $x = arctgt$ $dx = \frac{dt}{1+t^2}$	$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ $\sin x = \frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$
4. Случаи 1-3 не выполняются	Универсальная тригонометрическая подстановка $tg\frac{x}{2} = t$ $x = 2arctgt$ $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$	$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Универсальная подстановка используется и в случаях 1-3, но приводит к сложным вычислениям.

Пример 2.34 Найти интеграл $\int \frac{\sin^3 x}{4+\cos x} dx$

Решение.

$R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^3 x}{4+\cos x}$. Проверим четность, нечетность функции относительно $\sin x$:

$R(-\sin x, \cos x) = \frac{(-\sin x)^3}{4+\cos x} = -\frac{\sin^3 x}{4+\cos x} = -R(\sin x, \cos x)$, подынтегральная функция нечетна относительно синуса, тогда из первой строки таблицы следует целесообразность подстановки

$\cos x = t, \ -\sin x \cdot dx = dt$

$$\int \frac{\sin^3 x}{4+\cos x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{4+\cos x} \sin x \, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{4+\cos x} \underbrace{\sin x dx}_{-dt} = \int \frac{t^2-1}{t+4} dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \dfrac{t^2-1}{t+4} - \text{неправильная рациональная дробь} \\ \underline{-\ t^2-1 \qquad\quad \Big| \dfrac{t+4}{t-4}} \\ \underline{\quad t^2+4t} \\ \underline{-\ \quad -4t-1} \\ \quad\ \underline{-4t-16} \\ \qquad\ 15 \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(t-4+\frac{15}{t+4} \right) dt = \frac{t^2}{2} - 4t + 15\ln|t+4| + c =$$

$$= \frac{\cos^2 x}{2} - 4\cos x + 15\ln(\cos x + 4) + c$$

Пример 2.35 Найти интеграл $\int \frac{tgx}{1-ctg^2 x} dx$

Решение.

$R(\sin x,\ \cos x) = \dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x}}{1-\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)^2}$ является четной относительно sin x и cos x , тогда подстановка $tgx = t,\ x = arctgt,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

$$\int \frac{tgx}{1-ctg^2 x} dx = \int \frac{tg^3 x}{tg^2 x - 1} dx = \int \frac{t^3}{t^2-1} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^3 dt}{t^4-1} = \frac{1}{4}\int \frac{d(t^4-1)}{t^4-1} =$$

$$= \frac{1`}{4}\ln|t^4-1| + c = \frac{1}{4}\ln|tg^4 x - 1| + c$$

Пример 2.36 Найти интеграл $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$

Решение.

Так как функция $R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{3+5\cos x}$ не удовлетворяет пунктам 1-3 таблицы 2.2, воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой $tg\frac{x}{2} = t,\ x = 2arctgt,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x} = \int \frac{1}{3+5\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 2\int \frac{dt}{8-2t^2} = \int \underbrace{\frac{dt}{4-t^2}} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right| + c = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+2}{tg\frac{x}{2}-2}\right| + c$$

2.7 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Иррациональные функции интегрируются в элементарных функциях только в некоторых определенных случаях.

2.7.1 Сведение иррациональных функций к рациональным

1. Интегралы вида $\int \mathbf{R(x, x^{\alpha}, x^{\beta}, ..., x^{\omega})dx}$, где R – рациональная функция, $\alpha = \frac{m_1}{n_1}$, $\beta = \frac{m_2}{n_2}$, …, $\omega = \frac{m_k}{n_k}$ - дробные рациональные числа, сводятся к интегралам от рациональной функции с помощью подстановки $x = t^N$, где N – общий знаменатель дробей $\alpha, \beta, ..., \omega$

2. Интегралы более общего вида $\int \mathbf{R}\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\omega} \right] dx$, рационализируются подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d} = t^N$, где N – общий знаменатель дробей $\alpha, \beta, ..., \omega$.

Пример 2.37 Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{x}-2}{x(\sqrt[3]{x}+1)} dx$

Решение.

Здесь x входит в подынтегральную функцию с дробными показателями $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\beta = \frac{1}{3}$, общий знаменатель которых $N = 6$, следовательно, интеграл сводится к интегралу от дробно-рациональной функции подстановкой $x = t^6$, откуда $dx = 6t^5 dt$, $\sqrt{x} = \sqrt{t^6} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{t^6} = t^2$.

$$\int \frac{\sqrt{x}-2}{x(\sqrt[3]{x}+1)}dx = \int \frac{t^3-2}{t^6(t^2+1)}6t^5dt = 6\int \frac{t^3-2}{t(t^2+1)}dt =$$

Получили интеграл от неправильной рациональной дроби. Выделим целую часть и правильную дробь разложим на сумму простейших дробей

$$\begin{array}{r|l} t^3-2 & t^3+t \\ \underline{t^3+t} & 1 \\ -t-2 & \end{array} \qquad \frac{t+2}{t(t^2+1)} = \frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{A(t^2+1)+(Bt+C)t}{t(t^2+1)}$$

$$\begin{array}{l|l} t^2 & A+B=0 \;\Rightarrow B=-2 \\ t & C=1 \\ t^0 & A=2 \end{array}$$

$$= 6\int\left(1-\frac{t+2}{t\left(t^2+1\right)}dt\right) = 6\int\left(1-\frac{2}{t}-\frac{1-2t}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= 6\left(t-2\ln|t|-\int\frac{dt}{t^2+1}+\int\frac{2t\,dt}{t^2+1}\right) = 6\left(t-2\ln|t|-\operatorname{arctg}t+\ln\left(t^2+1\right)\right)+C =$$

$$= 6\left(\sqrt[6]{x}-2\ln\sqrt[6]{x}-\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+\ln\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\right)+C$$

Пример 2.38 Найти интеграл $\int\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}\cdot\frac{dx}{x}$

Решение.

Функция $\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{x-2}{x+2}$ входит в подынтегральную функцию с дробным показателем $\alpha=\frac{1}{2}$, знаменатель которой $N=2$, следовательно, подстановка $t^2=\frac{x-2}{x+2}$, откуда $x=\frac{2\left(1+t^2\right)}{1-t^2}$,

$$dx = 2\cdot\frac{\left(1+t^2\right)'\left(1-t^2\right)-\left(1+t^2\right)\left(1-t^2\right)'}{\left(1-t^2\right)^2}dt =$$

$$= 2\cdot\frac{2t\left(1-t^2\right)-\left(1+t^2\right)(-2t)}{\left(1-t^2\right)^2}dt = \frac{8t}{\left(1-t^2\right)^2}dt$$

.

Тогда $\int\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}\frac{dx}{x}=\int\frac{8t^2}{\left(1-t^2\right)^2}\cdot\frac{1-t^2}{2\left(1+t^2\right)}dt=4\int\frac{t^2\,dt}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}=J$

Получили интеграл от правильной рациональной дроби, который можно было бы разложить на сумму простейших дробей $\frac{A}{1-t}+\frac{B}{1+t}+\frac{Ct+D}{1+t^2}$. Но можно найти интеграл проще с помощью следующего искусственного приема,

$$\frac{t^2}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2t^2}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2+1+t^2-1}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(t^2+1\right)-\left(1-t^2\right)}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2+1}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}-\frac{1-t^2}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right).$$ Тогда

$$J=4\cdot\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=2\left(\int\frac{dt}{1-t^2}-\int\frac{dt}{1+t^2}\right)=2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-$$

$$-2\operatorname{arctg}t+C=\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}\right|-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}+C$$

2.7.2 Сведение иррациональных функций к тригонометрическим

В таблице 2.3 приведены интегралы от иррациональных функций и соответствующие подстановки, сводящие их к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций.

Таблица 2.3

Интеграл	**Подстановка**	Тригонометрические преобразования подынтегральной функции
1. $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$	$x=a\cdot\sin t$ $dx=a\cdot\cos t\,dt$	$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=$ $=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a\sqrt{\cos^2 t}=$ $=a\cos t$
2. $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$	$x=a\,tgt$ $dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt$	$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2tg^2t}=$ $=a\sqrt{1+tg^2t}=a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}=\frac{a}{\cos t}$

3. $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$	$x=\dfrac{a}{\sin t}$ $dx=-\dfrac{a\cos t}{\sin^2 t}dt$	$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\dfrac{a^2}{\sin^2 t}-a^2}=$ $=a\sqrt{\dfrac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}}=a\sqrt{\dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t}}=$ $=\dfrac{a\cos t}{\sin t}$

Пример 2.39 Найти интеграл $\int\dfrac{dx}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}$.

Решение.

Данный интеграл типа 1 из таблицы 2.3 Воспользуемся подстановкой $x=2\sin t,\ dx=2\cos t\,dt$, следовательно

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}=\int\frac{2\cos t\,dt}{\sqrt{\left(4-4\sin^2 t\right)^3}}=2\int\frac{\cos t\,dt}{\left(4\cos^2 t\right)^{3/2}}=2\int\frac{\cos t\,dt}{8\cos^3 t}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\cos^2 t}=$$

$$=\frac{1}{4}tgt+C.$$

Возвратимся к старой переменной x . Имеем

$tgt=\dfrac{\sin t}{\cos t}=\dfrac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}=\dfrac{x/2}{\sqrt{1-\left(x/2\right)^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, откуда окончательно находим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}=\frac{x}{4\sqrt{4-x^2}}+C.$$

Пример 2.40 Найти интеграл $\int\dfrac{\sqrt{x^2+16}}{x}dx$.

Решение.

Интеграл типа 2 из таблицы 2.3. Воспользуемся подстановкой $x=4tgt$, $dx=\dfrac{4dt}{\cos^2 t}$, следовательно

$$\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{16\,tg^2t+16}}{4\,tgt}\cdot\frac{4\,dt}{\cos^2 t} = \int \frac{4\sqrt{tg^2t+1}}{tg\,t}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t} =$$

$$= 4\int \frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}}{\frac{\sin t}{\cos t}}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t} = 4\int \frac{dt}{\sin t\cos^2 t} =$$

Введем в числителе «тригонометрическую единицу» $1=\sin^2 t+\cos^2 t$ и представим подынтегральную функцию в виде двух дробей

$$= 4\int \frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin t\cos^2 t}dt = 4\int \frac{\sin^2 t}{\sin t\cos^2 t}dt + 4\int \frac{\cos^2 t}{\sin t\cos^2 t}dt =$$

$$= 4\int \frac{\sin t\,dt}{\cos^2 t} + 4\int \frac{dt}{\sin t} = -4\int \frac{d(\cos t)}{\cos^2 t} + 4\int \frac{dt}{\sin t} = \frac{4}{\cos t} + 4\ln\left|tg\frac{t}{2}\right| + C$$

Возвращаясь к исходной переменной x, имеем

$$tgt = \frac{x}{4},\ \cos t = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2t}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{16}}} = \frac{4}{\sqrt{x^2+16}},$$

$$\sin t = \frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}},$$

$$tg\frac{t}{2} = \frac{\sin t}{1+\cos t} = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}\left(1+4/\sqrt{x^2+16}\right)} = \frac{x}{4+\sqrt{x^2+16}},$$ окончательно

$$\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x}dx = \sqrt{x^2+16} + 4\ln\left|\frac{x}{4+\sqrt{x^2+16}}\right| + C.$$

Пример 2.41 Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$

Решение.

Интеграл типа 3 из таблицы 2.3, сделаем подстановку $x = \frac{3}{\cos t}$,

$dx = \frac{3\sin t}{\cos^2 t}dt$, значит

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} = \int \frac{3\sin t}{\cos^2 t}\cdot\frac{\cos^3 t}{27}\cdot\frac{dt}{\sqrt{9/\cos^2 t - 9}} = \frac{1}{27}\int \sin t\cos t \frac{dt}{\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}} =$$

$$= \frac{1}{27}\int \sin t\cos t\cdot\sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}}dt = \frac{1}{27}\int \sin t\cos t\cdot\frac{\cos t}{\sin t}dt = \frac{1}{27}\int \cos^2 t\,dt =$$

$$= \left|\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\right| = \frac{1}{54}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{54}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C.$$

Т.к. $x = \frac{3}{\cos t}$, то $\cos t = \frac{3}{x}$, $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-\frac{9}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$,

$\sin 2t = 2\sin t\cos t = \frac{6\sqrt{x^2-9}}{x^2}$, $t = \arccos\frac{3}{x}$,то

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{54}\left(\arccos\frac{3}{x} + \frac{3\sqrt{x^2-9}}{x^2}\right) + C$$

2.7.3 Интегрирование дифференциальных биномов

Дифференциальным биномом называется выражение $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$,

где m, n, p – рациональные числа. Интеграл от дифференциального бинома $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ приводится к интегралу от рациональной функции в следующих трех случаях, приведенных в таблице 2.4

Таблица 2.4

Значения m, n, p	Подстановка
1. p – целое число	$x = t^q$, q – общий знаменатель дробей m и n
2. $\frac{m+1}{n}$ - целое число	$a+bx^n = t^r$, r – знаменатель дроби p
3. $\frac{m+1}{n}+p$ – целое число	$ax^{-n}+b = t^r$, r – знаменатель дроби p

Пример 2.42 Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2}$

Решение.

Дифференциальный бином имеет вид $x^{-1/6}\left(-1+x^{1/3}\right)^{-2}dx$, $m=-\frac{1}{6}$, $n=\frac{1}{3}$, $p=-2$ – целое число, т.е. имеет место первый случай интегрируемости. Выполним подстановку $x=t^6$, $dx=6t^5dt$. Тогда интеграл принимает вид

$$\int\frac{dx}{\sqrt[6]{x}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2}=\int\frac{6t^5dt}{t\left(t^2-1\right)^2}=6\int\frac{t^4dt}{\left(t^2-1\right)^2}=J.$$

После выделения целой части в полученной неправильной дроби имеем

$$J=6\int\left(1+\frac{2t^2-1}{\left(t^2-1\right)^2}\right)dt=6\left(t+\int\frac{2t^2-1}{\left(t^2-1\right)^2}dt\right).$$

Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей

$$\frac{2t^2-1}{\left(t^2-1\right)^2}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{(t-1)^2}+\frac{D}{(t+1)^2}$$

$$2t^2-1=A(t-1)(t+1)^2+B(t+1)(t-1)^2+C(t+1)^2+D(t-1)^2$$

После решения системы получим $A=\frac{3}{4}$, $B=-\frac{3}{4}$, $C=\frac{1}{4}$, $D=\frac{1}{4}$, тогда

$$J=6t+6\left(\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(t-1)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(t+1)^2}\right)=$$

$$=6t+\frac{3}{2}\left(3\ln|t-1|-3\ln|t+1|-\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)+C=6t+\frac{9}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{3t}{t^2-1}+C,$$

где $t=\sqrt[6]{x}$.

Пример 2.43 Найти интеграл $\int\sqrt{x}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}dx$

Решение.

Имеем $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{3}{4}$, $p=\frac{1}{3}$. Таким образом

$\frac{m+1}{n}=\frac{1/2+1}{3/4}=\frac{3/2}{3/4}=$ ***2 - целое число***, значит имеет место второй случай интегрируемости, следовательно применяем подстановку $1+x^{3/4}=t^3$, где $r=3$ – знаменатель дроби p, откуда $x=\left(t^3-1\right)^{4/3}$, $\sqrt{x}=\left(t^3-1\right)^{2/3}$,

$dx=\frac{4}{3}\left(t^3-1\right)^{1/3}3t^2\,dt=4t^2\left(t^3-1\right)^{1/3}dt$, интеграл имеет вид

$$\int \sqrt{x}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}\,dx = \int \left(t^3-1\right)^{2/3}\cdot \sqrt[3]{t^3}\cdot 4t^2\left(t^3-1\right)^{1/3} dt = 4\int \left(t^3-1\right)t^3\,dt =$$

$$= 4\int \left(t^6-t^3\right)dt = 4\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C = \frac{4}{7}t^7 - t^4 + C, \text{ где } t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}$$

Пример 2.44 Найти интеграл $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}dx$

Решение.

Здесь $m=-2,\ n=3,\ p=\frac{1}{3}$ и

$\frac{m+1}{n}+p=\frac{-2+1}{3}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=$ ***0 – целое число***. Имеет место третий случай интегрируемости, тогда полагаем $x^{-3}+1=t^3$, где $r=3$– знаменатель дроби p, откуда $-3x^{-4}dx=3t^2dt$, т.е. $x^{-4}dx=-t^2dt$. Преобразуем данный интеграл

$$\int x^{-2}(1+x^3)^{1/3}dx = \int x^{-2}\left[x^3(x^{-3}+1)\right]^{1/3}dx = \int x^{-1}(x^{-3}+1)^{1/3}dx =$$

$$= \int \underbrace{x^3\cdot x^{-4}}_{x^{-1}}\left(x^{-3}+1\right)^{1/3}dx = \int x^3\underbrace{\left(x^{-3}+1\right)^{1/3}}_{t^3}\underbrace{x^{-4}dx}_{-t^2dt} = -\int \left(t^3-1\right)^{-1}t\cdot t^2\,dt =$$

$$= -\int \frac{t^3dt}{t^3-1}dt = -\int \frac{t^3-1+1}{t^3-1}dt = -\int (1+\frac{1}{t^3-1})dt = \int (\frac{1}{1-t^3}-1)dt = J$$

Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей

$$\frac{1}{1-t^3}=\frac{1}{(1-t)(1+t+t^2)}=\frac{A}{1-t}+\frac{Bt+C}{1+t+t^2}$$

$$1=A(1+t+t^2)+(Bt+C)(1-t)$$

$$\begin{array}{l|l} t^2 & A-B=0 \quad\Rightarrow\quad A=B=\frac{1}{3} \\ t & A+B-C=0\Rightarrow A+A-1+A=0\Rightarrow A=\frac{1}{3} \\ t^0 & A+C=1\Rightarrow C=1-A=\frac{2}{3} \end{array}$$

Тогда

$$J=\int\left(\frac{t+2}{3(t^2+t+1)}+\frac{1}{3(1-t)}-1\right)dt=\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{2}(2t+1)+\frac{3}{2}}{t^2+t+1}dt-\frac{1}{3}\ln|1-t|-t+C=$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{(2t+1)dt}{t^2+t+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2\cdot\frac{t}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1} - \frac{1}{3}\ln|1-t| - t + C =$$

$$= \frac{1}{6}\ln(t^2+t+1) + \frac{1}{2}\int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{1}{3}\ln|1-t| - t + C =$$

$$= \frac{1}{6}\ln(t^2+t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\ln|1-t| - t + C, \text{ где } t = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$$

2.8 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определенные интегралы служат для вычисления различных величин. Суть общего метода вычисления этих величин заключается в следующем:

- искомая величина разбивается на большое число малых элементов;

- вычисляется приближенное значение (главная часть) каждого элемента и путем их суммирования находится приближенное значение всей искомой величины в виде интегральной суммы;

- находится предел этой интегральной суммы, который и дает точное значение искомой величины.

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y=f(x)$. Разделим отрезок $[a;b]$ на n частей произвольным образом точками: $a=x_0<x_1<\ldots$ $\ldots<x_{n-1}<x_n=b$. На каждом элементарном отрезке $[x_{i-1};x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i и вычислим значение функции $y=f(x)$ в этой точке, то есть $f(\xi_i)$. Вычислим произведения $f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ (где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$) для всех $i=1,2,\ldots,n$ и затем составляем сумму $S_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$, которая называется ***интегральной суммой*** для $y=f(x)$ на $[a;b]$. Обозначим через $\max|\Delta x_i|$ длину наибольшего частичного отрезка для данного разбиения и продолжим процесс разбиения отрезка $[a;b]$ так, чтобы $\max|\Delta x_i|\to 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 Если существует и конечен предел интегральной суммы S_n при $\max|\Delta x_i|\to 0$, не зависящий от ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$, ни

от выбора точек ξ_i, то этот предел называют определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на $[a;b]$ и обозначают следующим образом:

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx, \qquad (2.1)$$

где числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, $[a;b]$ - промежутком интегрирования, $f(x)-$ подынтегральной функцией, $x-$ переменной интегрирования.

Свойства определенного интеграла

1. При перестановке пределов интегрирования знак интеграла меняется на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \qquad (2.2)$$

2. Интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен 0:

$$\int_a^a f(x)dx = 0. \qquad (2.3)$$

3. Отрезок интегрирования можно разбить на части:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (2.4)$$

4. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot \int_a^b f(x)dx. \qquad (2.5)$$

5. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от этих функций:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \qquad (2.6)$$

Оценки определенного интеграла

1.

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx. \qquad (2.7)$$

2. Если на отрезке $[a;b]$ функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ удовлетворяют условию $f(x)\ge g(x)$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx. \qquad (2.8)$$

3. Если m и $M-$ наименьшее и наибольшее значения непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $y=f(x)$, то

$$m\cdot(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M\cdot(b-a). \qquad (2.9)$$

2.8.1 Вычисление определенного интеграла

Теорема 2.1 **(Формула Ньютона – Лейбница).** Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $F(x)-$ первообразная функции $f(x)$ на $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a). \qquad (2.10)$$

Теорема 2.2 **(Замена переменной).** Пусть дан определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)-$ непрерывная функция на отрезке $[a,b]$. Тогда, если функция $x=\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha;\beta]$ (здесь $\varphi(\alpha)=a;\ \varphi(\beta)=b$), то имеет место формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt. \qquad (2.11)$$

Теорема 2.3 **(Интегрирование по частям).** Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)-$ дифференцируемые функции на отрезке $[a;b]$, тогда

$$\int_a^b u(x)\cdot dv(x) = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\cdot du(x). \qquad (2.12)$$

Пример 2.45 Вычислить $\int_1^2 x\,dx$

Решение.

$$\int_1^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 2 - \frac{1}{2} = 1{,}5$$

Пример 2.46 Вычислить $\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$

Решение.

Выполним замену переменной: $x = R\cdot\sin t \Rightarrow$

$$\Rightarrow dx = d(R\cdot\sin t) = R\cdot d(\sin t) = R\cdot\cos t\cdot dt$$

Так как исходный интеграл вычисляется на отрезке $x\in[0;R]$, то при $x=0$, $R\cdot\sin t = 0 \Rightarrow t = 0$ и при $x = R,\ R\cdot\sin t = R \Rightarrow \sin t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$. Далее воспользуемся формулой (2.11):

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2\cdot\sin^2 t}\cdot R\cdot\cos t\cdot dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} R\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot R\cdot\cos t\,dt = R^2\cdot\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{R^2}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt = \frac{R^2}{2}\left(\int_0^{\pi/2} dt + \int_0^{\pi/2}\cos 2t\,dt\right) = \frac{R^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Пример 2.47 Вычислить $\int_1^e \frac{1+\ln x}{3x}\,dx$

Решение.

Выполним замену переменной $y = 1 + \ln x$. При $x = 1$ $y = 1 + \ln 1 = 1 + 0 = 1$; при $x = e$ $y = 1 + \ln e = 1 + 1 = 2$; из выражения $y = 1 + \ln x$ находим x и dx: $\ln x = y - 1 \Rightarrow x = e^{y-1}$, $dx = d\left(e^{y-1}\right) = = e^{y-1} \cdot dy$. Подставим в исходный интеграл:

$$\int_1^e \frac{1+\ln x}{3x}dx = \int_1^2 \frac{y}{3 \cdot e^{y-1}} \cdot e^{y-1}dy = \frac{1}{3}\int_1^2 y\,dy = \frac{1}{3}\left(\frac{y^2}{2}\Big|_1^2\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Пример 2.48 Вычислить $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$

Решение.

Применим формулу интегрирования по частям (2.12): $u(x) = x;\ dv(x) = \frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow du(x) = dx,\ v(x) = \operatorname{tg} x$. Итак, по формуле

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = x \cdot \operatorname{tg} x\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} - \int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{tg}x \cdot dx = \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \ln\cos x\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} =$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{3} - \frac{\pi}{4} + \ln\cos\frac{\pi}{3} - \ln\cos\frac{\pi}{4} = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4}\right) - \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 =$$

$$= \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\ln 2$$

Пример 2.49 Вычислить $\int_1^e \ln x \cdot dx$

Решение.

Применяя формулу (2.12), полагаем $u(x) = \ln x;$

$dv(x) = dx \Rightarrow du(x) = \frac{1}{x}dx;\ v(x) = x$

$$\int_1^e \ln x\,dx = x \cdot \ln x\Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x}dx = e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln 1 - x\Big|_1^e = e - e + 1 = 1.$$

Пример 2.50 Вычислить $\int_0^{\pi/6} e^{2x} \cdot \sin 3x\,dx = J$

Решение.

Используя формулу (2.12), полагаем: $u(x)=e^{2x}$;

$dv(x)=\sin 3x\,dx \Rightarrow du(x)=2\cdot e^{2x}\cdot dx;\ v(x)=-\frac{1}{3}\cos 3x;$

$$\int_0^{\pi/6} e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx=-\frac{1}{3}e^{2x}\cdot\cos 3x\Big|_0^{\pi/6}+\frac{2}{3}\int_0^{\pi/6} e^{2x}\cos 3x\,dx=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(e^{\pi/3}\cdot\cos\frac{\pi}{2}-e^{0}\cdot\cos 0\right)+\frac{2}{3}\int_0^{\pi/6} e^{2x}\cdot\cos 3x\,dx=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\int_0^{\pi/6} e^{2x}\cdot\cos 3xdx.$$

Получили интеграл, аналогичный исходному интегралу, поэтому вновь применяем формулу (2.12). Как и в первоначальном интеграле, полагаем $u(x)=e^{2x}$, $dv(x)=\cos 3x\,dx \Rightarrow du=2e^{2x}\,dx;\ v(x)=\frac{1}{3}\sin 3x$. Итак:

$$\int_0^{\pi/6} e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}e^{2x}\cdot\sin 3x\Big|_0^{\pi/6}-\frac{2}{3}\int_0^{\pi/6} e^{2x}\cdot\sin 3xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\left(e^{\frac{\pi}{3}}\cdot\sin\frac{\pi}{2}-e^{0}\cdot\sin 0-2\int_0^{\pi/6} e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx\right)=$$

$=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}e^{\pi/3}-\frac{4}{9}\int_0^{\pi/6} e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx$. В результате мы получим рекуррентную формулу для исходного интеграла, то есть $J=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}e^{\pi/3}-\frac{4}{9}J \Rightarrow$

$\Rightarrow\ J+\frac{4}{9}J=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}e^{\pi/3}\ \Rightarrow\ \frac{13}{9}J=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}e^{\pi/3}$, то есть $J=\frac{3}{13}+\frac{2}{13}e^{\pi/3}$.

Ответ: $\int_0^{\pi/6} e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx=\frac{3}{13}+\frac{2}{13}e^{\pi/3}$.

Пример 2.51 Вычислить $\int_0^{\pi/3}\frac{dx}{\cos^6 x}$.

Решение.

Применяя замену переменной: $y=tgx \Rightarrow$

$\Rightarrow dy=d(tg\,x)=\frac{1}{\cos^2 x}dx$. По формуле из школьной тригонометрии: $1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow\ \frac{1}{\cos^4 x}=(1+tg^2x)^2$. При $x=0\ \ y=tg0=0;$ при

$x = \frac{\pi}{3}$ $y = tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Подставляем в исходный интеграл:

$$\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^6 x} = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos^4 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 + y^2\right)^2 \cdot dy =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 + 2y^2 + y^4\right) dy = \left(y + \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \frac{9}{5}\sqrt{3} = 4{,}8\sqrt{3}.$$

Пример 2.52 Вычислить $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^5 x}{\cos^6 x} dx$

Решение.

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^4 x \cdot \sin x}{\cos^6 x} dx = -\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} d(\cos x) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ \cos^2 x = t^2 \\ 1 - t^2 = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x \end{array} \right| = -\int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{\left(1 - t^2\right)^2 dt}{t^6} =$$

$$= \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{1 - 2t^2 + t^4}{t^6} dt = \int_{\sqrt{2}/2}^1 \left(\frac{1}{t^6} - 2\frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^2} \right) dt = \int_{\sqrt{2}/2}^1 t^{-6} dt - 2\int_{\sqrt{2}/2}^1 t^{-4} dt + \int_{\sqrt{2}/2}^1 t^{-2} dt =$$

$$= \frac{t^{-5}}{-5}\Bigg|_{\sqrt{2}/2}^1 - 2\frac{t^{-3}}{-3}\Bigg|_{\sqrt{2}/2}^1 + \frac{t^{-1}}{-1}\Bigg|_{\sqrt{2}/2}^1 = -\frac{1}{5}\left(1 - \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^5\right) + \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^3\right) -$$

$$-\left(1 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{5}\left(1 - 4\sqrt{2}\right) + \frac{2}{3}\left(1 - 2\sqrt{2}\right) - \left(1 - \sqrt{2}\right) = -\frac{1}{5} + \frac{2}{3} - 1 + \frac{4}{5}\sqrt{2} -$$

$$-\frac{4}{3}\sqrt{2} + \sqrt{2} = -\frac{8}{15} + \frac{7}{15}\sqrt{2}.$$

2.9 НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 Интегралы с бесконечными пределами интегрирования или от разрывных на промежутке интегрирования функцией называются ***несобственными.***

2.9.1 Интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на промежутке $[a; +\infty)$. Тогда $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ называют несобственным интегралом от функции $f(x)$ в пределах от a до ∞ и обозначают $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$. Аналогично определяются несобственные интегралы для других бесконечных промежутков. Таким образом,

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (2.13)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (2.14)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)dx. \qquad (2.15)$$

Если указанные пределы существуют и конечны, то соответствующие несобственные интегралы называются ***сходящимися.*** В противном случае интегралы называются ***расходящимися.***

При исследовании несобственных интегралов на сходимость в ряде случаев могут быть полезными следующие признаки сходимости.

Признак сравнения. Если для всех $x \ge a$ выполняется неравенство $0 \le f(x) \le g(x)$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_0^{\infty} f(x)dx$, причем $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx \le \int\limits_a^{\infty} g(x)dx$. Из расходимости интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$.

Признак абсолютной сходимости. Если интеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$

В этом случае последний интеграл называется абсолютно сходящимся.

Пример 2.53 Исходя из определения несобственных интегралов с бесконечными пределами, установить, сходятся или расходятся следующие интегралы:

а) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$; б) $\int_0^{\infty} \sin x\,dx$; в) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; г) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$.

Решение.

а) По формуле (2.13) имеем:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{\ln x} \right)\Bigg|_2^{b} =$$

$= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}$. Поскольку мы получили число, то интеграл сходится.

б) По формуле (2.13) имеем:

$$\int_0^{\infty} \sin x\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \sin x\,dx = \lim_{b\to\infty} \left(-\cos x \big|_0^{b} \right) = \lim_{b\to\infty} (-\cos b + \cos 0) =$$

$= \lim_{b\to\infty} (1 - \cos b)$. Так как при $b \to \infty$ $\cos b$ предела не имеет, то по определению в этом случае интеграл расходится.

в) По формуле (2.15) представим данный интеграл как сумму двух несобственных интегралов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_a^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} + \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{0} \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} +$$

$$+ \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = \lim_{a\to-\infty} \left(\operatorname{arctg}(x+1)\big|_a^{0} \right) + \lim_{b\to\infty} \left(\operatorname{arctg}(x+1)\big|_0^{b} \right) =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} (\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(a+1)) + \lim_{b\to\infty} (\operatorname{arctg}(b+1) - \operatorname{arctg} 1) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg}(a+1) + \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg}(b+1) - \frac{\pi}{4} = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Следовательно, несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$ сходится.

г) Аналогично предыдущему случаю:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{2x\,dx}{x^2+1} + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}.$$

Рассмотрим каждый интеграл в отдельности:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{0} \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} = \lim_{a\to-\infty} \left(\ln\left(x^2+1\right)\Big|_{a}^{0} \right) =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left(\ln 1 - \ln\left(a^2+1\right)\right) = -\lim_{a\to-\infty} \ln\left(a^2+1\right) = -\infty;$$

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} \left(\ln\left(x^2+1\right)\Big|_{0}^{b} \right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\ln\left(b^2+1\right) - \ln 1\right) = \lim_{b\to\infty} \ln\left(b^2+1\right) = \infty.$$

Так как каждый из последних интегралов расходится, то и исходный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$ – расходится.

Пример 2.54 Используя признаки сходимости несобственных интегралов, исследовать на сходимость:

а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x} dx$; б) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x^{13}}{\left(x^5+x^3+1\right)^3} dx$; в) $\int\limits_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$.

Решение.

а) Для $x \geq 1$ имеем $\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x} > \frac{\ln x^2}{x} = \frac{2\ln x}{x}$.

Тогда $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x} dx > \int\limits_{1}^{\infty} \frac{2\ln x}{x} dx$

$$2\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx = 2\int\limits_{1}^{\infty} \ln x\, d(\ln x) = 2\lim_{b\to\infty} \int\limits_{1}^{b} \ln x\, d(\ln x) = \lim_{b\to\infty} \left(\ln^2 x\Big|_{1}^{b} \right) =$$

$= \lim\limits_{b\to\infty} \left(\ln^2 b - \ln^2 1\right) = \lim\limits_{b\to\infty} \ln^2 b = \infty$. Так как интеграл расходится, то интеграл от большей функции и подавно расходится

б) При $x \geq 1$ имеем $\frac{x^{13}}{\left(x^5+x^3+1\right)^3} < \frac{x^{13}}{\left(x^5\right)^3} = \frac{1}{x^2}$. Тогда $\int_1^{\infty} \frac{x^{13}}{\left(x^5+x^3+1\right)^3} dx < \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Исследуем на сходимость интеграл

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)_1^{b} = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1.$ Это значит, что больший интеграл сходится, тогда меньший интеграл и подавно сходится.

в) $\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$. Подынтегральная функция на промежутке $\left[\frac{\pi}{2};\infty\right)$ является знакопеременной, поэтому выясним сходимость $\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^2} dx$. Так как $|\sin x| \leq 1$, то $\frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ и тогда $\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^2} dx \leq \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

Больший интеграл $\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ – сходится (в этом не трудно убедиться, вычислив его по формуле (2.13)), значит меньший интеграл также сходится.

Тогда $\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ сходится абсолютно.

2.9.2 Интегралы от неограниченных функций

Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна при $x \in [a;b)$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x = b$, то есть $\lim_{x\to b} f(x) = \infty$, то по определению полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (2.16)$$

Аналогично определяются несобственные интегралы, если функция $y = f(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$ или в некоторой внутренней точке $x = c$, где $a < c < b$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx. \qquad (2.17)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_a^{C-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{C+\varepsilon_2}^b f(x)dx. \qquad (2.18)$$

Если указанные пределы существуют и конечны, то соответствующие им несобственные интегралы от разрывных функций называются ***сходящимися***, в противном случае – ***расходящимися.***

Для решения вопроса о сходимости несобственных интегралов от неограниченной функции обычно используются признаки сходимости, аналогичные признакам сходимости для несобственных интегралов с бесконечными пределами.

Пример 2.55 Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость: а) $\int_0^{\pi/2} \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot dx$; б) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$; в) $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$

Решение.

а) При $x=0$ подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв, так как при $x\to 0$ $y=\sin\frac{1}{x}-$ есть ограниченная функция, а $y=\frac{1}{x^2}\to\infty$. Произведение ограниченной функции на бесконечно-большую функцию есть бесконечно большая функция, значит $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}\right)=\infty$. Поэтому вычисляем интеграл по формуле (2.17)

$$\int_0^{\pi/2}\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{\pi/2}\sin\frac{1}{x}\cdot d\left(\frac{1}{x}\right) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\cos\frac{1}{x}\Big|_{0+\varepsilon}^{\pi/2}\right) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\cos\frac{2}{\pi}+\cos\frac{1}{\varepsilon}\right) = \cos\frac{2}{\pi}-\lim_{\varepsilon\to 0}\cos\frac{1}{\varepsilon}$$

Так как последний предел не существует, то исходный интеграл расходится.

б) Подынтегральная функция $y=\frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}}$ терпит бесконечный разрыв при $x=1$ и $x=3$, поэтому используем формулу (2.18):

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} + \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}.$$ Вместо точки $x=2$ можно было взять любую другую точку из интервала $(1;3)$

Выясним сходимость каждого из вновь полученных интегралов:

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d(x-2)}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\arcsin(x-2)\Big|_{1+\varepsilon}^2\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\arcsin 0 - \arcsin(1+\varepsilon-2)\right) = -\lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin(\varepsilon-1) = -\arcsin(-1) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_2^{3-\varepsilon} \frac{d(x-2)}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\arcsin(x-2)\Big|_2^{3-\varepsilon}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\arcsin(3-\varepsilon-2) - \arcsin 0\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin(1-\varepsilon) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

Итак, $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, то есть интеграл сходится.

в) Подынтегральная функция $y = \frac{1}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$ терпит бесконечный разрыв в точке $x=4$, которая является внутренней точкой интервала интегрирования $[2;6]$. По формуле (2.18):

$$\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} = \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} + \int_4^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} = -\lim_{\varepsilon_1\to 0} \int_2^{4-\varepsilon_1} (4-x)^{-\frac{2}{3}} d(4-x) -$$

$$-\lim_{\varepsilon_2\to 0} \int_{4+\varepsilon_2}^6 (4-x)^{-\frac{2}{3}} d(4-x) = -\lim_{\varepsilon_1\to 0} \left(\frac{(4-x)^{\frac{1}{3}}}{1/3}\Big|_2^{4-\varepsilon_1} \right) - \lim_{\varepsilon_2\to 0} \left(\frac{(4-x)^{\frac{1}{3}}}{1/3}\Big|_{4+\varepsilon_2}^6 \right) =$$

$$-3\lim_{\varepsilon_1\to 0} \left((\varepsilon_1)^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}} \right) - 3\lim_{\varepsilon_2\to 0} \left((-2)^{\frac{1}{3}} - (-\varepsilon_2)^{\frac{1}{3}} \right) = -3\left(-2^{\frac{1}{3}}\right) - 3\left(-2^{\frac{1}{3}}\right) =$$

$= 3\cdot 2^{\frac{1}{3}} + 3\cdot 2^{\frac{1}{3}} = 6\sqrt[3]{2}$, значит интеграл сходится

Пример 2.56 Исследовать на сходимость интегралы, используя признаки сравнения а) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2(x-5)}$; б) $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$.

Решение.

а) Подынтегральная функция $y = \frac{1}{x^2(x-5)}$ терпит бесконечный разрыв при $x = 0$ и $x = 5$. Но точка $x = 5$ не принадлежит отрезку интегрирования, а точка $x = 0$ является левой границей отрезка интегрирования. Перепишем интеграл в следующем виде:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2(x-5)} = \int_0^1 \frac{dx}{x^3 - 5x^2} = -\int_0^1 \frac{dx}{5x^2 - x^3}.$$

Для $x \in [0;1]$ $\quad 5x^2 - x^3 \geq 0$ и $5x^2 - x^3 \leq 5x^2$. Поэтому $\frac{1}{5x^2 - x^3} \geq \frac{1}{5x^2}$, тогда $\int_0^1 \frac{dx}{5x^2 - x^3} \geq \int_0^1 \frac{dx}{5x^2}$. Исследуем на сходимость меньший интеграл:

$$\frac{1}{5}\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{5}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 x^{-2}\,dx = \frac{1}{5}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-x^{-1}\Big|_{0+\varepsilon}^1\right) = \frac{1}{5}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty.$$

Итак, меньший интеграл расходится, значит больший интеграл и подавно расходится.

б) $\int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$. Для $x \in (0;1]$ имеет место следующее соотношение $\frac{\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$. Тогда $\int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}dx \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Исследуем на сходимость больший интеграл: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{x^{1/2}}{1/2}\Big|_{0+\varepsilon}^1\right) = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^1\right) = 2 - \lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{\varepsilon} = 2$, значит больший интеграл сходится, тогда меньший интеграл и подавно сходится. А отсюда вытекает, что исходный интеграл $\int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$ сходится абсолютно.

2.10 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

2.10.1 Вычисление площади плоской фигуры

Если на отрезке $[a;b]$ функция $y=f(x)$ непрерывна и положительна, то площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$, ограниченной сверху графиком этой функции, вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b y\,dx. \qquad (2.19)$$

Если на отрезке $[a;b]$ функция $y=f(x)$ непрерывна и отрицательна, то площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле

$$S=-\int_a^b f(x)dx=-\int_a^b y\,dx. \qquad (2.20)$$

Если непрерывная и положительная функция $x=\varphi(y)$ определена на отрезке $[c,d]$, то площадь криволинейной трапеции с основанием $[c,d]$ и ограниченной графиком функции $x=\varphi(y)$, вычисляется по формуле

$$S=\int_c^d \varphi(y)dy=\int_c^d x dy. \qquad (2.21)$$

Если площадь ограничена кривой, заданной в полярной системе координат уравнением $\rho=\rho(\varphi)$, и двумя лучами $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$, то площадь заданного криволинейного сектора вычисляется по формуле:

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi$$

Пример 2.57 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=2x+1$ и $y-x+1=0$.

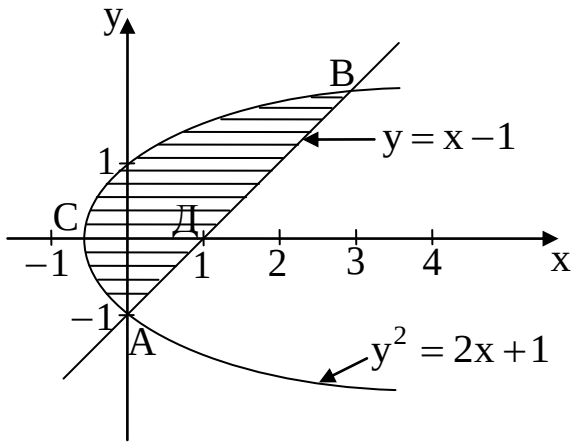


Рис. 2.1

Решение.

Вычислим координаты точек A и B, то есть точек пересечения графиков функций $y^2 = 2x + 1$ и $y = x - 1$. Подставим $x = y + 1$ из второго уравнения в первое уравнение: $y^2 = 2(y+1) + 1 = 2y + 3$ или $y^2 - 2y - 3 = 0$. Находим $y_1 = -1,\ y_2 = 3.$

Тогда $x_1 = -1 + 1 = 0;\ \ x_2 = 3 + 1 = 4.$

Получили $A(0;-1)$ и $B(4;3)$

Площадь нашей фигуры состоит из двух частей: одна находится в положительной полуплоскости относительно оси OX (это CBD), другая – в отрицательной (это CAD)

$$S_{CBD} = \int\limits_{-1/2}^{4} \sqrt{2x+1}\,dx - \int\limits_{1}^{4} (x-1)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{4} (2x+1)^{\frac{1}{2}}\,d(2x+1) -$$

$$-\int\limits_{1}^{4} (x-1)\,d(x-1) = \frac{1}{2}\left(\frac{(2x+1)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{-1/2}^{4} \right) - \frac{(x-1)^2}{2}\Bigg|_{1}^{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{9^{3/2}}{3/2} - 0 \right) - \left(\frac{3^2}{2} - 0 \right) =$$

$$= 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}.$$

$$S_{CAD} = \int\limits_{-1/2}^{0} \sqrt{2x+1}\,dx - \int\limits_{0}^{1} (x-1)\,dx = \frac{(2x+1)^{3/2}}{3}\Bigg|_{-1/2}^{0} - \frac{(x-1)^2}{2}\Bigg|_{0}^{1} =$$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$, тогда: $S_{CAD} = \frac{5}{6}$.

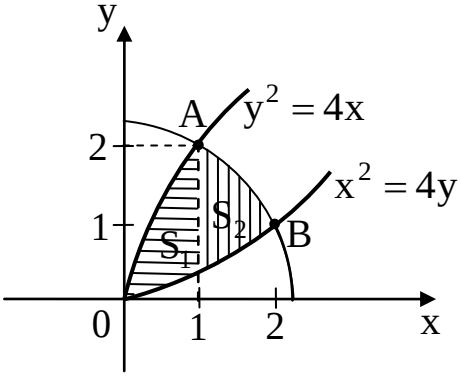


Рис. 2.2

Итак, искомая площадь

$$S = \frac{9}{2} + \frac{5}{6} = \frac{27+5}{6} = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}\ (\text{ед.}^2).$$

Пример 2.58 Вычислить площадь фигуры, лежащей в первой четверти и ограниченной кривыми $y^2 = 4x,\ x^2 = 4y,\ x^2 + y^2 = 5$

Решение.

Искомая площадь состоит из суммы двух площадей $S = S_1 + S_2$, изображенных на рис. 2.2. Найдем координаты точек пересечения графиков кривых, то есть точек A и B.

Точку A найдем, решив совместно уравнения $y^2 = 4x$ и $x^2 + y^2 = 5$. Из первого уравнения $y^2 = 4x$ подставим y^2 во второе уравнение $x^2 + y^2 - 5 = 0$. Получим квадратное уравнение $x^2 + 4x - 5 = 0$, которое имеет два действительных корня $x_1 = +1;\ x_2 = -5$. Наш корень $x = 1$, тогда $y = 2$. Итак $A(1;2)$. Аналогично, решая совместно уравнения $x^2 + y^2 = 5$ и $x^2 = 4y$, получим $B(2;1)$. Тогда

$$S_1 = \int_0^1 \sqrt{4x}\,dx - \int_0^1 \frac{x^2}{4}\,dx = 2\int_0^1 x^{1/2}\,dx - \frac{1}{4}\int_0^1 x^2 dx = \quad = \frac{4}{3}x^{3/2}\Big|_0^1 - \frac{1}{12}x^3\Big|_0^1 =$$

$$\frac{4}{3} - \frac{1}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4};$$

$$S_2 = \int_1^2 \sqrt{5 - x^2}\,dx - \int_1^2 \frac{x^2}{4}\,dx = \left|\begin{array}{l}\text{для первого итеграла сделаем}\\ \text{замену переменной}\\ x = 5\cos t;\ dx = 5d(\cos t) = -5\sin t\,dt\end{array}\right| =$$

$$= \int_{\arccos\frac{1}{5}}^{\arccos\frac{2}{5}} \sqrt{5}\cdot\sin t(-5\sin t\,dt) - \frac{1}{4}\frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = -5\sqrt{5}\int_{\arccos\frac{1}{5}}^{\arccos\frac{2}{5}} \sin^2 t\,dt - \frac{7}{12} =$$

$$= -\frac{5\sqrt{5}}{2}\int_{\arccos\frac{1}{5}}^{\arccos\frac{2}{5}} (1 - \cos 2t)dt - \frac{7}{12} = -\frac{5\sqrt{5}}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{\arccos\frac{1}{5}}^{\arccos\frac{2}{5}} - \frac{7}{12} =$$

$$= \frac{-5\sqrt{5}}{2}\left(\arccos\frac{2}{5} - \arccos\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\sin\left(2\arccos\frac{2}{5}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(2\arccos\frac{1}{5}\right)\right) - \frac{7}{12} =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{5}{2}\arcsin\frac{3}{5}\ (\text{ед.}^2).$$

Здесь воспользовались формулами: $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ и $\arcsin\alpha - \arcsin\beta = \arcsin\left(\alpha\sqrt{1-\beta^2} - \beta\sqrt{1-\alpha^2}\right)$.

Пример 2.59 Вычислить площадь фигуры ограниченной осью ординат,

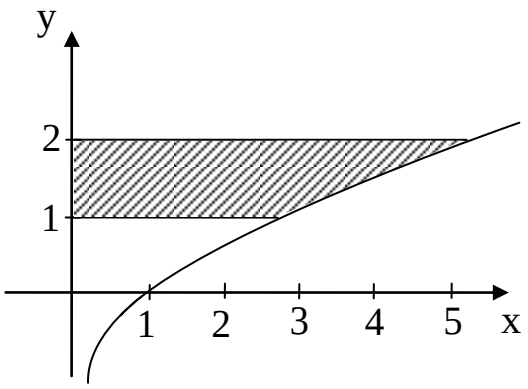


Рис. 2.3

кривой $y = \ln x$ и прямыми $y = 1,\ y = 2$.

Решение.

В данном случае целесообразно для вычисления площади воспользоваться не формулой (2.19), а следующей формулой: $S = \int_a^b \varphi(y)dy$. Для использования данной формулы, из функции $y = \ln x$ выразим x через y: $x = e^y$, тогда

$$S = \int_1^2 e^y dy = e^y\Big|_1^2 = e^2 - e^1 = e(e-1) \approx 4{,}68 \text{ (ед.}^2\text{)}$$

Пример 2.60 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной параметрическими уравнениями: $x = a \cdot \cos t;\ y = b \cdot \sin t$.

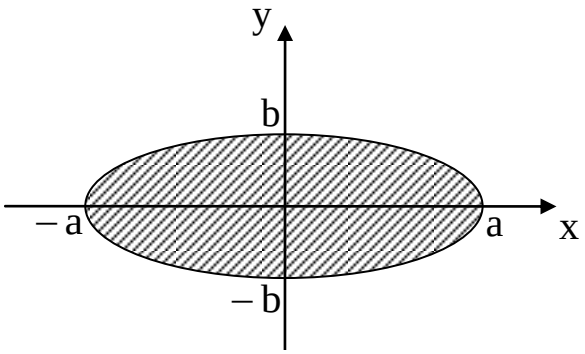


Рис. 2.4

Решение.

Данные уравнения задают эллипс с центром в начале координат (рис.2.4). Оси координат совпадают с осями симметрии эллипса и поэтому делят его на четыре одинаковые части. Поэтому найдем площадь S_1 части эллипса расположенную в первой четверти.

В формулу (2.19) подставим $y = b \cdot \sin t;\ \ dx = a \cdot d(\cos t) = -a \sin t dt$ и найдем границы интегрирования, поскольку $0 \le x \le a$, то при $x = a\ \ a \cdot \cos t = a$, $\cos t = 1$; значит $t = 0$. При $x = 0\ \ a \cdot \cos t = 0,\ \cos t = 0$; значит $t = \frac{\pi}{2}$.

$$S_1 = \int_0^a y\,dx = -\int_{\pi/2}^0 b\sin t \cdot a\sin t\,dt = ab\left(\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\,dt\right) =$$

$$= ab\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1-\cos 2t)dt = \frac{ab}{2}\int_0^{\pi/2} dt - \frac{ab}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2t dt =$$

$$= \frac{ab}{2}(t)\Big|_0^{\pi/2} - \frac{ab}{2}\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) - \frac{ab}{4}(\sin\pi - \sin 0) = \frac{\pi ab}{4}.$$

Итак, площадь всего эллипса $S = 4S_1 = 4\cdot\frac{\pi ab}{4} = \pi ab$ (ед.^{2})

Пример 2.61 Вычислить площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$

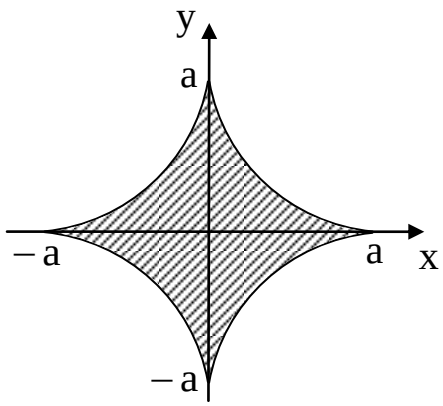


Рис. 2.5

Решение.

Для вычисления четверти (рис.2.5) искомой площади S_1 воспользуемся формулой (2.19), в которой перейдем к интегрированию по параметру t:

$$S_1 = \int_0^a y\,dx = \int_{\pi/2}^0 a\sin^3 t \cdot d(a\cos^3 t) =$$

$$= a^2\int_{\pi/2}^0 \sin^3 t \cdot 3\cos^2 t(-\sin t)dt =$$

$$= -3a^2\int_{\pi/2}^0 \sin^4 t\cdot\cos^2 t\,dt = 3a^2\int_0^{\pi/2} \sin^4 t\cdot\cos^2 t\,dt = \left|\begin{array}{l}\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\\ \sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos 2t)\end{array}\right| =$$

$$= 3a^2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}(1-\cos 2t)^2\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{3a^2}{8}\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos 2t-\cos^2 2t+\cos^3 2t\right)dt =$$

$$= \frac{3a^2}{8}\left(\int_0^{\pi/2}dt-\int_0^{\pi/2}\cos 2t\,dt-\int_0^{\pi/2}\cos^2 2t\,dt+\int_0^{\pi/2}\cos^3 2t\,dt\right) =$$

$$= \frac{3a^2}{8}\left(t\Big|_0^{\pi/2}-\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\pi/2}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 4t)dt+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 2t\,d(\sin 2t)\right) =$$

$$= \frac{3a^2}{8}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}t\Big|_0^{\pi/2}-\frac{1}{2}\frac{\sin 4t}{4}\Big|_0^{\pi/2}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(1-\sin^2 2t\right)d(\sin 2t)\right) =$$

$$= \frac{3a^2}{8}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}d(\sin 2t)-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,d(\sin 2t)\right) =$$

$$= \frac{3a^2}{8}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}-\frac{1}{2}\frac{\sin^3 2t}{3}\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{3a^2}{8}\cdot\frac{\pi}{4}$$

Итак: $S = 4S_1 = 4\cdot\frac{3a^2}{8}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi a^2}{8}$ (ед.^{2})

Пример 2.62 Вычислить площадь фигуры, ограниченную кардиоидой $\rho = a(1+\cos\varphi)$

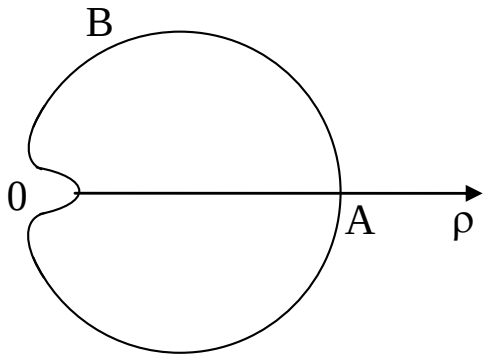


Рис. 2.6

Решение.

Кардиоида симметрична относительно полярной оси (рис. 2.6). Поэтому искомая площадь равна удвоенной площади криволинейного сектора OAB. Дуга ABO описывается при перемещении полярной оси из положения полярного угла $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$. Поэтому по формуле (2.21)

$$S = 2S_{OAB} = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\rho^2\,d\varphi = \int_0^{\pi}a^2(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi =$$

$$= a^2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi = a^2\left(\int_0^{\pi}d\varphi+2\int_0^{\pi}\cos\varphi d\varphi+\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\right) =$$

$$= a^2\left(\varphi\Big|_0^{\pi} + 2\sin\varphi\Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(1+\cos 2\varphi\right)d\varphi \right) = a^2\left(\pi + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} d\varphi + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\cos 2\varphi d\varphi \right) =$$

$$= a^2\left(\pi + \frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi} \right) = a^2\left(\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi a^2}{2}\ (\text{ед.}^2)$$

Пример 2.63 Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = a\cdot\cos 3\varphi$.

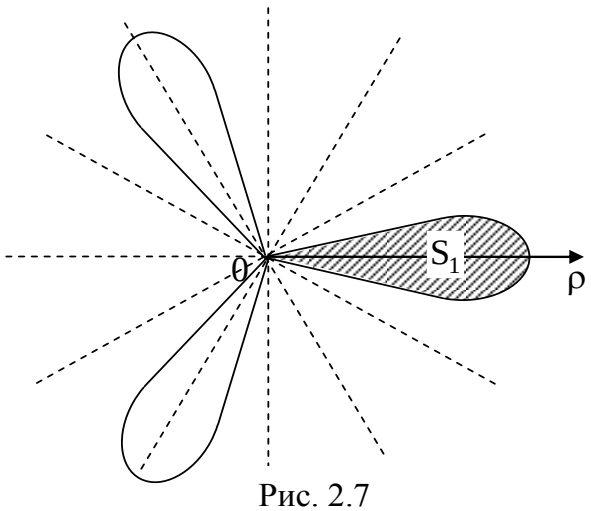


Рис. 2.7

Решение.

При повороте полярной оси от нулевого положения $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ графиком функции $\rho = a\cdot\cos 3\varphi$ является замкнутая кривая, состоящая из трех одинаковых лепестков (рис.2.7). Обозначим площадь, ограниченную одним лепестком S_1. Поэтому площадь фигуры, ограниченной всей линией $\rho = a\cdot\cos 3\varphi$, будет величина $S = 3S_1$. Чтобы найти площадь одного лепестка (а он получается при $-\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$), воспользуемся формулой (2.21):

$$S_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} a^2\cdot\cos^2 3\varphi\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6}\frac{1}{2}\left(1+\cos 6\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} d\varphi + \int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6}\cos 6\varphi\, d\varphi \right) = \frac{a^2}{4}\left(\varphi\Big|_{-\pi/6}^{\pi/6} + \frac{\sin 6\varphi}{6}\Big|_{-\pi/6}^{\pi/6} \right) = \quad = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi a^2}{12}.$$

Итак $S = 3S_1 = 3\cdot\frac{\pi a^2}{12} = \frac{\pi a^2}{4}\ (\text{ед.}^2)$

Пример 2.64 Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями $\rho = 2\sqrt{3}\,a\cdot\cos\varphi$ и $\rho = 2a\cdot\sin\varphi$

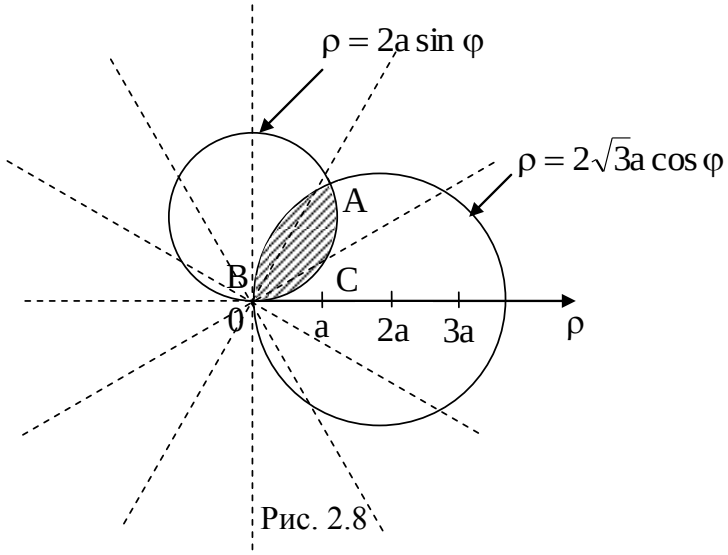


Рис. 2.8

Решение.

Найдем координаты точки A пересечения окружностей (рис.2.8). Для этого решим уравнение $2a\sin\varphi = 2\sqrt{3}a\cos\varphi$ или $\sin\varphi = \sqrt{3}\cos\varphi$. Разделив уравнение на $\cos\varphi$, получим $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 60^0 = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \rho\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2a\cdot\sin\frac{\pi}{3} = a\sqrt{3}$$

Искомая площадь S равна сумме площадей криволинейных секторов OAB и OCA: $S = S_{OAB} + S_{OCA}$

Дуга ABO описывается концом полярного радиуса ρ большей окружности при изменении полярного угла φ от $\dfrac{\pi}{3}$ до $\dfrac{\pi}{2}$, поэтому

$$S_{OBA} = \frac{1}{2}\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\rho^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\left(2\sqrt{3}a\cos\varphi\right)^2 d\varphi = 6a^2\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\cos^2\varphi\,d\varphi =$$

$$= 6a^2\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{1}{2}\left(1+\cos 2\varphi\right)d\varphi = 3a^2\left(\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}d\varphi + \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\cos 2\varphi\,d\varphi\right) =$$

$$= 3a^2\left(\varphi\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} + \frac{\sin 2\varphi}{2}\Big|_{\pi/3}^{\pi/2}\right) = 3a^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\left(\sin\pi - \sin\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 3a^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = a^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

Дуга OCA описывается концом полярного радиуса ρ меньшей окружности при изменении полярного угла φ от 0 до $\frac{\pi}{3}$, поэтому

$$S_{OCA} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \rho^2 \, d\varphi = 2a^2 \int_0^{\pi/3} \sin^2 \varphi d\varphi = 2a^2 \int_0^{\pi/3} \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)d\varphi =$$

$$= a^2\left(\int_0^{\pi/3} d\varphi - \int_0^{\pi/3} \cos 2\varphi \, d\varphi\right) = a^2\left(\varphi\Big|_0^{\pi/3} - \frac{\sin 2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/3}\right) =$$

$$= a^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = a^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

Следовательно, $S = a^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = a^2\left(\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right)$ (ед.^{2})

2.10.2 Вычисление длины дуги кривой

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$ и производная $f'(x)$ непрерывна, то

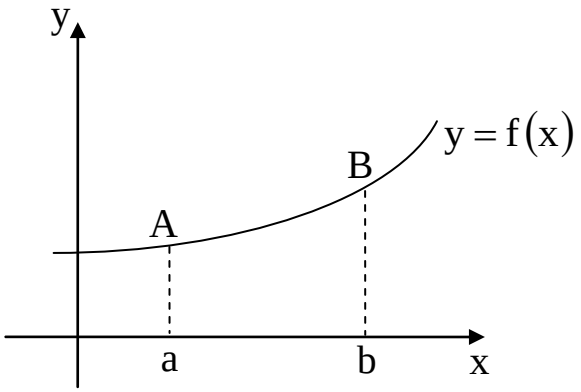


Рис. 2.9

длина L ее дуги от точки A до точки B (рис. 2.9) вычисляется по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx. \qquad (2.22)$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t);\ y = y(t)$ и производные $x'_t(y)$ и $y'_t(t)$ непрерывны на отрезке $[t_1; t_2]$, то длина дуги от точки A до точки B вычисляются по формуле

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} \cdot dt, \qquad (2.23)$$

где t_1 – решение уравнения $a = x(t)$; t_2 – решение уравнения $b = x(t)$.

Если кривая задана в полярных координатах (ρ, φ) уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, где $\rho(\varphi)$ – непрерывна вместе со своей производной $\rho'(\varphi)$ на отрезке $\varphi \in [\alpha; \beta]$, то длина L дуги кривой вычисляется по формуле

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} \cdot d\varphi, \qquad (2.24)$$

где α и β – значения полярного угла φ, соответствующие концам дуги AB.

Пример 2.65 Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$, заключенной внутри параболы $y^2 = \frac{x}{3}$ (рис. 2.10)

Решение.

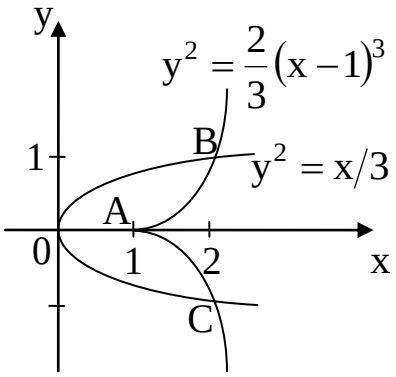


Рис. 2.10

Поскольку кривая $y^2 = \frac{x}{3}$ симметрична относительно оси $0X$, то искомая длина дуги $L_{BAC} = 2L_{AB}$. Вычислим координаты точек C и B. Решив уравнение $\frac{2}{3}(x-1)^3 = x/3$, найдем абсциссу: $2(x-1)^3 = x$ или $(x-1)^3 = \frac{x}{2}$, откуда $x = 2$. Ордината: $y^2 = \frac{2}{3}$ или $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Итак, $C\left(2; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$; $B\left(2; +\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Решив уравнение полукубической параболы $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$ относительно $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}(x-1)^{3/2}$, выберем $y = +\sqrt{\frac{2}{3}}(x-1)^{3/2}$ – это

значение соответствует дуге AB. Найдем производную $y' = f'(x) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{3}{2}(x-1)^{1/2}$. Итак, по формуле (2.22) находим

$$L_{AB} = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{3}{2}(x-1)} \cdot dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^2 \sqrt{3x-1}\, dx =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} \int_1^2 (3x-1)^{1/2} \cdot d(3x-1) = \frac{1}{3\sqrt{2}} \left. \frac{(3x-1)^{3/2}}{3/2} \right|_1^2 = \frac{2}{9\sqrt{2}} \left(5^{3/2} - 2^{3/2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{9}\left(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right) = \frac{\left(5\sqrt{10} - 4\right)}{9}. \text{ Окончательно } L_{BAC} = 2 \cdot \left(\frac{5\sqrt{10} - 4}{9} \right).$$

Пример 2.66 Вычислить длину дуги полукубической параболы $5y^3 = x^2$, заключенной внутри окружности $x^2 + y^2 = 6$ (рис.2.11).

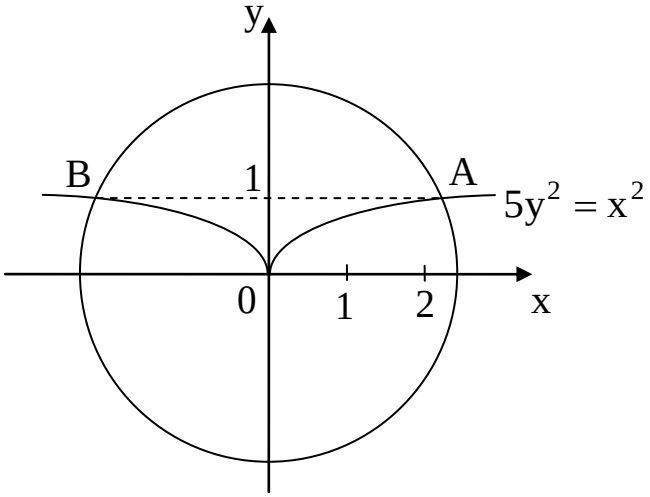


Рис. 2.11

Решение.

$L_{AOB} = 2L_{OA}$. Если уравнение параболы разрешить относительно y

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \cdot x^{2/3},$$

тогда производная

$$y' = f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{2}{3} x^{-1/3}$$

и выражение, которое получается под интегралом в формуле (2.22) не простое в смысле интегрируемости. В подобных случаях бывает удобнее принять за независимую переменную y и воспользоваться формулой $L = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + (x'(y))^2} \cdot dy$. Поэтому разрешим уравнение параболы относительно x: $x(y) = \sqrt{5} \cdot y^{3/2}$. Тогда $x'(y) = \sqrt{5} \cdot \frac{3}{2} y^{1/2}$. Чтобы найти верхний предел интегрирования y_2 – это ордината точек A и B – решим совместно уравнения $x^2 = 5y^3$ и $x^2 + y^2 = 6$. Из первого уравнения x^2 подставим во второе уравнение: $5y^3 + y^2 - 6 = 0$, получаем $y = 1$. Тогда

$$L=\int_0^1\sqrt{1+\left(\sqrt{5}\cdot\frac{3}{2}y^{1/2}\right)^2}\cdot dy=\int_0^1\sqrt{1+\frac{45}{4}y}\,dy=$$

$$=\frac{4}{45}\int_0^1\left(1+\frac{45}{4}y\right)^{1/2}\cdot d\left(\frac{45}{4}y+1\right)=\frac{4}{45}\left.\frac{\left(1+\frac{45}{4}y\right)^{3/2}}{3/2}\right|_0^1=\frac{8}{135}\left(1+\frac{45}{4}y\right)^{3/2}\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{8}{135}\left(\left(\frac{49}{4}\right)^{3/2}-1\right)=\frac{8}{135}\cdot\frac{335}{8}=\frac{67}{27}.$$ Окончательно $L_{AOB}=2\cdot\frac{67}{27}=\frac{134}{27}.$

Пример 2.67 Дана астроида $x=R\cdot\cos^3 t,\ y=R\cdot\sin^3 t$ и точки на ней $A(R;0),\ B(0;R)$. Найти на дуге AB такую точку M, чтобы длина дуги AM составляла четверть длины дуги AB.

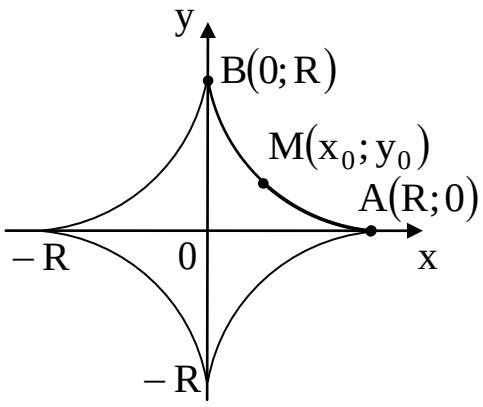


Рис. 2.12

Решение.

Координаты искомой точки были бы определены из уравнения астроиды, если бы было найдено значение параметра t, соответствующее этой точке $x_0=R\cdot\cos^3 t_0;\ y_0=R\cdot\sin^3 t_0$. Значение t_0 можно найти по формуле (2.23) из уравнения (*) $\ell_{AM}=\int_0^{t_0}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt$, если $\ell_{AM}=\frac{1}{4}\ell_{AB}$. Поэтому вначале необходимо вычислить длину дуги AB. Для вычисления подготовим:

$$x_t'=\left(R\cos^3 t\right)'=3R\cos^2 t\cdot(-\sin t);$$

$$y_t'=\left(R\sin^3 t\right)'=3R\sin^2 t\cdot\cos t.$$

По формуле (2.23):

$$\ell_{AB}=\int_0^{\pi/2}\sqrt{9R^2\cos^4 t\cdot\sin^2 t+9R^2\sin^4 t\cdot\cos^2 t}\,dt=$$

$$=3R\int_0^{\pi/2}\cos t\cdot\sin t\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=3R\int_0^{\pi/2}\frac{2\cos t\cdot\sin t\,dt}{2}=$$

$$= \frac{3R}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt = \frac{3R}{4}\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,d(2t) = \frac{3R}{4}(-\cos 2t)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$= \frac{3R}{4}(-\cos\pi + \cos 0) = \frac{3R}{2}$. Итак, $\ell_{AM} = \frac{1}{4}\ell_{AB} = \frac{1}{4}\cdot\frac{3R}{2} = \frac{3R}{8}$.

Подставим это значение в уравнение (*):

$$\frac{3R}{8} = \int_0^{t_0}\sqrt{9R^2\cos^4 t\cdot\sin^2 t + 9R^2\sin^4 t\cdot\cos^2 t}\cdot dt =$$

$$= 3R\int_0^{t_0}\cos t\cdot\sin t\,dt = \frac{3R}{2}\int_0^{t_0}\sin 2t\,dt = \frac{3R}{4}\int_0^{t_0}\sin 2t\,d(2t) = \frac{3R}{4}(-\cos 2t)\Big|_0^{t_0}.$$

$\frac{3R}{8} = \frac{3R}{4}(-\cos 2t_0 + \cos 0)$ или $\frac{1}{2} = -\cos 2t_0 + 1$. Отсюда $\cos 2t_0 = \frac{1}{2}$ или $2t_0 = \frac{\pi}{3};\ t_0 = \frac{\pi}{6}$. Итак, координаты точки M: $x_0 = R\cos^3\frac{\pi}{6} =$

$= R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3R\sqrt{3}}{8};\ y_0 = R\sin^3\frac{\pi}{6} = \frac{R}{8}$.

Пример 2.68 Найти длину линии $\rho = a\cdot\sin^3\frac{\varphi}{3}\ (a = \cos t;\ a > 0)$

Решение.

Поскольку $\rho \ge 0$, то допустимыми значениями φ являются те, при которых $a\sin^3\frac{\varphi}{3} \ge 0$ или $\sin\frac{\varphi}{3} \ge 0$, откуда $0 \le \frac{\varphi}{3} \le \pi$ или $0 \le \varphi \le 3\pi$. В интервале $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$ полярный радиус ρ (вместе с функцией $\sin\frac{\varphi}{3}$) возрастает от 0 до a (рис.2.13). В интервале $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$ ρ убывает от a до 0.

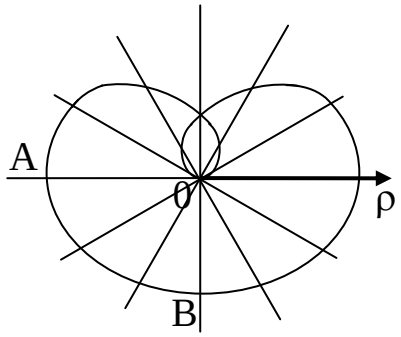


Рис. 2.13

Из уравнения кривой находим производную

$$\rho' = 3a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}\cdot\frac{1}{3} = a\cdot\sin^2\frac{\varphi}{3}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}.$$

Далее воспользовавшись формулой (2.24) вычислим половину длины дуги для $\varphi \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$:

$$\ell_{OAB} = \int_0^{3\pi/2} \sqrt{\left(a \cdot \sin^3 \frac{\varphi}{3}\right)^2 + \left(a \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cdot \cos \frac{\varphi}{3}\right)^2}\, d\varphi =$$

$$= a \int_0^{3\pi/2} \sqrt{\sin^6 \frac{\varphi}{3} + \sin^4 \frac{\varphi}{3} \cos^2 \frac{\varphi}{3}}\, d\varphi = a \int_0^{3\pi/2} \sin^2 \frac{\varphi}{3} \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi}{3} + \cos^2 \frac{\varphi}{3}}\, d\varphi =$$

$$= a \int_0^{3\pi/2} \sin^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi = \left| \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \right| = \frac{a}{2} \int_0^{3\pi/2} \left(1 - \cos \frac{2\varphi}{3}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{a}{2}\left(\int_0^{3\pi/2} d\varphi - \frac{3}{2} \int_0^{3\pi/2} \cos \frac{2\varphi}{3} d\left(\frac{2\varphi}{3}\right)\right) = \frac{a}{2}\left(\varphi\Big|_0^{3\pi/2} - \frac{3}{2} \sin \frac{2\varphi}{3}\Big|_0^{3\pi/2}\right) = \frac{3a\pi}{4}.$$

Тогда длина всей кривой $\ell = 2 \cdot \ell_{OAB} = \frac{3a\pi}{2}$

2.10.3 Вычисление координат центра тяжести

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$ при $x \in [a; b]$ и представляет собой материальную линию с линейной плотностью (масса единицы длины данной линии) ρ, тогда координаты центра тяжести дуги ℓ данной линии от точки $A(a; f(a))$ до точки $B(b; f(b))$ вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{\int_{(A)}^{(B)} \rho \cdot x \cdot d\ell}{\int_{(A)}^{(B)} \rho\, d\ell} = \frac{\int_a^b \rho \cdot x \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}{\int_a^b \rho \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}$$

$$y_c = \frac{\int_{(A)}^{(B)} \rho \cdot y \cdot d\ell}{\int_{(A)}^{(B)} \rho\, d\ell} = \frac{\int_a^b f(x) \rho \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}{\int_a^b \rho \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx} \qquad (2.25)$$

Здесь $\int_{(A)}^{(B)} \rho\, d\ell = \int_a^b \rho \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$ есть масса дуги ℓ от точки A до точки B.

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t)$, тогда формулы (2.25) принимает следующий вид. Поскольку $d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, из параметрических уравнений линии $dx = x'(t) \cdot dt$, $dy = y'(t) \cdot dt$, то $d\ell = \sqrt{(x'(t)dt)^2 + (y'(t)dt)^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \cdot dt$.

$$x_c = \frac{\int\limits_{(A)}^{(B)} \rho \cdot x \cdot d\ell}{\int\limits_{(A)}^{(B)} \rho\, d\ell} = \frac{\int\limits_{t_1}^{t_2} x(t)\rho \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt}{\int\limits_{t_1}^{t_2} \rho\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt}$$

$$y_c = \frac{\int\limits_{(A)}^{(B)} \rho \cdot y \cdot d\ell}{\int\limits_{(A)}^{(B)} \rho\, d\ell} = \frac{\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\rho \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt}{\int\limits_{t_1}^{t_2} \rho\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt} \qquad (2.26)$$

Пределы интегрирования t_1 и t_2 обычно даны в условиях задачи или при $x \in [a; b]$ находятся из уравнений $a = x(t_1)$ и $b = x(t_2)$.

Замечания Если материальная дуга является однородной, то формулы (2.25) и (2.26) упрощаются, так как $\rho = \text{const}$ выносится за знак интеграла и сокращается.

Для материальной однородной криволинейной трапеции, прилежащей к оси $0X$ координаты центра тяжести вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b x\, y\, dx}{\int\limits_a^b y\, dx}; \quad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2\, dx}{\int\limits_a^b y\, dx}. \qquad (2.27)$$

Пример 2.69 Определить координаты центра тяжести однородной пластины, ограниченной линией $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ и осями координат.

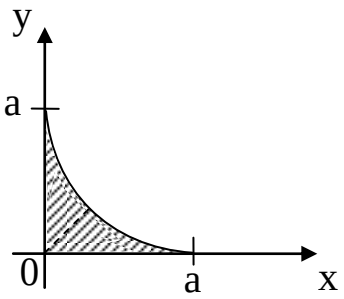


Рис. 2.14

Решение.

Данная пластина (рис.2.14) симметрична относительно биссектрисы первого координатного угла, поэтому $x_c = y_c$. По формулам (2.27):

$$x_c = \frac{\int\limits_0^a x\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 dx}{\int\limits_0^a \left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 dx} = \frac{\int\limits_0^a \left(ax - 2\sqrt{a}\,x\sqrt{x} + x^2\right)dx}{\int\limits_0^a \left(a - 2\sqrt{a}\,\sqrt{x} + x\right)dx} =$$

$$= \frac{\left(a\frac{x^2}{2} - \frac{2\sqrt{a}\,x^{5/2}}{5/2} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a}{\left(ax - 2\sqrt{a}\,\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^a} = \frac{\frac{a^3}{2} - \frac{4}{5}a^3 + \frac{a^3}{3}}{a^2 - \frac{4}{3}a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{\frac{a^3}{30}}{\frac{a^2}{6}} = \frac{a}{5}$$

Пример 2.70 Найти центр тяжести дуги окружности $x^2 + y^2 = R^2$ от т. $A(R;0)$ до т. $B(0;R)$, если в каждой ее точке линейная плотность пропорциональна произведению координат точки.

Решение.

Из уравнения окружности найдем y': $2x + 2y \cdot y' = 0$, тогда $y' = -\frac{x}{y}$.

Вычислим $d\ell = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{y}\right)^2}\,dx = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2}}\,dx =$

$= \sqrt{\frac{R^2}{y^2}}\,dx = \frac{R}{y}\,dx$. Подставим в формулы (2.25) и учтем, что $\rho = k \cdot x \cdot y$, где k – коэффициент пропорциональности:

$$x_c = \frac{\int_0^R (k\,x\,y)\cdot x\cdot \frac{R}{y}\,dx}{\int_0^R (k\cdot x\,y)\cdot \frac{R}{y}\,dx} = \frac{k\,R\int_0^R x^2\,dx}{k\,R\int_0^R x\,dx} = \frac{\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^R}{\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^R} = \frac{2}{3}\frac{R^3}{R^2} = \frac{2}{3}R$$

$$y_c = \frac{\int_0^R (k\,x\,y)\cdot y\cdot \frac{R}{y}\,dx}{\int_0^R (k\cdot x\,y)\cdot \frac{R}{y}\,dx} = \frac{k\,R\int_0^R x\cdot\sqrt{R^2-x^2}\,dx}{k\,R\int_0^R x\,dx} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\int_0^R \left(R^2-x^2\right)^{1/2} d\left(R^2-x^2\right)}{\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^R} = -\frac{\left.\frac{\left(R^2-x^2\right)^{3/2}}{3/2}\right|_0^R}{R^2} = -\frac{2}{3R^2}\left(0-R^3\right) = \frac{2}{3}R$$

Данная точка не лежит на дуге и находится ниже ее (рис.2.15).

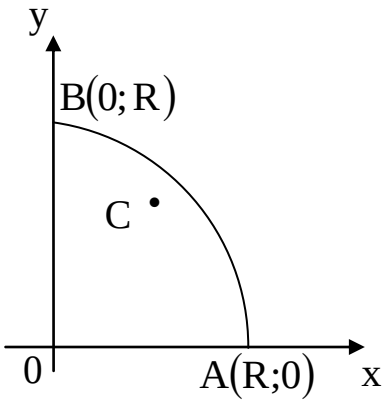


Рис. 2.15

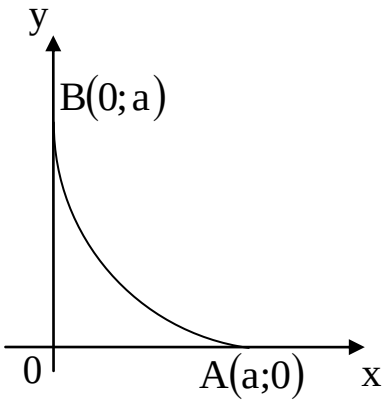


Рис. 2.16

Пример 2.71 Найти центр тяжести дуги астроиды $x = a\cos^3 t \quad y = a\sin^3 t$, расположенной в первом квадранте (рис. 2.16), если линейная плотность в каждой ее точке пропорциональна абсциссе точки, т.е. $\rho = k\cdot x$.

Решение.

Подготовим вначале $d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} =$

$$= \sqrt{\left(-3a\cos^2 t\cdot\sin t\right)^2 + \left(3a\sin^2 t\cdot\cos t\right)^2}\cdot dt = 3a\sin t\cdot\cos t\cdot dt.$$

По формулам (2.19):

$$y_c = \frac{\int\limits_{(A)}^{(B)} k \cdot a\sin^3 t \cdot a\sin^3 t \cdot 3a\sin t \cdot \cos t\, dt}{\int\limits_{(A)}^{(B)} k \cdot a\sin^3 t \cdot 3a\sin t \cdot \cos t \cdot dt} = \frac{3k \cdot a^3 \int\limits_0^{\pi/2} \sin^7 t\, d(\sin t)}{3k \cdot a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 t\, d(\sin t)} =$$

$$= a\,\frac{\frac{1}{8}\sin^8 t\Big|_0^{\pi/2}}{\frac{1}{5}\sin^5 t\Big|_0^{\pi/2}} = \frac{5}{8}a$$

$$x_c = \frac{\int\limits_{(A)}^{(B)} k \cdot a\sin^3 t \cdot a\cos^3 t \cdot 3a\sin t \cdot \cos t\, dt}{\int\limits_{(A)}^{(B)} k \cdot a\sin^3 t \cdot 3a\sin t \cdot \cos t \cdot dt} = \frac{3k \cdot a^3 \int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 t \cdot \cos^4 t\, dt}{3k \cdot a^2 \cdot \frac{1}{5}} =$$

$$= 5a\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{2\sin t \cdot \cos t}{2}\right)^4 dt = \frac{5a}{16}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^4 2t\, dt = \frac{5a}{16}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos 4t}{2}\right)^2 dt =$$

$$= \frac{5a}{64}\int\limits_0^{\pi/2}\left(1-2\cos 4t+\cos^2 4t\right)dt = \frac{5a}{64}\left(t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\sin 4t\Big|_0^{\pi/2} + \int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 4t\, dt\right) =$$

$$= \frac{5a}{64}\left(\frac{\pi}{2} + \int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 8t}{2}\right)dt\right) = \frac{5a}{64}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}t\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{16}\sin 8t\Big|_0^{\pi/2}\right) =$$

$$= \frac{5a}{64}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5a}{64}\cdot\frac{3\pi}{4} = \frac{15a\pi}{256}$$

2.10.4 Вычисление объема тела вращения

Если тело образуется при вращении вокруг оси $0X$ криволинейной трапеции $aABb$, прилежащей к оси $0X$ (рис.2.17), то объем полученного тела V_{0X} вычисляется по формуле

$$V_{0X} = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx \qquad (a < b). \tag{2.28}$$

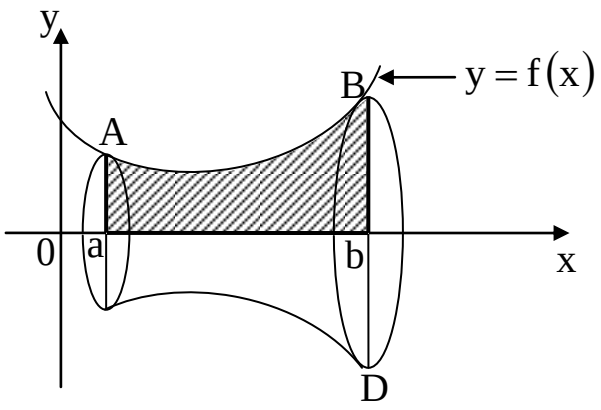


Рис. 2.17

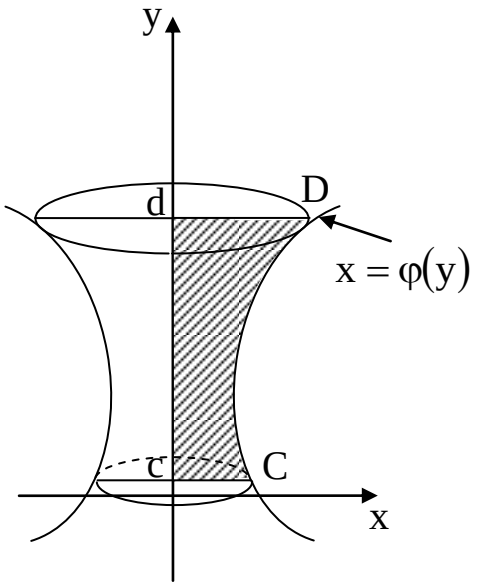


Рис. 2.18

Если тело образуется при вращении вокруг оси $0Y$ криволинейной трапеции $dDCc$ (см. рис.), прилежащей к оси $0Y$ (рис.2.18), то объем полученного тела V_{0Y} вычисляется по формуле

$$V_{0Y} = \pi\int_c^d \varphi^2(y)dy \qquad (c < d). \qquad (2.29)$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями или в полярных координатах, то следует сделать соответствующую замену переменной в указанных формулах. Подробнее эти случаи рассмотрим в упражнениях.

Пример 2.72 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2x$, $y = 3 - x^2$, $x = 0$.

Решение.

Объемное тело (рис. 2.19) образуется вращением криволинейного сектора OAB вокруг оси Oy. Решая совместно уравнения $y = 2x$ и $y = 3 - x^2$ найдем координаты точки $A(1;2)$.

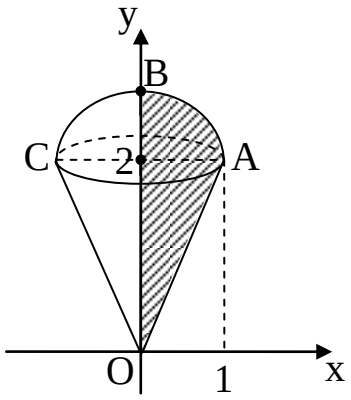


Рис. 2.19

Полагая $x = 0$ в уравнении $y = 3 - x^2$ найдем координаты точки $B(0;3)$.

Так как граница OAB дана двумя уравнениями $x = \frac{y}{2}$, где $0 \le y \le 2$ и $x = \sqrt{3-y}$, где $2 \le y \le 3$, то объем V всего тела равен сумме объемов $V_1 + V_2$, где V_1

- объем конуса OAC, V_2 - объем параболического сегмента ABC. Объем каждого из них вычислим по формуле (2.29).

Имеем:

$$V_1 = \pi\int_0^2\left(\frac{y}{2}\right)^2 dy = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2\pi}{3},$$

$$V_2 = \pi\int_2^3\left(\sqrt{3-y}\right)^2 dy = \pi\int_2^3(3-y)dy = \pi\left(3y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_2^3 = \frac{9\pi}{2}-4 = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда $V = V_1 + V_2 = \frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{6}$.

Пример 2.73 Вычислить объем тела (рис. 2.20), образованного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями: $y^2 = 2px$ и $x = a$ вокруг оси $0X$.

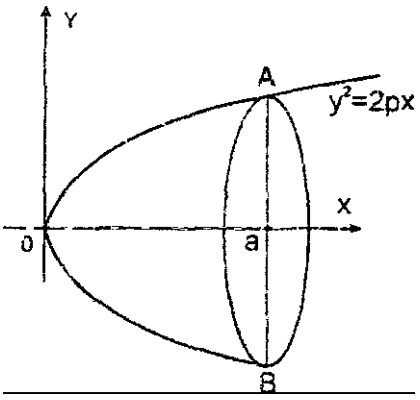


Рис. 2.20

Решение.

Построив параболу $y^2 = 2px$ и прямую $x = a$, получим параболический сегмент OAB. При вращении его вокруг оси $0X$ образуется часть параболоида вращения. Объем этого тела найдем по формуле (2.28)

$$V_{0X} = \pi\int_a^b f^2(x)dx = \pi\int_0^a 2px\,dx = 2p\pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^a = p\pi a^2$$

Пример 2.74 Вычислить объем тела (рис. 2.21), образованного вращением астроиды $x = a\cdot\cos^3 t;\ y = a\cdot\sin^3 t$ вокруг оси $0X$.

Решение.

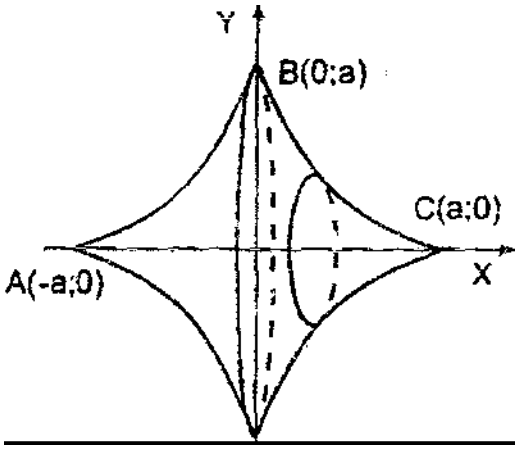


Рис. 2.21

Для вычисления объема воспользуемся формулой (2.28):

$$V_{0X} = \pi\int_a^b f^2(x)dx = 2\pi\int_0^a y^2\,dx =$$

$$= 2\pi\int_{\pi/2}^0\left(a\cdot\sin^3 t\right)^2 d\left(a\cos^3 t\right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{замена переменной :} \\ z = \cos t; \\ \sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - z^2 \end{array} \right| = 2\pi a^3 \int_0^1 \left(1 - z^2\right)^3 d\, z^3 = 2\pi a^3 \int_0^1 \left(1 - z^2\right)^3 3z^2\, dz =$$

$$= 2\pi a^3 \int_0^1 \left(1 - 3z^2 + 3z^4 - z^6\right) \cdot 3z^2\, dz = 6\pi a^3 \int_0^1 \left(z^2 - 3z^4 + 3z^6 - z^8\right) dz =$$

$$= 6\pi a^3 \left(\frac{z^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{3z^5}{5}\Big|_0^1 + \frac{3z^7}{7}\Big|_0^1 - \frac{z^9}{9}\Big|_0^1 \right) = 6\pi a^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9} \right) = \frac{32}{105} \pi a^3 (\text{ед}^3)$$

Пример 2.75 Одна арка циклоиды $x = a(t - \sin t);\ y = a(1 - \cos t)$ вращается вокруг своего основания (оси $0X$). Вычислить объем тела (рис.2.22), полученного в результате вращения.

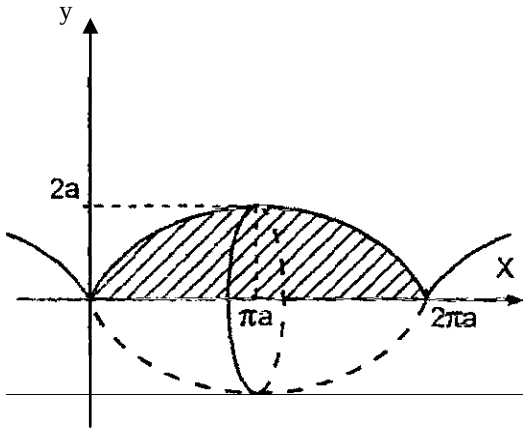


Рис. 2.22

Решение.

По формуле (2.28) имеем $V_{0X} = \pi \int_0^{2\pi a} y^2\, dx$. При переходе к переменной t меняются пределы интегрирования:

при $x = 0$ $a(t - \sin t) = 0$ или $t = \sin t$, т.е. $t = 0$;

при $x = 2\pi a$ $2\pi a = a(t - \sin t)$ или $2\pi + \sin t = t$, то есть $t = 2\pi$.

Итак,

$$V_{0X} = \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2\, d(a(t - \sin t)) =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \cdot (1 - \cos t) dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3\, dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right) dt = \pi a^3 \left(t\Big|_0^{2\pi} - 3\sin t\Big|_0^{2\pi} + 3\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt - \right.$$

$$-\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,d(\sin t)\Big)=\pi a^3\left(2\pi+\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt-\int_0^{2\pi}(1-\sin^2 t)d(\sin t)\right)=$$

$$=\pi a^3\left(2\pi+\frac{3}{2}t\Big|_0^{2\pi}+\frac{3}{4}\sin 2t\Big|_0^{2\pi}-\sin t\Big|_0^{2\pi}+\frac{\sin^3 t}{3}\Big|_0^{2\pi}\right)==\pi a^3(2\pi+3\pi)=5\pi^2 a^3$$

2.10.5 Вычисление площади поверхности вращения

Если поверхность образуется при вращении дуги AB, где $A(a;c)$, $B(b;d)$ плоской кривой $y=f(x)$ вокруг оси $0X$ (см.2.23), то дифференциал площади этой поверхности равен площади боковой поверхности усеченного кругового конуса с образующей $d\ell$ и с основаниями, у которых радиусы $r_1=y$ и $r_2=y+\Delta y$

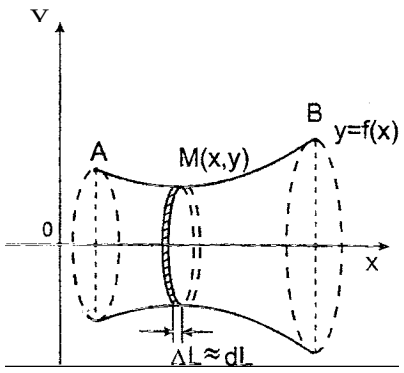


Рис. 2.23

Из школьной программы известно, что боковая поверхность усеченного конуса вычисляется по формуле: $S_б=\frac{2\pi r_1+2\pi r_2}{2}\cdot d\ell$, где $\ell-$ образующая конуса.

Итак, $dS=\frac{2\pi y+2\pi(y+\Delta y)}{2}\cdot d\ell=\pi(2y+\Delta y)\cdot d\ell\approx 2\pi y\cdot d\ell$, здесь $d\ell-$ дифференциал дуги кривой. Итак,

$$S=\int_{(A)}^{(B)}2\pi y\,d\ell=2\pi\int_{(A)}^{(B)}y\,d\ell=2\pi\int_{(A)}^{(B)}f(x)d\ell=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx. \qquad (2.30)$$

Если поверхность образуется при вращении дуги AB плоской кривой $x=\varphi(y)$ вокруг оси $0Y$, тогда рассуждая аналогично выше изложенному: $r_1=x;\ r_2=x+\Delta x;$

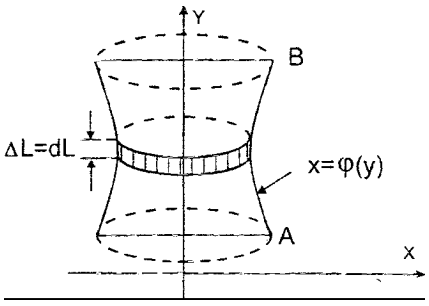


Рис. 2.24

$$dS=\frac{2\pi x+2\pi(x+\Delta x)}{2}d\ell=\pi(2x+\Delta x)d\ell\approx 2\pi x\cdot d\ell.$$

$$S = \int\limits_{(A)}^{(B)} 2\pi x\, d\ell = 2\pi \int\limits_{(A)}^{(B)} x\, d\ell = 2\pi \int\limits_{(A)}^{(B)} \varphi(y) d\ell = 2\pi \int\limits_{c}^{d} \varphi(y)\sqrt{1+\varphi'^2(y)}dy. \qquad (2.31)$$

Пример 2.76 Найти площадь поверхности (рис.2.25), образованной вращением вокруг оси $0X$ дуги параболы $y = x^3$, заключенной между точками $A(-1;-1)$ и $B(1;1)$.

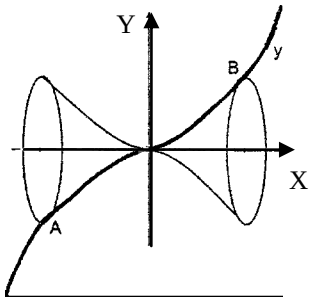


Рис. 2.25

Решение.
По формуле (2.30)

$$S = 2\pi \int\limits_{(A)}^{(B)} f(x) d\ell = \left| d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \right| = 2\pi \int\limits_{(A)}^{(B)} x^3 \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} =$$

$$= 2\pi \int\limits_{-1}^{1} x^3 \sqrt{1+(y')^2}\, dx = \left| y' = \left(x^3\right)' = 3x^2 \right| = 2 \cdot 2\pi \int\limits_{0}^{1} x^3 \sqrt{1+\left(3x^2\right)^2}\, dx =$$

$$= 4\pi \int\limits_{0}^{1} x^3 \sqrt{1+9x^4}\, dx = \frac{4\pi}{36} \int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+9x^4}\, d\left(1+9x^4\right) =$$

$$= \frac{\pi}{9} \int\limits_{0}^{1} \left(1+9x^4\right)^{1/2} d\left(1+9x^4\right) = \frac{\pi}{9} \left. \frac{\left(1+9x^4\right)}{3/2} \right|_0^{3/2} = \frac{\pi}{9} \cdot \frac{2}{3}\left(10^{3/2} - 1\right) = = \frac{2\pi}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$$ (ед ^{2})

Пример 2.77 Найти площадь поверхности (рис.2.26), образованной вращением вокруг оси $0X$ дуги астроиды $x = a\cos^3 t;\ y = a\sin^3 t$, заключенной между точками $A(a;0)$ и $B(0;a)$

Решение.

Предварительно вычислим $d\ell$, для этого необходимо получить из уравнений $x = a\cos^3 t;\ y = a\sin^3 t$ дифференциалы:

$dx = \left(a\cos^3 t\right)' dt = 3a\cos^2 t \cdot (-\sin t) dt;$

$dy = \left(a\sin^3 t\right)' dt = 3a\sin^2 t \cdot \cos t\, dt.$ Так как $d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$,

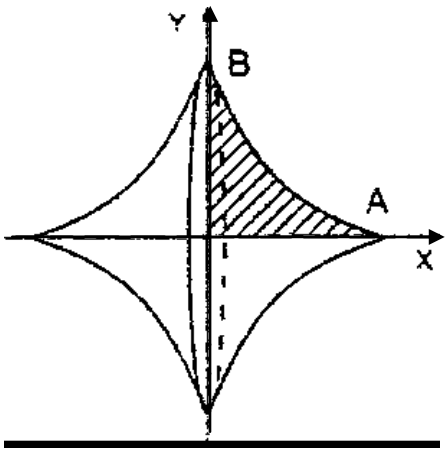


Рис. 2.26

$$d\ell = \sqrt{\left(9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t\right)}dt =$$
$$= 3a\sin t\cdot\cos t\cdot\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt = 3a\sin t\cdot\cos t\,dt$$

По формуле (2.30):

$$S = 2\pi\int\limits_{(A)}^{(B)} y\cdot d\ell = 2\pi\int\limits_{(A)}^{(B)}\left(a\cdot\sin^3 t\right)3a\sin t\cdot\cos t\cdot dt =$$
$$= 2\pi\cdot 3a^2\int\limits_0^{\pi/2}\sin^4 t\cdot\cos t\,dt = 6\pi a^2\int\limits_0^{\pi/2}\sin^4 t\,d(\sin t) = 6\pi a^2\left.\frac{\sin^5 t}{5}\right|_0^{\pi/2} =$$
$$= \frac{6\pi a^2}{5}\left(\sin^5\frac{\pi}{2}-\sin^5 0\right) = \frac{6\pi a^2}{5}$$

2.11 ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ФИЗИКИ

2.11.1 Вычисление работы

Пусть материальная точка движется вдоль оси $0X$ под действием переменной силы $F = F(x)$, причем ее направление совпадает с направлением движения. Тогда работа A, произведенная силой F на отрезке $[a;b]$, выражается интегралом

$$A = \int\limits_a^b F(x)\cdot dx. \qquad (2.32)$$

Пример 2.77 Вычислить работу, необходимую для запуска ракеты весом P с поверхности Земли вертикально вверх на высоту h.

Решение.

Величина силы $F(x)$, производящей работу по поднятию тела с Земли равна величине силы притяжения тела Землей по закону Ньютона: $F(x) = \gamma\dfrac{m_p\cdot M_3}{x^2}$, где $m_p -$ масса ракеты, $M_3 -$ масса Земли, $x -$ расстояние от ракеты до центра Земли, $\gamma -$ гравитационная постоянная.

На поверхности Земли (при $x = R$, где $R -$ радиус Земли) сила притяжения $F(x) = P$, то есть весу ракеты. Обозначим постоянный коэффициент $\gamma \cdot m_p \cdot M_З = k$, тогда закон Ньютона принимает вид: $P = \dfrac{k}{R^2}$, откуда $k = P \cdot R^2$ и $F(x) = \dfrac{P \cdot R^2}{x^2}$

При подъеме ракеты на высоту h переменная x изменяется на отрезке $[R; R+h]$. Тогда работа, произведенная силой $F(x)$ на этом отрезке, может быть вычислена по формуле (2.32):

$$A = \int_R^{R+h} \frac{P \cdot R^2}{x^2}\,dx = P \cdot R^2 \int_R^{R+h} x^{-2}\,dx = P \cdot R^2 \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_R^{R+h} =$$

$$= -P \cdot R^2 \left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}\right) = \frac{P \cdot R\,h}{R+h}$$

Пример 2.78 Вычислить работу, которую нужно затратить на выкачивание жидкости из полусферического резервуара радиуса R.

Решение.

Работа A, затраченная на поднятие некоторого тела весом P, зависит от высоты подъема h: $A = P \cdot h$

Разделим резервуар на n слоев толщины Δh плоскостями, параллельными поверхности жидкости. Введем систему координат так, как это показано на рис.2.27. Рассмотрим горизонтальную полоску (элементарный слой жидкости), находящуюся на глубине $h = |DC| = R - y$ и имеющую толщину $dh = dy$. Тогда работа ΔA, необходимая для поднятия этого слоя жидкости на поверхность, равна $\Delta A = \Delta P \cdot (R - y)$, где $\Delta P -$ вес элементарного слоя: $\Delta P = \gamma \cdot \Delta V$, где $\gamma -$ удельный вес жидкости, $\Delta V \approx \pi |CB|^2 \cdot dh = \pi \cdot x^2 \cdot dy -$ объем элементарного слоя, если рассматривать его

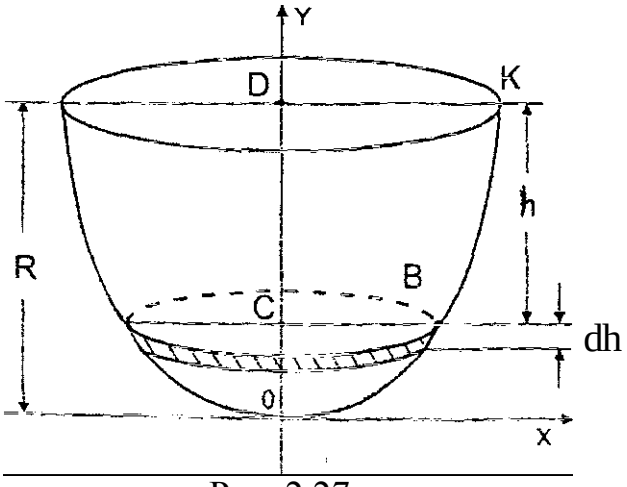


Рис. 2.27

как круговой цилиндр с радиусом основания $|CB|$ и высотой dh. Итак, $\Delta A = \pi \cdot x^2\, dy \cdot (R - y)$. В последнем соотношении необходимо x выразить через y. Отрезок $x = |CB|$ меняет свою длину в соответствии с изменением положения точки B, которая перемещается по окружности $x^2 + (y - R)^2 = R^2$. Отсюда $x^2 = R^2 - (y - R)^2 = 2Ry - y^2$. Таким образом, дифференциал работы равен $dA \approx \Delta A =$
$= \gamma \cdot \pi (2Ry - y^2)(R - y)dy = \gamma\pi(2R^2 y - 3Ry^2 + y^3)dy$. Учитывая, что $y \in [0; R]$, получим:

$$A = \int_0^R dA = \gamma \cdot \pi \int_0^R (2R^2 y - 3R\, y^2 + y^3)dy = \gamma\pi \left(R^2 y^2 - R\, y^3 + \frac{y^4}{4} \right)\Bigg|_0^R =$$

$$= \frac{\gamma \cdot \pi \cdot R^4}{4}.$$

2.11.2 Давление жидкости

Сила давления жидкости P на горизонтальную пластинку с площадью S, погруженную на глубину h, определяется по закону Паскаля $P = \gamma \cdot h \cdot S$, где γ – удельный вес жидкости.

Для определения гидростатического давления P, испытываемого пластинкой, погруженной вертикально, поступают так.

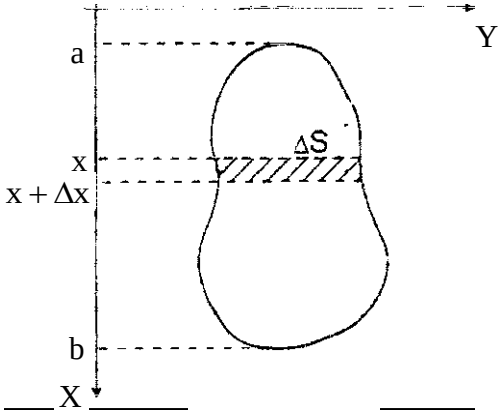


Рис. 2.28

На пластинке выделяется элементарная полоска с площадью ΔS. Считая, что давление во всех частях такой полоски одинаково, по закону Паскаля $\Delta P = \gamma \cdot x \cdot \Delta S$. Искомое давление на всю пластину находится интегрированием по x в пределах от a до b:

$$P = \int_a^b \gamma \cdot x \cdot dS(x). \qquad (2.33)$$

Пример 2.79 Труба, лежащая горизонтально, наполовину наполнена водой. Поперечным сечением трубы является круг диаметром 6 м. Найти величину давления воды на вертикальную заслонку, закрывающую трубу.

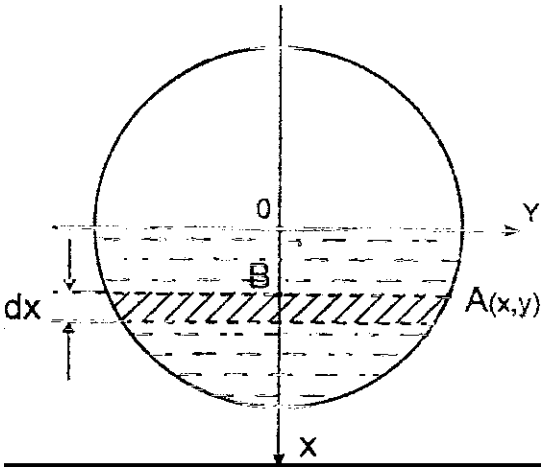


Рис. 2.29

Решение.

Выберем систему координат так, чтобы начало координат было в центре трубы, ось $0Y$ проходила по поверхности воды, ось $0X$ направим вниз. Полукруг разделим на элементарные полоски. Площадь элементарной полоски $\Delta S \approx dS = 2 \cdot |AB| \cdot dx = 2\,y(x) \cdot dx$.

Давление воды на полоску, находящуюся на глубине x, равно $\Delta P \approx dP = \gamma \cdot x \cdot dS = 2\gamma \cdot x \cdot y(x)dx$. Из уравнения окружности $x^2 + y^2 = 9$ выразим $y = \sqrt{9 - x^2}$. Следовательно, $dP = 2\gamma \cdot x \cdot \sqrt{9 - x^2}\, dx$. Интегрируем по x в пределах от 0 до 3, получаем

$$P = \int_0^3 dP = \int_0^3 2 \cdot \gamma \cdot x \sqrt{9 - x^2}\, dx = -\gamma \int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\, d\left(9 - x^2\right) =$$

$$= -\gamma \int_0^3 \left(9 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(9 - x^2\right) = -\gamma \left. \frac{\left(9 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3/2} \right|_0^3 = -\frac{2}{3}\gamma\left(\left(9 - 3^2\right)^{3/2} - (9 - 0)^{3/2}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\gamma \cdot 9^{\frac{3}{2}} = 18\gamma.$$

Пример 2.80 Найти давление воды на поверхность шара радиуса r м, если его центр находится на глубине H от поверхности воды.

Решение.

Введем систему координат $X0Y$ таким образом, чтобы ее начало совпадало с центром шара, ось $0Y$ направим параллельно поверхности воды, а ось $0X-$ перпендикулярно (рис.2.30). На глубине h рассечем шар горизонтальной плоскостью. Тогда давление воды на отсеченную часть поверхности шара будет некоторой функцией $P(h)$. При изменении h на dh меняется площадь поверхности отсеченной части шара на величину $\Delta S \approx 2\pi \cdot |AB| \cdot d\ell$, где $d\ell -$ дифференциал дуги окружности (то есть «ширина» заштрихованной сферической ленты, $\Delta S -$ площадь этой ленты $|AB| = y(x)$. Давление $P(h)$ изменится на величину $\Delta p \approx dp = \gamma \cdot h \cdot \Delta S = \gamma \cdot h \cdot 2\pi \cdot y(x) \cdot d\ell$. Из уравнения окружности $x^2 + y^2 = r^2$ найдем $y' = -\dfrac{x}{y}$ и затем $d\ell = \sqrt{1+(y')^2}\ dx = \sqrt{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\ dx =$

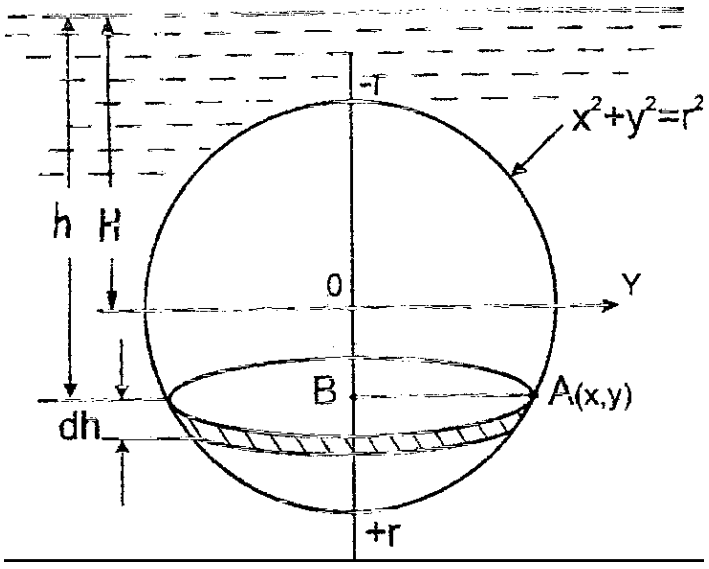


Рис. 2.30

$= \dfrac{\sqrt{y^2+x^2}}{y}dx = \dfrac{r}{y}dx.$

$h = H + |OB| = H + x$. Итак,

$$P = \int_{-r}^{+r} dP = \int_{-r}^{+r} \gamma \cdot h \cdot 2\pi \cdot y(x) \cdot \frac{r}{y(x)} \cdot dx = 2\pi \cdot \gamma \cdot r \int_{-r}^{+r} (H+x)dx =$$

$$= 2\pi \cdot \gamma \cdot r \frac{(H+x)^2}{2}\Bigg|_{-r}^{+r} = \pi \cdot \gamma \cdot r\left((H+r)^2 - (H-r)^2\right) = \pi \cdot \gamma \cdot 4H \cdot r = = 4 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot r^2 \cdot H.$$

2.11.3 Истечение жидкости из емкости

Пример 2.81 Цилиндрический резервуар (рис.2.31) с площадью основания S м^2 наполнен водой до высоты H м. Определить время, в течение которого вся вода вытечет из резервуара через небольшое отверстие в его дне, если принять, что скорость истечения воды равна $0{,}6\sqrt{2gh}$, где $h-$ высота уровня воды над отверстием, $g-$ ускорение силы тяжести.

Решение.

Время истечения воды из резервуара зависит от скорости истечения и от площади отверстия, через которое вытекает вода. Так как скорость истечения является непрерывной функцией от h, то направим ось $0X$ по оси резервуара и сведем задачу к интегрированию по переменной x.

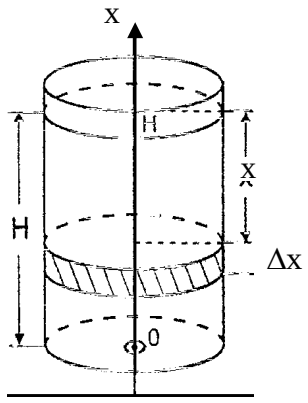


Рис. 2.31

Разобьем искомое время T на большое число n малых промежутков $\Delta t_1,\ldots,\Delta t_n$ и пусть за время Δt уровень воды в резервуаре понижается на величину $\Delta x=\dfrac{H}{n}$. Если допустить, что в течение каждого Δt скорость истечения воды остается постоянной, равной ее значению в начале промежутка, то есть $0{,}6\sqrt{2g(H-x)}$, то имеет следующее приближенное равенство: $0{,}6\sqrt{2g(H-x)}\cdot\Delta t\cdot a\approx S\cdot\Delta x$, где a - площадь отверстия (*). Здесь в левой части объем воды, вытекающей через отверстие, в правой части объема малого элементарного цилиндра с основанием S и высотой Δx.

Из соотношения (*) $\Delta t\approx\dfrac{S\cdot\Delta x}{0{,}6a\sqrt{2g(H-x)}}$. Рассматривая сумму всех Δt и переходя к пределу при $n\to\infty$ в этой сумме, получим:

$$T=\int_H^0\frac{S\,dx}{0{,}6a\sqrt{2g(H-x)}}=\frac{S}{0{,}6a\sqrt{2g}}\int_H^0(H-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx=$$

$$=\frac{S}{0{,}6a\sqrt{2g}}\left.\frac{(H-x)^{\frac{1}{2}}}{1/2}\right|_H^0=\frac{2S}{0{,}6a\sqrt{2g}}\left((H-0)^{\frac{1}{2}}-(H-H)^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{S}{0{,}6a}\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

УЧЕБНО - МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

РАЗДЕЛ 6 «ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

3. Материалы для самостоятельной работы студентов

3.1 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Первообразная функция.

2. Неопределенный интеграл.

3. Простейшие свойства неопределенного интеграла и его геометрический смысл.

4. Интегрирование методом разложения.

5. Интегрирование методом замены переменной.

6. Метод интегрирования по частям.

7. Интегрирование простейших дробей.

8. Интегрирование дробно-рациональной функции.

9. Интегрирование тригонометрических функций.

10. Интегрирование иррациональных функций.

11. Определение определенного интеграла.

12. Свойства определенного интеграла

13. Интеграл с переменным верхним пределом интегрирования.

14. Формула Ньютона-Лейбница.

15. Замена переменной в определенном интеграле.

16. Интегрирование по частям в определенном интеграле.

17. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.

18. Несобственные интегралы от неограниченных функций.

19. Геометрические приложения определенного интеграла.

20. Вычисление площадей фигур в декартовых координатах.

21. Вычисление площадей фигур в полярных координатах.

22. Длина дуги плоской кривой в декартовых координатах.

23. Длина дуги плоской кривой в полярных координатах.

23. Объем тела вращения.

24. Решение физических задач с помощью определенных интегралов.

3.2 ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

3.2.1 Найти неопределенные интегралы

1) $\int\left(x^4-4x^3+2x\right)dx$ *Ответ:* $\frac{x^5}{5}-x^4+x^2+C$	2) $\int\frac{1-6x+4x^2}{x^2}dx$ *Ответ:* $-\frac{1}{x}-6\ln\lvert x\rvert+4x+C$
3) $\int\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{x\sqrt{x}}dx$ *Ответ:* $x-6\sqrt{x}+3\ln\lvert x\rvert+\frac{2}{\sqrt{x}}+C$	4) $\int\frac{125-x}{\sqrt[3]{x}-5}dx$ *Ответ:* $-\left(\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{15}{4}x^{\frac{4}{3}}+25x\right)+C$
5) $\int 6^x\left(6^x+4\right)dx$ *Ответ:* $\frac{6^x\left(6^x+8\right)}{2\ln 6}+C$	6) $\int 5^{x-2}dx$ *Ответ:* $\frac{5^x}{25\ln 5}+C$
7) $\int\left(\frac{2}{\cos^2 x}-\frac{5}{\sin^2 x}\right)dx$ *Ответ:* $2\operatorname{tg}x+5\operatorname{ctg}x+C$	8) $\int\frac{5-4\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$ *Ответ:* $5\operatorname{tg}x-4\sin x+C$
9) $\int\frac{dx}{\sin^2 x+\cos 2x}$ *Ответ:* $\operatorname{tg}x+C$	10) $\int\frac{1-4\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}dx$ *Ответ:* $\operatorname{tg}x+4\operatorname{ctg}x+C$
11) $\int\frac{\sin 3x-\sin 5x}{\cos 4x}dx$ *Ответ:* $2\cos x+C$	12) $\int\frac{\cos 4x-\cos 6x}{\sin 5x}dx$ *Ответ:* $-2\cos x+C$
13) $\int\left(\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x\right)^2dx$ *Ответ:* $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x-4x+C$	14) $\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$ *Ответ:* $\frac{1}{2}\left(x+\operatorname{tg}x\right)+C$
15) $\int\frac{1-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2-x^2}}dx$ *Ответ:* $\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}-x+C$	16) $\int\frac{\sqrt{x^2+9}-6}{x^2+9}dx$ *Ответ:* $\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+9}\right\rvert-2\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$

17). $\int \frac{1-2x^2}{x^2\left(1-x^2\right)}dx$ *Ответ:* $\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1-x}{1+x}\right\| - \frac{1}{x} + C$	18) $\int \sqrt{\frac{3+x^2}{x^4-9}}dx$ *Ответ:* $\ln\left\|x+\sqrt{x^2-3}\right\| + C$
19) $\int \frac{2x^2+5}{x^2\left(x^2+5\right)}dx$ *Ответ:* $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} - \frac{1}{x} + C$	20) $\int\left(\operatorname{arctg}x + \operatorname{arcctg}x\right)dx$ *Ответ:* $\frac{\pi}{2}x + C$
21) $\int \frac{(1+x)^2}{x\left(1+x^2\right)}dx$ *Ответ:* $\ln\left\|x\right\| + 2\operatorname{arctg}x + C$	22) $\frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$ *Ответ:* $\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C$

3.2.2 Вычислить интегралы, методом замены переменных

1) $\int \cos 5x dx$ *Ответ:* $\frac{1}{5}\sin 5x + C$	2) $\int \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)dx$ *Ответ:* $\frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) + C$
3) $\int (12x-5)^7 dx$ *Ответ:* $\frac{1}{96}(12x-5)^8 + C$	4) $\int \sqrt{8x+9}dx$ *Ответ:* $\frac{1}{12}\sqrt{(8x+9)^3} + C$
5) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{9x-7}}$ *Ответ:* $\frac{1}{6}\sqrt[3]{(9x-7)^2} + C$	6) $\int \frac{dx}{11-4x}$ *Ответ:* $-\frac{1}{4}\ln\left\|11-4x\right\| + C$
7) $\int 6^{5x+2}dx$ *Ответ:* $\frac{6^{5x+2}}{5\ln 6} + C$	8) $\int e^{4-3x}dx$ *Ответ:* $-\frac{1}{3}e^{4-3x} + C$
9) $\int x\sqrt{x^2-7}dx$ *Ответ:* $\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2-7\right)^3} + C$	10) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ *Ответ:* $-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2} + C$

11) $\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}dx$ *Ответ:* $\ln\left\|x^2+x-3\right\|+C$	12) $\int \frac{2x-3}{4+3x-x^2}dx$ *Ответ:* $-\ln\left\|4+3x-x^2\right\|+C$
13) $\int \frac{6x-5}{\sqrt{3x^2-5x+4}}dx$ *Ответ:* $2\sqrt{3x^2-5x+4}+C$	14) $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$ *Ответ:* $-\sqrt{2x-x^2}+C$
15) $\int \frac{e^x dx}{2e^x+7}$ *Ответ:* $\frac{1}{2}\ln\left(2e^x+7\right)+C$	16) $\int \operatorname{ctg} 5x dx$ *Ответ:* $\frac{1}{5}\ln\left\|\sin 5x\right\|+C$
17) $\int \frac{\left(8-\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt{x}}dx$ *Ответ:* $-\frac{\left(8-\sqrt{x}\right)^4}{2}+C$	18) $\int \frac{dx}{\left(6+\sqrt[3]{x}\right)^4\sqrt[3]{x^2}}$ *Ответ:* $-\frac{1}{\left(6+\sqrt[3]{x}\right)^3}+C$
19) $\int \frac{\sqrt[6]{\ln^5 x}}{x}dx$ *Ответ:* $\frac{6}{11}\sqrt[6]{\ln^{11} x}+C$	20) $\int \frac{dx}{x\ln x}$ *Ответ:* $\ln\left\|\ln x\right\|+C$
21) $\int \sqrt[4]{e^{3x}+8}\, e^{3x}dx$ *Ответ:* $\frac{4}{15}\sqrt[4]{\left(e^{3x}+8\right)^5}+C$	22) $\int 2x6^{1-x^2}dx$ *Ответ:* $-\frac{6^{1-x^2}}{\ln 6}+C$
23) $\int \frac{4^x dx}{7+4^x}$ *Ответ:* $\frac{1}{\ln 4}\ln\left(7+4^x\right)+C$	24) $\int \frac{7^x dx}{\sqrt{49^x+1}}$ *Ответ:* $\frac{1}{\ln 7}\ln\left(7^x+\sqrt{1+49^x}\right)+C$
25) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$ *Ответ:* $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\sin^2 x}+C$	26) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x\sqrt{\cos x}}dx$ *Ответ:* $\frac{2}{3\cos x\sqrt{\cos x}}+C$

27) $\int \frac{dx}{\sqrt[7]{ctg^4 x \sin^2 x}}$ *Ответ:* $-\frac{7}{3}\sqrt[7]{ctg^3 x}+C$	28) $\int \frac{1-4\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ *Ответ:* $\arcsin x - 2\arcsin^2 x + C$
29) $\int \frac{\sqrt[4]{arctgx}\,dx}{1+x^2}$ *Ответ:* $\frac{4}{5}\sqrt[4]{arctg^5 x}+C$	30) $\int \frac{dx}{(x^2+1)arcctgx}$ *Ответ:* $-\ln\lvert arcctg\ x\rvert + C$
31) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x - 9}}$ *Ответ:* $\ln\left\lvert \ln x + \sqrt{\ln^2 x - 9}\right\rvert + C$	32) $\int \frac{x^3 dx}{\sin^2 x^4}$ *Ответ:* $-\frac{1}{4}ctgx^4 + C$
33) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+5}}$ *Ответ:* $2\left(\sqrt{x+5} - \ln\left(1+\sqrt{x+5}\right)\right)+C$	34) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+4}dx$ *Ответ:* $2\sqrt{x} - 4arctg\frac{\sqrt{x}}{2} + C$
35) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+9}}$ *Ответ:* $\frac{1}{3}\ln\left\lvert\frac{\sqrt{2x+9}-3}{\sqrt{2x+9}+3}\right\rvert + C$	36) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$ *Ответ:* $x - 2\sqrt{x} + 2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+C$
37) $\int \sqrt{9-x^2}dx$ *Ответ:* $\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \frac{x\sqrt{9-x^2}}{2} + C$ *Указание:* подстановка $x = 3\sin t$	38) $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx$ *Ответ:* $\sqrt{x^2-25} - 5\arccos\frac{5}{x} + C$ *Указание:* подстановка $x = \frac{5}{\sin t}$
39) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$ *Ответ:* $\frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} + C$ *Указание:* подстановка $x = 2tgt$	40) $\int \sqrt{e^x - 1}dx$ *Ответ:* $2\left(\sqrt{e^x-1} - arctg\sqrt{e^x-1}\right)+C$ *Указание:* подстановка $e^x - 1 = t^2$

3.2.3 Найти интегралы от функций, содержащих квадратный трехчлен

1) $\int \frac{dx}{x^2+10x+34}$ *Ответ:* $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x+5)+C$	2) $\int \frac{dx}{6x-9x^2-1}$ ***Ответ:*** $\frac{1}{3(3x-1)}+C$
3) $\int \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$ *Ответ:* $\arcsin\frac{x-2}{3}+C$	4) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-3x+8}}$ *Ответ:* $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left\lvert\sqrt{3}(x-0{,}5)+\sqrt{3x^2-3x+8}\right\rvert+C$
5) $\int \frac{6x-1}{x^2-4x+13}dx$ *Ответ:* $3\ln\left(x^2-4x+13\right)+\frac{11}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}+C$	6) $\int \frac{12x+11}{9x^2-6x+2}dx$ *Ответ:* $\frac{2}{3}\ln\left(9x^2-6x+2\right)+5\operatorname{arctg}(3x-1)+C$
7) $\int \frac{3x-5}{\sqrt{x^2+6x+20}}dx$ *Ответ:* $3\sqrt{x^2+6x+20}-$ $-14\ln\left\lvert x+3+\sqrt{x^2+6x+20}\right\rvert+C$	8) $\int \frac{7-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$ *Ответ:* $\sqrt{3+2x-x^2}+6\arcsin\frac{x-1}{2}+C$

3.2.4 Найти интегралы, применяя формулу интегрирования по частям

1) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx.$ *Ответ:* $2\sqrt{x}(\ln x-2)+C$	2) $\int (x-5)\cos x\,dx.$ *Ответ:* $(x-5)\sin x+\cos x+C$
3) $\int x^2 e^{4x}\,dx$ *Ответ:* $\frac{e^{4x}}{32}\left(8x^2-4x+1\right)+C$	4) $\int \ln\left(1+x^2\right)dx$ *Ответ:* $x\ln\left(1+x^2\right)-2x+2\operatorname{arctg}x+C$
5) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx.$	6) $\int 4^x \sin x\,dx.$

Ответ: $\ln\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}-\dfrac{\arcsin x}{x}+C$	*Ответ:* $\dfrac{4^x(\sin x\ln 4-\cos x)}{1+\ln^2 4}+C$
7) $\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$ *Ответ:* $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+C$	8) $\int \operatorname{arcctg} x\,dx$ *Ответ.* $x\operatorname{arcctg} x+\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{2}+C$
9) $\int arctg\sqrt{x}dx$ *Ответ:* $x\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$	10) $\int\ln^2 x\,dx$ *Ответ:* $x\left(\ln^2 x-2\ln x+2\right)+C$
11) $\int\dfrac{xarctgx}{\sqrt{1+x^2}}dx$ *Ответ:* $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctgx}-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$	12) $\int\cos\ln x dx$ *Ответ:* $\dfrac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C$

3.2.5 Вычислить интегралы, разлагая подынтегральную функцию на простейшие дроби

1) $\int\dfrac{3x+8}{(x-2)(x+5)}dx$ *Ответ:* $2\ln\lvert x-2\rvert+\ln\lvert x+5\rvert+C$	2) $\int\dfrac{7x+12}{(x-1)(3x+1)}dx$ *Ответ:* $4\ln\lvert x-1\rvert-\dfrac{5}{3}\ln\lvert 3x+1\rvert+C$
3) $\int\dfrac{5x-10-x^2}{x^2-4x+3}dx$ *Ответ:* $-x+3\ln\lvert x-1\rvert-2\ln\lvert x-3\rvert+C$	4) $\int\dfrac{x^4-16x^3+5x+8}{x^3-16x}dx$ *Ответ:* $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{7}{8}\ln\lvert x-4\rvert-\dfrac{3}{8}\ln\lvert x+4\rvert-\dfrac{1}{2}\ln\lvert x\rvert+C$
5) $\int\dfrac{3x+1}{(x+3)^2(x-5)}dx$ *Ответ:* $\dfrac{1}{4}\ln\lvert x-5\rvert-\dfrac{1}{4}\ln\lvert x+3\rvert-\dfrac{1}{x+3}+C$	6) $\int\dfrac{4x^2-5x+9}{(x^2-4x+13)(x+1)}dx$ *Ответ:* $\ln\lvert x+1\rvert+\dfrac{3}{4}\ln\left(x^2-4x+13\right)-$ $-\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x-2}{3}+C$

7) $\int \frac{5x^4 - x^3 + 4x^2 + 8}{x^3 - 8} dx$ *Ответ*: $\frac{5x^2}{2} - x + 8\ln\lvert x-2\rvert - 2\ln\left(x^2+2x+4\right) +$ $+ \frac{20}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C$	8) $\int \frac{x^3 - 7x^2 - 3}{\left(x^2+4\right)x^2} dx$ *Ответ:* $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right) - \frac{9}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} -$ $- \frac{2}{x} + C$
9) $\int \frac{x^3 + x - 1}{\left(x^2+2\right)^2} dx$ *Ответ:* $\frac{2-x}{4\left(x^2+2\right)} + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right) -$ $- \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C$	10) $\int \frac{x^3 + 1}{\left(x^2 - 4x + 5\right)^2} dx$ *Ответ:* $\frac{3x-17}{2\left(x^2-4x+5\right)} + \frac{1}{2}\ln\left(x^2-4x+5\right) +$ $+ \frac{15}{2}\operatorname{arctg}(x-2) + C$

3.2.6 Вычислить интегралы от тригонометрических функций:

1) $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$ *Ответ*: $-1/(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2) + C$	2) $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$ *Ответ*: $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right) + C$
3) $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\sin^2 x + \sin x}$ *Ответ:* $\ln\lvert\sin x\rvert - \sin x + C$	4) $\int \frac{\sin x\, dx}{\sin^2 x + 6\cos^2 x}$ *Ответ*: $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{5}\cos x\right) + C$
5) $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 9\cos^2 x}$ *Ответ*: $\frac{1}{6}\ln\left\lvert\frac{tgx - 3}{tgx + 3}\right\rvert + C$	6) $\int \frac{1 + tgx}{1 - tgx} dx$ *Ответ:* $-\ln\lvert\cos x - \sin x\rvert + C$
7) $\int \cos^7 x\, dx$ *Ответ:*	8) $\int \sin^6 x\, dx$ *Ответ*:

$\sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{\sin^7 x}{7} + C$	$\frac{5x}{16} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 4x}{48} + C$
9) $\int \cos^5 2x \sin^3 2x\,dx$ *Ответ:* $-\frac{\cos^6 2x}{12} + \frac{\cos^8 2x}{16} + C$	10) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x} dx$ *Ответ*: $\frac{1}{7\cos^7 x} - \frac{1}{5\cos^5 x} + C$
11) $\int tg^4 x dx$ *Ответ*: $\frac{tg^3 x}{3} - tgx + x + C$	12) $\int \frac{dx}{\cos^6 2x}$ *Ответ*: $\frac{tg^5 2x}{10} + \frac{tg^3 2x}{3} + \frac{tg2x}{2} + C$
13) $\int \sin^6 x \cos^4 x\,dx$ *Ответ*: $\frac{1}{128}\left(\frac{3x}{2} - \frac{\sin 4x}{2} + \frac{\sin 8x}{16}\right) - \frac{\sin^5 2x}{320} + C$	14) $\int \sin 3x \cos 7x\,dx$ *Ответ*: $\frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 10x}{20} + C$
15) $\int \cos 3x \cos 5x \cos 8x\,dx$	*Ответ:* $\frac{1}{4}\left(\frac{\sin 16x}{16} + \frac{\sin 10x}{10} + \frac{\sin 6x}{6} + x + C\right)$

3.2.7 Вычислить интегралы, содержащие иррациональные выражения:

1) $\int \sqrt{25 - x^2} dx$ *Ответ:* $\frac{25 \arcsin \frac{x}{5}}{2} + \frac{5x\sqrt{25 - x^2}}{2} + C$	2) $\int \frac{dx}{(\sqrt{36 - x^2})^3}$ *Ответ:* $-\frac{x}{36\sqrt{36 - x^2}} + C$
3) $\int \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x^2} dx$ *Ответ:* $\ln\left\|\sqrt{x^2 + 4} + x\right\| - \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} + C$	4) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 16}}$ *Ответ:* $-\frac{\sqrt{x^2 + 16}}{16x} + C$
5) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} dx$ *Ответ:* $\sqrt{x^2 - 9} - 3\arccos\frac{3}{x} + C$	6) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 - 25}}$ *Ответ:* $\frac{\sqrt{x^2 - 25}(x^2 + 50)}{3} + C$

7) $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$ *Ответ:* $\frac{3}{2}\ln(\sqrt[3]{x^2}+1)+C$	8) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$ *Ответ:* $4\sqrt[4]{x}+2\ln(1+\sqrt{x})-4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}+C$
9) $\int \frac{dx}{(1-\sqrt[3]{x^2})\sqrt{x}}$ Ответ: $\frac{3}{2}\ln\frac{1+\sqrt[6]{x}}{1-\sqrt[6]{x}}-3\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$	10) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x})\sqrt[6]{x^5}}dx$ *Ответ:* $4\sqrt[4]{x}-6\sqrt[6]{x}+12\sqrt[12]{x}+2\ln\lvert x\rvert-$ $-36\ln\lvert\sqrt[12]{x}+1\rvert+C$
11) $\int \sqrt{\frac{x}{x+5}}\frac{dx}{x^2}$ *Ответ:* $-\frac{2}{5}\sqrt{\frac{x+5}{x}}+C$	12) $\int (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$ *Ответ:* $(1-\frac{x}{2})\sqrt{1-x^2}-\frac{3}{2}\arcsin x+C$
13) $\int \frac{x^2dx}{(5x+2)\sqrt{5x+2}}$ *Ответ:* $\frac{2}{125}\sqrt{5x+2}[\frac{1}{3}(5x+2)-4-\frac{4}{5x+2}]+C$	14) $\int \frac{\sqrt{x+2}+3}{\sqrt{x+2}-4}dx$ *Ответ:* $x+14\sqrt{x+2}+56\ln\lvert\sqrt{x+2}-4\rvert+C$
15) $\int \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3}dx$ *Ответ:* $-(5+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+6\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$	16) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}(\sqrt[8]{x}-1)^5}$ *Ответ:* $-\frac{8}{3(\sqrt[8]{x}-1)^3}-\frac{2}{(\sqrt[8]{x}-1)^4}+C$
17) $\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^2}$ *Ответ:* $3[\ln\left\lvert\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right\rvert+\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}]+C$	18) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$ *Ответ:* $\frac{1}{3}\ln\left\lvert\frac{\sqrt{1+x^3}-1}{\sqrt{1+x^3}+1}\right\rvert+C$
19) $\int \frac{\sqrt{5+\sqrt[6]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ *Ответ:*	20) $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$ *Ответ:*

$\frac{12t^5}{5} - 20t^3 + C$, где $t = \sqrt{5 + \sqrt[6]{x}}$	$-\frac{t^5}{10} + \frac{t^3}{3} - \frac{t}{2} + C$, где $t = \frac{1+x^4}{x^2}$
21) $\int \frac{\sqrt[3]{1-2x^3}}{x^5} dx$ *Ответ:* $-\frac{1}{4}\sqrt[3]{(x^{-3}+2)^4} + C$	

3.2.8 Вычислить определенные интегралы:

1) $\int_0^4 \left(1 + e^{x/4}\right) dx$

Ответ: $4e$

2) $\int_{-1}^{7} \frac{dt}{\sqrt{3t+4}}$

Ответ: $\frac{8}{3}$

3) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x} \cdot dx}{\sqrt{x} - 1}$

Ответ: $12 + \ln 4$

4) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} \cdot dx$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

5) $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

Ответ: $\ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

6) $\int_0^{\pi/4} \sin x \cdot \sin 3x \, dx$

Ответ: $\frac{1}{4}$

7) $\int_0^{2\pi} \sin^4 x \cdot \cos^2 x \, dx$

Ответ: $\frac{5\pi}{8}$

8) $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$

Ответ: 0

9) $\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin x \cdot \cos x \, dx$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$

10) $\int_1^e \left(1 + \ln y\right)^2 \cdot dy$

Ответ: $e^2 + e - 1$

3.2.9 Вычислить площади фигур:

1) Найти площадь части фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$, лежащей вне окружности $x^2+y^2=\frac{a^2}{2}$

Ответ: $S=a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$

2) Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y=4-x^2$ и $y=x^2-2x$. *Ответ:* $S=9$

3) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кубическими параболами $6x=y^3-16y$ и $24x=y^3-16y$. *Ответ:* $S=16$

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t);\ y=a(1-\cos t)$ и осью $0X$. *Ответ:* $S=3\pi a^2$

5) Вычислить площадь внутри петли линии $x=3t^2;\ y=3t-t^3$

Ответ: $S=\frac{72\sqrt{3}}{5}$

6) Вычислить площадь внутри астроиды $x=a\cdot\cos^3 t;\ y=a\cdot\sin^3 t$

Ответ: $S=\frac{3\pi a^2}{8}$

7) Найти площадь, ограниченную линиями:

а) лемнискатой $\rho^2=a^2\cdot\cos 2\varphi$;

б) первым завитком спирали Архимеда $\rho=a\varphi$ и полярной осью;

в) кардиоидой $\rho=a(1-\cos\varphi)$ и окружностью $\rho=a$

Ответы: а) $S=a^2$; б) $S=\frac{4}{3}a^2\pi^3$; в) $S=2a^2\left(\frac{5\pi}{8}-1\right)$

3.2.10 Вычислить длины дуг кривых:

1) полукубической параболы $y^2=(x-1)^3$ между точками $A(2;-1)$ и $B(5;-8)$. *Ответ:* $\ell\approx 7{,}63$

2) $2y = x^2 - 2$ между точками пересечения с осью $0X$

Ответ: $\ell = \sqrt{6} + \ln\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$

3) $y = \ln x$ между прямыми $x = \sqrt{3}$ и $x = \sqrt{8}$

Ответ: $\ell = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

4) одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t);\ y = a(1 - \cos t)$

Ответ: $\ell = 8a$

5) $x = 3t^2;\ y = 5t^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $A\left(1;\frac{5}{3}\right)$

Ответ: $\ell = \frac{\sqrt{34}}{3}$

6) $x = 1 - t^2;\ y = 1 - t$ от точки $O(0;0)$ до $A(1;1)$

Ответ: $\ell = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}$

7) кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$. *Ответ:* $\ell = 8a$

8) первого завитка спирали Архимеда $\rho = a\varphi$

Ответ: $\pi a\sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{a}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi + 1}\right)$

9) $\rho = a\cos^3\frac{\varphi}{3}$. *Ответ:* $\ell = \frac{3}{2}a\pi$

3.2.11 Найти центры тяжести однородных дуг кривых и фигур

1) Найти центр тяжести однородной дуги $(\rho = \text{const})$ полуокружности $x^2 + y^2 = R^2$, расположенной под осью $0X$.

Ответ: $\left(0;-\frac{2a}{\pi}\right)$

2) Найти центр тяжести однородной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(t - \cos t)$. *Ответ:* $\left(\pi a;\frac{4}{3}a\right)$

3) Найти центр тяжести однородной фигуры, ограниченной дугой эллипса $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t$ и координатными осями, расположенной в первом квадранте. *Ответ:* $\left(\frac{4a}{3\pi};\frac{4b}{3\pi}\right)$

4) Найти центр тяжести однородной фигуры, ограниченной параболами $x^2 = 20y$ и $y^2 = 20x$. *Ответ:* $(9;9)$

3.2.12 Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций:

1) $y = -x^2 + 5x - 6;\ \ y = 0$ ось вращения $0X$; *Ответ:* $\frac{\pi}{30}$

2) $y = 3\sin x;\ y = \sin x;\ 0 \le x \le \pi;$ ось вращения $0X$; *Ответ:* $4\pi^2$

3) $y = x\,e^x;\ y = 0;\ x = 1;$ ось вращения $0X$; *Ответ:* $\frac{\pi}{4}\left(e^2 - 1\right)$

4) $y = \sqrt{x-1};\ y = 0;\ y = 1;\ x = 0{,}5;$ ось вращения $0Y$; *Ответ:* $\frac{97\pi}{60}$

5) $2x - x^2 - y = 0$; ось вращения $0X$; *Ответ:* $\frac{16\pi}{15}$

6) $y = e^{1-x};\ y = 0;\ x = 0;\ x = 1;$ ось вращения $0X$; *Ответ:* $\frac{\pi}{2}\left(e^2 - 1\right)$

7) $y = \ln x;\ \ x = 2;\ y = 0;$ ось вращения $0Y$; *Ответ:* $\pi\left(\ln 16 - \frac{3}{2}\right)$

8) $y = \arccos x;\ \ y = \arcsin x;\ \ x = 0;$ ось вращения $0Y$;

Ответ: $\frac{\pi}{4}(\pi - 1)$

9) $x = 2\cos t;\ \ y = 6\sin t;$ ось вращения $0Y$; *Ответ:* 32π

10) $x = 3\cos t;\ \ y = 8\sin t;$ ось вращения $0X$. *Ответ:* 256π

3.2.13 Вычислить площади поверхностей вращения

1) Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $0X$:

а) окружности $x = a\cos t;\ \ y = a\sin t$;

б) дуги параболы $y^2 = 2x$ между точками пересечения с прямой $x = 1{,}5$;

в) одной волны синусоиды $y = \sin x$;

г) одной арки циклоиды $x = 2(t - \sin t),\ \ y = 2(1 - \cos t).$

Ответы: а) $4\pi a^2$; б) $\frac{14\pi}{3}$; в) $4\pi\sqrt{2} + 4\pi\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$; г) $\frac{128\pi}{3}$

3.2.14 Решить физические задачи

1) Воронка, имеющая форму прямого кругового конуса (с радиусом основания R и высотой H) наполнена водой и затем опорожняется через небольшое круглое (радиусом r) отверстие внизу. Определить время опорожнения воронки.

2) Цилиндрическая цистерна с горизонтальной осью, имеющая высоту H и радиус основания R, заполнена водой. Определить, за какое время через круглое отверстие (радиусом r) в дне цистерна полностью опорожнится.

3.2.15 Исследовать на сходимость следующие интегралы

а) $\int\limits_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2}\,dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 11}$; в) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{5x^4 + 2x^2 + 1}$;

г) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x + \cos^2 x}}$; д) $\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\,dx$; е) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{x}\,dx$.

Ответы: а) сходится; б) сходится; в) сходится;
г) расходится; д) сходится; е) расходится

3.2.16 Используя определение или признаки сходимости, исследовать на сходимость следующие интегралы:

а) $\int\limits_1^{e} \frac{dx}{x \cdot \ln^3 x}$; б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{x}}$; в) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x \cdot tgx}$;

г) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{x \cdot dx}{x^2 - 1}$; д) $\int\limits_2^{3} \frac{x \cdot dx}{\sqrt[4]{x^2 - 4}}$; е) $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Ответы: а) расходится; б) расходится; в) расходится;
г) расходится; д) сходится; е) расходится.

3.3 РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание №1

Найти неопределенные интегралы

1	$\int\left(x\sqrt{x}+e^{5x}\right)dx$	13	$\int\frac{(\sqrt[3]{x}+1)^2\,dx}{\sqrt{x}}$	25	$\int 2^{\frac{x}{7}}\cdot 5^{15x}\,dx$
2	$\int(\sin x-\cos x)^2\,dx$	14	$\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx$	26	$\int\frac{10^{2x}-\sqrt{2^x}}{5^{3x}}dx$
3	$\int\frac{3^{\frac{x}{3}}\cdot 4^{2x}}{5^x}dx$	15	$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^4-25}}$	27	$\int\left(\sqrt{2^x}+\frac{1}{tgx}-\cos^2 3x\right)dx$
4	$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x+1}}$	16	$\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$	28	$\int\left(\cos^2\frac{x}{6}-x\sqrt{e}\right)dx$
5	$\int\frac{dx}{9+4x^2}$	17	$\int\left(\sqrt{3}+\frac{1}{x^2}-\cos\frac{x}{2}\right)dx$	29	$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{(\ln x-1)^2}}$
6	$\int\frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx$	18	$\int\left(\sqrt{6^x}-\sqrt[3]{2}\right)dx$	30	$\int\left(\sqrt{x}-\frac{7}{\sqrt[3]{x}}+5\pi\right)dx$
7	$\int\frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}$	19	$\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{2}\right)^2 dx$	31	$\int\left(2^x+3^x\right)^2 dx$
8	$\int\frac{e^{ctgx}dx}{\sin^2 x}$	20	$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$	32	$\int\left(\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[m]{x}}{\sqrt[k]{x}}\right)dx$
9	$\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$	21	$\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}-2\sqrt[5]{x}}{3\sqrt{x}}\right)dx$	33	$\int\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$
10	$\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt[3]{x}\right)^3 dx$	22	$\int\frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$	34	$\int\left(1-\frac{x^2}{1+x^2}\right)dx$
11	$\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt{1-x^2}}$	23	$\int\left(\frac{1}{5^{2x}}-e^{-5x}\right)dx$	35	$\int\frac{2^{5x}\cdot 5^{\frac{x}{5}}}{e^{7x}}dx$
12	$\int\frac{x+1}{x^2+1}dx$	24	$\int\frac{(1-x)^3}{x\cdot\sqrt[3]{x}}dx$	36	$\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[5]{x}}+\sin 3x\right)dx$

Задание №2

Найти неопределенные интегралы

1 $\int (5+x)\arccos x dx$

2 $\int e^x \cdot (x+1)dx$

3 $\int (x+1)\cdot arctgxdx$

4 $\int (3-x)\cdot \cos x dx$

5 $\int \arcsin 3xdx$

6 $\int (x+3)\cdot \ln^2 x dx$

7 $\int (6^x + x)^2 dx$

8 $\int \frac{3x+5}{\cos^2 x} dx$

9 $\int e^{-x} x^2 dx$

10 $\int (3x+4)\cdot \cos 6xdx$

11 $\int (2x-5)\cdot e^{4x} dx$

12 $\int e^{-x} \cdot \cos 2xdx$

13 $\int \frac{4x+5}{\sin^2 x} dx$

14 $\int (x^2+5x-6)\cdot \ln x dx$

15 $\int \log_3 x dx$

16 $\int \frac{x\cdot \cos x}{\sin^3 x} dx$

17 $\int (x+\ln x)^2 dx$

18 $\int x\cdot arcctgxdx$

19 $\int \lg 3xdx$

20 $\int (x\ +3)\cdot 2^x dx$

21 $\int \ln(x+1)dx$

22 $\int (3x+2)\cdot e^x dx$

23 $\int (x-5)\cdot \sin x dx$

24 $\int (\ln x + e^{-2x})dx$

25 $\int (x^2+3x+1)e^x dx$

26 $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

27 $\int e^{2x} \cdot \sin 3xdx$

28 $\int \ln(x^2+x)dx$

29 $\int x\cdot \sin(5x+6)dx$

30 $\int (x-3^x)^2 dx$

31 $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

32 $\int e^x \cdot \sin(4x-1)dx$

33 $\int (2x+3)\sin 5xdx$

34 $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$

35 $\int e^{3x} \cdot \cos 2xdx$

36 $\int \sqrt{x}\cdot \log_5 x dx$

Задание №3

Найти неопределенные интегралы

1 $\int \frac{dx}{x^3(x-1)^2}$

2 $\int \frac{x^3+1}{(x+2)(x-1)}dx$

3 $\int \frac{x^5dx}{x^2+1}$

4 $\int \frac{x^3dx}{x^2-1}$

5 $\int \frac{x+1}{x^2+10x+29}dx$

6 $\int \frac{x^4dx}{(x^2+1)(x-1)}$

7 $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2-4)}$

8 $\int \frac{x^2-3}{(x-1)^2x}dx$

9 $\int \frac{5x^3-9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx$

10 $\int \frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx$

11 $\int \frac{x^4dx}{x^4-16}$

12 $\int \frac{x^5dx}{x^3-8}$

13 $\int \frac{(2x^2+x+3)dx}{(x+2)(x^2+x+1)}$

14 $\int \frac{(3x+4)dx}{(x^2+x+1)(x+2)^2}$

15 $\int \frac{(x^3-5x^2+5x+23)dx}{(x^2-1)(x-5)}$

16 $\int \frac{(x+3)dx}{(x^2-x+1)(x-3)}$

17 $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+2)(x^2+4x)}$

18 $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x^2+4x+5)}$

19 $\int \frac{(2x+5)dx}{(x^2+4)(x-3)}$

20 $\int \frac{(x-3)dx}{(x^2+1)(x+1)}$

21 $\int \frac{3x^3+x^2+5x+1}{x^3+x}dx$

22 $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$

23 $\int \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}dx$

24 $\int\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2dx$

25 $\int \frac{3x^3-5dx}{x^3-x}$

26 $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}$

27 $\int \frac{4x^3+25}{x^2+3x+2}dx$

28 $\int \frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}dx$

29 $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$

30 $\int \frac{3x^2-4x+5}{(x+2)x^2}dx$

31 $\int \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}dx$

32 $\int \frac{dx}{x^2(x-2)^2}$

33 $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$

34 $\int \frac{(x+2)dx}{x^3-2x^2}$

35 $\int \frac{x^3dx}{x^3+27}$

36 $\int \frac{3-2x}{(x^2+16)x^2}dx$

Задание №4

Найти неопределенные интегралы

1 $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx$

2 $\int \cos ec^5 x dx$

3 $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$

4 $\int \frac{dx}{2+\sin x}$

5 $\int ctg^3 x dx$

6 $\int \frac{(1+tgx)dx}{\sin 2x}$

7 $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$

8 $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$

9 $\int \cos 7x \sin^2 x dx$

10 $\int (ctg^3 x - \sin^3 x)dx$

11 $\int \sin^3 x \cos^5 x dx$

12 $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$

13 $\int \frac{dx}{(1+\cos x)\sin x}$

14 $\int \cos 3x \cdot \cos^2 4x dx$

15 $\int \cos^4 x \sin^2 x dx$

16 $\int (tg^3 x + ctg^2 x)dx$

17 $\int \frac{dx}{5+\sin x + 3\cos x}$

18 $\int (tg^2 x + ctg2x)dx$

19 $\int \frac{ctgxdx}{1-\sin x - \cos x}$

20 $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$

21 $\int \cos^3 x \sin^2 x dx$

22 $\int \frac{dx}{\sin x \cdot (2+\cos x - 2\sin x)}$

23 $\int \sin x \cos^5 x dx$

24 $\int \frac{dx}{8-4\sin x + 7\cos x}$

25 $\int \frac{dx}{3+tgx}$

26 $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}dx$

27 $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx$

28 $\int \frac{\sin x}{1+tgx}dx$

29 $\int \cos^4 5x dx$

30 $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}dx$

31 $\int \frac{dx}{2+3\cos x}$

32 $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin 2x}dx$

33 $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}dx$

34 $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$

35 $\int \frac{\sin x \cos x}{(3+\cos x)^2}dx$

36 $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$

Задание №5

Найти неопределенные интегралы

1 $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$

2 $\int x^3 \cdot \left(5+x^2\right)^{\frac{1}{3}}dx$

3 $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$

4 $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2 \cdot \sqrt{x}}dx$

5 $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$

6 $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$

7 $\int x^2\sqrt{9-x^2}dx$

8 $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

9 $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2}dx$

10 $\int \sqrt{2x-x^2}dx$

11 $\int x^3 \cdot \sqrt{1+x^2}dx$

12 $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(9+x^2\right)^3}}$

13 $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$

14 $\int \frac{dx}{x \cdot \left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$

15 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x+x^2}}$

16 $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$

17 $\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$

18 $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x+x^2}}$

19 $\int \sqrt{4x-x^2}dx$

20 $\int \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}dx$

21 $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$

22 $\int \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{2+\sqrt[3]{x^2}}dx$

23 $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2}dx$

24 $\int x^5 \cdot \left(1+x^3\right)^{\frac{2}{3}}dx$

25 $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{\sqrt{x}}dx$

26 $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{1+x^3}}$

27 $\int \sqrt{\left(x^2-1\right)^3}dx$

28 $\int x^2 \cdot \sqrt{x^2-1}dx$

29 $\int \frac{x^4}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}dx$

30 $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$

31 $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$

32 $\int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt[3]{2-x^3}}$

33 $\int \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3-2 \cdot \sqrt[5]{x}^3}}dx$

34 $\int \frac{dx}{\sqrt{3+x-x^2}}$

35 $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+1}dx$

36 $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$

Задание №6

Найти определенные интегралы

1 $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1+x^2}}$

2 $\int_{10}^{100} 3^{\lg x}\,\frac{dx}{x}$

3 $\int_{-1}^{0} \frac{xe^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

4 $\int_{0}^{1} x^3\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx$

5 $\int_{0}^{\pi/4} tg^3 x dx$

6 $\int_{0}^{\sqrt{3}} x^5\cdot\sqrt{1+x^2}\,dx$

7 $\int_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

8 $\int_{0}^{1} \sqrt{2x+x^2}\,dx$

9 $\int_{0}^{\pi/6} \frac{1+tg^2 x}{1-tg^2 x}\,dx$

10 $\int_{4}^{9} \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$

11 $\int_{-2}^{1} \frac{x}{\left(1+x^2\right)^3}\,dx$

12 $\int_{0}^{1} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

13 $\int_{0,5}^{1} \frac{e^x}{e^x-e^{-x}}dx$

14 $\int_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$

15 $\int_{3}^{5} \sqrt{\frac{2-x}{x-6}}dx$

16 $\int_{1}^{-1} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$

17 $\int_{0}^{4} \sqrt{16-x^2}\,dx$

18 $\int_{0}^{\pi/4} \frac{3^{tgx}}{1-\sin^2 x}dx$

19 $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$

20 $\int_{0}^{3/2} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

21 $\int_{0}^{1} \sqrt{4x-x^2}\,dx$

22 $\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,dx$

23 $\int_{0}^{1} \sqrt{\left(1-x^2\right)^3}\,dx$

24 $\int_{6}^{10} \sqrt{\frac{4-x}{x-12}}dx$

25 $\int_{0}^{1} x^2\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx$

26 $\int_{0}^{1} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

27 $\int_{1}^{\sqrt[4]{e}} \frac{dx}{x\cdot\cos^2\left(\pi\cdot\ln x\right)}$

28 $\int_{0,1}^{0,2} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$

29 $\int_{3}^{8} \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}dx$

30 $\int_{0}^{\pi/4} \frac{3^{tgx}}{1-\sin^2 x}dx$

31 $\int_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$

32 $\int_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

33 $\int_{1}^{10} 5^{\lg x}\,\frac{dx}{x}$

34 $\int_{0}^{0,5\pi} \sin^8 x\cos^3 x dx$

35 $\int_{-0,5\pi}^{0,5\pi} \sin^2 x\cos^2 x dx$

36 $\int_{0}^{0,5\sqrt{\pi}} \frac{3x}{4\cos^2 x}dx$

Задание №7

Найти определенные интегралы

1 $\int_0^{\pi} \cos^2 x \sin^2 x dx$

2 $\int_0^{\pi} \cos x \sin^7 x dx$

3 $\int_{-2\pi}^{-\pi} \cos\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right)dx$

4 $\int_0^{\pi/12} \cos 3x \cdot \cos^2 4x dx$

5 $\int_0^{\pi/6} \cos x \cos 2x \cos 3x dx$

6 $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx$

7 $\int_0^{\pi} \cos^3 x \sin^2 x dx$

8 $\int_0^{\pi/6} \sin 2x \cos 4x \sin x dx$

9 $\int_{-2\pi}^{-\pi} \cos^5 x \sin^2 x dx$

10 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right)dx$

11 $\int_{-\pi}^{\pi} \cos 5x \sin x \cos x dx$

12 $\int_0^{\pi/6} \sin x \sin 3x \sin 5x dx$

13 $\int_{\pi/4}^{\pi/2} ctg^5 x dx$

14 $\int_0^{\pi/4} \sin 2x \cos^2 x dx$

15 $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\sin^5 x}{\cos^6 x} dx$

16 $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^6 x}$

17 $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x}$

18 $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$

19 $\int_0^{\pi} \cos^2 x \sin 3x dx$

20 $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \left(tg^3 x + ctg\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx$

21 $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \sin^4 x dx$

22 $\int_0^{\pi/3} \cos^4 x \sin^2 x dx$

23 $\int_{\pi}^{2\pi} \sin\left(\frac{5x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)dx$

24 $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cdot \sqrt[3]{\cos x} dx$

25 $\int_{-\pi}^{\pi/3} \cos^3 x \sin^3 x dx$

26 $\int_0^{\pi} \cos 4x \sin 3x dx$

27 $\int_0^{\pi} \sin^5 x dx$

28 $\int_0^{\pi/3} tg^3 x dx$

29 $\int_0^{\pi} \cos^5 x \sin^3 x dx$

30 $\int_0^{\pi} \sin 5x \sin 3x dx$

31 $\int_0^{\pi} \cos 7x \sin^2 x dx$

32 $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^4 x}$

33 $\int_{-\pi}^{0} \cos^4 x dx$

34 $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^6 x}$

35 $\int_{-\pi}^{2\pi} \cos^4\left(\frac{x}{4}\right)dx$

36 $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \cdot \sqrt[3]{\sin x} dx$

Задание №8

Исследовать на сходимость

1 $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\sqrt{16x^4+1}}dx$

2 $\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{\pi(x^2+4x+5)}$

3 $\int_0^{+\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4}dx$

4 $\int_{-\infty}^{-1} \frac{7}{(x^2-4x)\ln 5}dx$

5 $\int_{1/3}^{+\infty} \frac{\pi dx}{(1+9x^2)arctg^2 3x}$

6 $\int_1^{+\infty} \frac{4dx}{x(1+\ln^2 x)}$

7 $\int_{-1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+4x+5}dx$

8 $\int_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$

9 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)}$

10 $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x-1)^2}$

11 $\int_0^{+\infty} \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx$

12 $\int_0^{\infty} x\cdot\cos x dx$

13 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

14 $\int_{-\infty}^{0} e^{-\sqrt{x}}dx$

15 $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\cdot\ln^3 x}$

16 $\int_{-\infty}^{0} \frac{arctgx}{1+x^2}dx$

17 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2+1}}dx$

18 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(2x-1)^3}$

19 $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

20 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x+2)^3}dx$

21 $\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x^2+4x+13}$

22 $\int_3^{\infty} \frac{x^2}{x^2+4}dx$

23 $\int_4^{\infty} \frac{dx}{x^2-5x+6}$

24 $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{(x-3)^4}dx$

25 $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+4}$

26 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

27 $\int_0^{\infty} x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

28 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

29 $\int_0^{\infty} x\cdot e^{-x^2}dx$

30 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$

31 $\int_{-\infty}^{0} x\cdot\sin 2x dx$

32 $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^2+x+1}dx$

33 $\int_0^{\infty} x^2\cdot e^{-x^3}dx$

34 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x+1}}$

35 $\int_0^{\infty} x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

36 $\int_0^{\infty} (x+1)\cdot\sin x dx$

Задание №9

Исследовать на сходимость

1 $\int_0^{1/3} \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$

2 $\int_0^1 \frac{xdx}{1-x^4}$

3 $\int_0^1 \frac{2e^{1-\frac{2}{\pi}\arcsin x}}{\pi\sqrt{1-x^2}}\,dx$

4 $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-1)^3\ln 2}}$

5 $\int_0^{1/3} \frac{dx}{9x^2-9x+2}$

6 $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}\,dx$

7 $\int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}\,dx$

8 $\int_{1/3}^1 \frac{\ln(3x-1)}{3x-1}\,dx$

9 $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

10 $\int_2^4 \frac{dx}{x^2-4}$

11 $\int_1^e \frac{dx}{x\cdot\ln^2 x}$

12 $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}\,dx$

13 $\int_{-1}^0 x\cdot\ln(1+x)dx$

14 $\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{7-x}}$

15 $\int_0^{\pi/2} tgxdx$

16 $\int_0^2 \frac{2+x}{2-x}\,dx$

17 $\int_{-\pi/2}^0 ctgxdx$

18 $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos 2x}$

19 $\int_0^2 \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx$

20 $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$

21 $\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$

22 $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}\,dx$

23 $\int_0^1 \frac{dx}{x(1+x)}$

24 $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\cos 4x}$

25 $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{1+\cos x}$

26 $\int_{-3}^2 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

27 $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$

28 $\int_0^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt{x}}\,dx$

29 $\int_0^2 \frac{xdx}{4-x^2}$

30 $\int_0^1 x\cdot\ln(1-x)dx$

31 $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}\,dx$

32 $\int_{-1}^0 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$

33 $\int_{-1}^0 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx$

34 $\int_1^3 \frac{x+3}{3-x}\,dx$

35 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$

36 $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$

Задание №10

Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций

1 $\begin{cases} y = \dfrac{16}{x^2} \\ y = 17 - x^2 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$

2 $\begin{cases} y = tgx \\ y = \sqrt{3} \\ y = -1 \\ x = 0 \end{cases}$

3 $\begin{cases} y = x^3 \\ y = 2x \\ y = x \end{cases}$

4 $\begin{cases} y = \sin x \\ y = 2\cos x \\ x = 0 \end{cases}$

5 $\begin{cases} y = x^3 + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$

6 $\begin{cases} y = x^3 + 1 \\ y = (x-1)^2 \\ y = 1 - x \end{cases}$

7 $\begin{cases} 4y = x^2 \\ 2y = 6x - x^2 \end{cases}$

8 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x + y = 4 \\ x + y + 4 = 0 \end{cases}$

13 $\begin{cases} y = \sin x \\ y = -\cos x \\ x = 0 \end{cases}$

14 $\begin{cases} xy = 4\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 6x \\ y = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

15 $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = 15, \\ y = 8 \\ x \geq 0 \end{cases}$

16 $\begin{cases} xy = 2 \\ xy = 8 \\ x = 9 \\ y = 9 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 9x^2 + 16y^2 = 144 \\ x = 2, \quad x = 0 \end{cases}$

18 $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = -x + 5 \\ x = 0 \end{cases}$

19 $\begin{cases} xy + 16 = 0 \\ 4x + y = 0 \\ x + 4y = 0 \end{cases}$

20 $\begin{cases} 2x^2 + 16x - y = -35 \\ x + 4 = 0 \\ y = 0, \quad x = 0 \end{cases}$

25 $\begin{cases} xy = 20 \\ x^2 + y^2 = 41 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$

26 $\begin{cases} y = ctgx \\ y = -\sqrt{3} \\ \sqrt{3}y = -1 \\ 2x = \pi \end{cases}$

27 $\begin{cases} y = \dfrac{8}{4 + x^2} \\ 4y = x^2 \end{cases}$

28 $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ 4 - 3y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

29 $\begin{cases} x^3 - 3y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$

30 $\begin{cases} xy - 4 = 0 \\ x - 4y = 0 \\ x = 16 \end{cases}$

31 $\begin{cases} y = \cos x \\ 2y = \sqrt{3} \\ x \in [0; 2\pi] \end{cases}$

32 $\begin{cases} y = \lg x \\ 10x = 1, \\ x = 10 \\ y = 0 \end{cases}$

9	$\begin{cases} y=-x^2 \\ y+x=-2 \end{cases}$	21	$\begin{cases} x^2+6x-y+9=0 \\ x-y+5=0 \end{cases}$	33	$\begin{cases} y=\arcsin x \\ x=1 \\ y=0 \end{cases}$
10	$\begin{cases} y^2=9x \\ y=3x \end{cases}$	22	$\begin{cases} 16x^2-9y^2=144 \\ x=5 \end{cases}$	34	$\begin{cases} y=\sin 2x \\ 6x=5\pi y \end{cases}$
11	$\begin{cases} xy=9 \\ 3x+y=12 \end{cases}$	23	$\begin{cases} y=x^3-6x^2+11x-6 \\ y=0 \end{cases}$	35	$\begin{cases} xy=9 \\ xy=-9 \\ x=3,\ x=6 \end{cases}$
12	$\begin{cases} 4x^2+y^2=4 \\ x-y=0 \end{cases}$	24	$\begin{cases} y^2=x \\ xy=8 \\ x=9 \end{cases}$	36	$\begin{cases} 9y=x^2 \\ xy=3 \\ y=9 \end{cases}$

Задание №11

В вариантах 1-5 по заданной площади криволинейной трапеции найти один из пределов интегрирования.

1	$5\cdot\int_0^p x^4dx=32$	3	$\int_0^\beta \sin^3 x\cdot\cos x dx=0{,}25$	5	$\int_1^m \frac{dx}{x}=2$
2	$\int_\alpha^{\pi/2} \sin x dx=\frac{1}{2}$	4	$\int_k^1 3^x dx=\log_3 e$		

В вариантах 6,7 по заданному равенству определить верхний предел интегрирования и площадь криволинейной трапеции, выражаемую интегралом.

6	$\int_0^\alpha \frac{dx}{1+x}=\alpha\cdot\ln 2$	7	$\int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\ln\left(\alpha+\sqrt{2}\right)$

В вариантах 8-11 по заданной площади криволинейной трапеции, найти пределы интегрирования.

8	$4\cdot\int_a^{2a} x^3dx=15$	10	$\int_{-b}^b \left(2x+3x^2+4x^3+5x^4\right)dx=4$

9	$\left\|\int_{p}^{p-9}\sqrt{x}dx\right\|=18$	11	$\int_{a-4}^{a}x^{1+\log_x 5}dx=60$

В вариантах 12-14 вычислить определенный интеграл по заданному равенству.

12	$\int_{\frac{a-2}{2}}^{a/2}3x^5dx=\frac{a}{4}$	13	$\int_{a-1}^{a+2}(1+x)^2dx=7(2a+1)$	14	$\int_{a}^{3a}x^3dx=5a^2$

15. Площадь криволинейной трапеции равна $\int_{m}^{m+2}\frac{x^3}{2}dx$. Найти число **m**, если известно, что данная трапеция равновелика трапеции, площадь которой выражается интегралом $\int_{0}^{\pi}\sin xdx$.

16. Площади двух криволинейных трапеций выражаются соответственно интегралами $\int_{-1}^{t}\frac{dx}{x+2}$ и $\int_{0}^{t}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. При каких значениях параметра **t** эти трапеции равновелики?

17. Площади двух криволинейных трапеций выражаются соответственно интегралами $\int_{0}^{3t}\cos 2xdx$ и $\int_{t}^{\pi/2}\sin 3xdx$ и относятся как $3:\sqrt{2}$. Определить число **t.**

18. Доказать тождество (равновеликость криволинейных трапеций) $\int_{0}^{a}x^3dx=\frac{a^4}{8}\cdot\int_{0}^{\pi}\sin xdx$ для любого действительного значения **a.**

19. Показать, что $\int_{e}^{e^2}\frac{dx}{\ln x}=\int_{1}^{2}\frac{e^x}{x}dx$.

20. Показать, что $\int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{dx}{\arcsin x} = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{x} dx$.

21. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \ln x$, касательной к ней в точке $x = e$ и осью Ox.

22. К параболе $x - y^2 = 0$ проведены касательные в точках с абсциссой 16. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой и этими касательными.

23. К параболе $y = x^2$ в точке, абсцисса которой равна 2, проведена касательная. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой, касательной и осью абсцисс.

24. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кубической параболой $y = 2x^3$ и касательной, проведенной к параболе в точке с ординатой 16.

25. К кубической параболе $y = 2x^3 - 3x^2$ в точке ее пересечения с осью абсцисс проведена касательная. Найти площадь фигуры, расположенной справа от оси ординат и ограниченной этой осью, касательной и данной кривой.

26. К синусоиде $y = \sin x$ проведены касательные в точках с абсциссой $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{3}$. Вычислить площадь фигуры, ограниченной синусоидой и этими касательными.

27. К равносторонней гиперболе $y = \frac{4}{x}$ проведены нормали в точках с абсциссами $x_1 = 1$ и $x_2 = e$. Вычислить площадь фигуры, ограниченной гиперболой, координатными осями и этими нормалями.

28. К логарифмической кривой $y = \ln x$ проведена нормаль в точке с ординатой 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данной кривой, нормалью и осью абсцисс.

29. К параболе $1 + x + x^2 - y = 0$ проведена касательная, угловой коэффициент которой равен 3. Определить площадь фигуры, ограниченной параболой, касательной и осью ординат.

30. К центральной ветви тангенсоиды $y = tgx$ в точке с ординатой 1, проведена касательная. Вычислить площадь фигуры, ограниченной тангенсоидой и касательной.

31. Криволинейная трапеция площадью в 9000 кв.ед. ограничена кривой $x - y^2 = 0$, осью ординат и некоторой прямой, перпендикулярной оси ординат. Найти эту прямую.

32. Криволинейная трапеция площадью в 3 кв.ед. ограничена кривой $y = 3\sin x$, осью абсцисс и некоторой прямой, параллельной оси ординат. Найти прямую, если $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

33. Прямая проходит через начало координат и отсекает от кривой $y = 10x^4$ сегмент площадью 96 кв.ед. Найти точки пересечения прямой и кривой.

34. Прямая проходит через начало координат и отсекает сегмент от параболы $y = 3x^2$. При каком угле наклона прямой площадь этого сегмента составит 13,5 кв.ед?

35. Криволинейная трапеция площадью в $\frac{1}{7\ln 2}$ кв.ед. ограничена кривой $y = 2^x$, координатными осями и некоторой прямой, параллельной оси ординат. Найти уравнение этой прямой.

36. Доказать, что равенство (равновеликость криволинейных трапеций) $\int_1^p \frac{dx}{x} = \int_1^p xdx$ невозможно, если **p** – целое число, отличное по модулю от единицы.

Задание №12

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями в полярной системе координат

1	$\rho = \sin^3 \varphi$	13	$\rho = 3\sin 4\varphi$	25	$\rho^2 = \cos 4\varphi$
2	$\rho = \cos\varphi + \sin\varphi$ $\rho = \cos\varphi$	14	$\rho = \varphi$ $\rho = \varphi^2$	26	$\rho = 2\sqrt{3}\cos\varphi$ $\rho = 2\sin\varphi$
3	$\rho = 2\cos\varphi$ $\rho \geq 1$	15	$\rho = 2 - \cos\varphi$ $\rho = \cos\varphi$	27	$\rho = 2\cos 3\varphi$ $\rho \geq 1$
4	$\rho = 4\sin 2\varphi$	16	$\rho^2 = 4\sin 3\varphi$	28	$\rho = 2(1 + \cos\varphi)$
5	$\rho = 2 + \cos\varphi$	17	$\rho = 9\cos^2\varphi$	29	$\rho = 4\cos 4\varphi$
6	$\rho^2 = 9\cos 2\varphi$	18	$\rho = 3 + \sin 3\varphi$	30	$\rho = 3\sin 4\varphi$
7	$\rho = 4\cos 3\varphi$	19	$\rho = \cos\varphi + \sin\varphi$	31	$\rho = 4\sin^2\varphi$
8	$\rho = 2\cos\varphi$ $\rho = \cos\varphi$	20	$\rho = 2\sin\varphi$ $\rho = 3\cos\varphi$	32	$\rho = 2\sin\varphi$ $\rho = 4\sin\varphi$
9	$\rho = \dfrac{1}{1 - \cos\varphi}$ $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$	21	$\rho = \dfrac{1}{\varphi}$ $\rho = \dfrac{1}{\sin\varphi}$ $\varphi \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$	33	$\rho = 3\cos\varphi$ $\rho = 5\cos\varphi$
710	$\rho = 4\cos^3\varphi$	22	$\rho = 3(1 + \sin\varphi)$	34	$\rho^2 = 9\sin 2\varphi$
11	$\rho^2 = 2\cos 2\varphi$ $\rho \geq 1$	23	$\rho = \dfrac{3}{1 + 0{,}5\cos\varphi}$	35	$\rho = 4\sin\varphi$ $\rho = 4\cos\varphi$
12	$\rho = 2 + \cos 2\varphi$	24	$\rho^2 + \varphi^2 = 1$	36	$\rho = 1 + \sin\varphi$

Задание №13

Вычислить длины дуг кривых

1	$y = \ln x$ $x \in \left[\sqrt{3}; \sqrt{15}\right]$	13	$y = \ln \cos x$ $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$	25	$y = \ln \sin x$ $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$
2	$y = chx$ $x \in [0;1]$	14	$e^y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ $x \in [1;2]$	26	$y = 2ch\left(\frac{x}{2}\right)$ $x \in [0;3]$
3	$y = 1 - \ln \cos x$ $x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$	15	$5y^2 = x^3$ $x \in [0;25]$	27	$y = \ln(x^2 - 1)$ $x \in [2;3]$
4	$y = e^x$ $x \in [0;1]$	16	$y = x\sqrt{x}$ $x \in [0;9]$	28	$y = 0{,}25 \cdot x^2$ $x \in [0;2]$
5	$y = \ln 7 - \ln x$ $x \in \left[\sqrt{3}; \sqrt{8}\right]$	17	$y = 1 - \ln \sin x$ $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$	29	$2y^2 = x^3$ $x \in [0;10]$
6	$y = x\sqrt{x}$ $x \in [1;4]$	18	$y = 2 + chx$ $x \in [0;1]$	30	$y^2 = 4x$ $x \in [0;1]$
7	$y = \ln(1 - x^2)$ $x \in [0;0{,}25]$	19	$y = 2 + \ln \cos x$ $x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$	31	$y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$ $x \in [1;2]$
8	$y = 2\sqrt{x^3}$ $x \in [0;1]$	20	$x = 0{,}25y^2 - 0{,}5 \ln y$ $y \in [1; e]$	32	$y = 0{,}5 \cdot x^2$ $x \in [0;4]$
9	$y = 1 - \ln(x^2 - 1)$ $x \in [3;4]$	21	$y = 2 - e^x$ $x \in \left[\ln \sqrt{3}; \ln \sqrt{8}\right]$	33	$y = 2 \ln(4 - x^2)$ $y \geq 0$
10	$y = e^x$ $x \in [0; \ln 2]$	22	$y = 3 + chx$ $x \in [0;1]$	34	$y^2 = 2x^3$ $x \in [0;1]$

11	$y = \ln\left(\frac{5}{2x}\right)$ $x \in \left[\sqrt{3};\sqrt{8}\right]$	23	$y = 3\ln(9 - x^2)$ $y \geq 0$	35	$y = 1 - \ln\cos x$ $x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$
12	$y = 1 - \mathrm{ch}x$ $x \in [0;1]$	24	$y = 0{,}5 \cdot \mathrm{ch}\,2x$ $x \in [0;2]$	36	$y = \ln x$ $x \in \left[\sqrt{3};\sqrt{8}\right]$

Задание №14

Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями

1	$\begin{cases} x = \cos t + t \cdot \sin t \\ y = \sin t - t \cdot \cos t \end{cases}$ $t \in [0;2\pi]$	13	$\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$ $t \in [0;2\pi]$	25	$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $t \in [0;2\pi]$
2	$\begin{cases} x = 2\sin t \\ y = 2\cos t \end{cases}$ $t \in \left[0;\pi/2\right]$	14	$\begin{cases} x = 6\cos t + 8\sin t \\ y = 6\sin t - 8\cos t \end{cases}$ $t \in \left[0;\pi/2\right]$	26	$\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ $t \in \left[0;\pi/2\right]$
3	$\begin{cases} x = \cos t + \sin t \\ y = \cos t - \sin t \end{cases}$ $t \in [0;2\pi]$	15	$\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$ $t \in \left[\pi/2;2\pi/3\right]$	27	$\begin{cases} x = \cos t + \ln \mathrm{tg}\frac{t}{2} \\ y = \sin t \end{cases}$ $t \in \left[\pi/4;\pi/2\right]$
4	$\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$ $t \in \left[0;\pi/4\right]$	16	$\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$ $t \in \left[0;\pi/2\right]$	28	$\begin{cases} x = \sqrt{3} \cdot t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$ $t \in [0;0{,}5]$
5	$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ $t \in [0;\pi]$	17	$\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \ln t \end{cases}$ $t \in \left[\sqrt{3};\sqrt{15}\right]$	29	$\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}$ $t \in [0;\pi]$
6	$\begin{cases} x = 1 + 2\cos t \\ y = 3 + 2\sin t \end{cases}$ $t \in [0;\pi]$	18	$\begin{cases} x = 2 + 2\cos^2 t \\ y = 2 + 2\sin^2 t \end{cases}$ $t \in \left[0;\pi/4\right]$	30	$\begin{cases} x = \mathrm{sh}t - t \\ y = \mathrm{ch}t - 1 \end{cases}$ $t \in [0;2\pi]$

7	$\begin{cases} x = 2(\cos t + t \cdot \sin t) \\ y = 2(\sin t - t \cdot \cos t) \end{cases}$ $t \in [0;\pi]$	19	$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \dfrac{t^3}{3} \end{cases}$ $t \in [0;1]$	31	$\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \dfrac{t}{4} \end{cases}$ $t \in [1;2]$
8	$\begin{cases} x = t \\ y = t\sqrt{t} \end{cases}$ $t \in [0;1]$	20	$\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}$ $t \in [0;\pi/6]$	32	$\begin{cases} x = \cos^4 t \\ y = \sin^4 t \end{cases}$ $t \in [0;\pi/2]$
9	$\begin{cases} x = 4\cos t - 2\cos 2t \\ y = 4\sin t - 2\sin 2t \end{cases}$ $t \in [0;\pi]$	21	$\begin{cases} x = ch^3 t \\ y = sh^3 t \end{cases}$ $t \in [0;2\pi]$	33	$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$ $t \in [0;\ln \pi]$
10	$\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \dfrac{t}{2} \end{cases}$ $t \in [1;9]$	22	$\begin{cases} x = 3(sht - t) \\ y = 3(cht - 1) \end{cases}$ $t \in [0;2\pi]$	34	$\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \ln(t-1) \end{cases}$ $t \in [4;9]$
11	$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \dfrac{t^3}{3} \end{cases}$ $t \in [0;\sqrt{3}]$	23	$\begin{cases} x = \sqrt{3} \cdot t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$ $t \in [0;1]$	35	$\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{3} - t \\ y = t^2 + 2 \end{cases}$ $t \in [0;3]$
12	$\begin{cases} x = 2(sht - t) \\ y = 2(cht - 1) \end{cases}$ $t \in [0;\pi]$	24	$\begin{cases} x = 9(t - \sin t) \\ y = 9(1 - \cos t) \end{cases}$ $t \in [0;\pi]$	36	$\begin{cases} x = \cos^5 t \\ y = \sin^5 t \end{cases}$ $t \in [0;\pi/4]$

Задание №15

Вычислить длины дуг, ограниченных линиями, заданными уравнениями в полярной системе координат

1	$\rho = 2(1 - \sin\varphi)$ $\varphi \in [0;\pi/4]$	13	$\rho = 3(\cos\varphi + \sin\varphi)$ $\varphi \in [0;\pi/6]$	25	$\rho = 1 - \sin\varphi$ $\varphi \in [-\pi/2;-\pi/6]$
2	$\rho = 2e^{\varphi}$, $\varphi \in [0;1]$	14	$\rho = \varphi$, $\varphi \in [0;\pi]$	26	$\rho = 4\varphi$, $\varphi \in [0;\pi/4]$
3	$\rho = 2\varphi$	15	$\rho = 1 + \cos\varphi$	27	$\rho = \sqrt{2} \cdot e^{\varphi}$

	$\varphi \in [0;\pi]$		$\varphi \in [0;\pi/2]$		$\varphi \in [0;\pi/3]$
4	$\rho = 3\varphi$ $\varphi \in [0;\pi/2]$	16	$\rho = 2(1+\cos\varphi)$ $\varphi \in [-\pi/2;\pi/2]$	28	$\rho = 3(1+\sin\varphi)$ $\varphi \in [0;\pi/6]$
5	$\rho = 1-\cos\varphi$ $\varphi \in [0;\pi/2]$	17	$\rho = \varphi^2$ $\varphi \in [0;\pi]$	29	$\rho = 2(\cos\varphi+\sin\varphi)$ $\varphi \in [0;\pi/4]$
6	$\rho = \frac{1}{\cos\varphi}, \varphi \in [0;\pi/4]$	18	$\rho = 3\sin\varphi$ $\varphi \in [\pi/4;\pi]$	30	$\rho = 3\cdot e^{3\varphi/4}$ $\varphi \in [-\pi/2;\pi/2]$
7	$\rho = 3\cos\varphi$ $\varphi \in [-\pi/2;\pi/2]$	19	$\rho = \cos\varphi+\sin\varphi$ $\varphi \in [0;\pi/2]$	31	$\rho = 2\varphi^2$ $\varphi \in [\pi/4;\pi]$
8	$\rho = 4\cos\varphi$ $\varphi \in [-\pi/2;\pi/4]$	20	$\rho = \text{th}(0{,}5\varphi)$ $\varphi \in [0;2\pi]$	32	$\rho = 2\sin\varphi$ $\varphi \in [0;\pi]$
9	$\rho = 3\varphi^2,\ \varphi \in [0;\pi/4]$	21	$\rho = \frac{1}{\varphi},\ \varphi \in [3/4;4/3]$	33	$\rho = \frac{3}{\varphi},\ \varphi \in [3/4;1]$
10	$\rho = \frac{1}{\sin\varphi}$ $\varphi \in [\pi/4;\pi/2]$	22	$\rho = \sin^3\frac{\varphi}{3}$ $\varphi \in [0;\pi/3]$	34	$\rho = \frac{1}{1+\cos\varphi}$ $\varphi \in [-\pi/2;\pi/2]$
11	$\rho = 8(1-\cos\varphi)$ $\varphi \in [-2\pi/3;0]$	23	$\rho = 1-\cos\varphi$ $\varphi \in [0;2\pi]$	35	$\rho = 2\cdot\text{th}(0{,}5\varphi)$ $\varphi \in [0;2\pi]$
12	$\rho = \cos^3\frac{\varphi}{3}$ $\varphi \in [0;\pi/2]$	24	$\rho = \frac{2}{\sin\varphi}$ $\varphi \in [\pi/3;\pi/2]$	36	$\rho = \frac{4}{\cos\varphi}$ $\varphi \in [0;\pi/3]$

Задание №16

Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций. Для вариантов 1-18 ось вращения – ось Ох, для вариантов 19-36 ось вращения – ось Оу.

1	$\begin{cases} y = \sqrt{x} \cdot e^{x} \\ y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$	13	$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4} \\ y = \dfrac{x^3}{8} \end{cases}$	25	$\begin{cases} y = \dfrac{1}{1+x^2} \\ 2y = x \\ x = 0 \end{cases}$
2	$\begin{cases} y = \sin x \\ y = 0 \end{cases} \quad x \in [0;\pi]$	14	$\begin{cases} xy = 4 \\ y = 0 \end{cases} \quad x \in [2;\infty)$	26	$x^2 - y^2 = 4$ $y \in [-2;2]$
3	$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = \cos^3 t \end{cases}$ $t \in [0; \pi/2]$	15	$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $t \in [0;2\pi]$ $y = 0$	27	$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 0 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$
4	$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad x \in [0;1]$	16	$y = 3\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2/3} \quad x \in [0;2]$	28	$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x^3 \end{cases}$
5	$\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases}$	17	$y = e^{-x} \cdot \sqrt{\sin x}$ $x \in [0;\pi]$	29	$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = 0 \end{cases}$
6	$\begin{cases} y = \operatorname{ch} x \\ y = 0 \end{cases} \quad x \in [0;1]$	18	$\begin{cases} y = x^3 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$	30	$\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = 8x \end{cases}$
7	$\begin{cases} y = \operatorname{sh} x \\ y = 0 \end{cases} \quad x \in [1;2]$	19	$\begin{cases} y = (x-1)^2 \\ y = 1 \end{cases}$	31	$\begin{cases} y = x^3 \\ y = x \end{cases}$
8	$\begin{cases} xy = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad x \in [0;\infty)$	20	$\begin{cases} y = \ln x \\ x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$	32	$\begin{cases} y = e^{-x} \\ y = 0 \end{cases} \quad x \in [0;\infty)$
9	$\begin{cases} y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ y = 0 \end{cases} \quad x \in [0;\infty)$	21	$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 4 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$	33	$\begin{cases} y = \arcsin x \\ y = \arccos x \\ x = 0 \end{cases}$
10	$\begin{cases} y = \cos x \\ y = 0 \end{cases} \quad x \in [0;\pi]$	22	$\begin{cases} y = \arcsin x \\ y = \arccos x \\ y = 0 \end{cases}$	34	$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

11	$y = 2\left(\frac{x}{5}\right)^{2/3}$ $x \in [0;5]$	23	$\begin{cases} xy = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ $y \in [1;8]$	35	$\begin{cases} y = chx \\ x = 0 \end{cases}$ $y \in [1;2]$
12	$\begin{cases} y = 3\sin x \\ y = \sin x \end{cases}$ $x \in [0;\pi]$	24	$\begin{cases} y = e^x \\ x = 0 \end{cases}$ $y \in [1;2]$	36	$\begin{cases} y = x^3 \\ x = 0 \end{cases}$ $y \in [0;8]$

Задание №17

С помощью определенного интеграла решить следующие физические задачи.

1. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из котла, имеющего форму параболоида вращения, радиус основания которого равен R, а высота H.
2. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы вытащить из воды конус, подвешенный так, что его вершина находится на поверхности воды.
3. Шар радиуса R и удельного веса $\gamma = 1$ погружен в воду так, что касается ее поверхности. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы извлечь шар из воды.
4. Из цилиндрической цистерны выкачивается жидкость. Какая при этом должна быть совершена работа, если длина цистерны ℓ м, а диаметр d метров?
5. Цилиндрический баллон диаметром 24 см и длиной 80 см наполнен газом под давлением 2 $кн/м^2$. Какую работу надо совершить при изотермическом сжатии газа до объема в 2 раза меньшего?
6. Вычислить работу, которую надо совершить, чтобы насыпать из песка конус, радиус основания которого R=1,2 м, а высота 1 м.
7. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,06 м, если сила 1 н. растягивает ее на 0,01 м?

8. Вычислить работу, необходимую для выкачивания масла из вертикального цилиндрического резервуара высотой $H = 6$ м и радиусом основания $R = 2$ м. Удельный вес масла $\gamma = 8820$ н/м^3.
9. Однородный прямой конус высотой 0,1 м и радиусом основания 0,1 м, удельным весом $\gamma = 29400$ н/м^3 находится на дне бассейна глубиной 0,1 м. Какую работу надо совершить, чтобы извлечь этот конус из воды?
10. Какую работу нужно произвести, чтобы поднять тело весом P н на высоту H м от центра земли.
11. Растяжение пружины пропорционально приложенной силе. Вычислить работу при растяжении пружины на 6 см, если сила, равная 2 кН, удлиняет ее на 1 см.
12. Деревянная прямоугольная балка плавает на поверхности воды. Вычислить работу, необходимую для ее извлечения из воды, если размеры поперечного сечения балки равны 0,4 м; 0,2 м; длина 4,5 м, а удельный вес дерева $\gamma = 0{,}8$ г/м^3.
13. Вычислить работу, которую необходимо совершить, чтобы выкачать воду из резервуара, имеющего форму полушара радиуса $R = 8$ м.
14. Вычислить работу, которую необходимо совершить, чтобы остановить железный шар радиуса R, вращающийся с угловой скоростью ω вокруг своего диаметра.
15. Определить работу, совершаемую при подъеме спутника с поверхности Земли на высоту 200 км. Масса спутника равна 6 т, радиус Земли $R = 6380$ км. Ускорение свободного падения у поверхности Земли $g = 10$ м/с^2.
16. В жидкость плотности ρ погружена треугольная пластина так, что ее вершина находится на поверхности воды. Найти давление жидкости на пластину, если основание треугольника равно a, а высота h.
17. Найти давление бензина на стенки цилиндрического бака высотой 4 м и радиусом 2 м, если плотность бензина $\rho = 900$ кгс/м^3.
18. Вычислить силу давления воды на вертикальную плотину, имеющую форму трапеции с верхним основанием 70 м, нижним 50 м и высотой 20 м.

19. Вычислить силу давления жидкости на вертикальный эллипс с осями 2a и 2b, центр которого погрузили в жидкость на уровень $h\ (h \geq b)$. d –плотность жидкости.
20. Найти давление на пластинку, имеющую форму равнобочной трапеции с основаниями a и b, высотой h, погруженную в жидкость на глубину d.
21. Найти величину давления воды на вертикальную стенку в форме полукруга, диаметр которого, равный 6 см, находится на поверхности воды. Плотность воды $\rho = 1000$ кгс/м^3.
22. Вертикальная плотина имеет форму параболического сегмента высотой $h = 12$ м. Верхнее основание $a = 30$ м находится на поверхности воды. Вычислить силу давления воды на плотину.
23. Определить давление воды на вертикально погруженный в неё эллипс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, если большая ось находится на поверхности воды.
24. Плотина имеет форму трапеции. Вычислить давление воды на плотину, если верхнее основание ее равно 800 м, нижнее 200 м, а высота 20 м.
25. Найти величину давления воды на поверхность шара диаметром 4 м, если его центр находится на глубине 3 м.
26. В жидкость с плотностью ρ погружена круглая пластина диаметром d. Найти давление жидкости на пластину, если пластина касается поверхности воды.
27. Верхний край шлюза, имеющий форму квадрата со стороной 8 м, лежит на поверхности воды. Определить величину давления на каждую из частей шлюза, полученных делением квадрата его диагональю.
28. Найти величину давления воды на поверхность шара диаметром d, если его центр находится на глубине $d/2$.
29. Вычислить величину давления на прямоугольник, вертикально погруженный в воду, если известно, что основание его равно 5 м, высота 4 м, верхнее основание параллельно свободной поверхности воды и находится на глубине 5 м.

30. Прямоугольная пластинка со сторонами a и b погружена в воду под углом α к поверхности воды. Вычислить давление воды на пластинку, если большая ее сторона a параллельна поверхности и лежит на глубине H.
31. При прямолинейном движении тяжелой точки в некоторой среде сила сопротивления возрастает прямо пропорционально квадрату пути, пройденному точкой от начального пункта движения. Найти работу силы сопротивления как функцию пройденного пути.
32. При разгоне двигателя потребляемая мощность меняется по закону $N = 0{,}1t^3$, где t – в сек, N – в Квт. Найти работу, затраченную на разгон двигателя, если время разгона равно 3 сек. Силами сопротивления пренебречь.
33. Маховик радиусом r и массой m равномерно вращается с угловой скоростью ω. Определить кинетическую энергию маховика W.
34. Найти абсолютное сжатие колонны высотой h и площадью сечения S, вызванное ее собственным весом P. (Применить закон Гука).
35. Напряжение на конденсаторе равно U, емкость его равна C. Найти потенциальную энергию конденсатора.
36. Поле образовано точечным зарядом q. Вычислить потенциал поля φ в точке, удаленной от заряда на расстояние r.

Задача №18

С помощью определенного интеграла решить следующие физические задачи

1. За какое время вода вытечет из конической воронки высотой $H = 40$ см, радиус нижнего основания $r = 0{,}3$ см, верхнего $R = 6$ см (воспользоваться законом Торричелли).
2. В дне цилиндрического сосуда с площадью основания 100 $см^2$, высотой 30 см имеется отверстие. Найти площадь этого отверстия, если известно, что вода, наполняющая сосуд, вытекает из него за 2 мин. (воспользоваться законом Торричелли).

3. Скорость движения точки $V = t \cdot e^{-0,01t}$ м/с. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки.
4. Найти массу стержня длиной $\ell = 100$ см, если линейная плотность стержня на расстоянии x см от одного из его концов равна $\rho = 2 + 0,001x^2$ г/см^2.
5. Согласно эмпирическим данным удельная теплоемкость воды при температуре t° C ($0^\circ \le t^\circ \le 100^\circ$) равна $C = 1 - 5,2 \cdot 10^{-5} t + 6,9 \cdot 10^{-7} t^2$. Какое количество тепла нужно затратить, чтобы 1 г воды нагреть от $t = 0^\circ$ C до $t = 100^\circ$ C?
6. Ветер производит равномерное давление P на дверь, ширина которой равна b, высота равна h. Найти момент силы давления ветра, стремящегося повернуть дверь на петлях.
7. С какой силой притяжения действует материальный стержень длиной ℓ и массой M на материальную точку массы m, находящуюся на одной прямой со стержнем на расстоянии a от одного из его концов?
8. Скорость движения материальной точки $V = 0,5t^2$ м/с. Найти путь S, пройденный точкой за время $t = 8$ с после начала движения. Чему равна средняя скорость движения на этом промежутке времени?
9. Найти массу стержня длиной 100 см, если линейная плотность стержня меняется по закону $\rho = (20x + 0,15x^2)$ г/см, где x – расстояние от одного из его концов?
10. Скорость материальной точки изменяется по закону $V = (12 - 2t)$ м/с. Каково наибольшее удаление точки от начала движения?
11. Вычислить кинетическую энергию диска массой M и радиусом R, вращающегося с угловой скоростью ω около оси, проходящей через центр диска перпендикулярно к его плоскости?
12. Найти количество тепла, выделяемое переменным синусоидальным током $I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi\right)$ в течение периода T в проводнике с сопротивлением R (Воспользоваться законом Джоуля - Ленца).

13. Вычислить кинетическую энергию прямоугольной пластинки, стороны которой a см и b см $(a > b)$, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω c^{-1} вокруг оси, проходящей через ее центр параллельно большей стороне.
14. Пластинка, имеющая форму треугольника с основанием a см и высотой h см, вращается с постоянной угловой скоростью ω c^{-1} вокруг стороны a. Вычислить кинетическую энергию этой пластинки.
15. Скорость тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью V_0 см/с, без учета сопротивления воздуха, дается формулой $V = V_0 - gt$, где t – протекшее время, g – ускорение силы тяжести. На каком расстоянии от начального положения будет находиться тело через t секунд?
16. Ракета поднимается вертикально вверх. Считая, что при постоянной силе тяги ускорение ракеты за счет уменьшения ее веса растет по закону $j = \frac{A}{a - bt}$, $(a - bt) > 0$. Найти скорость ракеты в любой момент времени t, если начальная ее скорость равна 0.
17. При установившемся ламинарном течении жидкости через трубу круглого сечения радиуса R скорость течения V в точке, находящейся на расстоянии r от оси трубы, дается формулой $V = \frac{P}{4\mu\ell}(R^2 - r^2)$, где P – разность давлений жидкости на концах трубы; μ – вязкость; ℓ – длина трубы. Определить расход жидкости Q, то есть количество жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы в единицу времени.
18. С какой силой проволочное кольцо радиусом R и массой M действует на материальную точку C массой m, лежащую на прямой, проходящей через центр кольца, перпендикулярно к его плоскости, если расстояние от точки C до центра кольца равно a?
19. С какой силой полукольцо радиусом r и массой M действует на материальную точку массы m, находящуюся в его центре?

20. Тело, температура которого 25°С, погружено в термостат (температура которого поддерживается при 0°С). За какое время тело охладится до 10°С, если за 20 мин оно охлаждается до 20°С? (Воспользоваться законом охлаждения Ньютона).
21. Тело, температура которого 30°С, за 30 мин пребывания в термостате при температуре 0°С охладилось до 22,5°С. Какова будет температура тела через 3 ч после начала опыта? (Воспользоваться законом охлаждения Ньютона).
22. Напряжение на клеммах электрической цепи U=120 В. В цепь равномерно вводится сопротивление со скоростью 0,1 Ом в секунду. Кроме того. В цепь включено постоянное сопротивление r=10 Ом. Сколько кулонов электричества пройдет через цепь в течение 2-х минут?
23. Напряжение на клеммах электрической цепи, равное первоначально 120В, равномерно падает, убывая на 0,01 В в секунду. Одновременно с этим в цепь вводится сопротивление с постоянной скоростью, равной 0,1 Ом в секунду. Сколько кулонов электричества пройдет через цепь в течение 3 мин, если в цепи имеется постоянное сопротивление r=12 Ом?
24. Если при прохождении через слой воды толщиной 3 м поглощается половина первоначального количества света, то какая часть этого количества дойдет до глубины 30 м? (Количество света, поглощенного при прохождении через слой воды, пропорционально толщине слоя и количеству света, падающего на поверхность).
25. Если количество фермента 1 г через час становится равным 1,2 г, то чему оно будет равно через 5 часов после начала брожения, если считать, что скорость прироста фермента пропорциональна его наличному количеству.
26. 2 кг соли растворяют в 30 л воды. Через 5 мин 1 кг соли растворяется. Через сколько времени растворится 99% первоначального количества? (Скорость растворения пропорциональна количеству нерастворенной соли и разности между концентрацией насыщенного раствора, которая равна 1 кг на 3 л, и концентрацией раствора в данный момент).

27. Воздух, наполняющий сосуд вместимостью в 3 л, содержит 20% кислорода. Сосуд имеет 2 трубки. Через одну из них в сосуд начинают впускать чистый кислород, через другую наружу выпускают столько же воздуха, сколько впускают кислорода. Какое количество кислорода будет содержаться в сосуде, после того как через него протечет 10 л газа? В каждый момент концентрация кислорода в сосуде при помощи перемешивания сохраняется одной и той же во всем его объеме.
28. В дне котла, имеющего форму полушара радиусом R=43 см, образовалась пробоина площадью S=0,2 $см^2$. Через сколько времени вода, наполняющая котел, вытечет из него? (Воспользоваться законом Торричелли).
29. Круглый цилиндр, радиус основания которого R, а высота H, вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω. Плотность материала, из которого сделан цилиндр, равна ρ. Найти кинетическую энергию цилиндра.
30. Тонкая проволочка массы M согнута в виде полуокружности радиуса R и вращается вокруг оси, проходящей через концы полуокружности, делая n оборотов в мин. Вычислить ее кинетическую энергию.
31. Материальная точка движется прямолинейно под действием силы $P = P_0 \sin\frac{\pi x}{\ell}$, где P_0 и ℓ - постоянные величины, x – путь в м, P – сила в ньютонах. Найти работу на пути $x = 11\ell$, считая от начального пункта движения.
32. По катушке индуктивностью L течет постоянный ток I. Найти энергию W магнитного поля катушки.
33. Вычислить среднюю за период мощность в цепях переменного тока: а) с чисто активным сопротивлением, б) с чисто реактивным (идуктивным или емкостным) сопротивлением. (Среднюю за период мощность P определяют как отношение энергии тока, затраченной за время одного периода, к периоду тока, т.е. $P = \frac{1}{T}\int_0^T uidt$).

34. Конденсатор разряжают на резистор сопротивлением r. Известно, что разрядный ток меняется по закону $i = Je^{-\beta t}$, где J и β - постоянные величины. Ток дан в амперах, сопротивление – в омах. Какую работу совершит ток за первую секунду процесса?

35. При замыкании цепи ток нарастает по закону $i = 4(1 - e^{-2t})$, где ток дан в амперах. В цепь включена электролитическая ванна с раствором CuSO4. Сколько меди выделится из раствора за первые 5 сек электролиза?

36. В цилиндре с поршнем заключено m кг газа с молекулярным весом μ при температуре T° по шкале Кельвина. Вычислить, какая работа затрачивается при изотермическом сжатии газа, если поршень перемещают в направлении сжатия на величину ΔH при высоте рабочей части цилиндра H? (Применить уравнение Клайперона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, где p – давление, V - давление газа, R – универсальная газовая постоянная).

Задача №19

Вычислить с точностью $\Delta = 10^{-5}$ определенные интегралы при помощи компьютерных пакетов программ

1 $\int_{-4}^{6} \sqrt{x^4 + 6}\,dx$

2 $\int_{2}^{7} \frac{dx}{\ln x}$

3 $\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx$

4 $\int_{2}^{10} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

5 $\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{2 + \cos x}\,dx$

6 $\int_{\pi/12}^{\pi/4} \frac{tgx}{x}\,dx$

7 $\int_{-1}^{9} x^2 \cdot \sqrt{10 + x^2}\,dx$

8 $\int_{1}^{10} \frac{e^x}{x + 5}\,dx$

9 $\int_{0}^{2} \sqrt{1 + x^4}\,dx$

10 $\int_{2}^{10} e^{-x^2}\,dx$

11 $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx$

12 $\int_{1}^{5} \sqrt{x} \cdot e^x\,dx$

13 $\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\,dx$

14 $\int_{1}^{3} \frac{e^x}{x}\,dx$

15 $\int_{0}^{1} \sqrt[3]{2 + x^2}\,dx$

16 $\int_{2}^{10} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}$

17 $\int_{0}^{1} \sqrt{4 + x^3}\,dx$

18 $\int_{1}^{10} \frac{x}{\sqrt{1 + e^x}}\,dx$

19 $\int_{0}^{1} \sqrt{tgx}\,dx$

20 $\int_{1}^{5} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx$

21 $\int_{1}^{10} arctgx\,dx$

22 $\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$

23 $\int_{0}^{1} \frac{arctgx}{x}\,dx$

24 $\int_{0}^{2} \sqrt{1 + x^5}\,dx$

25 $\int_{0}^{\pi/4} \sqrt{1 + \sin^2 x}\,dx$

26 $\int_{0}^{1} e^{-\frac{x^2}{4}}\,dx$

27 $\int_{-5}^{5} \sqrt[3]{1 + x^2}\,dx$

28 $\int_{2}^{5} \frac{dx}{\ln^2 x}$

29 $\int_{0}^{\pi} \sqrt{3 - \sin x}\,dx$

30 $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1 + x}}\,dx$

31 $\int_{0}^{4} \sqrt{7 + x^4}\,dx$

32 $\int_{0}^{1} \frac{x^3}{x^8 + 1}\,dx$

33 $\int_{1}^{10} \ln^2 x\,dx$

34 $\int_{1}^{5} \frac{e^{x^2}}{x^2}\,dx$

35 $\int_{0}^{0,5} e^{\sqrt{x}}\,dx$

36 $\int_{0}^{1} \sqrt{x(1 - x)}\,dx$

3.4 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

"Приближенное вычисление определенных интегралов"

Цель работы: изучение приближенных методов вычисления определенных интегралов с помощью пакета **MathCad**.

В лабораторной работе рассмотрены способы вычисления определенных интегралов методами прямоугольников, трапеций и парабол (Симпсона).

Варианты заданий к лабораторной работе приведены в 3.3.19.

Ниже рассмотрено решение тестового примера.

Задание: Вычислить с точностью eps=0.01 определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с помощью пакета MathCad.

1. Задайте подынтегральную функцию и промежуток интегрирования [a,b]

$f(x) := \sqrt{x}$

$a := 1 \quad b := 9$

2. Точное значение интеграла, вычисленное средствами MathCad

$$\int_a^b f(x)\,dx = 17.333$$

3. Задайте точность вычисления интеграла

$eps := 0.01$

4. Вычисление определенного интеграла методом прямоугольников

4.1) Расчет максимального значения первой производной

$$d1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

$M_0 := |d1(a)|$

$M_1 := |d1(b)|$

$$M_2 := \left| d1\left[\frac{(a+b)}{2}\right] \right|$$

$$M = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.167 \\ 0.224 \end{pmatrix}$$

$maxM1 := \max(M)$

$$\text{maxM1} = 0.5$$

4.2) Расчет шага вычислений

$$h := \left\lfloor \sqrt{12 \cdot \frac{eps}{\text{maxM1} \cdot (b - a)}} \right\rfloor$$

$$h = 0.173$$

4.3) Расчет числа разбиений

$$n := \text{round}\left(\left\lfloor \frac{(b - a)}{h} \right\rfloor \right)$$

$$n = 46$$

4.3а) Уточнение шага

$$h := \frac{(b - a)}{n}$$

$$h = 0.174$$

4.4) Вычисление определенного интеграла

$$i := 0 .. n$$

$$x_i := a + h \cdot (i + 0.5)$$

$$\text{InPr} := h \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i\right) \right)$$

$$\text{InPr} = 17.334$$

5. Вычисление определенного интеграла методом трапеций

5.1) Расчет максимального значения второй производной

$$d2x(x) := \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

$$M_0 := \left| d2x(a) \right|$$

$$M_1 := \left| d2x(b) \right|$$

$$M_2 := \left| d2x\left(\left\lfloor \frac{(a + b)}{2} \right\rfloor \right) \right|$$

$$M = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 9.259 \times 10^{-3} \\ 0.022 \end{pmatrix}$$

$$\text{maxM2} := \max(M)$$

$$\text{maxM2} = 0.25$$

5.2) Расчет шага вычислений

$$h := \left\lfloor \sqrt{12 \cdot \frac{eps}{maxM2 \cdot (b - a)}} \right\rfloor$$

$h = 0.245$

5.3) Расчет числа разбиений

$$n := round\left\lfloor \frac{(b - a)}{h} \right\rfloor$$

$n = 33$

5.3а) Уточнение шага

$$h := \frac{(b - a)}{n}$$

$h = 0.242$

5.4) Вычисление определенного интеграла

$i := 0 .. n$

$x_i := a + h \cdot i$

$$InTrap := h \cdot \left\lfloor \sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_i\right) + \frac{\left(f\left(x_0\right) + f\left(x_n\right)\right)}{2} \right\rfloor$$

$InTrap = 17.332$

6. Вычисление определенного интеграла методом парабол (Симпсона)

6.1) Расчет максимального значения четвертой производной

$$d4x(x) := \frac{d^4}{dx^4} f(x)$$

$M_0 := \left|d4x(a)\right|$

$M_1 := \left|d4x(b)\right|$

$$M_2 := \left| d4x\left\lfloor \frac{(a + b)}{2} \right\rfloor \right|$$

$$M = \begin{pmatrix} 0.937 \\ 4.287 \times 10^{-4} \\ 3.354 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$maxM4 := max(M)$

$maxM4 = 0.937$

6.2) Расчет шага вычислений

$$h := \sqrt[4]{180 \cdot \frac{eps}{maxM4 \cdot (b - a)}}$$

$h = 0.7$

6.3) Расчет числа разбиений

$$n := round\left[\frac{(b - a)}{h}\right]$$

$$n := n + 1$$

$n = 12$

6.3а) Уточнение шага

$$h := \frac{(b - a)}{n}$$

$h = 0.667$

6.4) Вычисление определенного интеграла

$i := 0 .. n$

$xx_i := a + h \cdot i$

$$m := \frac{n}{2}$$

$$S0n := f\left(xx_0\right) + f\left(xx_n\right)$$

$$InSim := \frac{h}{3} \cdot \left(S0n + 4 \cdot \sum_{j=1}^{m} f\left(xx_{2 \cdot j-1}\right) + 2 \cdot \sum_{j=2}^{m} f\left(xx_{2 \cdot j-2}\right) \right)$$

$InSim = 17.333$