

Министерство образования и науки Российской Федерации



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

"УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЯНОЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ"
(УГНТУ)

Кафедра математики

УЧЕБНО – МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

**МОДУЛЬ: «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ
НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ»**

Часть 1:

Теоретические основы

Методические указания для студентов

Материалы для самостоятельной работы студентов

Уфа • 2017

УДК 517.2(07)
ББК 22.161.1 я 7
У90

Ответственный редактор д. ф.-м. наук, проф. Р.Н. Бахтизин

Редколлегия:

Акмадиева Т.Р., Аносова Е.П., Байрамгулова Р.С., Галиуллин М.М., Галиакбарова Э.В., Гимаев Р.Г., Егорова Р.А., Зарипов Э.М., Зарипов Р.М., Исламгулова Г.Ф., Ковалева Э.А., Майский Р.А., Мухаметзянов И.З., Нагаева З.М., Савлучинская Н.М., Сахарова Л.А., Степанова М.Ф., Сокова И.А., Сулейманов И.Н., Умергалина Т.В., Фаткуллин Н.Ю., Хайбуллин Р.Я., Хакимов Д.К., Хакимова З.Р., Чернятьева М.Р., Юлдыбаев Л.Х., Шамшович В.Ф., Якубова Д.Ф., Якупов В.М., Янчушка А.П., Яфаров Ш.А.

Рецензенты: Кафедра программирования и вычислительной математики Башкирского государственного педагогического университета. Заведующий кафедрой д. ф.-м. наук, профессор Р.М. Асадуллин. Кафедра вычислительной математики Башкирского государственного университета. Заведующий кафедрой д. ф.-м. наук, профессор Н.Д. Морозкин.

Учебно-методическое пособие. Модуль: «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных». ЧАСТЬ 1: Теоретические основы. Методические указания для студентов. Материалы для самостоятельной работы студентов. – Уфа: Издательство УГНТУ, 2017. – 141 с.

Содержит теоретические материалы, способы и методы решения практических задач, задания для самостоятельной работы студентов, контрольные вопросы для самопроверки, список рекомендуемой литературы.

Разработан для студентов, обучающихся по всем формам обучения по направлениям подготовки и специальностям, реализуемым в УГНТУ.

УДК 517.2(07)
ББК 22.161.1 я 7

Уфимский государственный нефтяной технический университет, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

1. Теоретические основы	
1.1. Предварительные сведения	5
1.2. Определение функции нескольких переменных	7
1.3. Геометрическое изображение функции двух переменных	8
1.4. Предел и непрерывность функции нескольких переменных	10
1.5. Частные производные функции нескольких переменных	12
1.6. Геометрический смысл частных производных функции двух переменных	14
1.7. Частные производные высших порядков	15
1.8. Дифференцируемость функции нескольких переменных	16
1.9. Производные сложной функции	18
1.10. Полный дифференциал функции нескольких переменных и его приложения	21
1.11. Неявные функции и их дифференцирование	24
1.12. Экстремум функции двух переменных	27
1.13. Наибольшее и наименьшее значение функции двух переменных	29
1.14. Условный экстремум	30
1.15. Производная по направлению	34
1.16. Градиент	37
2. Методические указания для студентов	
2.1. Область определения функции. Линии и поверхности уровня.	42
2.2. Предел функции.	47
2.3. Непрерывность функции.	51
2.4. Частные производные функции.	53
2.5. Дифференциал функции.	55
2.6. Частные производные и дифференциалы высших поряд- ков.	57
2.7. Производная по направлению. Градиент.	61
2.8. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.	62
2.9. Экстремум функции.	64
2.10. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области.	71
2.11. Условный экстремум функции.	73
3. Материалы для самостоятельной работы студентов	
3.1. Контрольные вопросы	81
3.2. Задачи и упражнения для самостоятельной работы	82
3.3. Расчетные задания	103
3.4. Лабораторная работа	130
3.5. Литература	143

УЧЕБНО – МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

МОДУЛЬ: «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННОЙ»

ЧАСТЬ 1

1. Теоретические основы

1.1 ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

До сих пор мы занимались изучением функций одной переменной, т.е. изучением функции, значения которой зависят от значений одной независимой переменной.

На практике часто приходится иметь дело с величинами, численные значения которых зависят от значений нескольких изменяющихся независимо друг от друга физических и геометрических величин. Так, например, температура нагретого тела в данный момент времени t меняется от точки к точке. Поскольку каждая точка тела определяется тремя координатами x, y, z , а если еще учитывать зависимость температуры от времени, то значения ее будут определяться значениями уже четырех переменных x, y, z, t . Примеров таких зависимостей можно привести сколько угодно. Изучение таких величин приводит к понятию функции нескольких переменных.

Пусть на плоскости введена прямоугольная система координат xOy .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 Множество всех точек $M(x, y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta, \quad (1.1)$$

где $\delta > 0$, $M(x_0, y_0)$ — некоторая фиксированная точка, называется δ — окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$.

Геометрически δ — окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$ представляет внутренность круга радиуса δ с центром в точке M_0 (рис. 1.1)

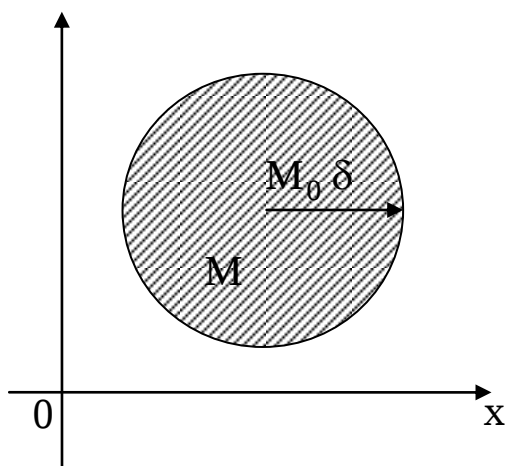
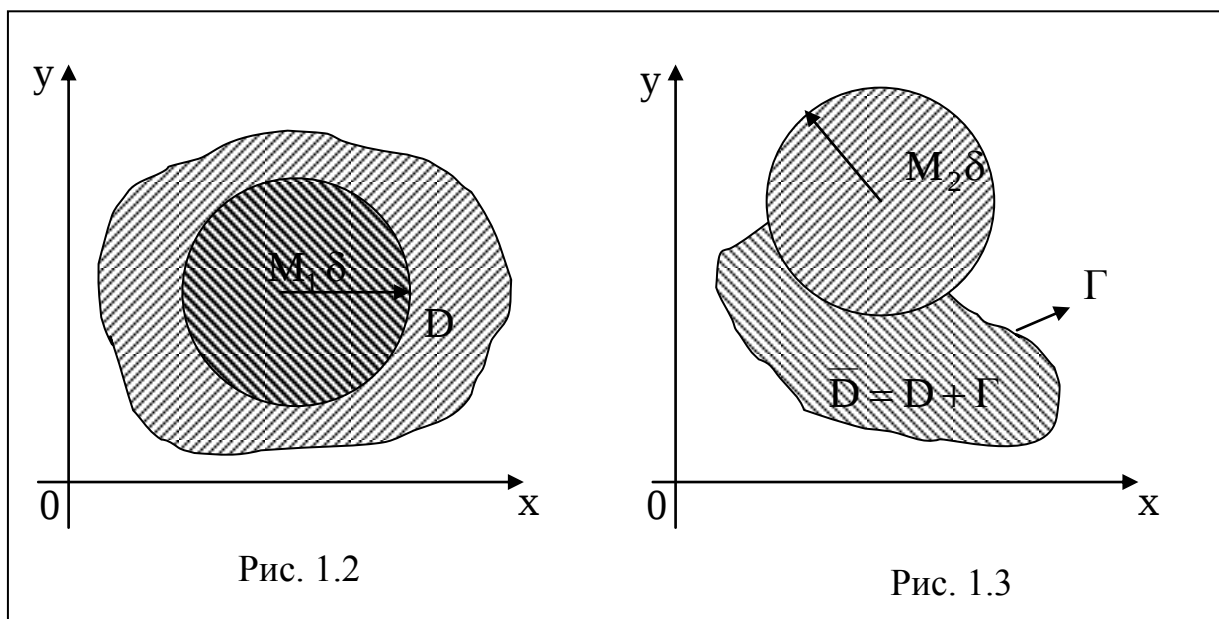


Рис. 1.1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2 Точка $M_1(x_1, y_1)$ называется *внутренней точкой* некоторого множества D , если существует δ — окрестность этой точки, состоящая целиком из точек данного множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3 Множество D , состоящее лишь из внутренних точек, называется *открытым множеством*. (Рис. 1.2).



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4 Точка $M_2(x_2, y_2)$ называется граничной точкой множества D , если в любой ее δ – окрестности есть точки, как принадлежащие множеству D , так и не принадлежащие ему. Множество всех граничных точек данного множества D называется *границей этого множества*. (Рис. 1.3)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5 Множество точек плоскости называется *линейно-связным*, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной линией, состоящей из точек этого же множества.

Например, линейно-связным множеством будет любая фигура, не распадающаяся на отдельные, не соединенные между собой части.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6 Линейно-связное открытое множество точек плоскости называется *областью*.

Простейшими областями являются: внутренность круга, эллипса, треугольника и т.п.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7 Множество точек плоскости, образованное областью и ее границей, называется *замкнутой областью*. (Рис. 1.3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Область называется *ограниченной*, если существует круг, внутри которого она содержится.

Пусть теперь задано некоторое множество точек n – мерного пространства R^n ($n \geq 3$). Введенные выше понятия аналогичным образом могут быть введены и в R^n . Например, пусть $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – произвольная точка R^n , а $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ – некоторая фиксированная точка R^n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9 Множество всех точек M пространства R^n , координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2} < \delta, \quad (1.2)$$

где $\delta > 0$, называется δ – *окрестностью точки* M_0 .

Геометрически для $n = 3$ δ – окрестность есть множество всех внутренних точек шара с центром в точке M_0 и радиуса δ . При $n \geq 4$ окрестность не имеет геометрического образа.

1.2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть даны два числовых множества D и E , где D – некоторая область из пространства R^2 , а E – некоторое подмножество множества R .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.10 Если каждой паре чисел $(x, y) \in D$ по некоторому правилу (закону) поставлено в соответствие единственное число $z \in E$, то говорят, что на множестве D задана функция двух переменных $z = f(x, y)$.

При этом x и y называются независимыми переменными (или аргументами), z – зависимой переменной (или функцией), множество D – областью определения функции, а E – множеством значений функции.

Так как каждой паре чисел (x, y) при фиксированной системе координат соответствует единственная точка $M(x, y)$ плоскости и, наоборот, каждой точке $M(x, y)$ соответствует пара чисел (x, y) , то функцию двух переменных можно рассматривать как функцию точки $M(x, y)$ и вместо записи $z = f(x, y)$ писать $z = f(M)$, а областью определения функции в этом случае будет некоторое множество точек плоскости. В дальнейшем мы будем пользоваться этими двумя записями функции двух переменных.

Способы задания функции двух переменных, как и в случае одной переменной, могут быть различными. Наиболее важным является аналитический способ задания, когда функция задается с помощью формулы. Областью определения функции в этом случае считается множество всех точек плоскости, для которых эта формула имеет смысл.

Рассмотрим примеры функции двух переменных.

ПРИМЕР 1.1 $z = x^2 + y^2$. Областью определения этой функции является вся плоскость Oxy , а множеством значений – промежуток $[0; +\infty)$.

ПРИМЕР 1.2 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Областью определения этой функции является множество всех точек, для которых $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, или $x^2 + y^2 \leq 1$. Множество всех таких точек образует круг с центром в начале координат и радиусом, равным единице. Множество значений функции – отрезок $[0; 1]$.

ПРИМЕР 1.3 $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$. Областью определения является множе-

ство точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 > 1$, т.е. множество точек, лежащих вне круга радиуса 1 с центром в начале координат, а множество значений – промежуток $(0; +\infty)$.

Из рассмотренных примеров видно, что областью определения функции двух переменных может быть вся плоскость Oxy или ее часть. Все рассмотренные выше понятия для функции двух переменных легко обобщаются на случай любого числа переменных. Дадим определение функции трех переменных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.11 Пусть $D \subset \mathbb{R}^3$ – некоторое множество троек действительных чисел (x, y, z) , а $E \subset \mathbb{R}$ – некоторое множество действительных чисел. Функцией трех переменных называется правило или закон, по которому каждой тройке $(x, y, z) \in D$ соответствует единственное число $u \in E$. В этом случае пишут $u = f(x, y, z)$.

Переменные x, y, z называются независимыми переменными, или аргументами, а u – зависимой переменной, или функцией; множество D – областью определения функции, а E – множеством значений функции.

Аналогично можно дать определение функции четырех переменных: $u = f(x, y, z, t)$ и вообще n переменных: $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(M)$, где $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – точка n -мерного пространства $\mathbb{R}^n$.

С геометрической точки зрения, для $n = 3$ область определения функции $u = f(x, y, z)$ представляет собой часть точек пространства $\mathbb{R}^3$. Для $n \geq 4$ область определения не имеет геометрического образа.

1.3 ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Как известно, функция одной переменной геометрически изображается на плоскости в виде линии, определенной уравнением $y = f(x)$. Подобным же образом функция двух переменных геометрически изображается в пространстве $\mathbb{R}^3$ в виде поверхности, определенной уравнением $z = f(x, y)$, т.е. сама формула, задающая функцию, и есть уравнение этой поверхности.

В аналитической геометрии мы познакомились с различными поверхностями и их уравнениями. Так, например, уравнение $z - 3x + 2y + 6 = 0$ есть уравнение плоскости. Данная плоскость есть график функции $z = 3x - 2y - 6$.

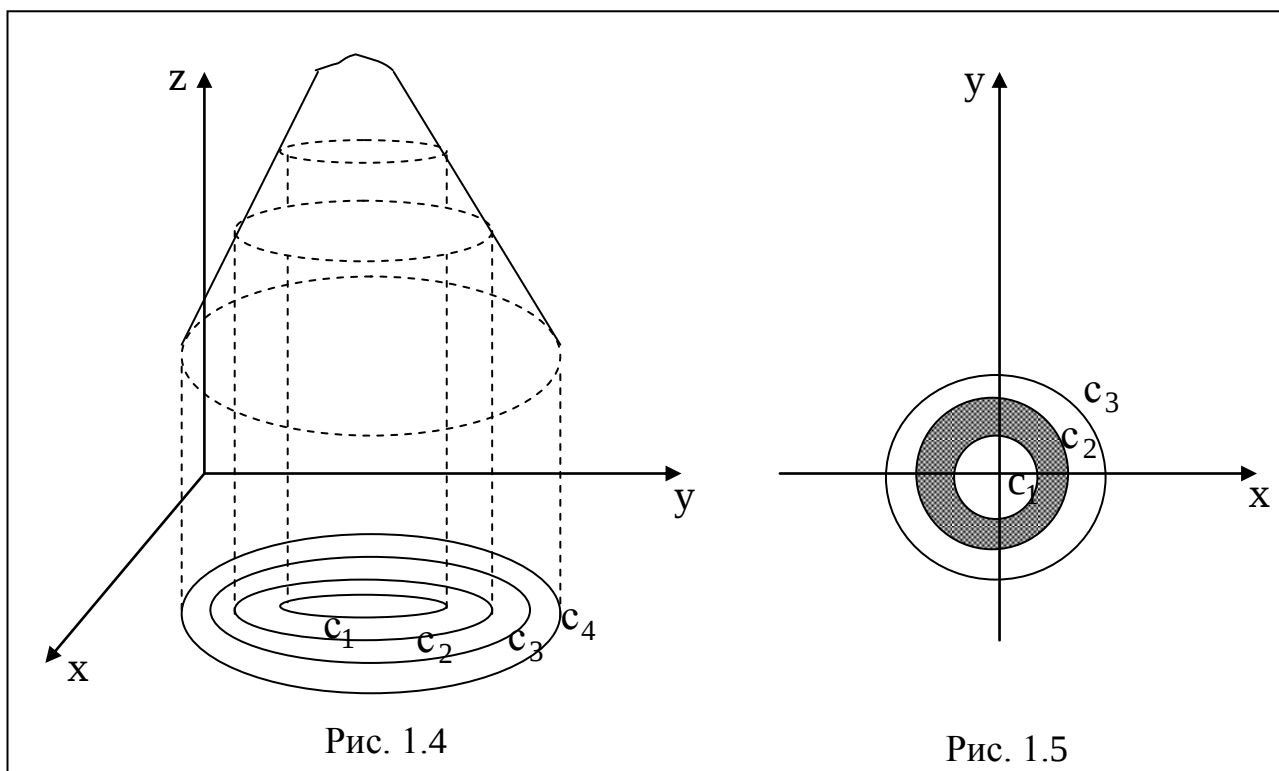
Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ есть уравнение сферы радиуса R с центром в начале координат. С другой стороны, сфера есть объединение графиков двух однозначных функций $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ и $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Построение графиков функций двух переменных в большинстве случаев представляет значительные трудности. Поэтому существует еще один способ геометрического изображения функции двух переменных, основанный на сечении поверхности плоскостями $z = c$ (c – любое число) параллельными плоскостями Oxy .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.12 Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется множество точек $(x; y)$ плоскости Oxy , в которых функция принимает одно и то же значение c .

Очевидно, давая c различные значения, мы будем получать различные линии уровня для данной функции.

Если взять числа $c_1, c_2, \dots, c_n$, в арифметической прогрессии с разностью h , то получим ряд линий уровня, по взаимному расположению которых можно получить представление о графике функции, т.е. о форме поверхности. Там, где линии располагаются гуще, функция изменяется быстрее (поверхность идет круче), а в тех местах, где линии уровня располагаются реже, функция изменяется медленнее (поверхность будет более полой) (рис. 1.4). Ясно, что чем меньше будет h , тем точнее будет представление о графике функции.



Термин “линии уровня” заимствованы из картографии. Там линии уровня - это линии, в которых высота точек земной поверхности над уровнем моря постоянна. По ним можно судить не только о высоте над уровнем моря интересующей нас точки местности, но и о характере рельефа.

ПРИМЕР 1.4. Построить линии уровня функции $z = x^2 + y^2$.

Решение. Для того чтобы найти линии уровня данной функции, пересечем поверхность $z = x^2 + y^2$ плоскостью $z = c$. Получаем $x^2 + y^2 = c$ ($0 \leq c < +\infty$). Задавая c различные значения, например, $c = 0, 1, 2, \dots$, получим семейство линий уровней, представляющих собой окружность. При $C = 0$ окружность вырождается в точку $(0; 0)$. (Рис. 1.5).

Из того, что линиями уровня оказались окружности с центрами в начале координат, следует, что графиком данной функции должна быть поверхность вращения вокруг оси Oz . Действительно, нам известно, что уравнение $z = x^2 + y^2$ определяет параболоид вращения.

1.4 ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть функция $u = f(M)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, за исключением, быть может, самой точки M_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.13 Число A называется пределом функции $z = f(M)$ при $M \rightarrow M_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такая δ – окрестность точки M_0 , что для любой точки M из этой окрестности (за исключением, быть может, точки M_0) имеет место неравенство $|f(M) - A| < \varepsilon$.

При этом пишут $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A$ или $\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ x_2 \rightarrow x_2^0 \\ \dots \\ x_n \rightarrow x_n^0}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A$, так

как при $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, очевидно $x_1 \rightarrow x_1^0, x_2 \rightarrow x_2^0, \dots, x_n \rightarrow x_n^0$.

Для функций нескольких переменных остаются справедливыми все правила предельного перехода, установленные для функций одной переменной.

ПРИМЕР 1.5 Найти $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$.

Решение. Предел функции находится при $M(x; y) \rightarrow M_0(0; 0)$, т.е. при $\rho \rightarrow 0$, где $\rho = |M_0 M|$ – расстояние между точками M_0 и M . В данном случае $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow M_0} &= \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + 1} - 1} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2(\sqrt{\rho^2 + 1} + 1)}{\rho^2 + 1 - 1} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{\rho^2 + 1} + 1) = 2. \end{aligned}$$

Следует обратить внимание на то, что в разобранным примере функция $\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$ не определена в точке $M_0(0; 0)$, но имеет предел при $M \rightarrow M_0$.

ПРИМЕР 1.6 Найти предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin xy}{x}$.

Решение. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin xy}{xy} \cdot y = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin xy}{xy} \cdot \lim_{y \rightarrow 2} y =$

$$= \left| \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \right| = 1 \cdot 2 = 2.$$

ПРИМЕР 1.7 Найти предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Решение. Функция $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ определена на всей плоскости, за исклю-

чением начала координат. Покажем, что при приближении точки $M(x, y)$ к точке $M(0; 0)$ функция не имеет предела. Действительно, приближаясь к нача-

лу координат по оси Ox , где $y = 0$ получим $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = 1$. Если же прибли-

жаться к началу координат по оси Oy , где $x = 0$, то $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - y^2}{0 + y^2} = -1$. Таким

образом, при приближении точки $M(x, y)$ к началу координат по различным направлениям функция имеет различные предельные значения и, следовательно, не имеет предела при $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.14 Функция $u = f(M)$ называется *непрерывной* в точке M_0 , если она определена в точке M_0 и некоторой ее окрестности и $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$. Точка M_0 , в которой функция нескольких переменных $u = f(M)$ непрерывна, называется *точкой непрерывности* этой функции. Точки, в которых функция не является непрерывной, называются *точками разрыва* этой функции.

Например, функция $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ имеет единственную точку разрыва - начало координат $O(0; 0)$, в которой она не определена. При неограниченном приближении точки $M(x, y)$ к началу координат функция стремится к бесконечности.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в этой области.

Укажем без доказательств некоторые свойства функций многих переменных, непрерывных в замкнутой ограниченной области. Эти свойства аналогичны свойствам непрерывной на отрезке функции одной переменной.

1⁰. Непрерывная функция в замкнутой ограниченной области достигает в этой области по крайней мере один раз наибольшего значения M и наименьшего значения m .

2⁰. Если функция $z = f(M)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области и принимает как положительные, так и отрицательные значения, то внутри области найдутся точки, в которых функция $f(M)$ обращается в нуль.

ПРИМЕР 1.8 Найти точки разрыва функции $z = \frac{1}{3x + 2y + 1}$.

Решение. Функция определена и непрерывна всюду, кроме тех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $3x + 2y + 1 = 0$. Это - уравнение прямой, являющейся границей области определения функции. Каждая точка этой прямой есть точка разрыва. Таким образом, точки разрыва образуют целую прямую - линию разрыва данной функции.

ПРИМЕР 1.9 Функция $u = \frac{1 + 2xy + 2yz + xz}{x^2 + y^2 + z^2 - 4}$ не определена в точках,

где $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$. Но это уравнение определяет сферу с центром в начале координат и радиуса 2. Следовательно, данная функция имеет поверхность разрыва.

1.5 ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$. Для простоты, здесь и в дальнейшем по смыслу будем предполагать, что функция $f(x, y)$ определена в рассматриваемой точке $M(x, y)$ и некоторой ее окрестности. Зафиксируем значения аргумента y и переменной x дадим произвольное приращение. Тогда функция получит соответствующее приращение

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y), \quad (1.3)$$

которое называется **частным приращением функции** по переменной x в точке $M(x, y)$.

Аналогично определяется частное приращение функции по переменной y

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (1.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.15 Частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной x , в точке $M(x, y)$ называется предел (если таковой существует)

отношения частного приращения $\Delta_x z$ к приращению аргумента Δx при стремлении последнего к нулю:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (1.5)$$

Аналогично определяется частная производная

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (1.6)$$

Для обозначения частных производных функции двух переменных применяются следующие символы:

$$z'_x, f'_x(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} \quad \left(z'_y, f'_y(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

Частные приращения и частные производные функции n переменных при $n \geq 3$ определяются и обозначаются аналогично. Например, для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ частное приращение по x в точке $M(x, y, z)$ получится, если x получит приращение Δx , а остальные аргументы останутся неизменными:

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z).$$

Частная производная функции по аргументу x будет равна

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x}.$$

Из определения следует, что производная функции нескольких переменных определяется как производная функции одной из переменных при фиксированных значениях всех остальных переменных. Поэтому все правила и формулы дифференцирования, выведенные для функции одной переменной, сохраняются и для частных производных функции нескольких переменных. Следует лишь помнить, что во всех этих правилах и формулах при нахождении частной производной по какому-либо аргументу все остальные аргументы считаются постоянными.

ПРИМЕР 1.10 Найти частные производные функции $z = x^2 y - 3y^2 + 5x$.

Решение. $z'_x = (x^2 y - 3y^2 + 5x)'_x = |y = \text{const}| = 2xy - 0 + 5 = 2xy + 5$

$$z'_y = (x^2 y - 3y^2 + 5x)'_y = |x = \text{const}| = x^2 - 6y + 0 = x^2 - 6y.$$

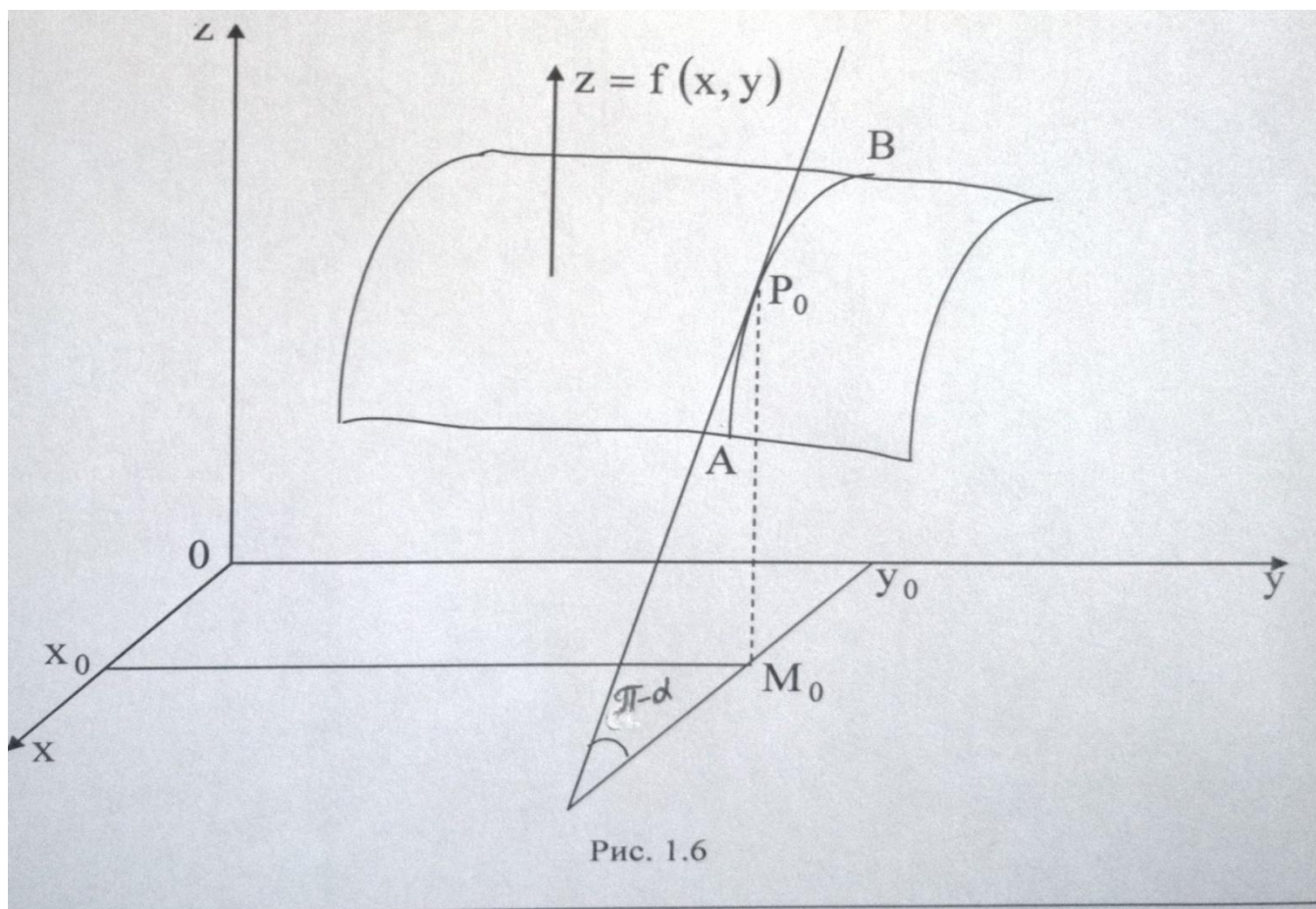
1.6 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные в точке $M_0(x_0, y_0)$. Как известно, графиком данной функции является некоторая поверхность (рис. 1.6). Полагая $y = y_0 = \text{const}$ и рассматривая систему уравнений $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$, мы получаем плоскую кривую AP_0B , представляющую собой сечение поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $y = y_0$, параллельной координатной плоскости Oxz . Здесь $P_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка поверхности, соответствующая точке $M_0(x_0, y_0)$ плоскости Oxy . Эту кривую можно рассматривать как график функции одной переменной $z = f(x, y_0)$. Но тогда, согласно геометрическому смыслу производной функции одной переменной, $\frac{df(x, y_0)}{dx} = \text{tg} \alpha$, где α – угол образованный с осью Ox касательной, проведенной к кривой AP_0B в точке P_0 . С другой стороны

$$\left. \frac{df(x, y_0)}{dx} \right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}. \quad \text{Отсюда следует, } \frac{\partial z}{\partial x} = \text{tg} \alpha.$$

Итак, значение частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ равно тангенсу угла, составленного с осью Ox касательной, проведенной в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ к линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $y = y_0$. В этом заключается геометрический смысл частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Аналогично выясняется геометрический смысл частной производной $\frac{\partial z}{\partial y}$.



1.7 ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть имеем некоторую функцию $z = f(x, y)$ от двух переменных x и y . Ее частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ являются функциями от переменных x и y . В некоторых случаях для этих функций существуют снова частные производные, называемые частными производными второго порядка (или просто вторыми частными производными):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = f''_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = f''_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = f''_{yx}(x, y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = f''_{yy}(x, y).$$

Продолжая таким образом, мы можем определить частные производные третьего порядка и т.д.

Аналогично определяются и записываются частные производные высших порядков от функции трех и большего числа переменных.

Частные производные второго порядка $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yx}(x, y)$ называются **смешанными частными производными**.

ПРИМЕР 1.11 Пусть $z = \operatorname{tg}(3x - y)$.

$$\text{Имеем } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{\cos^2(3x - y)}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -18 \cdot \cos^{-3}(3x - y) \cdot \sin(3x - y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-1}{\cos^2(3x - y)}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \cdot \cos^{-3}(3x - y) \cdot \sin(3x - y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-6 \cdot \sin(3x - y)}{\cos^3(3x - y)},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{-6 \cdot \sin(3x - y)}{\cos^3(3x - y)}.$$

Мы видим, что для данной функции выполняется равенство

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \text{ т.е. мы получили равенство смешанных частных производных второго порядка.}$$

Спрашивается, при каких условиях значения смешанных производных не зависят от порядка дифференцирования? Ответ дает следующая теорема.

Теорема 1.1 Если в некоторой окрестности точки $M(x, y)$ производные $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ существуют и непрерывны в самой точке $M(x, y)$, то они равны между собой в этой точке, т.е. имеет место равенство:

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

1.8 ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

При нахождении частных производных рассматривались частные приращения функции нескольких переменных, когда лишь один из аргументов изменяется, остальные же оставались фиксированными (постоянными). Теперь мы рассмотрим полное приращение, которое получает функция при изменении всех ее аргументов.

Пусть дана функция двух переменных $z = f(x, y)$. Предположим, что ее аргументы x и y получают соответственно приращения Δx и Δy . Тогда функция получает полное приращение, которое определяется формулой

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (1.9)$$

Геометрически полное приращение Δz равно приращению аппликаты графика функции $z = f(x, y)$ при переходе из точки $M(x, y)$ в точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.16 Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке $M(x, y)$, если ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \quad (1.10)$$

где A и B — некоторые не зависящие от Δx и Δy числа, а

$\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малые при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ функции.

Известно, что если функция одной переменной дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна и имеет производную в этой точке. Из существования производной функции одной переменной в данной точке следует дифференцируемость функции в этой точке. Выясним, как переносятся эти свойства на функции двух переменных.

Теорема 1.2 Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, то как следует из соотношения (1.10) $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$, а это означает, что

функция непрерывна в точке $M(x, y)$.

Теорема 1.3 Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, то она имеет в этой точке частные производные $f'_x(x, y) = A$, $f'_y(x, y) = B$.

Доказательство. Так как функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, то имеет место соотношение (1.10). Полагая в нем $\Delta y = 0$, имеем $\Delta_x z = A\Delta x + \alpha(\Delta x, 0)\Delta x$, где $\alpha(\Delta x, 0)$ — бесконечно малая при $\Delta x \rightarrow 0$ функция. Разделив на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [A + \alpha(\Delta x, 0)] = A = f'_x(x, y).$$

Следовательно, в точке $M(x, y)$ существует частная производная $f'_x(x, y)$. Аналогично доказывается, что в точке $M(x, y)$ существует частная производная $f'_y(x, y) = B$.

Обратные утверждения к теоремам 1.2 и 1.3, вообще говоря, неверны, т.е. из непрерывности функции двух переменных в точке $M(x, y)$, а также из существования ее частных производных в этой точке еще не следует дифференцируемость функции. Однако, если предположить, что частные производные не только существуют, но и непрерывны, то функция будет дифференцируемой. Иными словами имеет место следующая теорема.

Теорема 1.4 Если функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные в некоторой окрестности точки $M(x, y)$ и эти производные непрерывны в самой точке, то эта функция дифференцируема в точке $M(x, y)$.

Доказательство. Полное приращение функции Δz , т.е. выражение (1.9) запишем в виде

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] \quad (1.11)$$

Выражение $[f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)]$ можно рассматривать как приращение функции $f(x, y + \Delta y)$ одной переменной x на отрезке $[x, x + \Delta x]$ (или $[x + \Delta x, x]$, если $\Delta x < 0$). Так как по условию эта функция имеет производную, совпадающую с $f'_x(x, y + \Delta y)$, то по теореме Лагранжа получим $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) \Delta x$, $0 < \theta_1 < 1$.

Рассуждая совершенно аналогично, для выражения $[f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]$ получим

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) \Delta y, \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

Так как производные f'_x и f'_y непрерывны в точке $M(x, y)$, то

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f'_x(x, y); \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x, y);$$

Отсюда в силу теоремы о связях функции с ее пределом имеем

$$f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f'_x(x, y) + \alpha(\Delta x, \Delta y) \text{ и}$$

$$f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x, y) + \beta(\Delta x, \Delta y),$$

где $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малые при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ функции. Подставляя эти значения в выражение (1.11), находим

$$\Delta z = f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \Delta y,$$

а это означает, что функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$.

В заключение заметим, что понятие дифференцируемости для функций трех и более переменных вводится аналогично.

1.9 ПРОИЗВОДНЫЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть $z = f(x, y)$ — функция двух переменных x и y , каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимой переменной t : $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда функция $z = f(x(t), y(t))$ будет сложной функцией независимой переменной t , а переменные x и y будут для нее промежуточными переменными. Имеет место следующая теорема:

Теорема 1.5 Если функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ дифференцируемы в точке t , а функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в соответствующей точке $M[x(t), y(t)]$, то сложная функция $z = f[x(t), y(t)]$ также дифференцируема в точке t и имеет место формула

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \quad (1.12)$$

Доказательство. Придадим переменной t произвольное приращение Δt , оно вызовет соответственно приращения Δx и Δy функций $x(t)$ и $y(t)$, а они, в свою очередь, вызовут приращение функции $z = f(x, y)$:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Так как эта функция дифференцируема в точке $M(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, то полное приращение этой функции может быть записано в виде

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

где $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малые при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ функции.

Разделив обе части этого равенства на Δt , получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f'_x(x, y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x, y)\frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta t}. \quad (1.13)$$

По условию $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$. Кроме того, так как функции

$x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в точке t , то они непрерывны в этой точке, т.е. при $\Delta t \rightarrow 0$ будет $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ и, следовательно, $\alpha(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ и

$\beta(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$. Тогда слагаемые $\alpha(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta t}$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta t}$ будут стремиться к нулю при $\Delta t \rightarrow 0$. Таким образом, мы доказали, что при $\Delta t \rightarrow 0$ существует предел правой части выражения (1.13), а следовательно, существует

предел левой части при $\Delta t \rightarrow 0$: $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt}$, причем

$$\frac{dz}{dt} = f'_x(x, y)\frac{dx}{dt} + f'_y(x, y)\frac{dy}{dt}, \text{ или, короче,}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

ПРИМЕР 1.12 Пусть $z = x^2 \sin \frac{x}{y}$, где $x = 1 + 2t^2$, $y = \sqrt{1+t}$.

По формуле (1.12) имеем

$$\frac{dz}{dt} = \left(2x \sin \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y} \cos \frac{x}{y} \right) \cdot 4t - \frac{x^3}{y^2} \cos \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+t}}.$$

Производная, найденная по формуле (1.12), называется полной производной функции.

Рассмотрим частный случай, когда $z = f(x, y)$, где $y = \varphi(x)$. Тогда $z = f[x, \varphi(x)]$ является сложной функцией переменной x и на основании формулы (9.1) получим

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \text{ или} \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

ПРИМЕР 1.13 Пусть $z = \sqrt{x^2 + y^3}$, где $y = \ln \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} \text{По формуле (1.14) имеем } \frac{dz}{dx} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^3}} + \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2 + y^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^3}} \left(x + \frac{3y^2}{4x} \right). \end{aligned}$$

Аналогичным образом решается вопрос, когда число промежуточных переменных больше двух. Например, если $u = f(x, y, z)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то формула (1.12) принимает вид

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}. \quad (1.15)$$

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть $z = f(x, y)$ — функция двух переменных x и y , которые в свою очередь, зависят от двух или большего числа переменных. Например, пусть $x = x(u, \vartheta)$, $y = y(u, \vartheta)$. Тогда функция $z = f[x(u, \vartheta), y(u, \vartheta)]$ будет сложной функцией независимых переменных u и ϑ .

Если функции $x = x(u, \vartheta)$, $y = y(u, \vartheta)$ дифференцируемы в точке $P(u, \vartheta)$, а функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, где $x = x(u, \vartheta)$, $y = y(u, \vartheta)$, то сложная функция $z = f[x(u, \vartheta), y(u, \vartheta)]$ дифференцируема в точке $P(u, \vartheta)$, причем ее частные производные в этой точке находятся по формулам

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial \vartheta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \vartheta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \vartheta}. \end{cases} \quad (1.16)$$

Действительно, для вычисления частной производной фиксируем значения одной из переменных u или ϑ . Тогда попадаем в условия только что доказанной теоремы, и из формулы (1.12) получаем формулы (1.16).

ПРИМЕР 1.14 Пусть $z = x^3 y^3$, $x = u\vartheta$, $y = \frac{u}{\vartheta}$

По формулам (1.16) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= 3x^2 y^3 \cdot \vartheta + 3x^3 y^2 \cdot \frac{1}{\vartheta}; \\ \frac{\partial z}{\partial \vartheta} &= 3x^2 y^3 \cdot u + 3x^3 y^2 \cdot \left(-\frac{u}{\vartheta^2}\right). \end{aligned}$$

Для случая большего числа переменных формулы (1.16) естественным образом обобщаются.

1.10 ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Напомним, что если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, то ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \quad (1.17)$$

где $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малые при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.17 Полным дифференциалом dz дифференцируемой в точке $M(x, y)$ функции $z = f(x, y)$ называется главная линейная относительно приращений Δx и Δy часть полного приращения этой функции в точке $M(x, y)$, т.е.

$$dz = A\Delta x + B\Delta y \quad (1.18)$$

Используя теорему 1.3, мы можем выражение (1.18) переписать следующим образом:

$$dz = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y. \quad (1.19)$$

Если положить $z = x$ (т.е. $f(x, y) = x$), то $dz = dx = 1 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y = \Delta x$ т.е. $dx = \Delta x$. Аналогично, полагая $z = y$, получим, что $dy = \Delta y$. Отсюда заключаем, что дифференциалы независимых переменных совпадают с приращениями этих аргументов, и мы можем записать дифференциал (1.19) в виде:

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy. \quad (1.20)$$

Из соотношений (1.17) и (1.18) следует, что разность $\Delta z - dz = \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ ($\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ есть расстояние между точками $M(x, y)$ и $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$). Следовательно,

$$\Delta z = dz + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right) \quad (1.21)$$

При достаточно малых Δx и Δy допускаемая погрешность может быть сколько угодно малой, поэтому можно принять $\Delta z \approx dz$ или

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y. \quad (1.22)$$

Этой формулой широко пользуются в приближенных вычислениях.

ПРИМЕР 1.15 Вычислить приближенно с помощью дифференциала $\operatorname{arctg}\left(\frac{1,97}{1,02} - 1\right)$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y} - 1\right)$. Применяя формулу (1.22) к этой функции, получим

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x + \Delta x}{y + \Delta y} - 1\right) \approx \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y} - 1\right) + \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y} - 1\right)\right]'_x \Delta x + \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y} - 1\right)\right]'_y \Delta y$$

$$\text{или } \operatorname{arctg}\left(\frac{x + \Delta x}{y + \Delta y} - 1\right) \approx \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y} - 1\right) + \frac{y}{y^2 + (x - y)^2} \Delta x - \frac{x}{y^2 + (x - y)^2} \Delta y.$$

Положим теперь $x = 2, y = 1$; тогда $\Delta x = -0,03, \Delta y = 0,02$. Следовательно

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{2 - 0,03}{1 + 0,02} - 1\right) \approx \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{1} - 1\right) + \frac{1}{1^2 + (2 - 1)^2} \cdot (-0,03) - \frac{2}{1^2 + (2 - 1)^2} 0,02$$

$$\text{Или } \operatorname{arctg}\left(\frac{1,97}{1,02} - 1\right) \approx \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2} \cdot 0,03 - 0,02 \approx 0,75.$$

ПРИМЕР 1.16 Гипотенуза прямоугольного треугольника $x = 120\text{м} \pm 2\text{м}$, а острый угол $y = 30^\circ \pm 1^\circ$. С какой точностью можно найти противолежащий данному углу катет Z этого треугольника?

Решение. Имеем $z = x \sin y$. Отсюда $\frac{\partial z}{\partial x} = \sin y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x \cos y$. Полагая

$x = 120$, $\Delta x = 2$ и $y = \frac{\pi}{6}$, $\Delta y = \frac{\pi}{180}$ по формуле (1.10.6) находим

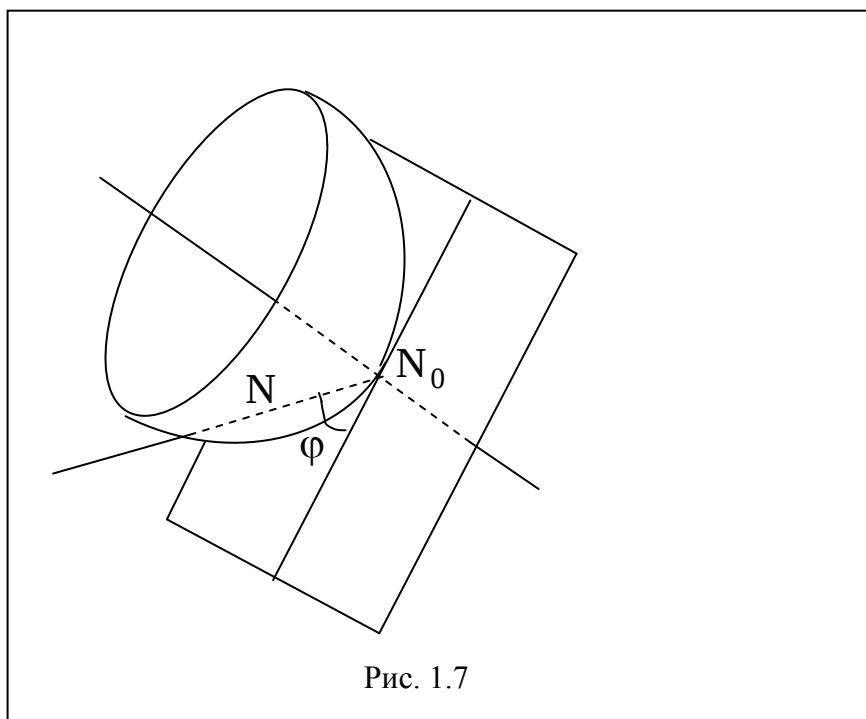
$$\Delta z = \sin 30^\circ \cdot 2 + 120 \cdot \cos 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = 1 + 1,8 = 2,8 \text{ м. Следовательно .}$$

$$z = 120 \cdot \sin 30^\circ \pm 2,8 = 60 \text{ м} \pm 2,8 \text{ м}.$$

Выясним геометрический смысл полного дифференциала. Но прежде введем понятие касательной плоскости к поверхности.

Пусть $N_0(x_0, y_0, z_0)$ — точка данной поверхности. Рассмотрим на поверхности другую, переменную, точку $N(x, y, z)$ и проведем прямую N_0N .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.18 Плоскость, проходящая через точку N_0 , называется *касательной плоскостью* к поверхности в точке N_0 , если угол между секущей N_0N и этой плоскостью стремится к нулю, когда расстояние N_0N стремится к нулю, каким бы образом точка N на поверхности ни стремилась к



точке N_0 (рис. 1.7).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.19 *Нормалью к поверхности* в точке N_0 называется прямая, проходящая через точку N_0 перпендикулярно касательной плоскости к поверхности в этой точке.

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $N_0(x_0, y_0)$ непрерывные частные производные $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$. Тогда уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \quad (1.23)$$

а нормаль к поверхности в точке N_0 определяется уравнением

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (1.24)$$

Обозначив в (1.23) $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$, $z - z_0 = \Delta z$, получим

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y, \quad (1.25)$$

что совпадает с дифференциалом dz функции в точке $M_0(x_0, y_0)$. Следовательно, дифференциал функции двух переменных есть приращение аппликаты касательной плоскости.

1.11 НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Пусть дано уравнение $2^y - x^2 - 1 = 0$. В нем каждому действительному значению x соответствует единственное значение y , такое, что если эти значения x и y подставить в уравнение, то оно превратится в тождество. Например, значению $x = 0$ соответствует значение $y = 0$; значению $x = 2$ — значение $y = \log_2 5$ и т.д. Иными словами, с помощью данного уравнения задана функция, областью определения которой является вся числовая ось, а множеством значений — множество всех неотрицательных чисел. Эта функция называется *неявной*.

Пусть в общем случае дано уравнение

$$F(x, y) = 0, \quad (1.26)$$

где $F(x, y)$ — функция двух переменных. Если каждому значению x , принадлежащему некоторому множеству, соответствует единственное значение y , которое совместно с x удовлетворяет уравнению (1.26), то говорят, что это уравнение на данном множестве определяет неявную функцию $y = \varphi(x)$.

Таким образом, для неявной функции $y = \varphi(x)$, определенной уравнением (1.11) имеет место тождество $F[x, \varphi(x)] \equiv 0$, справедливое для всех x из области определения этой неявной функции.

В отличие от неявной функции функция $y = f(x)$, заданная уравнением, разрешенным относительно y , называется *явной*.

В некоторых случаях каждому значению x соответствует несколько значений y , удовлетворяющих совместно с данным x уравнению (1.11). Тогда это уравнение определяет не одну, а несколько неявных функций. Так, например, уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ определяет две неявные функции, которые можно записать в явном виде, разрешив уравнение относительно y : $y = \sqrt{1 - x^2}$ и $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

Не следует, однако, думать, что всякую неявную функцию можно представить в виде явной функции. Например, уравнение $2^y - 3y^2 + 2x^2 - x = 0$, которое нельзя разрешить относительно y .

Каким же условиям должна удовлетворять функция $F(x, y)$, чтобы уравнение $F(x, y) = 0$ определяло единственную неявную функцию y ? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема:

Теорема 1.6 (существования неявной функции)

Если функция $F(x, y)$ и ее частные производные $F'_x(x, y)$ и $F'_y(x, y)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и при этом $F(x_0, y_0) = 0$, а $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, то уравнение $F(x, y) = 0$ определяет в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ единственную неявную функцию $y = \varphi(x)$, непрерывную и дифференцируемую в некотором интервале, содержащем точку x_0 , причем $\varphi(x_0) = y_0$.

Перейдем теперь к вопросу о дифференцировании неявной функции. Пусть левая часть уравнения (1.26) удовлетворяет указанным в теореме условиям. Тогда это уравнение определяет неявную функцию $y = \varphi(x)$, для которой в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ имеет место тождество $F[x, \varphi(x)] \equiv 0$ относительно x . Так как производная функции, тождественной нулю, также равна нулю, то полная производная

$\frac{dF}{dx} = 0$. Но в силу соотношения (1.14) имеем

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}, \text{ и поэтому } \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0, \text{ откуда}$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \quad (1.27)$$

По этой формуле находится производная неявной функции (одной переменной).

ПРИМЕР 1.17 Найти производную неявной функции y , заданной уравнением $x^2 - 2x + 3y^2 + xy - 1 = 0$, и вычислить ее значение в точке $P(2; -1)$.

Решение. Введем обозначение $F(x, y) = x^2 - 2x + 3y^2 + xy - 1$. Тогда $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2 + y$; $\frac{\partial F}{\partial y} = 6y + x$. Следовательно, по формуле (1.27)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x - 2 + y}{6y + x} \quad \text{и} \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=2 \\ y=-1}} = -\frac{2 \cdot 2 - 2 - 1}{6 \cdot (-1) + 2} = \frac{1}{4}.$$

Рассмотрим теперь уравнение вида

$$F(x, y, z) = 0. \quad (1.28)$$

Если каждой паре чисел x и y из некоторой области D соответствует одно значение z , которое совместно с x и y удовлетворяют уравнению (1.28), то это уравнение неявно определяет функцию z от x и y .

Например, уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ неявно определяет две непрерывные функции z от x и y , которые можно выразить явно в виде $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ и $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции z , определяемой уравнением (1.28).

Когда мы ищем $\frac{\partial z}{\partial x}$, считаем y постоянным. Поэтому здесь применима формула (1.27), если только независимой переменной считать x , а функцией z .

Следовательно, $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$. Таким же путем находим $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$. В этих

формулах предполагается, что $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

Предположим, что к поверхности, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$, в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ можно провести касательную плоскость. Тогда уравнение этой плоскости можно найти по формуле

$$F'_x(P_0)(x - x_0) + F'_y(P_0)(y - y_0) + F'_z(P_0)(z - z_0) = 0. \quad (1.29)$$

Уравнение нормали в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ запишется в виде

$$\frac{x - x_0}{F'_x(P_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(P_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(P_0)}. \quad (1.30)$$

1.12 ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Понятия максимума и минимума для функции нескольких переменных вводятся так же как и для функции одной переменной. Мы рассмотрим эти понятия только в применении к функции двух переменных.

Пусть функция $z = f(x, y)$ задана в некоторой области D и $M_0(x_0, y_0)$ — некоторая точка из этой области.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.20 Функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ максимум (минимум), если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек $M(x, y)$ этой окрестности, отличных от $M_0(x_0, y_0)$ выполняется неравенство

$$f(M_0) > f(M) \quad (f(M_0) < f(M)).$$

Максимум и минимум функции называется *экстремумами* функции, т.е. говорят, что функция имеет экстремум в данной точке, если эта функция имеет максимум или минимум в данной точке.

Если функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_0, y_0)$, то полное приращение $\Delta z = f(M) - f(M_0)$ этой функции в точке M_0 удовлетворяет одному из следующих условий:

$$\Delta z < 0 \quad (\text{в случае максимума}),$$

$$\Delta z > 0 \quad (\text{в случае минимума}).$$

Из сказанного следует, что полное приращение функции не меняет знака в некоторой окрестности точки экстремума.

Теорема 1.7 (необходимые условия существования экстремума).

Если функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремум и в точке M_0 существуют частные производные первого порядка, то они равны нулю, т.е.

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0. \quad (1.31)$$

Доказательство. Докажем, например, равенство нулю частной производной $f'_x(x_0, y_0)$. Для этого рассмотрим в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ только те точки, для которых $y = y_0$. Мы получим функцию $f(x, y_0)$ одной переменной x . Эта функция имеет в точке $x = x_0$ экстремум и имеет в точке $x = x_0$ производную $f'_x(x_0, y_0)$. Следовательно, по необходимому условию экстремума функции одной переменной: $f'_x(x_0, y_0) = 0$.

Аналогично, рассматривая функцию $f(x_0, y)$ одной переменной y , находим: $f'_y(x_0, y_0) = 0$. Теорема доказана.

Условие (1.31) является лишь необходимым, но не достаточным условием экстремума. Например, частные производные функции $z = x^2 - y^2$ равны ну-

лю в точке $O(0;0)$, но эта функция не имеет экстремума в этой точке, так как она в окрестности точки $O(0;0)$ не сохраняет знак, т.е. при $x = 0 \quad z < 0$, а при $y = 0 \quad z > 0$.

Заметим, что функция может иметь экстремум также в тех точках, где хотя бы одна из частных производных не существует. Например, функция $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, очевидно, имеет минимум в точке $O(0;0)$, но в этой точке частные производные не существуют.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.22 Точки, в которых частные производные первого порядка $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ обращаются в нуль или не существуют называются *критическими точками* функции $z = f(x, y)$.

Из изложенного выше следует, что точки экстремума функции следует искать среди ее критических точек. Однако существуют критические точки, не являющиеся точками экстремума.

Теорема 1.8 Пусть в некоторой области, содержащей критическую точку $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Положим

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

Тогда:

- 1) если $\Delta > 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция имеет экстремум, причем при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ — максимум, при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ — минимум;
- 2) если $\Delta < 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ нет экстремума;
- 3) если $\Delta = 0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ может быть, а может и не быть точкой экстремума (в этом случае необходимы дополнительные исследования).

ПРИМЕР 1.18 Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y.$$

Решение. Областью определения является вся плоскость R^2 . Найдем критические точки. $f'_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 30$, $f'_y(x, y) = 6xy - 18$.

Приравнявая эти производные нулю, приходим к системе:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 16 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = \pm 4 \\ x - y = \pm 2 \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим четыре критические точки $M_1(3;1)$, $M_2(1;3)$, $M_3(-1;-3)$, $M_4(-3;-1)$. Теперь найдем вторые частные

производные: $f''_{xx}(x, y) = 6x$, $f''_{xy}(x, y) = 6y$, $f''_{yy} = 6x$ и составим выражение $\Delta(M) = f''_{xx}(M)f''_{yy}(M) - [f''_{xy}(M)]^2 = 36(x^2 - y^2)$.

Тогда:

- 1) $\Delta(M_1) = 288 > 0$, $f''_{xx}(M_1) = 18 > 0$, $M_1(3;1)$ — точка минимума;
- 2) $\Delta(M_2) = -288 < 0$, в точке $M_2(1;3)$ экстремума нет;
- 3) $\Delta(M_3) = -288 < 0$, в точке $M_3(-1;-3)$ экстремума нет;
- 4) $\Delta(M_4) = 288 > 0$, $f''_{xx}(M_4) = -18 < 0$, $M_4(-3;-1)$ — точка максимума.

Итак, данная функция имеет два экстремума: в точке M_1 — минимум, $f(M_1) = -72$ и в точке M_4 — максимум, $f(M_4) = 72$.

1.13 НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области $\bar{D}$ и дифференцируема внутри этой области. Тогда в этой области она имеет наименьшее и наибольшее значения, которые достигаются либо внутри области, либо на ее границе. Если наибольшее или наименьшее значения функция принимает во внутренних точках области $\bar{D}$, то эти точки, очевидно, являются точками экстремума функции $z = f(x, y)$. Таким образом, точки, в которых функция имеет наибольшее или наименьшее значения, являются либо точками экстремума функции, либо граничными точками области $\bar{D}$.

Мы приходим к следующему правилу нахождения наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных.

Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в ограниченной замкнутой области $\bar{D}$, следует найти значения функции в критических точках этой области, а также ее наибольшее и наименьшее значения на границе области $\bar{D}$. Наибольшее и наименьшее из всех этих значений являются соответственно наибольшим и наименьшим значениями функции $z = f(x, y)$ в заданной области $\bar{D}$.

ПРИМЕР 1.19 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \leq 4$.

Решение. Находим $z'_x = 2x$ и $z'_y = -2y$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$
 получим одну критическую точку $M_0(0;0)$, в которой значение функции равно нулю.

Найдем теперь наибольшее и наименьшее значения функции на границе, т.е. на окружности $x^2 + y^2 = 4$. Для точек этой окружности функцию $z = x^2 - y^2$ можно представить как функцию одной переменной x : $z = x^2 - (4 - x^2)$, т.е. $z = 2x^2 - 4$, причем $-2 \leq x \leq 2$.

Итак, нахождение наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных на окружности $x^2 + y^2 = 4$ мы свели к нахождению наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной $z = 2x^2 - 4$ на отрезке $[-2; 2]$. Найдем критические точки этой функции на интервале $(-2; 2)$ и вычислим значения функции в этих точках и на концах отрезка. Имеем $z' = 4x$, $4x = 0$, откуда получаем критическую точку $x = 0$; $z|_{x=0} = -4$. Далее, находим $z|_{x=-2} = 4$, $z|_{x=2} = 4$. Таким образом, функция $z = 2x^2 - 4$ имеет наибольшее значение, равное 4, и наименьшее значение, равное -4.

Итак, наибольшее значение функция $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \leq 4$ принимает в точках $M_1(-2; 0)$ и $M_2(2; 0)$ окружности $x^2 + y^2 = 4$ и наименьшее - в точках $M_3(0; 2)$ и $M_4(0; -2)$ той же окружности.

1.14 УСЛОВНЫЕ ЭКСТРЕМУМЫ

Во многих задачах при нахождении экстремумов функции вопрос сводится к нахождению максимумов и минимумов функции от нескольких переменных, которые не являются независимыми, а связаны друг с другом некоторыми дополнительными условиями (например, они должны удовлетворять заданным уравнениям). Такого рода задачи называют задачами на нахождение условных экстремумов.

Рассмотрим сначала вопрос об условном экстремуме функции двух переменных, если эти переменные связаны одним условием.

Пусть требуется найти экстремумы функции

$$z = f(x, y) \quad (1.32)$$

при условии, что x и y связаны уравнением

$$\varphi(x, y) = 0. \quad (1.33)$$

При наличии условия (1.33) из двух переменных x и y независимой будет только одна, например x , так как y определяется из равенства (1.33) как функция от x . Если бы мы разрешили уравнение (1.33) относительно y , то подставляя в равенство (1.32) вместо y найденное выражение, получили бы функцию одной переменной x и свели бы задачу к задаче об исследовании на экстремум функции одной переменной x .

Но можно решить поставленную задачу, не разрешая уравнение (1.33) относительно x или y . Пусть уравнение (1.33) определяет неявно заданную

функцию $y = y(x)$. Тогда, рассматривая в (1.32) переменную y как неявную функцию от x , по формуле полной производной получим:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Следовательно, в точках экстремума

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \quad (1.34)$$

Из равенства (1.33) находим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \quad (1.35)$$

Умножив обе части равенства (1.35) на неопределенный пока коэффициент λ и сложив почленно с равенством (1.34), получим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \right) + \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \right) = 0 \\ \text{или} \quad & \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Последнее равенство выполняется во всех точках экстремума. Подберем λ так, чтобы для значений x и y , соответствующих экстремуму функции Z , вторая скобка в равенстве (1.36) обратилась в нуль:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Но тогда при этих значениях x и y из равенства (1.36) следует равенство

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Таким образом, получается, что в точках экстремума удовлетворяются три уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (1.37)$$

с тремя неизвестными x , y , λ . Из этих уравнений определяем x , y и λ .

Из вывода следует, что уравнения (1.37) являются необходимыми условиями условного экстремума, но не при всяких x , y и λ , удовлетворяющих уравнениям (1.37), будет иметь место условный экстремум. Поэтому требуется дополнительное исследование характера критической точки.

Заметим, что левые части уравнений системы (1.37) являются частными производными функции

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (1.38)$$

по переменным X , Y и λ .

Таким образом, для того чтобы найти значения x и y , удовлетворяющие условию (1.33), при которых функция $z = f(x, y)$ может иметь условный максимум или условный минимум, нужно составить вспомогательную функцию (1.38), приравнять к нулю ее частные производные по x, y, λ и из полученной системы уравнений (1.37) определить искомые x, y и вспомогательный множитель λ .

Отметим, что λ называют множителем Лагранжа, а сам метод решения задачи - методом множителей Лагранжа.

Рассмотренный метод распространяется на исследование условного экстремума функции любого числа переменных.

Пусть требуется найти экстремумы функции n переменных $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при условии, что переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ связаны m ($m < n$) уравнениями

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = 0 \\ \varphi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_m(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = 0 \end{array} \right. . \quad (1.39)$$

Составим функцию $F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m \varphi_m(x_1, \dots, x_n)$ и приравняем нулю ее частные производные по $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} = 0 \end{array} \right. . \quad (1.40)$$

Из систем уравнений (1.38) и (1.39) определяем $X_1, X_2, \dots, X_n$ и вспомогательные неизвестные $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Так же как и для функции двух переменных, вопрос о том, будет ли при найденных значениях $X_1, X_2, \dots, X_n$ функция иметь максимум или минимум или не будет иметь ни того, ни другого, мы

в общем случае оставляем открытым. На практике само содержание задачи помогает определить характер критической точки.

ПРИМЕР 1.20 Из данного куска жести площадью $2a$ надо сделать закрытую коробку в форме параллелепипеда, имеющую наибольший объем.

Решение. Обозначим длину, ширину и высоту коробки через x, y, z . Задача сводится к разысканию максимума функции $V = xyz$ при условии, что $2xy + 2xz + 2yz = 2a$. Здесь мы имеем задачу на условный экстремум:

найти максимум функции

$$V = xyz \quad (1.40)$$

при условии, что

$$xy + xz + yz - a = 0 \quad (x > 0, y > 0, z > 0). \quad (1.41)$$

Составим вспомогательную функцию

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(xy + xz + yz - a). \quad (1.42)$$

Найдем ее частные производные и приравняем их нулю:

$$\begin{cases} yz + \lambda(y + z) = 0 \\ xz + \lambda(x + z) = 0 \\ xy + \lambda(x + y) = 0 \\ xy + xz + yz - a = 0 \end{cases} \quad (1.43)$$

Задача сводится к решению системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными x, y, z, λ . Для решения этой системы умножим первое из уравнений (1.43) на x , второе - на y , третье - на z , сложим их и с учетом равенства

(1.41) находим $\lambda = -\frac{3xyz}{2a}$. Найденное значение λ подставим в первые три

уравнения системы (1.43) и получим

$$yz \left(1 - \frac{3x}{2a}(y + z) \right) = 0$$

$$xz \left(1 - \frac{3y}{2a}(x + z) \right) = 0$$

$$xy \left(1 - \frac{3z}{2a}(x + y) \right) = 0$$

Так как x, y, z по смыслу задачи отличны от нуля, то из этих уравнений

$$\text{имеем } \frac{3x}{2a}(y + z) = 1, \quad \frac{3y}{2a}(x + z) = 1, \quad \frac{3z}{2a}(x + y) = 1.$$

Из первых двух уравнений находим $x = y$, из второго и третьего уравнений $y = z$. Но в таком случае из уравнения (1.41) получаем $x = y = z = \sqrt{\frac{a}{3}}$.

Точка $\left(\sqrt{\frac{a}{3}}; \sqrt{\frac{a}{3}}; \sqrt{\frac{a}{3}}\right)$ является единственной критической точкой, в которой функция (1.40) может иметь максимум или минимум. Так как поставленная задача имеет определенное решение, а критическая точка только одна, то в этой точке функция будет иметь максимум. Итак, для того чтобы объем коробки был наибольшим, эта коробка должна быть кубом, ребро которого равно $\sqrt{\frac{a}{3}}$.

1.15 ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

Пусть задана дифференцируемая функция $u = u(x, y, z)$. Рассмотрим точку $M(x, y, z)$ и вектор $\bar{a}$, выходящий из точки M в направлении единичного вектора

$$\bar{a}_0 = \cos \alpha \bar{i} + \cos \beta \bar{j} + \cos \gamma \bar{k},$$

где α, β, γ — углы, образованные вектором $\bar{a}_0$ с осями координат.

Пусть $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ — какая-нибудь другая точка вектора $\bar{a}$. Разность значений функции $u = u(x, y, z)$ в точках M_1 и M назовем приращением этой функции в направлении вектора $\bar{a}$ и обозначим через $\Delta_a u$. Тогда

$$\Delta_a u = u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z)$$

Обозначим через Δa расстояние между точками M и M_1 : $\Delta a = |MM_1|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.23 Производной функции $u = u(x, y, z)$ в точке

$M(x, y, z)$ по направлению вектора $\bar{a}$ называется предел $\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta_a u}{\Delta a}$.

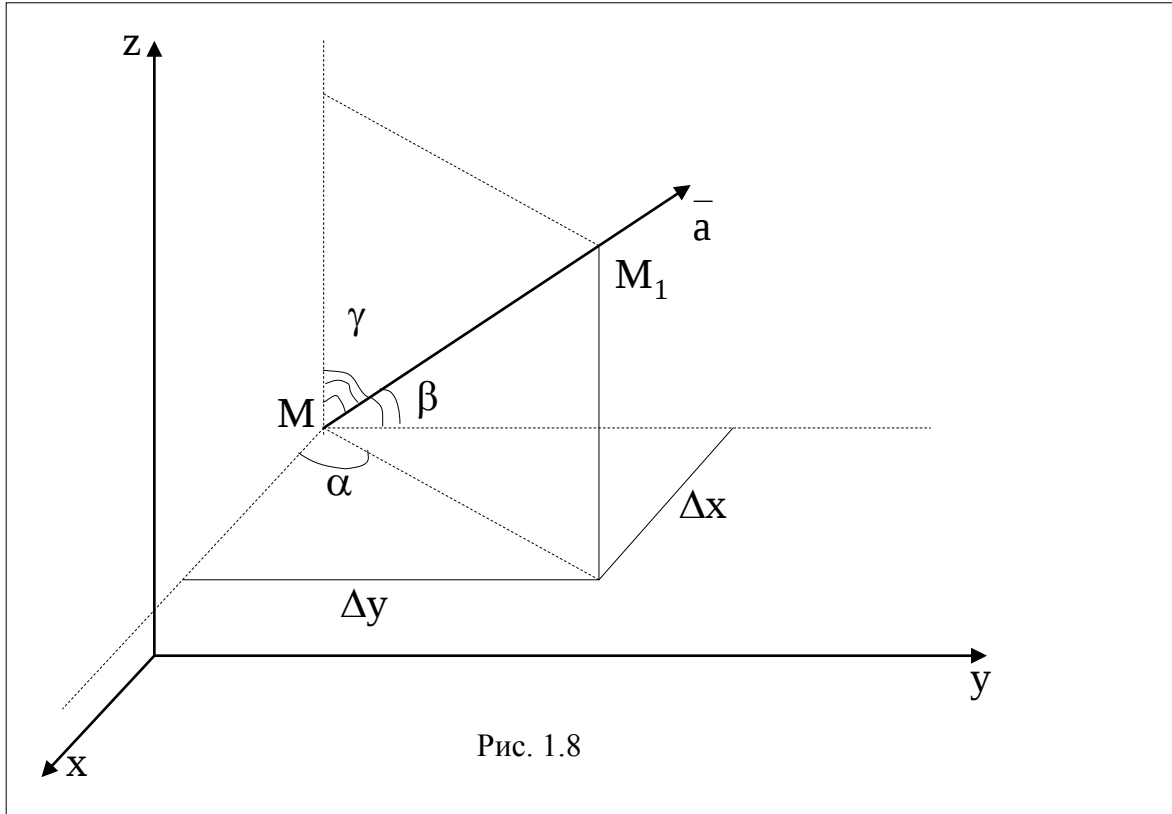
Производная функции u по направлению вектора $\bar{a}$ обозначается символом $\frac{\partial u}{\partial \ell}$. Таким образом,

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta_a u}{\Delta a}. \quad (1.44)$$

Заметим, что если производная функции $u(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$ по направлению $\bar{a}$ положительна, то данная функция в этом направлении возрастает; если же $\frac{\partial u}{\partial a} < 0$, то данная функция в направлении вектора $\bar{a}$ убывает.

Выведем формулу для вычисления производной по направлению. Прежде всего заметим, что приращения $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ координаты точки M связаны с длиной отрезка $|M_1 M| = \Delta a$ и направляющими косинусами вектора $\vec{a}$ следующими соотношениями (рис. 1.8):

$$\Delta x = \Delta a \cos \alpha, \quad \Delta y = \Delta a \cos \beta, \quad \Delta z = \Delta a \cos \gamma. \quad (1.45)$$



Так как функция u по условию дифференцируема, то ее приращение $\Delta_a u$ в точке $M(x, y, z)$ можно представить в виде

$$\Delta_a u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \alpha_1 \cdot \Delta x + \alpha_2 \cdot \Delta y + \alpha_3 \cdot \Delta z, \quad (1.46)$$

где $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0, \alpha_3 \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$.

Отсюда в силу соотношений (1.45) получаем

$$\Delta_a u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) \Delta a + (\alpha_1 \cos \alpha + \alpha_2 \cos \beta + \alpha_3 \cos \gamma) \Delta a$$

Разделив обе части этого равенства на Δa и переходя к пределу при $\Delta a \rightarrow 0$, получим искомую формулу для производной функции в данном направлении:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta_a u}{\Delta a} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

$$\text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma. \quad (1.47)$$

Следствие. Из формулы (1.47) следует, что частные производные функции $u = u(x, y, z)$ $\frac{\partial u}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial z}$ это частный случай производной по направлению. Так, например, если $\bar{a} = \bar{i} = \{1, 0, 0\}$, то есть $\cos \alpha = 1$, $\cos \beta = 0$, $\cos \gamma = 0$ и, следовательно, $\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Замечание Производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial a}$, вычисленная в т. M_0 — это скорость изменения функции $u = u(x, y, z)$ в направлении вектора $\bar{a}$ в данной точке.

ПРИМЕР 1.21 Найти производную функции $u = xy + yz + 1$ по направлению вектора $\bar{a} = \{12; -3; -4\}$ в точке $M(0; -2; -1)$.

Решение. Найдем частные производные функции $u = xy + yz + 1$: $\frac{\partial u}{\partial x} = y$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x + z$; $\frac{\partial u}{\partial z} = y$. Эти производные в точке $M(0; -2; -1)$ имеют значения: $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = -2$; $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = -1$; $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M = -2$. Теперь найдем направляющие косинусы вектора $\bar{a}$:

$$|\bar{a}| = \sqrt{12^2 + (-3)^2 + (-4)^2} = 13; \quad \cos \alpha = \frac{12}{13}; \quad \cos \beta = \frac{-3}{13}; \quad \cos \gamma = \frac{-4}{13}.$$

После этого, по формуле (1.47), вычисляем производную

$$\left. \frac{\partial u}{\partial a} \right|_M = (-2) \cdot \frac{12}{13} + (-1) \cdot \left(\frac{-3}{13} \right) + (-2) \cdot \left(\frac{-4}{13} \right) = \frac{-24 + 3 + 8}{13} = -1.$$

Замечание Для функции двух переменных $u = u(x, y)$ производная по направлению вектора $\bar{a} = \{\cos \alpha, \cos \beta\}$ в точке $M(x, y)$ выводится аналогично и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos \beta. \quad (1.48)$$

ПРИМЕР 1.22. Найти производную функции $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $M(3; 4)$ по направлению биссектрисы первого координатного угла.

Решение. Найдем частные производные функции $u = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Эти производные в точке $M(3;4)$ имеют

значения: $\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_M = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5}; \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_M = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5}$. Направляющий

вектор биссектрисы первого координатного угла - это вектор, который составляет с положительными направлениями осей Ox и Oy углы $\alpha = 45^\circ$ и

$\beta = 45^\circ$. Значит $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда, по формуле (1.48)

$$\frac{\partial u}{\partial a}\bigg|_M = \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5} \right) = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

1.16 ГРАДИЕНТ

Пусть задана дифференцируемая функция трех переменных $u = u(x, y, z)$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.24 Вектор, координатами которого являются частные производные первого порядка функции $u = u(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$, называется **градиентом** данной функции и обозначается:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \bar{k}. \quad (1.49)$$

или кратко $\text{grad } u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right\}.$

Докажем теорему, устанавливающую связь между градиентом и производной по направлению.

Теорема 1.8. Пусть в некоторой области $D \subset R^3$ задана дифференцируемая функция $u = u(x, y, z)$, для которой в каждой точке области D существует

$\text{grad } u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$. Тогда производная функции $u = u(x, y, z)$ по

направлению вектора $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ есть проекция вектора $\text{grad } u$ на вектор $\bar{a}$.

Доказательство. Рассмотрим единичный вектор $\bar{a}_0$, соответствующий

вектору $\bar{a}$: $|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}; \cos\alpha = \frac{a_1}{|\bar{a}|}; \cos\beta = \frac{a_2}{|\bar{a}|}; \cos\gamma = \frac{a_3}{|\bar{a}|}$, тогда

$\bar{a}_0 = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$, причем $|\bar{a}_0| = \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = 1$. Вычислим скалярное произведение векторов $\overline{\text{grad } u}$ и $\bar{a}_0$:

$$(\overline{\text{grad } u} \bar{a}_0) = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma. \quad (1.50)$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства, есть производная от функции $u = u(x, y, z)$ по направлению вектора $\bar{a}$. Значит $(\overline{\text{grad } u} \bar{a}_0) = \frac{\partial u}{\partial a}$.

Обозначим через φ угол между векторами $\overline{\text{grad } u}$ и $\bar{a}_0$, тогда

$$\frac{\partial u}{\partial a} = (\overline{\text{grad } u} \bar{a}_0) = |\overline{\text{grad } u}| \cdot |\bar{a}_0| \cdot \cos\varphi = |\overline{\text{grad } u}| \cdot \cos\varphi. \quad (1.51)$$

Последнее соотношение и доказывает теорему, т.е. $\frac{\partial u}{\partial a} = \cos\varphi |\overline{\text{grad } u}|$.

Следствие 1 Из всех производных по направлению, вычисленных для функции $u = u(x, y, z)$ в одной и той же точке, наибольшее значение имеет та производная, которая вычислена в направлении градиента.

Доказательство. Из соотношения (1.51): наибольшее значение у производной $\frac{\partial u}{\partial a}$ будет при $\cos\varphi = 1$, то есть $\varphi = 0$, а это и означает, что направление вектора $\bar{a}$ совпадает с направлением вектора $\overline{\text{grad } u}$. При этом наибольшее значение производной $\frac{\partial u}{\partial a}$ в направлении градиента равно $|\overline{\text{grad } u}|$.

Следствие 1.2 Производная по направлению вектора, перпендикулярного к вектору $\overline{\text{grad } u}$, равна нулю.

Доказательство. Данное утверждение следует из соотношения (1.51), если $\cos\varphi = 0$, т.е. $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Замечание Для дифференцируемой функции двух переменных $u = u(x, y)$ градиент определяется формулой

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j}. \quad (1.52)$$

ПРИМЕР 1.23 В каком направлении должна двигаться точка $M(x, y, z)$ при переходе через точку $M_0(-1; 1; -1)$, чтобы функция $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ менялась с наибольшей скоростью?

Решение. В соответствии со следствием 1 функция $u = u(x, y, z)$ будет меняться с наибольшей скоростью в направлении вектора $\text{grad } u$, координаты которого вычислены в точке M_0 . Итак, находим частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} + \frac{1}{x} \quad \text{и вычислим их в точке}$$

$M_0(-1; 1; -1)$: $\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{M_0} = 2$; $\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{M_0} = 0$; $\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{M_0} = -2$. В результате получим вектор $\text{grad } u\big|_{M_0} = \{2; 0; -2\}$, который и является ответом.

ПРИМЕР 1.24 С какой наибольшей скоростью может меняться функция $u = \ln(x^2 - y^2 + z^2)$ при переходе точки $M(x, y, z)$ через точку $M(1; 1; 1)$?

Решение. Также в соответствии со следствием 16.1, необходимо вычислить координаты вектора $\text{grad } u$ в точке M_0 :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2 - y^2 + z^2} \cdot 2x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x^2 - y^2 + z^2} \cdot (-2y); \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{x^2 - y^2 + z^2} \cdot 2z \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{M_0} = 2; \quad \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{M_0} = -2; \quad \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{M_0} = 2. \quad \text{А теперь, чтобы получить ответ на по-}$$

ставленный вопрос, вычисляем $|\text{grad } u| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Теорема 1.9 Для функции двух переменных $u = u(x, y)$ вектор $\text{grad } u$ направлен перпендикулярно к касательной, проведенной к линии уровня $u(x, y) = c$ в точке $M(x, y)$.

Теорема 1.10 Градиент функции трех переменных $u = u(x, y, z)$ направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через данную точку.

Доказательство этих двух теорем вытекает непосредственно из результатов десятого параграфа.

ПРИМЕР 1.25 Определить градиент функции $u = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$ в точке $M_0(2; 4)$

Решение. Уравнение линии уровня, проходящей через точку M_0 имеет вид: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = \frac{2^2}{2} + \frac{4^2}{3} = \frac{12 + 32}{6} = \frac{44}{6} = \frac{22}{3}$; $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = \frac{22}{3}$. Вычисляем координаты вектора $\text{grad } u$ в точке M_0 :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{2} = x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{3}; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = 2; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = \frac{8}{3}$$

$$\text{grad } u|_{M_0} = \left\{ 2; \frac{8}{3} \right\};$$

длина этого вектора равна $|\text{grad } u| = \sqrt{4 + \frac{64}{9}} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$. На рис. 1.9 вектор $\text{grad } u$ изображен в соответствии с заданным масштабом.

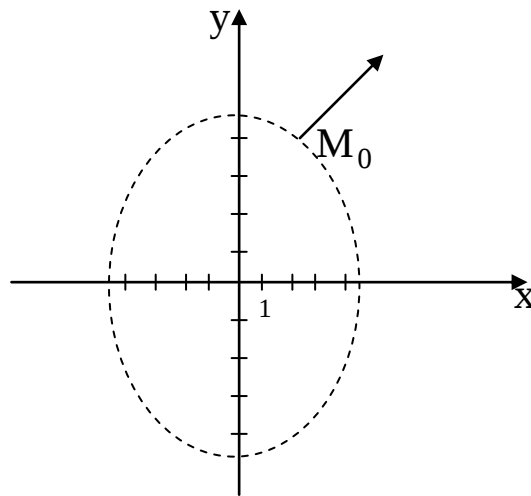


Рис. 1.9

УЧЕБНО – МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

МОДУЛЬ: «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННОЙ»

ЧАСТЬ 1

2. Методические указания для студентов

2.1 ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ. ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ УРОВНЯ

Пусть заданы числовые множества D , V и E , где D – некоторая область пространства R^2 , состоящая из пар чисел (x, y) – точек плоскости Oxy ; V – некоторая область пространства R^3 , состоящая из трех чисел (x, y, z) – точек пространства $Oxyz$; E – некоторое подмножество множества R .

Если каждой точке $(x, y) \in D$ по некоторому закону поставлено в соответствие некоторое число $u \in E$, то на множестве D определена функция двух переменных $u = f(x, y)$. Если каждой точке $(x, y, z) \in V$ по некоторому закону поставлено в соответствие некоторое число $u \in E$, то на множестве V определена функция трех переменных $u = f(x, y, z)$.

Переменные x, y или x, y, z называются независимыми переменными (или аргументами функции), u – зависимой переменной (или функцией).

Пусть функции $u = f(x, y)$ и $u = f(x, y, z)$ заданы аналитически. Областью определения этих функций является множество всех точек D и V , для которых аналитические выражения $f(x, y)$ и $f(x, y, z)$, соответственно, имеют смысл.

Линией уровня функции $u = f(x, y)$ называется множество точек (x, y) плоскости Oxy , в которых функция принимает одно и то же значение c .

Поверхностью уровня функции $u = f(x, y, z)$ называется множество точек (x, y, z) пространства $Oxyz$, в которых функция принимает одно и то же значение c .

Линии и поверхности уровня называют C – уровнями функции.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.1 Найти и изобразить область определения функции $u = \ln(4 + 4x - y^2)$.

Решение. Область определения D данной функции (двух переменных x и y) будет состоять из всех точек плоскости Oxy , для которых аналитическое выражение, задающее эту функцию, принимает действительные значения. Логарифм определен только при положительном значении его аргумента, поэтому имеем:

$$4 + 4x - y^2 > 0 \quad \text{или} \quad 4 + 4x > y^2.$$

Чтобы изобразить область D , найдем сначала ее границу

$$4 + 4x = y^2 \quad \text{или} \quad y^2 = 4(x + 1). \quad (2.1)$$

Полученное уравнение определяет параболу, вершина которой расположена в т. $O'(-1;0)$, а ось направлена в положительную сторону оси Ox . Кроме того, точки пересечения параболы с осью Oy : $A_1(0;-2)$, $A_2(0;2)$.

Парабола делит всю плоскость Oxy на две части – внутреннюю и внешнюю по отношению к параболе. Для точек одной из этих частей выполняется неравенство $y^2 < 4 + 4x$, а для другой $y^2 > 4 + 4x$. (На самой параболе $y^2 = 4 + 4x$). Чтобы установить, какая из этих частей удовлетворяет неравенству (2.1), достаточно проверить это условие для какой-нибудь одной точки, не принадлежащей параболе. Например, т. $O(0;0)$ лежит внутри параболы и удовлетворяет данному неравенству. Следовательно, рассматриваемая область D состоит из внутренних точек параболы (рис.2.1).

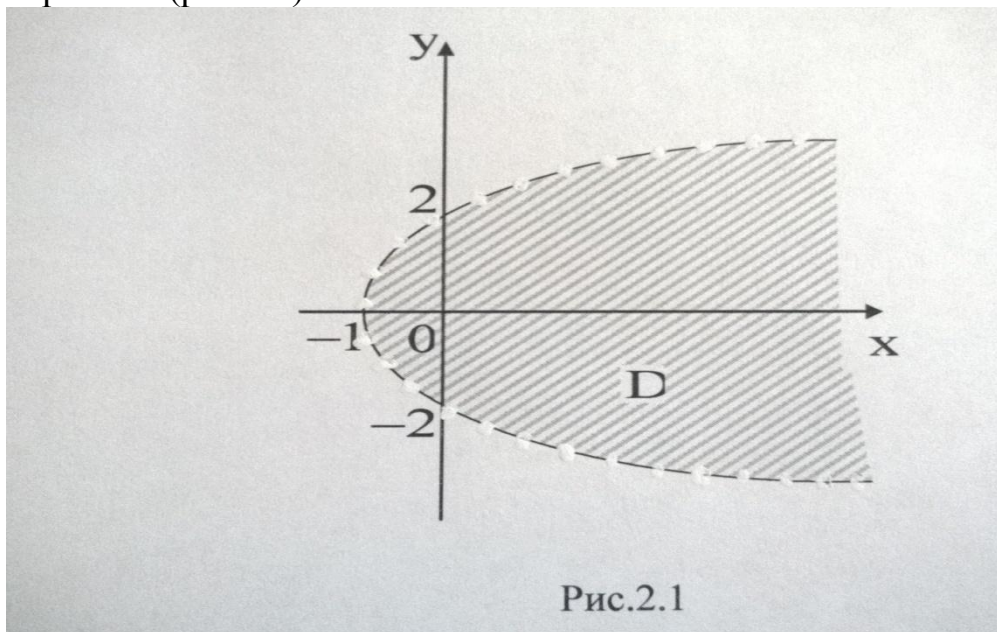


Рис.2.1

ПРИМЕР 2.2. Найти и изобразить область определения функции $u = \sqrt[4]{1 - x^2 - y^2}$.

Решение. Функция определена при условии $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, т.е. $x^2 + y^2 \leq 1$. Это круг с центром в начале координат и радиусом 1, включающий свою границу, т.е. окружность $x^2 + y^2 = 1$ (рис.2.2).

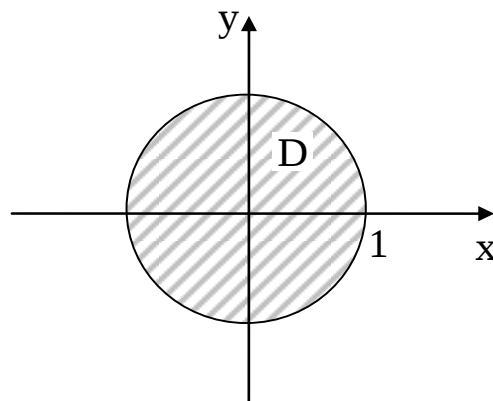


Рис.2.2

ПРИМЕР 2.3 Найти область определения функции

$$u = \frac{\pi}{3} y^2 \sqrt{x^2 - y^2}.$$

Решение. Функция определена при условии $x^2 - y^2 \geq 0$, или $x^2 \geq y^2$. Отсюда граница области определения D определяется из уравнения $x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y$. Для внутренних точек области D должно выполняться неравенство $x^2 > y^2 \Rightarrow |x| > |y|$. Таким образом, область D состоит из всех точек двух углов между биссектрисами $x = \pm y$, включая в себя обе свои границы (рис.2.3).

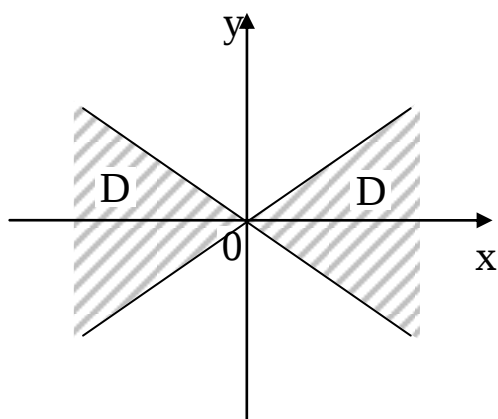


Рис.2.3

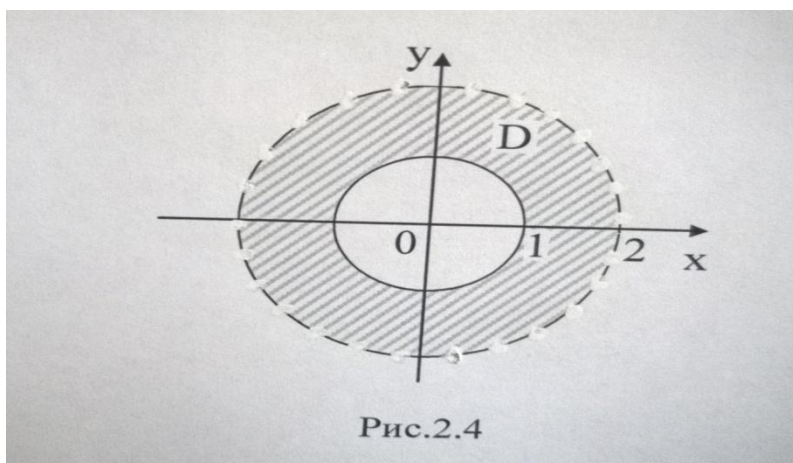
ПРИМЕР 2.4 Найти область определения функции

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2).$$

Решение. Область определения дано функции находится из решения системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0; \\ 4 - x^2 - y^2 > 0; \end{cases} \Rightarrow 1 \leq x^2 + y^2 < 4$$

и изображена на рис.2.4.



ПРИМЕР 2.5 Найти область определения функции

$$u = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}.$$

Решение. Область определения V данной функции определяется условием

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Ее граница $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ есть поверхность эллипсоида с полуосями a , b и c .

Так как т.О $(0,0,0)$, лежащая внутри эллипсоида, удовлетворяет указанному выше неравенству, то область V состоит из внутренних точек эллипсоида. Эта

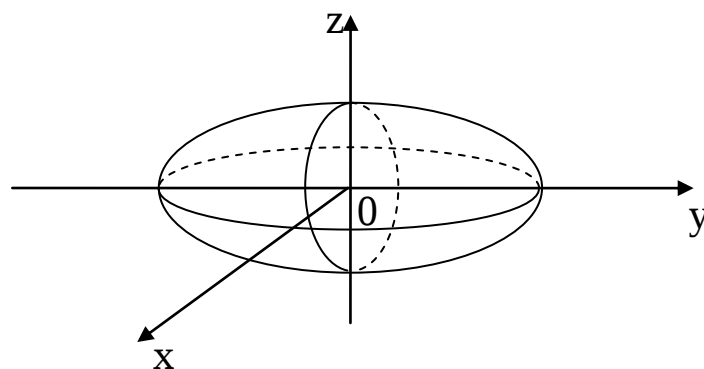


Рис. 2.5

область замкнута, так как включает в себя и границу (рис.2.5).

ПРИМЕР 2.6 Найти область определения и C -уровни функции, заданной формулой

$$u = \sqrt{\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1}}.$$

Решение. Функция определена в тех и только тех точках $(x; y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \geq 0.$$

Это неравенство равносильно двум системам неравенств:

$$\begin{cases} y \geq 0, \\ x^2 + y^2 > 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y \leq 0, \\ x^2 + y^2 < 1. \end{cases}$$

Первой системе неравенств удовлетворяют координаты всех точек, расположенных в полуплоскости $y \geq 0$, вне окружности радиуса $R=1$ с центром в начале координат. Второй системе удовлетворяют все точки плоскости, лежащие в полуплоскости $y \leq 0$, внутри окружности радиуса $R=1$ с центром в начале координат. На рис. 2.6а область определения функции показана штриховкой.

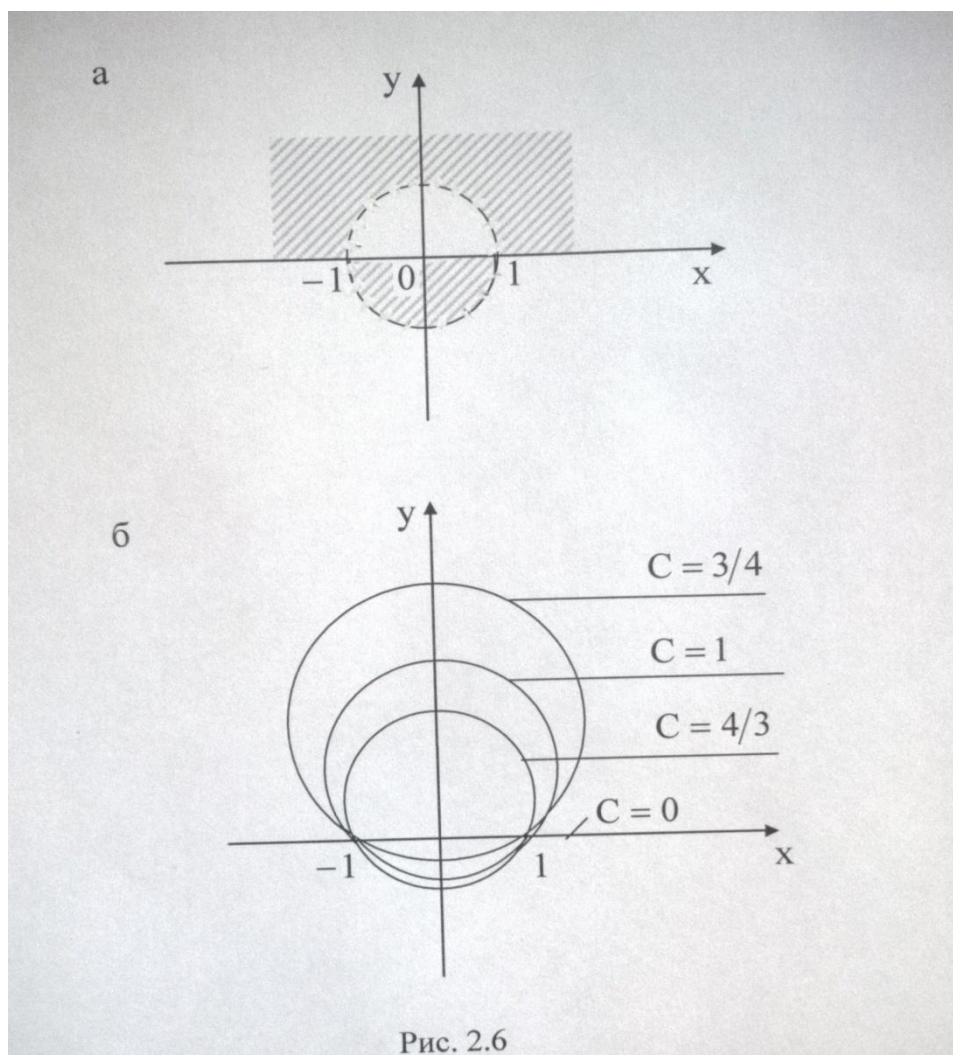


Рис. 2.6

Для нахождения C -уровня нужно для любого $C \in \mathbb{R}$ найти множество точек плоскости, координаты (x, y) которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} = C.$$

Если $C < 0$, то C -уровнем функции является пустое множество; 0-уровнем функции ($C=0$) будет множество всех точек оси x , за исключением двух точек $(\pm 1; 0)$, не входящих в область определения функции. В случае $C > 0$, преобразуя исходное уравнение, получим

$$\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} = C^2, \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{2}{C^2}y = 1, \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{C^2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{C^4}.$$

Следовательно, C -уровнем функции при $C > 0$ является окружность радиуса $\sqrt{1 + \frac{1}{C^4}}$ с центром в точке $\left(0; \frac{1}{C^2}\right)$ за исключением двух точек этой окружности $(\pm 1; 0)$, не принадлежащих области определения функции. На рис. 2.6.б построены C -уровни функции при $C = 0; 3/4; 1; 4/3$.

2.2 ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Для функции нескольких переменных часто используют запись $u = f(M)$, где M - некоторая точка из области определения функции. Например, для функции двух переменных $M = M(x, y)$ - точка на плоскости Oxy , а для функции трех переменных $M = M(x, y, z)$ - точка в пространстве $Oxyz$.

Пусть M_0 - некоторая фиксированная точка из области определения функции $u = f(M)$. Расстояние между точками M и M_0 на плоскости Oxy и в пространстве $Oxyz$ определяется соответственно формулами

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2},$$

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}.$$

Число b называется пределом функции $f(M)$ в точке M_0 (при $M \rightarrow M_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства $0 < \rho(M, M_0) < \delta$ следует неравенство $|f(M) - b| < \varepsilon$.

$$\text{Пишут } \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = b \text{ или } \lim_{\rho(M, M_0) \rightarrow 0} f(M) = b.$$

Запись $M \rightarrow M_0$ для функции двух переменных означает $\begin{matrix} x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \end{matrix}$, и, аналогично,

для функции трех переменных $\begin{matrix} x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \\ z \rightarrow z_0 \end{matrix}$.

Число b называется пределом функции $f(M)$ при $M \rightarrow \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $R > 0$ такое, что из равенства $\rho(M, O) > R$ (т.О - начало координат) следует неравенство $|f(M) - b| < \varepsilon$.

$$\text{Пишут } \lim_{M \rightarrow \infty} f(M) = b \text{ или } \lim_{\rho(M, O) \rightarrow \infty} f(M) = b.$$

Заметим, что для функции одной переменной $M = M(x)$ - точка на координатной прямой Ox . Поэтому основные теоремы о пределах функции одной переменной распространяются на случай функции нескольких переменных.

Для функций нескольких переменных наряду с обычным понятием предела вводится понятие повторного предела. Оно связано с изучением предела функций при изменении только одной независимой переменной и фиксированных значений остальных. Рассмотрим это на примере функции двух переменных.

Пусть задана функция $u = f(x, y)$. Если переменная y фиксирована, тогда $f(x, y_{\text{фикс.}})$ становится функцией одной переменной x . Пусть существует предел функции $f(x, y_{\text{фикс.}})$ при $x \rightarrow x_0$, который, очевидно, зависит от y : $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y - \text{фикс.}}} f(x, y) = \varphi(y)$. Тогда если предел функции $\varphi(y)$ при $y \rightarrow y_0$ существует

и равен $b \left(\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = b \right)$, то говорят, что в точке $M_0(x_0, y_0)$ существует

повторный предел функции $f(x, y)$ и пишут: $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = b$; при этом

$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y - \text{фикс.}}} f(x, y)$ называют внутренним пределом в повторном. Аналогично опре-

деляется другой повторный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$, в котором внутренним является $\lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ x - \text{фикс.}}} f(x, y)$.

В анализе доказывается следующая теорема: Пусть в точке $M_0(x_0, y_0)$

существует предел функции $f(x, y)$, равный $b \left(\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = b \right)$, а также

внутренние пределы в двух повторных пределах этой функции. Тогда существуют повторные пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ и $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$, причем каждый

из них равен b .

Отметим, что обратное утверждение неверно (см. примеры 2.11 и 2.12).

Понятие повторных пределов функции вводится и для случая, когда x_0 (либо y_0 , либо x_0 и y_0) равно $+\infty$ (или $-\infty$).

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.7 Доказать, что функция $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ является бесконечно малой в точке $O(0;0)$.

Решение. Напомним, функция $u = f(M)$ называется бесконечно малой при $M \rightarrow M_0$ (в точке M_0), если $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = 0$. Поэтому требуется доказать, что $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$.

Функция $f(x, y)$ определена в точке $O(0;0)$, и значит, можно рассмотреть вопрос о пределе функции в этой точке. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \varepsilon/2$. Тогда, если $\rho(M, O) = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, то $|x| < \delta$ и $|y| < \delta$.

Следовательно, $|f(x, y) - 0| = \left| (x + y) \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y} \right| = |x + y| \cdot \left| \sin \frac{1}{x} \right| \cdot \left| \sin \frac{1}{y} \right| =$

$$= \left| \begin{array}{l} |x + y| \leq |x| + |y| \\ \left| \sin \frac{1}{x} \right| < 1 \\ \left| \sin \frac{1}{y} \right| < 1 \end{array} \right| \leq |x| + |y| < 2\delta = \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$.

ПРИМЕР 2.8 Вычислить предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} (1 + xy)^{2/(x^2 + xy)}$.

Решение. Представим функцию в виде $\left[(1 + xy)^{\frac{1}{xy}} \right]^{\frac{2y}{x+y}}$. Введем новую переменную $z = xy$. Заметим, что $z \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 2$.

Вычислим $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} (1 + xy)^{1/xy} = \lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{1/z} = e$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{2y}{x + y} = 2.$$

Таким образом, по основным теоремам о пределах функции найдем:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \left[(1 + xy)^{\frac{1}{xy}} \right]^{\frac{2y}{x+y}} = \left[\lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{\frac{1}{z}} \right]^{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{2y}{x+y}} = e^2.$$

ПРИМЕР 2.9 Вычислить предел $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x + 2y}{x^2 - 2xy + 2y^2}$.

Решение. Перейдем к полярным координатам: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$.

Тогда $\frac{x + 2y}{x^2 - 2xy + 2y^2} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\cos \varphi + 2 \sin \varphi}{\cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi \sin \varphi + 2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{f(\varphi)}{g(\varphi)}$, а условие $M(x, y) \rightarrow \infty$ эквивалентно условию $\rho \rightarrow \infty$.

При $\rho \rightarrow \infty$ первый сомножитель $\frac{1}{\rho}$ стремится к нулю. Второй сомножитель $\frac{f(\varphi)}{g(\varphi)}$ при $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ограничен. Произведение бесконечно-малой функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция, поэтому искомый предел равен нулю.

ПРИМЕР 2.10 Вычислить повторные пределы функции $f(x, y) = \frac{ax + by}{cx + dy}$

в точке $O(0;0)$ при условии $c \neq 0$, $d \neq 0$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x \text{ -фикс.} \\ x \neq 0}} \frac{ax + by}{cx + dy} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x \text{ -фикс.} \\ x \neq 0}} \frac{a + b \frac{y}{x}}{c + d \frac{y}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{c} = \frac{a}{c}.$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \text{ -фикс.} \\ y \neq 0}} \frac{ax + by}{cx + dy} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \text{ -фикс.} \\ y \neq 0}} \frac{a \frac{x}{y} + b}{c \frac{x}{y} + d} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{b}{d} = \frac{b}{d}.$$

ПРИМЕР 2.11 Существует ли предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$?

Решение. Пусть точка $M(x, y)$ стремится к точке $O(0;0)$ по прямой $y = kx$, проходящей через точку $O(0;0)$. Тогда получим

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ (y=kx)}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Заметим, что, приближаясь к точке $O(0;0)$ по различным прямым, соответствующим разным значениям k , получаем разные предельные значения, поэтому предел данной функции в точке $O(0;0)$ не существует.

ПРИМЕР 2.12 Существуют ли повторные пределы функции $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y}$ в точке $O(0;0)$?

Решение. Рассмотрим внутренний предел в повторном пределе $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$. Представим функцию $f(x, y)$ в виде суммы двух слагаемых:

$f(x, y) = x \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y}$. При фиксированном y , $y \neq 0$ первое слагаемое $x \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ $\left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y} \right) = 0 \right)$.

Во втором слагаемом произведение $y \sin \frac{1}{y}$ является постоянным, отличным от нуля, если $y \neq \frac{1}{\pi n}$ ($n \in \mathbb{Z}$), а сомножитель $\sin \frac{1}{x}$ не имеет предела при $x \rightarrow 0$: в сколь угодно малой окрестности точки $x = 0$ функция $\sin \frac{1}{x}$ принимает все значения от -1 до 1. Следовательно, второе слагаемое $y \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y}$, а значит, и вся функция $f(x, y)$ не имеет предела при $x \rightarrow 0$ и фиксированном y , $y \neq 0$; $\frac{1}{\pi n}$. Таким образом, указанный внутренний предел не существует, а поэтому не существует повторный предел $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$. Аналогично доказывается, что не существует другой повторный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$.

2.3 НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Функция $u = f(M)$ называется непрерывной в точке M_0 , если:

- 1) $f(M)$ определена в точке M_0 и некоторой ее окрестности;
- 2) существует предел $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$;
- 3) этот предел равен значению функции в точке M_0 ,

т.е.

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0).$$

Точка M_0 называется точкой разрыва функции $u = f(M)$, если для нее не выполняется хотя бы одно из данных условий. Точки разрыва данной функции могут располагаться как отдельно (изолированные точки разрыва), так и заполнять целые линии (линии разрыва).

Функция $u = f(M)$ называется непрерывной в некоторой области, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.13 Исследовать на непрерывность функцию $u = \frac{x - y}{x^3 - y^3}$.

Решение. Данная функция является дробно-рациональной функцией переменных x и y . Она не определена в тех точках, где знаменатель дроби равен нулю ($x^3 - y^3 = 0$), т.е. функция не определена на прямой $y = x$.

Таким образом, прямая $y = x$ есть линия разрыва данной функции. В остальных точках плоскости (x, y) функция определена. Отметим, что в любой точке $M_1(a, a)$ ($a \neq 0$), лежащей на прямой $y = x$ и не совпадающей с точкой $O(0;0)$ существует предел функции:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow a}} \frac{x - y}{x^3 - y^3} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow a}} \frac{1}{x^2 - xy + y^2} = \frac{1}{a^2}.$$

Поэтому точки $M_1(a, a)$ при $a \neq 0$ можно назвать точками устранимого разрыва функции, т.к. если положить $u(a, a) = \frac{1}{a^2}$, то функция станет непрерывной в точке $M_1(a, a)$.

В точке $O(0;0)$ имеем $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{x^2 - xy + y^2} = \infty$, т.е. эта точка является точкой разрыва 2-го рода данной функции.

ПРИМЕР 2.14 Исследовать на непрерывность функцию $u = \frac{x^2 + 2y + 4}{y^2 - 2x}$.

Решение. Функция $u = f(x, y)$ непрерывна как отношение многочленов во всех точках, кроме тех, где знаменатель обращается в нуль. Таким образом, точки разрыва 2-го рода расположены на линии $y^2 - 2x = 0 \Rightarrow y^2 = 2x$, т.е. на параболе.

ПРИМЕР 2.15 Исследовать на непрерывность функцию $u = \cos \frac{1}{x - y}$.

Решение. Данная функция сложная: $u = \cos \vartheta$, где $\vartheta = \frac{1}{x-y}$. Функция

$\cos \vartheta$ непрерывна при любом значении аргумента ϑ . Точки разрыва надо искать для функции $\vartheta = \frac{1}{x-y}$, в этих точках будет разрыв на и вся сложная

функция u . Функция $\vartheta = \frac{1}{x-y}$, очевидно, терпит разрыв вдоль прямой $y = x$.

При приближении точки $M(x, y)$ к одной из точек прямой $y = x$ функция $u = \cos \frac{1}{x-y}$ производит бесконечно много колебаний в пределах $[-1, 1]$ и, следовательно, никакого предела не имеет.

2.4 ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ

Частные производные функции $u = f(x, y, z)$ по аргументам x , y и z соответственно определяются как соответствующие пределы (если они существуют):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y},$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}.$$

При фиксированных значениях всех аргументов, кроме, например, x , функция $u = f(x, y, z)$ становится функцией одной переменной. Производная этой функции по переменной x и есть частная производная $u = f(x, y, z)$ по аргументу x . Поэтому вычисление частных производных производится по тем же правилам, что и вычисление производной функции одной переменной.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.16 Найти частные производные функции: $u = x^y$ ($x > 0$).

Решение. При вычислении частной производной функции $u = x^y$ от аргумента x рассматриваем функцию u как функцию одной переменной x , т.е. считаем y фиксировано. Тогда функция $u = x^y$ является степенной функцией

аргумента x . По формуле дифференцирования степенной функции получаем $\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}$.

Аналогично, при вычислении частной производной $\frac{\partial u}{\partial y}$ считаем, что x -фиксировано, и рассматриваем функцию $u = x^y$ как показательную функцию аргумента y , поэтому $\frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x$.

ПРИМЕР 2.17 Найти значения частных производных функции $u = 2x^3 + 3x^2y + 6xy - y^3$ в точке $M_0(-1, 2)$.

Решение. Считая y постоянной и дифференцируя u , как функцию от x , находим частную производную по x , вычисляем ее значение в точке M_0 :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6(x^2 + xy + y); \quad \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = 6((-1)^2 - 2 + 2) = 6.$$

Считая x постоянной и дифференцируя u , как функцию y , находим частную производную по y , вычисляем ее значение в точке M_0 :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3(x^2 + 2x - y^2); \quad \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = 3((-1)^2 - 2 - 2^2) = -15.$$

ПРИМЕР 2.18 Найти частные производные функции: $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Решение. При фиксированных значениях y и z данная функция является сложной функцией аргумента x . Вычисляя производную этой функции аргумента x , получаем $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Однако полученные формулы теряют смысл в точке $O(0;0;0)$, т.к. в этой точке производные данной функции не существуют. Имеем $u(x, 0, 0) = \sqrt{x^2} = |x|$, т.е. из дифференциального ис-

числения функции одной переменной следует, что $\frac{\partial u}{\partial x}(O)$ не существует. Ана-

логично рассуждая можно показать, что $\frac{\partial u}{\partial y}(O)$ и $\frac{\partial u}{\partial z}(O)$ не существуют. За-

метим, что данная функция в исследуемой точке непрерывна.

ПРИМЕР 2.19 Найти частные производные функции $u = f(x, xy, xyz)$ по аргументам x, y и z .

Решение. Данная функция является сложной функцией переменных x, y и z : $u = f(t, \vartheta, \omega)$, где $t = x$, $\vartheta = xy$, $\omega = xyz$, поэтому имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial z}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}\text{Вычислим } \frac{\partial t}{\partial x} &= 1, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} &= yz, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = xz, \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} = xy.\end{aligned}$$

Подставляя (2.2), найдем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + y \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + yz \frac{\partial u}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + xz \frac{\partial u}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy \frac{\partial u}{\partial \omega}.$$

2.5 ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M_0 = M_0(x_0, y_0, z_0)$, т.е. ее полное приращение в этой точке можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) \Delta y + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) \Delta z + (\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y + \alpha_3 \Delta z).\end{aligned}$$

Дифференциал этой функции вычисляется по формуле

$$du(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) \Delta z \tag{2.3}$$

Обозначим через $x_1 = x_0 + \Delta x$, $y_1 = y_0 + \Delta y$, $z_1 = z_0 + \Delta z$ координаты некоторой точки M_1 , т.е. $M_1 = M_1(x_1, y_1, z_1)$, тогда из (2.3) следует

$$f(M_1) \approx f(M_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) \Delta z. \tag{2.4}$$

Алгоритм использования дифференциала в приближенных вычислениях

Пусть требуется найти приближенное значение величины A , тогда необходимо выполнить следующие действия:

1. Представить A в виде значения некоторой функции в точке M_1 :

$$A = f(M_1).$$

2. Подобрать точку M_0 так, чтобы она была достаточно близкой к точке M_1 и значение $f(M_0)$ вычислялось легко и вычислить $f(M_0)$.

3. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)$, $\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)$.

4. Вычислить $f(M_1)$ согласно формуле (2.4).

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.20 Найти дифференциал функции $u = e^{x^2+y^2+z^2}$ в точке $M_0(0,1,2)$.

Решение.

Данная функция является сложной $u = e^t$, где $t = x^2 + y^2 + z^2$, поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z}.$$

$$\text{Найдем } \frac{\partial t}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial t}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = e^t.$$

$$\text{Имеем } \frac{\partial u}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2ze^{x^2+y^2+z^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = 2e^5, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) = 4e^5,$$

$$du(M_0) = 2e^5 dy + 4e^5 dz.$$

ПРИМЕР 2.21 Найти дифференциал функции $u = f(x + y^2, y + x^2)$ в точке $M(-1,1)$.

Решение. Запишем функцию $A = f(x + y^2, y + x^2)$ в виде $u = f(t, \vartheta)$, где $t = x + y^2$, $\vartheta = y + x^2$, поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial y}.$$

Вычислив $\frac{\partial t}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial t}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 1$, найдем

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial t}(M_0) - 2 \frac{\partial u}{\partial \vartheta}(M_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = 2 \frac{\partial u}{\partial t}(M_0) + \frac{\partial u}{\partial \vartheta}(M_0),$$

$$du(M_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}(M_0) - 2 \frac{\partial u}{\partial \vartheta}(M_0) \right) dx + \left(2 \frac{\partial u}{\partial t}(M_0) + \frac{\partial u}{\partial \vartheta}(M_0) \right) dy.$$

ПРИМЕР 2.22 Найти приближенное значение величины $\sqrt{1,03^2 + 1,98^3}$.

Решение. Положим $A = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3}$, $M_1(1,03, 1,98)$. Выберем $M_0(1, 2)$, тогда $f(M_0) = \sqrt{1^2 + 2^3} = 3$.

Найдем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = x(x^2 + y^3)^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3}{2}x^2(x^2 + y^3)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = \frac{1}{3}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = 2.$$

По формуле (2.4) найдем

$$\sqrt{1,03^2 + 1,98^3} \approx 3 + \frac{1}{3}(1,03 - 1) + 2(1,98 - 2) = 2,97.$$

2.6 ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Частными производными второго порядка от функции $u = f(M)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка.

Рассмотрим функцию двух переменных $u = f(x, y)$, которая имеет частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ во всех точках области определения D . Част-

ные производные второго порядка в этом случае записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y); \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y); & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y). \end{aligned}$$

Аналогично определяются и записываются частные производные третьего порядка, например:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = f'''_{xxx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{xxy}(x, y),$$

и высших порядков:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} \right) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}. \quad (2.5)$$

Так называемые “смешанные” производные, отличающиеся друг от друга лишь последовательностью дифференцирования, равны между собой, если они

непрерывны, например: $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$. В этом случае говорят, что данная

функция не зависит от порядка дифференцирования.

Дифференциалом второго порядка от функции $u = f(x, y)$ называется дифференциал от ее полного дифференциала, т.е. $d^2 u = d(du)$. Аналогично определяются дифференциалы третьего и высших порядков:

$$d^n u = d(d^{n-1} u) \text{ или } d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n u, \quad (2.6)$$

здесь $\frac{\partial}{\partial x}$ – оператор частной производной по переменной x (при действии его на функцию u получается новая функция $\frac{\partial u}{\partial x}$);

$d = \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy$ – оператор первого дифференциала (при действии его

на функцию $u = f(x, y)$ получится дифференциал функции $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx +$

$+\frac{\partial u}{\partial y} dy$); $d^n = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n$ – оператор n -го дифференциала.

При $n = 2$ из (2.6) получим:

$$d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2, \quad (2.7)$$

где $dx^2 = (dx)^2$, $dy^2 = (dy)^2$.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.23 Найти частные производные функции

$$u = \arcsin(xy + y^2 z^2).$$

Решение. $u'_x = \left| \begin{matrix} y = \text{const} \\ z = \text{const} \end{matrix} \right| = \frac{y}{\sqrt{1 - (xy + y^2 z^2)^2}};$

$$u'_y = \left| \begin{matrix} x = \text{const} \\ z = \text{const} \end{matrix} \right| = \frac{x + 2yz^2}{\sqrt{1 - (xy + y^2 z^2)^2}};$$

$$u'_z = \left| \begin{matrix} x = \text{const} \\ y = \text{const} \end{matrix} \right| = \frac{2y^2 z}{\sqrt{1 - (xy + y^2 z^2)^2}}.$$

ПРИМЕР 2.24 Найти частные производные второго порядка функции $u = x^y$.

Решение. Сначала находим частные производные первого порядка $\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x$. Затем вычисляем частные производные от частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^y (\ln x)^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x = x^{y-1} (1 + y \ln x),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = yx^{y-1} \ln x + x^y \frac{1}{x} = x^{y-1} (1 + y \ln x).$$

ПРИМЕР 2.25 Найти $\frac{\partial^{10} u}{\partial x^2 \partial y^8}$, если $u = e^{xy}$.

Решение. Функция $u = e^{xy}$ является элементарной, поэтому частная производная 10-го порядка не зависит от порядка дифференцирования. Найдем

$\frac{\partial^8 u}{\partial y^8} = x^8 e^{xy}$, тогда согласно (2.5) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{10} u}{\partial x^2 \partial y^8} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) = (x^8)''_{xx} e^{xy} + 2(x^8)'_x (e^{xy})'_x + x^8 (e^{xy})''_{xx} = \\ &= 56x^6 e^{xy} + 16x^7 y e^{xy} + x^8 y^2 e^{xy} = e^{xy} (56x^6 + 16x^7 y + x^8 y^2). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2.26 Найти второй дифференциал функции $u = x^y$ в точке $M_0(1,0)$.

Решение. Полагая $x = 1, y = 0$ в выражениях для частных производных второго порядка данной функции, найденных в примере 2.24, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(M_0) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0) = 0.$$

Подставляя эти значения в формулу (2.7), получим $d^2 u(M_0) = 2dx dy$.

ПРИМЕР 2.27 Найти второй дифференциал функции $u = f(x + y, xy)$ в точке $M(x, y)$, если x и y — независимые переменные.

Решение. Запишем данную функцию в виде $u = f(t, \vartheta)$, где $t = x + y$, $\vartheta = xy$. Используя эти обозначения, находим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_t(t, \vartheta) \cdot t'_x + f'_\vartheta(t, \vartheta) \cdot \vartheta'_x = f'_t(t, \vartheta) + f'_\vartheta(t, \vartheta) \cdot y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'_t(t, \vartheta) \cdot t'_y + f'_\vartheta(t, \vartheta) \cdot \vartheta'_y = f'_t(t, \vartheta) + f'_\vartheta(t, \vartheta) \cdot x;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{tt} + t''_{t\vartheta} \cdot y + f''_{t\vartheta} \cdot y + f''_{\vartheta\vartheta} \cdot y^2 = f''_{tt} + 2f''_{t\vartheta} y + y^2 f''_{\vartheta\vartheta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f''_{tt} + t''_{t\vartheta} \cdot x + f''_{t\vartheta} \cdot y + f''_{\vartheta\vartheta} \cdot xy + f'_\vartheta = f''_{tt} + t f''_{t\vartheta} + \vartheta f''_{\vartheta\vartheta} + f'_\vartheta;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''_{tt} + t''_{t\vartheta} \cdot x + f''_{t\vartheta} \cdot x + f''_{\vartheta\vartheta} \cdot x^2 = f''_{tt} + 2x \cdot f''_{t\vartheta} + x^2 f''_{\vartheta\vartheta}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (2.7), получаем

$$d^2 u = (f''_{tt} + 2y f''_{\vartheta\vartheta} + y^2 f''_{\vartheta\vartheta}) dx^2 + 2(f''_{tt} + t f''_{t\vartheta} + \vartheta f''_{\vartheta\vartheta} + f'_\vartheta) \cdot dx dy +$$

$$+ \left(f''_{tt} + 2x \cdot t''_{t9} + x^2 \cdot f''_{t9} + x^2 \cdot f''_{99} \right) \cdot dy^2.$$

2.7 ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ

Пусть функция $u = f(M)$ определена в некоторой окрестности точки M_0 ; ℓ некоторый луч M_0M , $\Delta\ell$ — длина отрезка $|M_0M|$, $\vec{\ell}_0$ — единичный вектор, имеющий направление луча ℓ . Предел $\lim_{\Delta\ell \rightarrow 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\Delta\ell}$, если он существует, называется производной функции $u = f(M)$ по направлению $\vec{\ell}_0$ в точке M_0 и обозначается $\frac{\partial u}{\partial \ell}(M_0)$. В декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$:

$$\frac{\partial u}{\partial \ell}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) \cos \gamma, \quad (2.8)$$

где $\vec{\ell}_0 = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$.

Градиентом функции $u = f(M)$ в точке M_0 называется вектор, характеризующий направление наибольшего роста функции в этой точке и обозначается $\vec{\text{grad}} u(M_0)$. В декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$:

$$\vec{\text{grad}} u(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) \vec{k} \quad (2.9)$$

Производная функции $u = f(M)$ в точке M_0 в направлении вектора $\vec{\ell}_0$ и градиент связаны соотношением:

$$\frac{\partial u}{\partial \ell}(M_0) = \left(\vec{\text{grad}} u(M_0) \cdot \vec{\ell}_0 \right).$$

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.28 Вычислить градиент функции $u = xy$ в точках $M_0(1;1)$ и $M_1(1;-1)$.

Решение.

$$\text{Найдем } \frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(M_1) = -1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(M_1) = 1.$$

Тогда $\vec{\text{grad}} u(M_0) = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{\text{grad}} u(M_1) = -\vec{i} + \vec{j}$.

Векторы $\vec{\text{grad}} u(M_0)$ и $\vec{\text{grad}} u(M_1)$ перпендикулярны линиям уровня в точках M_0 и M_1 , соответственно. Длины векторов $\vec{\text{grad}} u(M_0)$ и $\vec{\text{grad}} u(M_1)$ характеризуют наибольшие скорости изменения функции u в точках M_0 и M_1 , соответственно: $\left| \vec{\text{grad}} u(M_0) \right| = \sqrt{2}$, $\left| \vec{\text{grad}} u(M_1) \right| = \sqrt{2}$.

ПРИМЕР 2.29 Найти градиент функции $u = xyz$ в точке $M_0(-2, 3, 4)$. Чему равна в этой точке производная функции u в направлении вектора $\vec{l} = \{3, -4, 12\}$?

Решение. $\vec{\text{grad}} u = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$, $\vec{\text{grad}} u(M_0) = 12\vec{i} - 8\vec{j} - 6\vec{k}$.

$$\vec{\ell}_0 = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \frac{\vec{l}}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2}} = \frac{1}{13} \cdot (3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}).$$

$$\frac{\partial u}{\partial \ell}(M_0) = \frac{3}{13} \cdot 12 + \frac{4}{13} \cdot 8 - \frac{12}{13} \cdot 6 = -\frac{4}{13}.$$

2.8 КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Касательной плоскостью к поверхности в данной точке M_0 (точке касания) называется плоскость, в которой лежат касательные в этой точке к всевозможным кривым, проведенным на данной поверхности через указанную точку.

Нормалью к поверхности называется прямая, перпендикулярная к касательной плоскости в точке касания. Координаты вектора нормали $\vec{n} = \{A, B, C\}$ к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ пропорциональны значениям соответствующих частных производных функции $F(x, y, z)$ в этой точке:

$$A = \lambda F'_x(x_0, y_0, z_0), \quad B = \lambda F'_y(x_0, y_0, z_0), \quad C = \lambda F'_z(x_0, y_0, z_0).$$

Уравнение касательной плоскости к поверхности в точке M_0 :

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0. \quad (2.10)$$

Уравнение нормали к данной поверхности в точке M_0 :

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}. \quad (2.11)$$

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.30 Записать уравнения нормали и касательной плоскости к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке $M_0(1, -2, 5)$.

Решение.

Поскольку $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$, то $F'_x = 2x$, $F'_y = 2y$, $F'_z = -1$,
 $F'_x(M_0) = 2$, $F'_y(M_0) = -4$, $F'_z(M_0) = -1$.

Уравнение касательной плоскости: $2(x - 1) - 4(y + 2) - (z - 5) = 0$.

Уравнение нормали: $\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{-4} = \frac{z - 5}{-1}$.

ПРИМЕР 2.31 Найти уравнение касательной плоскости к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ в точке M_0 , где $y_0 = 1$, $z_0 = \sqrt{3}$.

Решение.

Подставляя y_0 и z_0 в уравнение сферы, находим $x_0 = 0$, т.е. $M_0(0, 1, \sqrt{3})$. Запишем уравнение сферы в неявном виде: $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$, откуда $F'_x = 2x$, $F'_y = 2y$, $F'_z = 2z$.

Найдем $A = F'_x(M_0) = 0$, $B = F'_y(M_0) = 2$, $C = F'_z(M_0) = 2\sqrt{3}$.

Уравнение касательной плоскости: $0(x - 0) + 2(y - 1) + 2\sqrt{3}(z - \sqrt{3}) = 0$,
 или $y + \sqrt{3}z - 4 = 0$ - плоскость параллельна оси Ox .

ПРИМЕР 2.32 К эллипсоиду $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости $\alpha: x + 4y + 6z = 0$.

Решение.

В данном случае $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21 = 0$, поэтому $F'_x = 2x$, $F'_y = 4y$, $F'_z = 6z$. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - точка, в которой касательная плоскость параллельна данной плоскости α . В этом случае вектор $\vec{n}$ нормали к поверхности имеет координаты

$$A = 2x_0, \quad B = 4y_0, \quad C = 6z_0 \quad \vec{n} = \{2x_0, 4y_0, 6z_0\}.$$

Обозначим через $\vec{n}_1 = \{1, 4, 6\}$ нормальный вектор к плоскости α . По условию векторы $\vec{n}$ и $\vec{n}_1$ коллинеарны, т.е. их соответствующие координаты пропорциональны:

$$\frac{2x_0}{1} = \frac{4y_0}{4} = \frac{6z_0}{6}, \text{ или } y_0 = z_0 = 2x_0.$$

Кроме того, точка M_0 лежит на эллипсоиде, т.е. $x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 - 21 = 0$. Подставляя сюда значения y_0 и z_0 , выраженные через x_0 , получим

$$x_0^2 + 2(2x_0)^2 + 3(2x_0)^2 = 21, \quad \text{т.е. } x_0^2 = 1 \Rightarrow x_0 = \pm 1.$$

Следовательно, условию задачи удовлетворяют точки $M_{01}(1, 2, 2)$ и $M_{02}(-1, -2, -2)$.

Для точки M_{01} имеем $A = 2, \quad B = 8, \quad C = 12$, поэтому уравнение касательной плоскости имеет вид: $2(x-1) + 8(y-2) + 12(z-2) = 0$, или $x + 4y + 6z - 21 = 0$.

Аналогично, искомая касательная плоскость, проходящая через точку M_{02} , имеет уравнение: $x + 4y + 6z + 21 = 0$.

2.9 ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Максимумом (минимумом) функции $u = f(M)$ в точке M_0 называется такое ее значение $f(M_0)$, которое больше (меньше) всех других ее значений, принимаемых в точках M , достаточно близких к точке M_0 и отличных от нее.

Максимум и минимум функции называется ее экстремумом. Точка, в которой достигается экстремум, называется точкой экстремума.

Алгоритм исследования функции $u = f(x, y)$ на экстремум

1) Проверить необходимое условие экстремума:

$$1. \text{ Найти частные производные первого порядка } \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}.$$

2. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

найти точки возможного экстремума.

2) Проверить достаточные условия экстремума:

1. Найти частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$,

2. Составить матрицу $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,

где $a_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $a_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$,

и найти ее определитель $\Delta = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$.

3. Вычислить Δ в точках возможного экстремума. Если $\Delta > 0$, то в данной точке функция имеет экстремум, а именно максимум при $a_{11} < 0$ (или $a_{22} < 0$) и минимум при $a_{11} > 0$ (или $a_{22} > 0$); если $\Delta < 0$, то в данной точке экстремума нет; если $\Delta = 0$, то требуется дальнейшее исследование.

Алгоритм исследования функции $u = f(x, y, z)$ на экстремум

1) Проверить необходимое условие экстремума:

1. Найти частные производные первого порядка $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$.

2. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

найти точки возможного экстремума.

2) Проверить достаточные условия экстремума:

1. Найти частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

2. Составить матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$

где

$$a_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$a_{13} = a_{31} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \quad a_{33} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad a_{23} = a_{32} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z},$$

и найти минор к элементу a_{11} : $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ и

определитель матрицы A : $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$

Вычислить M_{11} и Δ в точках возможного экстремума. Если $a_{11} > 0$, $M_{11} > 0$, $\Delta > 0$, то в данной точке функция имеет минимум; если $a_{11} < 0$, $M_{11} > 0$, $\Delta < 0$, то в данной точке функция имеет максимум; если $a_{11} > 0$, $M_{11} < 0$, $\Delta < 0$, или $a_{11} < 0$, $M_{11} > 0$, $\Delta > 0$, то в данной точке функция не имеет экстремума; если $\Delta = 0$ и $a_{11} > 0$, $M_{11} > 0$ либо $a_{11} < 0$, $M_{11} < 0$, то требуются дополнительные исследования.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.33 Исследовать на экстремум функцию двух переменных $u = x^2 - 2xy + 4y^3$.

Решение.

Функция определена и непрерывна в любой точке плоскости Oxy .

Проверим необходимое условие экстремума.

Найдем частные производные 1-го порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2x + 12y^2.$$

Согласно необходимым условиям экстремума получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0, \\ -2x + 12y^2 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем точки возможного экстремума: $M_1(0;0)$, $M_2(1/6, 1/6)$.

Проверим достаточное условие экстремума.

Вычислим частные производные 2-го порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 24y,$$

и составим матрицу: $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 24y \end{pmatrix}$.

В точке M_1 ; $\Delta = -4 < 0$, поэтому в этой точке экстремума нет. В точке M_2 : $\Delta(M_2) = 4 > 0$, $a_{11} = 2 > 0$, следовательно, в этой точке функция имеет минимум $u(M_2) = -\frac{1}{108}$.

ПРИМЕР 2.34 Исследовать на экстремум функцию двух переменных

$$u = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26.$$

Решение.

Функция определена и непрерывна в любой точке плоскости Oxy .

Проверим необходимое условие экстремума.

Найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 39, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6xy - 36.$$

Согласно необходимым условиям экстремума получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 = 39, \\ 6xy = 36. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем точки возможного экстремума: $M_1(3; 2)$,

$M_2(-3; -2)$, $M_3(2; 3)$, $M_4(-2; -3)$.

Проверим достаточное условие экстремума.

Вычислим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x.$$

и составим матрицу: $\begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$, для которой $a_{11} = 6x$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix} = 36(x^2 - y^2).$$

В точке M_1 $\Delta > 0$, $a_{11} > 0$ следовательно, в этой точке функция имеет минимум $u(M_1) = -100$. В точке M_2 $\Delta > 0$, $a_{11} < 0$, следовательно, в этой точке функция имеет максимум $u(M_2) = 152$. В точках M_3 и M_4 $\Delta < 0$, поэтому в этих точках экстремума нет.

ПРИМЕР 2.35 Исследовать на экстремум функцию двух переменных

$$u = 3x^2y - x^3 - y^4.$$

Решение.

Функция определена и непрерывна в любой точке плоскости Oxy .

Проверим необходимое условие экстремума.

Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -3x^2 + 6xy, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 - 4y^3.$$

Согласно необходимым условиям экстремума получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -3x^2 + 6xy = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем точки возможного экстремума: $M_1(0; 0)$, $M_2(6; 3)$.

Проверим достаточное условие экстремума.

Вычислим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6x + 6y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -12y^2.$$

Составим матрицу: $\begin{pmatrix} -6x + 6y & 6x \\ 6x & -12y^2 \end{pmatrix}$,

для которой

$$a_{11} = -6x + 6y,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -6x + 6y & 6x \\ 6x & -12y^2 \end{vmatrix} = 36(-2y^3 + 2y^2x - x^2).$$

В точке M_1 : $\Delta(M_1) = 0$, $a_{11} = 0$ поэтому требуются дополнительные исследования - заметим, что значение функции в этой точке $u(0; 0) = 0$, а в окрестности ее $u(\varepsilon, 0) = -\varepsilon^3$, т.е. при $\varepsilon > 0$ функция принимает отрицательные значения ($u(\varepsilon, 0) < 0$), а при $\varepsilon < 0$ - положительные значения ($u(\varepsilon, 0) > 0$). Таким образом, в точке M_1 функция не имеет экстремума. В точке M_2 $\Delta = 648 > 0$, $a_{11} = -18 < 0$, следовательно, в этой точке функция имеет максимум $u(M_2) = 27$.

ПРИМЕР 2.36 Исследовать на экстремум функцию трех переменных

$$u = 3x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 2z + 1$$

Решение.

Функция определена и непрерывна в любой точке пространства $Oxyz$.

Проверим необходимое условие экстремума.

Найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 9x^2 + 6y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 6x, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z - 2.$$

Решив систему

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y = 0, \\ y + 3x = 6, \\ z - 1 = 0. \end{cases}$$

найдем точки возможного экстремума $M_1(2; -6; 1)$ и $M_2(0; 0; 1)$.

Проверим достаточное условие экстремума:

Вычислим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 18x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$$

Составим матрицу

$$\begin{pmatrix} 18x & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

для которой найдем $a_{11} = 18x$, $M_{11} = 36(x-1)$, $\Delta = 72(x-1)$.

В точке M_1 имеем $a_{11} = 36 > 0$, $M_{11} = 36 > 0$, $\Delta = 72 > 0$ следовательно, в этой точке функция имеет минимум $u(M_1) = -12$. В точке M_2 $a_{11} = 0$, поэтому требуются дополнительные исследования. Так как $u(0; 0; 1) = 0$, а в сколь угодно малой окрестности ($u(\varepsilon; 0; 1) > 0$, если $\varepsilon > 0$; $u(\varepsilon; 0; 1) < 0$, если $\varepsilon < 0$), то нет экстремума в точке M_2 .

ПРИМЕР 2.37 Исследовать на экстремум функцию трех переменных

$$u = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2.$$

Решение.

Функция определена и непрерывна в любой точке пространства $Oxyz$.

Проверим необходимое условие экстремума:

Найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x - y + 2z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -x - 1 + 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2x + 2z.$$

Решив систему

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 0, \\ -x - 1 + 3y^2 = 0, \\ 2x + 2z = 0. \end{cases}$$

найдем точки возможного экстремума $M_1(1/3; 2/3; -1/3)$ и $M_2(-1/4; -1/2; 1/4)$.

Проверим достаточное условие экстремума.

Вычислим частные производные второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 4, & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -1, & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 2, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 6y, & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = 0, & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 2. \end{aligned}$$

и составим матрицу

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 6y & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

для которой найдем $a_{11} = 4$, $M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 6y \end{vmatrix}$, $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 6y & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

В точке M_1 имеем $a_{11} = 4 > 0$, $M_{11} = 15 > 0$, $\Delta = 14 > 0$, поэтому функция имеет минимум $u(M_1) = -20/27$. В точке M_2 имеем $a_{11} = 4 > 0$, $M_{11} = -13 < 0$, $\Delta = -14 < 0$, следовательно, в точке M_2 функция не имеет экстремума.

2.10 НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

Рассмотрим функцию $u = f(M)$ непрерывную в замкнутой области. Тогда она достигает в этой области своего наибольшего и наименьшего значения. Эти значения она может принимать как во внутренних точках, так и на ее границе.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.38 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = f(x, y) = 3 - 2x^2 - xy - y^2$ в замкнутой области $D: x \leq 1, y \geq 0, y \leq x$.

Решение.

1) Найдем критические точки.

$$f'_x = -4x - y; \quad f'_y = -x - 2y.$$

$$\begin{cases} 4x - y = 0; \\ x - 2y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9y = 0; \\ x = 2y; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0; \\ x = 0. \end{cases} \quad M_0(0, 0).$$

Так как $M_0 \in D$, вычислим значение функции $f(x, y)$ в точке M_0 : $f(M_0) = 3$.

2) Найдем значения функции на границе области.

2.1. На стороне OA : $y = 0$

$u = f(x, 0) = 3 - 2x^2 = \varphi(x)$ - функция зависит от одной переменной x ; исследуем ее на экстремум.

$$\varphi'(x) = -4x, \quad \varphi'(x) = 0 \text{ при } x = 0;$$

$$\varphi''(x) = -4, \quad \varphi''(0) = -4 < 0, \text{ т.е. } x = 0 - \text{ точка максимума, } \varphi(0) = 3.$$

2.2. На стороне АВ: $x = 1$

Функция $u = f(1, y) = 3 - 2 - y - y^2 = 1 - y - y^2 = \psi(y)$ зависит только от переменной y ;

$$\psi'(y) = -1 - 2y, \quad \psi'(y) = 0 \text{ при } y = -\frac{1}{2},$$

но эта точка не принадлежит отрезку АВ.

2.3. На стороне ОВ: $y = x$

Функция $u = f(x, x) = 3 - 2x^2 - x^2 - x^2 = 3 - 4x^2 = \varphi(x)$ зависит только от переменной x ;

$$\varphi'(x) = -8x, \quad \varphi'(x) = 0 \text{ при } x = 0.$$

$$\varphi''(x) = -8, \quad \varphi''(0) = -8 < 0, \text{ т.е. } x = 0 - \text{ точка максимума, } \varphi(0) = 3.$$

3) Вычисляем значения функции в точках А и В: $f(A) = f(1, 0) = 1$, $f(B) = f(1, 1) = -1$.

4) Из найденных значений функции в точках выбираем наибольшее и наименьшее значения: $u_{\text{наиб}} = 3$, $u_{\text{наим}} = -1$.

ПРИМЕР 2.39 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4$ в замкнутой области $D: x^2 + y^2 \leq 4$.

Решение.

1) Найдем критические точки.

$$f'_x = 2x - 2; \quad f'_y = 2y - 2.$$

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0; \\ 2y - 2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1; \\ y = 1. \end{cases} \quad M_0(1, 1) \in D.$$

Так как $M_0 \in D$, вычислим значение функции $f(x, y)$ в точке M_0 : $f(M_0) = 2$.

2) Найдем значения функции на границе области, т.е. на окружности $x^2 + y^2 \leq 4$. Воспользуемся параметрическими уравнениями этой окружности

$$\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

На данной окружности функция становится функцией одной переменной t : $u = f(t) = 4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t - 4 \cos t - 4 \sin t + 4 = 8 - 4 \cos t - 4 \sin t$.

Поскольку $f'(t) = 4 \sin t - 4 \cos t$,

то $f'(t) = 0$ при $\operatorname{tg} t = 1 \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{4}, t_2 = \frac{5\pi}{4}$.

Так как $f''(t) = 4 \cos t + 4 \sin t$, $f''(t_1) > 0$, $f''(t_2) < 0$, поэтому t_1 - точка минимума, t_2 - точка максимума; $f(t_1) = 8 - 4\sqrt{2}$, $f(t_2) = 8 + 4\sqrt{2}$.

3) Рассматривая полученные значения функции, выбираем наибольшее и наименьшее значения: $u_{\text{наиб}} = 8 + 4\sqrt{2}$, $u_{\text{наим}} = 2$.

2.11 УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Если разыскивается экстремум функции нескольких переменных, которые связаны между собой одним или несколькими уравнениями (число уравнений должно быть меньше числа неизвестных), то говорят об условном экстремуме. При решении таких задач можно пользоваться методами: 1) исключения части переменных, и 2) неопределенных множителей Лагранжа.

Алгоритм нахождения условного экстремума методом исключения части переменных функции $u = f(x, y)$ при условии связи $\varphi(x, y) = 0$

1). Из уравнения связи $\varphi(x, y) = 0$ выразить

$$y = y(x). \quad (2.12)$$

2). Подставить (2.12) в уравнение $u = f(x, y)$, при этом получится функция одной независимой переменной x :

$$u = f(x, y(x)) = \tilde{f}(x). \quad (2.13)$$

3). Исследовать функцию (2.13) на экстремум:

1. Необходимое условие экстремума:

$$\frac{d\tilde{f}}{dx} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d\tilde{f}}{dx} \quad \text{не существует.}$$

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка возможного экстремума.

2. Достаточное условие экстремума:

$$\text{если } \frac{d^2\tilde{f}}{dx^2}(M_0) > 0, \text{ то } M_0 - \text{точка минимума;}$$

$$\text{если } \frac{d^2\tilde{f}}{dx^2}(M_0) < 0, \text{ то } M_0 - \text{точка максимума;}$$

$$\text{если } \frac{d^2\tilde{f}}{dx^2}(M_0) = 0, \text{ то экстремума нет.}$$

Алгоритм нахождения условного экстремума методом исключения части переменных функции $u = f(x, y, z)$ при условии связи $\varphi(x, y, z) = 0$

1). Выразить $z = z(x, y)$ из уравнения связи

$$\varphi(x, y, z) = 0. \quad (2.14)$$

2). Подставить (2.14) в уравнение $u = f(x, y, z)$, при этом получится функция двух независимых переменных x и y :

$$u = f(x, y, z(x, y)) = \tilde{f}(x, y). \quad (2.15)$$

3). Исследовать функцию (2.15) на экстремум:

1. Необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \frac{d\tilde{f}}{dx}, \quad \frac{d\tilde{f}}{dy} \quad \text{не существуют.}$$

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка возможного экстремума.

2. Достаточное условие экстремума:

Найти частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x \partial y}$;

составить матрицу $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, где

$$a_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

и найти ее определитель $\Delta = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$. Вычислить Δ в точках возможного экстремума: если $\Delta > 0$, то в данной точке функция имеет экстремум, а именно максимум при $a_{11} < 0$ (или $a_{22} < 0$) и минимум при $a_{11} > 0$ (или $a_{22} > 0$); если $\Delta < 0$, то в данной точке экстремума нет; если $\Delta = 0$, то требуется дальнейшее исследование.

Алгоритм нахождения условного экстремума функции $u = f(x, y)$ при условии связи $\varphi(x, y) = 0$ методом неопределенных множителей Лагранжа

1). Составить функцию Лагранжа

$$\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y).$$

(2.16)

2). Найти частные производные $\frac{\partial \Phi(x, y, \lambda)}{\partial x}, \frac{\partial \Phi(x, y, \lambda)}{\partial y}$.

3). Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Пусть x_0, y_0, λ_0 – решение данной системы.

4). Найти второй дифференциал функции Лагранжа

$$d^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dy^2, \quad (2.18)$$

при условии, что dx и dy связаны соотношением $dy(x, y) = 0$, т.е.:

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} dy = 0. \quad (2.19)$$

5). Подставить в (2.18) значения $x = x_0, y = y_0, \lambda = \lambda_0$ и выражение dy из (2.19). Если $d^2 \Phi < 0$, то функция $f(x, y)$ имеет условный максимум; а если $d^2 \Phi > 0$, то функция $f(x, y)$ имеет условный минимум.

Алгоритм нахождения условного экстремума функции $u = f(x, y, z)$

$$\text{при условиях связи } \begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = 0 \\ \varphi_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

методом неопределенных множителей Лагранжа.

1). Составить функцию Лагранжа

$$\Phi(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 \varphi_1(x, y, z) + \lambda_2 \varphi_2(x, y, z). \quad (2.20)$$

2). Найти частные производные

$$\frac{\partial \Phi(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial x}, \frac{\partial \Phi(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial y}, \frac{\partial \Phi(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial z}.$$

3). Решить систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \Phi(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \Phi(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial z} = 0, \\ \varphi_1(x, y, z) = 0, \\ \varphi_2(x, y, z) = 0 \end{array} \right. \quad (2.21)$$

Пусть x_0, y_0, z_0, λ_0 – решение системы (2.21).

4). Найти второй дифференциал функции Лагранжа:

$$\begin{aligned} d^2\Phi = & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dx^2 + 3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} dx dy + 3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} dx dz + \\ & + 3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} dy dz + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} dz^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

5). Предполагая, что в уравнение связи подставлены решения $y = y(x)$, $z = z(x)$ и дифференцируя полученные тождества, получаем систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y, z) dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, y, z) dy + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}(x, y, z) dz = 0, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, y, z) dx + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x, y, z) dy + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}(x, y, z) dz = 0. \end{array} \right. \quad (2.23)$$

б). Подставить в (2.22) значения $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $\lambda = \lambda_0$ и выражения dy и dz , полученные из (2.23). Если $d^2\Phi < 0$, то функция $f(x, y)$ имеет условный максимум; а если $d^2\Phi > 0$, то функция $f(x, y)$ имеет условный минимум.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 2.40 Найти условные экстремумы функции $u = xyz$ относительно уравнений связи $x + y + z = 6$, $x + 2y + 3z = 6$

методом исключения части переменных.

Решение.

1). Разрешим уравнения связи относительно переменных x и y . Из первого уравнения связи найдем, например, $x = z + 6$, и подставляя во второе уравнение связи получим $2y + 4z = 0 \Rightarrow y = -2z$.

2). Подставим найденные значения x и y в выражение для функции $u = f(x, y, z)$: $u = -2z^2(z + 6)$.

3). Исследуем полученную функцию $u = f(z)$ на экстремум.

1. Необходимое условие экстремума:

$$u' = 0 \Rightarrow -6z(z + 4) = 0$$

$$z_1 = 0, \quad z_2 = -4 - \text{критические точки функции } u = f(z).$$

2. Достаточное условие экстремума:

$$u'' = -12(z + 2), \quad \Rightarrow u''|_{z=0} = -24;$$

$$u''|_{z=-4} = 24.$$

Таким образом, в точке $z = 0$ функция имеет максимум $u = 0$, в точке $z = -4$ - минимум $u = -64$.

Следовательно, исходная функция при заданных ограничениях имеет условный максимум $u(6; 0; 0) = 0$ и условный минимум $u(2; 8; -4) = -64$.

ПРИМЕР 2.41 Найти экстремум функции $u = x + y + z^2$ при условии связи методом Лагранжа

$$\begin{cases} z - x = 1, \\ y - xz = 1. \end{cases}$$

Решение.

$$1). \Phi = x + y + z^2 + \lambda_1(z - x - 1) + \lambda_2(y - xz - 1).$$

$$2).\lambda_2 = -1$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 z,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 1 + \lambda_2,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 2z + \lambda_1 - \lambda_2 x.$$

$$3). \begin{cases} 1 - \lambda_1 - \lambda_2 z = 0 \\ 1 + \lambda_2 = 0 \\ 2z + \lambda_1 - \lambda_2 x = 0 \\ z - x - 1 = 0 \\ y - xz - 1 = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения системы выразим $\lambda_2 = -1$, и подставим его в первое и третье уравнения системы:

$$\begin{cases} 1 - \lambda_1 + z = 0 \\ \lambda_2 = -1 \\ 2z + \lambda_1 + x = 0 \\ z - x - 1 = 0 \\ y - xz - 1 = 0 \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения λ_1 и подставим в третье уравнение:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 + z; \\ \lambda_2 = -1; \\ z = \frac{-(1+x)}{3}; \\ x = -1; \\ y = 1 - z. \end{cases}$$

После несложных преобразований получим:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1; \\ \lambda_2 = -1; \\ z = 0; \\ x = -1; \\ y = 1. \end{cases}$$

$M_0(-1,1,0)$ – точка возможного экстремума данной функции при заданных условиях связи.

$$4). d^2\Phi = 2dz^2 - 2\lambda_2 dx dz.$$

$$5). \begin{cases} dz - dx = 0 \\ dy - xdz - zdx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dz = dx \\ dy = (x + z)dx \end{cases}.$$

$$6). d^2\Phi(M_0) = 4 dx^2 > 0, \text{ поэтому в точке } M_0 - \text{ условный минимум.}$$

ПРИМЕР 2.42 На эллипсоиде $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$ найти точку, наиболее удаленную от точки $N(0,0,3)$.

Решение. Расстояние между точками $M(x, y, z)$ и $N(0,0,3)$ определяется формулой $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2}$. Поэтому исходная задача – задача об условном максимуме функции $u = \rho^2 = x^2 + y^2 + (z-3)^2$ при условии связи $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$.

$$1). \text{ Функция Лагранжа } \Phi = x^2 + y^2 + (z-3)^2 + \lambda(x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 8).$$

$$2). \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x + 2\lambda x, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2y + 4\lambda y, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 2(z-3) + 8\lambda z.$$

$$3). \begin{cases} 2x + 2\lambda x = 0 \\ 2y + 4\lambda y = 0 \\ 2z - 6 + 8\lambda z = 0 \\ x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow |x \neq 0| \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ y = 0 \\ z = -1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

$M_1(2,0,-1)$ и $M_2(-2,0,-1)$ – точки возможного условного максимума.

4). Находим второй дифференциал функции Лагранжа

$$d^2\Phi = 2(1+\lambda)dx^2 + 2(1+2\lambda)dy^2 + 2(1+8\lambda)dz^2.$$

5). Предполагая, что в уравнение связи подставлено его решение $z(x, y)$ и дифференцируя полученное тождество, находим $x dx + 2y dy + 4z dz = 0$, откуда $dz = -\frac{x}{4z} dx - \frac{y}{2z} dy$.

$$6). d^2\Phi(M_1) = -2dy^2 - 3,5dx^2 < 0$$

$$d^2\Phi(M_2) = -2dy^2 - 3,5dx^2 < 0$$

Отсюда следует, что M_1 и M_2 – точки условного максимума, т.е. на эллипсоиде $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$ имеются две точки $M_1(2,0,-1)$ и $M_2(-2,0,-1)$, наиболее удаленные от точки $N(0,0,3)$.

УЧЕБНО – МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

МОДУЛЬ: «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННОЙ»

ЧАСТЬ 1

3. Материалы для самостоятельной работы

3.1 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Понятие функции $u = f(M)$ нескольких переменных. Область определения.
2. Предел функции $u = f(M)$. Непрерывность.
3. Частные производные первого порядка функции $u = f(M)$. Частные производные высших порядков.
4. Полный дифференциал, его связь с частными производными.
5. Дифференциалы высших порядков. Инвариантность полного дифференциала первого порядка.
6. Дифференцирование сложной функции нескольких переменных.
7. Дифференцирование функций, заданных неявно.
8. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям.
9. Геометрические приложения: некоторые понятия топологии - линии и поверхности уровня; касательная плоскость, нормаль к поверхности; производная функции по заданному направлению, градиент функции.
10. Элементы функционального анализа: экстремумы функции двух переменных (необходимые и достаточные условия экстремума), наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных.
11. Приложения к вариационному исчислению: задачи на условный экстремум, метод наименьших квадратов.

3.2 ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

3.2.1. Найти область определения заданных функций и изобразить на координатной плоскости.

- 1) $u = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}$; 2) $u = \frac{1}{(x-1)(y-2)}$;
 3) $u = \sqrt{x^2 + 4y^2 - 2x - 3}$; 4) $u = \ln(x^2 + y^2 - 1)$; 5) $u = \ln(y^2 - 2x)$;
 6) $u = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$; 7) $u = \arcsin\left(\frac{x}{x+y}\right)$; 8) $u = y + \arcsin(x+2)$;
 9) $u = \arccos\left(\frac{x}{y^2}\right)$; 10) $u = \frac{\ln(x)\ln(y)}{\sqrt{1-x-y}}$; 11) $u = \sqrt{xy} + \arcsin(x)$;
 12) $u = \ln(x) - \ln(\sin(y))$; 13) $u = y + \arcsin(x+2)$; 14) $u = \ln(\sin(xy))$;
 15) $u = \arcsin(|x|)$;

3.2.2. Найти С-уровень функции $u = f(x, y)$, $u = f(x, y, z)$.

- 1) $u = y - x$; 2) $u = \frac{1}{x^2 + y^2}$; 3) $u = \sqrt{y-x}$; 4) $u = \ln(1 - x^2 - y^2)$;
 5) $u = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$; 6) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$; 7) $u = \frac{\sqrt{x}}{y}$;
 8) $u = x^y$; 9) $u = \sqrt{y - \sin(x)}$; 10) $u = \operatorname{arctg} \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1}$;
 11) $u = \sqrt{1 - 2|x| - |y|}$; 12) $u = x + 2y + 3z$; 13) $u = x^2 + y^2 + 4z^2$;
 14) $u = x^2 + y^2 - z^2$; 15) $u = (x - y)^2 + z^2$; 16) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$;
 17) $u = \frac{2z}{x^2 + y^2}$; 18) $u = \frac{z}{x + y + z - 1}$; 19) $u = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}$;
 20) $u = \ln(z^2 - x^2 - y^2)$.

3.2.3 Вычислить пределы:

- 1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin(xy)}{2x}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{tg}(2xy)}{x^2 y}$; 3) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} (1 + xy^2)^{\frac{y}{x^7 y + xy^2}}$;

$$4) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}; \quad 5) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} (x + y)e^{-(x^2 + y^2)}; \quad 6) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{|x|};$$

$$7) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + y)}{y}.$$

3.2.4 Вычислить повторные пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ и

$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$, если:

$$1) f(x, y) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0;$$

$$2) f(x, y) = \frac{\sin(x + y)}{2x + 3y}, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0;$$

$$3) f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}, \quad x_0 = \infty, \quad y_0 = \infty;$$

$$4) f(x, y) = \frac{\cos x - \cos y}{x^2 + y^2}, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0;$$

$$5) f(x, y) = \frac{x^y}{1 + x^y}, \quad x_0 = +\infty, \quad y_0 = +0;$$

$$6) f(x, y) = \sin \frac{\pi(x + y)}{2x + 3y}, \quad x_0 = \infty, \quad y_0 = \infty.$$

3.2.5 Найти точки разрыва следующих функций:

$$1) u = \frac{1}{x^2 + y^2}; \quad 2) u = \frac{x + y + 1}{x^2 + y^2}; \quad 3) u = \frac{1}{(x - y)^2};$$

$$4) u = \frac{3y}{2x - y}; \quad 5) u = \frac{x^2}{x^2 - 2y^2 - 4}; \quad 6) u = \frac{10x}{(x - 1)^2 + (y - 1)^2};$$

$$7) u = \begin{cases} 5 - x - y & \text{при } x \neq 0, y \neq 0; \\ 1 & \text{при } x = y = 0 \end{cases};$$

$$8) u = \begin{cases} \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{при } x \neq 0, y \neq 0; \\ 3 & \text{при } x = y = 0 \end{cases};$$

$$\begin{aligned}
9) u &= \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2}; & 10) u &= \frac{1}{z^2 - x^2 - y^2}; & 11) u &= \ln(4 - x^2 - y^2); \\
12) u &= e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}; & 13) u &= \sin \frac{x}{y}; & 14) u &= \frac{\sin x \cdot \sin y}{xy}; \\
15) u &= \frac{1}{\cos^2 x - \cos^2 y}; & 16) u &= \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2} & \text{при } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > 0 \end{cases}; \\
17) u &= \operatorname{tg}(x^2 + y^2 + z^2).
\end{aligned}$$

3.2.6 Найдите частные производные функций:

$$\begin{aligned}
1) u &= x^2 + y^3 + 3x^2y^3; & 2) u &= xy^2z^3 + \frac{x}{y^2z^3}; \\
3) u &= \cos(xy); & 4) u &= \sin(x + yz); & 5) u &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; \\
6) u &= \operatorname{tg}(x + y)e^{x/y}; & 7) u &= \sqrt{x^2 + y^2}e^{x/y}; & 8) u &= xy \ln(xy); \\
9) u &= \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; & 10) u &= x^{yz}; & 11) u &= \left(\frac{y}{x}\right)^z; \\
12) u &= z^{x/y}; & 13) u &= x^{y^z}; & 14) u &= x^y y^z z^x.
\end{aligned}$$

3.2.7 Найти частные производные следующих сложных функций (функции f и g считаются дифференцируемыми):

$$\begin{aligned}
1) u &= f(x + y, x^2 + y^2); \\
2) u &= f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right); & 3) u &= f(x - y, xy); \\
4) u &= f(xy) \cdot g(yz); & 5) u &= [f(x - y)]^{g(xy)}; \\
6) u &= f(x - y^2, y - x^2, xy); & 7) u &= f(\sqrt{x^2 + y^2}, \sqrt{y^2 + z^2}, \sqrt{z^2 + x^2}).
\end{aligned}$$

3.2.8 Проверьте, что функция $u = (x, y)$ удовлетворяет соответствующему уравнению, если f - произвольная дифференцируемая функция:

$$\begin{aligned}
1) u &= x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right), & x \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} &= nu; \\
2) u &= yf(x^2 - y^2), & y^2 \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial u}{\partial y} &= xu;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \quad u &= \frac{y^2}{3x} + f(x, y), \quad x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - xy \frac{\partial u}{\partial y} + y^2 = 0; \\
4) \quad u &= x^n f\left(\frac{y}{x^\alpha}, \frac{z}{x^\beta}\right), \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial u}{\partial y} + \beta z \frac{\partial u}{\partial z} = nu; \\
5) \quad u &= \frac{xy}{z} \ln x + xf\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right), \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z}
\end{aligned}$$

3.2.9 Найти дифференциал функции:

- 1) $u = x^2 y^3$ в точках $M(x, y)$ и $M_0(2, 1)$;
- 2) $u = \frac{yz}{x}$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(1, 2, 3)$;
- 3) $u = e^{xy}$ в точках $M(x, y)$ и $O(0, 0)$;
- 4) $u = x^y$ в точках $M(x, y)$ и $M_0(2, 3)$;
- 5) $u = x \ln(xy)$ в точках $M(x, y)$ и $M_0(-1; -1)$;
- 6) $u = \cos(xy + xz)$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(0; \pi/6, \pi/6)$.

3.2.10 Найдите дифференциал следующих сложных функций в указанных точках, если f – дифференцируемая функция:

- 1) $u = f(x - y, x + y)$, $M(x, y)$, $M_0(1, -1)$;
- 2) $u = f\left(xy, \frac{x}{y}\right)$, $M(x, y)$, $M_0(0, 1)$;
- 3) $u = f(x^2 - y^2, y^2 - z^2, z^2 - x^2)$, $M(x, y, z)$, $M_0(1, 1, 1)$;
- 4) $u = f(\sin x + \sin y, \cos x - \cos z)$, $M(x, y, z)$, $M_0(0, 0, 0)$.

3.2.11 Дана функция $u = f(x, y)$ и точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, найти приближенное значение $f(M_1)$:

- 1) $u = x^2 + 2xy + 3y^2$, $M_0(2; 1)$, $M_1(1,96; 1,04)$;
- 2) $u = 2x^2 + 3y + y^2$, $M_0(2; -2)$, $M_1(2,03; -2,04)$;
- 3) $u = 2x^2 + 3xy + y^2$, $M_0(1; 2)$, $M_1(0,96; 1,95)$;
- 4) $u = x^2 + 2x + y + y^2 - 1$, $M_0(2; 4)$, $M_1(1,98; 3,91)$;
- 5) $u = x^2 + 2xy + y^2$, $M_0(-3; 4)$, $M_1(-2,94; 4,05)$;
- 6) $u = 2y^2 + 9xy + y$, $M_0(3; 1)$, $M_1(2,94; 1,07)$;
- 7) $u = x^2 + y^2 - 4x + 2y$, $M_0(3; 2)$, $M_1(2,98; 2,05)$;

- 8) $u = x^2 + y^2 - 2x + 2y$, $M_0(1;2)$, $M_1(1,08;1,94)$;
 9) $u = xy + 2x - y$, $M_0(2;2)$, $M_1(1,93;2,05)$;
 10) $u = x^2 + y + y^2$, $M_0(-2;2)$, $M_1(-2,03;2,04)$.

3.2.12 Для заданной функции $u = f(x, y)$ найти: dU , $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

1) $u = y\sqrt{\frac{y}{x}}$; 2) $u = ye^{xy}$; 3) $u = xe^{-xy}$; 4) $u = \sin(x^2 - y^3)$;
 ;

5) $u = \operatorname{tg} \frac{y}{x}$; 6) $u = \sqrt[3]{2x^2 - y}$; 7) $u = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$; 8) $u = \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{y}$;

9) $u = \ln(\sqrt{x^3 + 4y^2})$; 10) $u = \arccos \frac{y}{x}$; 11) $u = \arccos \frac{x+y}{x-y}$;

12) $u = \arcsin \frac{x}{y}$; 13) $u = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$; 14) $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{2x}$;

15) $u = \sin^2(x - 2y)$; 16) $u = \cos^3\left(\frac{1}{x - y^2}\right)$; 17) $u = \operatorname{tg}^3(3x - y)$;

18) $u = \sin^4(5x - y^2)$; 19) $u = \ln^3(5x^2 + 3y^3)$; 20) $u = \ln^2\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)$;

21) $u = \arccos^2(xy^2)$; 22) $u = \operatorname{arctg}^3(xy)$; 23) $u = (1 + y^3)^{x^3}$;

24) $u = y^{x^2}$.

3.2.13 Дана функция $z = f(x, y)$. Показать, что она удовлетворяет уравнению $F(x, y, z) = 0$.

1) $z = e^{x/y}$, $y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$; 2)

$z = \frac{xy}{x+y}$, $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$; 3)

$$z = \frac{y^2}{\sqrt{x} y}, \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; \quad 4)$$

$$z = e^{xy}, \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; \quad 5)$$

$$z = \frac{y}{x}, \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; \quad 6)$$

$$z = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}, \quad \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y^2} = 0; \quad 7)$$

$$z = x \ln\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0; \quad 8)$$

$$z = (x^2 + y^2) \operatorname{tg}\left(\frac{x}{y}\right), \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - 2z = 0; \quad 9)$$

$$z = \sin^2(y - ax), \quad a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0; \quad 10)$$

$$z = e^{-\cos(y+ax)}, \quad a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0; \quad 11)$$

$$z = \ln(x^2 + (y+1)^2), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; \quad 12)$$

$$z = x^y, \quad y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - (1 + y \ln(x)) \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

3.2.14 Найдите частные производные указанного порядка:

1) $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$ и $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$, если $u = \sin(xy)$;

2) $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, если $u = e^{xyz}$;

3) $\frac{\partial^{10} u}{\partial x^4 \partial y^6}$, если $u = \sin x \cdot \cos 2y$;

4) $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, если $u = e^{2x} \cdot \sin y + e^x \cos \frac{y}{2}$;

$$5) \frac{\partial^{10} u}{\partial x \partial y^9}, \text{ если } u = (x^2 + y)^{10} + \operatorname{tg} x;$$

$$6) \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}, \text{ если } u = \frac{x+y}{x-y}.$$

3.2.15 Найдите частные производные второго порядка следующих функций (функции f и g считаются дважды дифференцируемыми):

$$\begin{aligned} 1) u &= f(x+y, x^2+y^2); & 2) u &= f\left(xy, \frac{x}{y}\right); \\ 3) u &= \ln f(x, x+y); & 4) u &= f(\sin x + \cos y); \\ 5) u &= [f(x)]^{g(y)}. \end{aligned}$$

$$3.2.16 \text{ Докажите, что функция } u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}} \quad (a \text{ и } x_0 - \text{числа})$$

$$\text{удовлетворяет уравнению теплопроводности } \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

$$3.2.17 \text{ Докажите, что функция } u = \frac{1}{r}, \text{ где}$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}, \text{ удовлетворяет при } r \neq 0$$

$$\text{уравнению Лапласа } \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

3.2.18. В каждом из случаев проверьте, что данная функция удовлетворяет заданному уравнению, если f и g — произвольные дважды дифференцируемые функции:

$$1) u = f(x-at) + g(x+at), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

$$2) u = f\left(\frac{y}{x}\right) + x \cdot g\left(\frac{y}{x}\right), \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$3) u = x^n \cdot f\left(\frac{y}{x}\right) + x^{1-n} \cdot g\left(\frac{y}{x}\right); \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u;$$

$$4) \ u = f(x + g(y)), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

3.2.19 Найдите дифференциалы 2-го порядка следующих функций в указанных точках, если f – дважды дифференцируемая функция, x, y, z – независимые переменные:

- 1) $u = f(x - y, x + y)$ в точках $M(x, y)$ и $M_0(1, 1)$;
- 2) $u = f(x + y, z^2)$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(1, -1, 0)$;
- 3) $u = f(xy, x^2 + y^2)$ в точках $M(x, y)$ и $M_0(0, 0)$;
- 4) $u = \sin f(x) \cdot e^{f(y)}$ в точках $M(x, y)$ и $M_0(0, 0)$.

3.2.20 Дана функция $u = f(x, y)$, точка $M_0(x_0, y_0)$ и вектор $\vec{a}$. Требуется найти $\vec{\text{grad}} u(M_0)$ и $\frac{\partial u}{\partial \ell}(M_0)$ по направлению вектора $\vec{a}$.

- 1) $u = 3x^2 + 2xy + y^2$, $M_0(1; 2)$, $\vec{a}\{4; 3\}$;
- 2) $u = x^2 + 3xy^2$, $M_0(1; 3)$, $\vec{a}\{1; 2\}$;
- 3) $u = \arctg(x^2 y^2)$, $M_0(1; -1)$, $\vec{a}\{5; -12\}$;
- 4) $u = \ln(5x + 3y)$, $M_0(2; 2)$, $\vec{a}\{2; -3\}$;
- 5) $u = 2x^3 y + 3xy^2$, $M_0(1; -2)$, $\vec{a}\{6; -8\}$;
- 6) $u = 2x^4 + 8x^2 y^3$, $M_0(2; -1)$, $\vec{a}\{4; 3\}$;
- 7) $u = x^2 + xy + y^2$, $M_0(1; 1)$, $\vec{a}\{2; -1\}$;
- 8) $u = 5x^2 + 6xy$, $M_0(2; 1)$, $\vec{a}\{1; 2\}$;
- 9) $u = 3x^4 + 2x^2 y^2$, $M_0(-1; 2)$, $\vec{a}\{4; -3\}$;
- 10) $u = 3x^2 y^2 + 5xy^2$, $M_0(1; 1)$, $\vec{a}\{2; 1\}$;
- 11) $u = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$, $M_0(1; -2)$, $\vec{a}\{1; -2\}$;
- 12) $u = \arctg(x^2 + y^2)$, $M_0(1; -1)$, $\vec{a}\{5; -12\}$;

$$13) u = \ln(5x^2 + 4y^2), \quad M_0(1; 1), \quad \bar{a}\{2; -1\};$$

$$14) u = \arcsin\left(\frac{x^2}{y}\right), \quad M_0(1; 2), \quad \bar{a}\{5; -12\};$$

$$15) u = \operatorname{arctg}(x y^2), \quad M_0(2; 3), \quad \bar{a}\{4; -3\}.$$

3.2.21 Дана функция $u = f(x, y)$, точка $M_0(x_0, y_0)$ и линия L , проходящая через т. M_0 . Требуется найти $\vec{\operatorname{grad}} u(M_0)$ и $\frac{\partial u}{\partial \ell}(M_0)$ в направлении линии L , в сторону возрастания координаты x .

$$1) u = \ln(x^2 + y^2), \quad M_0(1; 3), \quad L: y^2 = 9x;$$

$$2) u = y^2 e^x, \quad M_0(2; 2), \quad L: x y = 4;$$

$$3) u = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right), \quad M_0(1; 1), \quad L: x^2 + y^2 - 2x = 0;$$

$$4) u = \arcsin\left(\frac{x}{y+1}\right), \quad M_0(1; 1), \quad L: y = \sqrt{x};$$

$$5) u = \operatorname{arctg}(x + y), \quad M_0(1; 1), \quad L: y = x;$$

$$6) u = \ln(x^2 + y^2), \quad M_0(1; 1), \quad L: x^2 + y^2 = 2;$$

$$7) u = x^2 + y^2, \quad M_0(4; 4), \quad L: y^2 = 4x;$$

$$8) u = x^2 + y^2, \quad M_0(6; 8), \quad L: x^2 + y^2 = 100;$$

$$9) u = \operatorname{arctg}(x y^2), \quad M_0(1; -1), \quad L: y = -x;$$

$$10) u = \arcsin\left(\frac{x}{x+y}\right), \quad M_0(5; 5), \quad L: y^2 = 5x;$$

$$11) u = \operatorname{arctg}(x^2 + y), \quad M_0(2; 1), \quad L: y^2 = \sqrt{x^2 - 3};$$

$$12) u = \arccos\left(\frac{x}{y}\right), \quad M_0(1; 2), \quad L: y = 2x;$$

$$13) u = x^2 + y^2 + x y, \quad M_0(3; 1), \quad L: 4x - 3y - 9 = 0;$$

$$14) u = \arccos\left(\frac{y}{x+y}\right), \quad M_0(5; 5), \quad L: y^2 = 5x;$$

$$15) u = \ln(x+y), \quad M_0\left(\frac{\pi}{4}; 1\right), \quad L: y = \operatorname{tg}(x);$$

3.2.22 В данной точке M_0 найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхностям:

$$1) x^2yz + 2x^2z - 3xyz + 2 = 0, \quad M_0(1, 0, -1);$$

$$2) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0, \quad M_0(4, 3, 4);$$

$$3) x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 5 \quad M_0(1, 2, 1);$$

$$4) z = x^2 - y^2, \quad M_0(1, 1, 0).$$

3.2.23 Показать, что конус $z^2 = x^2 + y^2$ и сфера $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$ касаются друг друга в точке $M_0(0, 1, 1)$.

3.2.24 На поверхности $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ найти точки, в которых касательная плоскость параллельна координатной плоскости xOz .

3.2.25 Исследовать функцию $u = f(x, y)$ на экстремум:

1) $u = x^2 - xy + y^2$;	2) $u = x^2 - xy - y^2$;
3) $u = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$;	4) $u = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$;
5) $u = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$;	6) $u = x^3 - 2x^2y^2 + y^4$;
7) $u = xy + \frac{1}{2(x+y)}$;	8) $u = e^{x+2y}(x^2 - y^2)$;
9) $u = e^{x-y}(x^2 - 2xy + 2y^2)$;	10) $u = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$;
11) $u = (x - 2y)e^{-(x^2+y^2)}$;	12) $u = xy \ln(x^2 + y^2)$;

3.2.26 Исследовать функцию $u = f(x, y, z)$ на экстремум:

$$1) u = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1;$$

- 2) $u = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 4z - x$;
 3) $u = x^3 + xy + y^2 - 2zx + 2z^2 + 3y - 1$;
 4) $u = xyz(1 - x - y - z)$;
 5) $u = 2\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} - 4x + 2z^2$;
 6) $u = (x + y + 2z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$.

3.2.27 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = f(x, y)$ в замкнутой области, ограниченной заданными линиями.

1). $u = x^2 + 2xy - 10$	$D: y = 0,$ $y = x^2 - 4;$
2). $u = x^2 + xy - 2$	$D: y = 0,$ $y = 4x^2 - 4;$
3). $u = xy - 2x - y$	$D: x = y = 0,$ $x = 3, \quad y = 4;$
4). $u = x^3 + y^3 - 3xy$	$D: x = y = 0,$ $x = 2, \quad y = 3;$
5). $u = x^2 + 2xy - 10$	$D: y = 0,$ $y = x^2 - 4;$
6). $u = 5x^2 - 3xy + y^2$	$D: x = y = 0,$ $y + x = 2;$
7). $u = x^2 - 2y^2 + 4$	$D: x^2 + y^2 = 1;$
8). $u = \frac{1}{2}x^2 - xy$	$D: y = \frac{1}{3}x^2,$ $y = 3;$
9). $u = x^2 + 3y^2 + x - y$	$D: x = 1,$ $y = -1,$ $y + x = 1;$
10). $u = x^2 + 2xy + 2y^2$	$D: x = 1,$ $y = 0, y = 2;$
11). $u = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$	$D: y = 0, x = -3,$ $x + y + 1 = 0;$

12). $u = x^2 - 2xy - \frac{5}{2}y^2 - 2x$	$D: 0 \leq x \leq 2,$ $0 \leq y \leq 2.$
--	---

3.2.28 Исследуйте на условный экстремум функцию $u = f(x, y)$ при условии связи $\varphi(x, y) = 0$.

1) $u = x^2 + y^2, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0;$

2) $u = x + y, \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{a^2} = 0;$

3) $u = xy, \quad x^2 + y^2 = 1.$

3.2.29 Исследуйте на условный экстремум функцию $u = f(x, y, z)$ при условии связи $\varphi(x, y, z) = 0$.

1) $u = x^2 + y^2 + 2z^2, \quad x - y + z - 1 = 0;$

2) $u = x^3 + y^2 - z^3 + 5, \quad x + y - z = 0;$

3) $u = x - 2y + z, \quad x + y^2 - z^2 - 1 = 0;$

4) $u = x - 2y + 2z, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0;$

5) $u = x y^2 z^3, \quad x + 2y + 3z = 6 \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$

3.2.30 При каких значениях диаметра основания d и высоты h цилиндрическая банка, объем которой равен 54π , имеет наименьшую поверхность?

3.2.31 При каких размерах прямоугольная банка объемом 32 см^3 , открытая сверху (т.е. без верхней грани), имеет наименьшую поверхность?

3.2.32 Найдите наименьшее из расстояний между точкой $N(x_0, y_0, z_0)$ и точками плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

3.2.33 Найдите наименьшее из расстояний между точками параболы $y = x^2$ и прямой $x - y - 2 = 0$.

3.2.34 Найти условные экстремумы функции $u = f(x, y)$ относительно заданного уравнения связи:

1). $u = xy, \quad x + y - 1 = 0;$ 2) $u = x^2 + y^2, \quad 3x + 2y - 6 = 0;$

3) $u = x^2 - y^2, \quad 2x - y - 3 = 0;$ 4) $u = xy^2, \quad x + 2y - 1 = 0;$ 5)

$u = \cos^2(x) + \cos^2(y), \quad x - y - \pi/4 = 0;$ 6)

$$u = 5 - 3x - 4y, \quad x^2 + y^2 = 25; \quad 7)$$

$$u = 1 - 4x - 8y, \quad x^2 - 8y^2 = 8; \quad 8) u = x^2 + xy + y^2, \quad x^2 + y^2 = 1;$$

$$9) u = 2x^2 + 12xy + y^2, \quad x^2 + 4y^2 = 25; \quad 10)$$

$$u = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad r > 0.$$

3.2.35 Найти условные экстремумы функции $u = f(x, y, z)$ относительно заданного уравнения связи:

$$1) u = xyz, \quad x + y - z = 3, \quad x - y - z = 8;$$

$$2) u = xyz, \quad xy + yz + zx = 8, \quad x + y + z = 5;$$

$$3) u = xy + yz, \quad x^2 + y^2 = 2, \quad y + z = 2, \quad y > 0;$$

$$4) u = x^2 + y^2 + z^2, \quad \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 0;$$

$$5) u = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2, \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 21, \\ 3x + 2y + z &= 0. \end{aligned}$$

ОТВЕТЫ

3.2.3 1) $a/2$; 2) 2; 3) e^3 ; 4) 0; 5) 0; 6) 1; 7) $\emptyset$

3.2.4 1) 1 и 1; 2) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$; 3) 0 и 1; 4) $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$ и 1; 6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и 1.

3.2.5 1) $O(0,0)$; 2) $O(0,0)$; 3) все точки прямой $y = x$;

4) все точки прямой $y = 2x$; 5) линия разрыва - гипербола $x^2 - 2y^2 = 4$;

6) $M_0(1, -1)$; 7) $M_0(1, 2)$; 8) $O(0,0)$;

9) поверхность разрыва - конус $x^2 + y^2 = z^2$;

10) поверхность разрыва - конус $x^2 + y^2 = z^2$;

11) линия разрыва - окружность $x^2 + y^2 = 4$;

12) $O(0,0)$ - точка устранимого разрыва;

13) линия разрыва - прямая $y = 0$;

14) линии разрыва - прямые $x = 0, y = 0$;

15) линии разрыва - прямые $x \pm y = \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

16) функция везде непрерывна;

17) поверхности разрыва - сферы $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k = 0, 1, 2, \dots$

3.2.6

- 1) $u_x = 2x + 6xy^3$; $u_y = 3y^2 + 9x^2y^2$;
- 2) $u_x = yz + \frac{1}{yz}$; $u_y = xz - \frac{x}{y^2z}$; $u_z = xy - \frac{x}{yz^2}$;
- 3) $u_x = -\frac{\sin x}{\cos y}$; $u_y = \frac{\cos x \sin y}{\cos^2 y}$;
- 4) $u_x = y \cdot \cos(xy + yz)$; $u_y = (x + z) \cdot \cos(xy + yz)$;
 $u_z = y \cdot \cos(xy + yz)$;
- 5) $u_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}$; $u_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$;
- 6) $u_x = \frac{e^{x/y}}{\cos^2(x+y)} + \operatorname{tg}(x+y) \cdot e^{x/y} \cdot \frac{1}{y}$;
 $u_y = \frac{e^{x/y}}{\cos^2(x+y)} + \operatorname{tg}(x+y) e^{x/y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$;
- 7) $u_x = \frac{e^{x+y}(x + x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $u_y = \frac{e^{x+y}(y + x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;
- 8) $u_x = y \cdot \ln(xy) + y$; $u_y = x \cdot \ln(xy) + x$;
- 9) $u_x = \frac{|y|}{x^2 + y^2}$; $u_y = \frac{-x \cdot \sin y}{x^2 + y^2}$;
- 10) $u_x = yzx^{yz-1}$; $u_y = x^{yz} \cdot \ln x \cdot z$; $u_z = x^{yz} \cdot \ln x \cdot y$;
- 11) $u_x = -\frac{z}{x} \left(\frac{y}{x}\right)^z$; $u_y = \frac{z}{x} \left(\frac{y}{x}\right)^z$; $u_z = \left(\frac{y}{x}\right)^z \cdot \ln\left(\frac{y}{x}\right)$;
- 12) $u_x = z^{x/y} \ln z \cdot \frac{1}{y}$; $u_y = z^{x/y} \ln z \cdot \left(-\frac{x}{y}\right)$; $u_z = \frac{x}{y} z^{\frac{x}{y}-1}$;
- 13) $u_x = y^2 x^{yz-1}$; $u_y = x^{yz} z y^{z-1} \ln x$; $u_z = x^{yz} \ln(xy^z) \ln y$;
- 14) $u_x = x^{y-1} y^{z+1} z^x + x^y y^z z^x \ln z$;
 $u_y = x^y \ln x y^z z^x + x^y y^{z-1} z^{x+1}$;
 $u_z = x^y y^z \ln y \cdot z^x + x^{y+1} y^z z^{x-1}$.

3.2.7

1) $u_x = f_t + f_\theta \cdot 2x$; $u_y = f_t + f_\theta \cdot 2y$,	где $t = x + y$, $\theta = x^2 + y^2$;
2) $u_x = \frac{1}{y} f_t - \frac{y}{x^2} f_\theta$, $u_y = -\frac{x}{y^2} f_t + \frac{1}{x} f_\theta$,	где $t = \frac{x}{y}$, $\theta = \frac{y}{x}$;
3) $u_x = f_t + y f_\theta$, $u_y = -f_t + x f_\theta$,	где $t = x - y$, $\theta = xy$;

4) $u_x = f_t y g, u_y = f_t x g + f g_9 z, u_z = f g_9 z,$	где $t = xy, \vartheta = yz;$
5) $u_x = f^g \left[g_9 y \ln f + \frac{g}{f} f_t \right], u_y = f^g \left[g_9 x \ln f - \frac{g}{f} f_t \right],$	где $t = x - y, \vartheta = xy;$
6) $u_x = f_t - 2x f_9 + y f_\omega, u_y = -2y f_t + f_9 + x f_\omega,$	где $t = x - y^2, \vartheta = y - x^2, \omega = xy;$
7) $u_x = \frac{x \cdot f_t}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x f_\omega}{\sqrt{z^2 + x^2}},$ $u_y = \frac{y \cdot f_t}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y f_\omega}{\sqrt{y^2 + z^2}},$ $u_z = \frac{z \cdot f_t}{\sqrt{z^2 + y^2}} + \frac{z f_\omega}{\sqrt{z^2 + x^2}},$	где $t = \sqrt{x^2 + y^2},$ $\vartheta = \sqrt{y^2 + z^2},$ $\omega = \sqrt{z^2 + x^2}.$

3.2.9

1) $du _M = 2xy^3 dx + 3x^2 y^2 dy, du _{M_0} = 4dx + 12dy;$
2) $du _M = -\frac{yz}{x^2} dx + \frac{z}{x} dy + \frac{y}{x} dz, du _{M_0} = -6dx + 3dy + 2dz;$
3) $du _M = e^{xy} \cdot (ydx + xdy), du _{M_0} = 0;$
4) $du _M = x^y \left(\frac{y}{x} dx + \ln x \cdot dy \right), du _{M_0} = 12dx + 8 \ln 2 \cdot dy;$
5) $du _M = (1 + \ln xy) dx + \frac{x}{y} dy, du _{M_0} = dx + dy;$
6) $du _M = -\sin(xy + xz) \cdot [(y + z)dx + xdy + xdz], du _{M_0} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\pi}{3} dx + dy + dz \right);$

3.2.10

1) $du _M = (f_t + f_9)dx + (f_9 - f_t)dy, du _{M_0} = [f_t(2,0) + f_9(2,0)]dx + [f_9(2,0) - f_t(2,0)]dy;$ где $t = x - y, \vartheta = x + y;$
2) $du _M = \left(y f_t + \frac{1}{y} f_9 \right) dx + \left(x f_t - \frac{x}{y^2} f_9 \right) dy,$ $du _{M_0} = [f_t(0,0) + f_9(0,0)]dx;$ где $t = xy, \vartheta = \frac{x}{y};$
3) $du _M = 2(x f_t - x f_\omega)dx + 2y \cdot (f_9 - f_t)dy + 2z(f_\omega - f_9)dz,$ $du _{M_0} = 2[f_t(0,0,0) - f_\omega(0,0,0)]dx + 2[f_9(0,0,0) - f_t(0,0,0)]dy + 2[f_\omega(0,0,0) - f_9(0,0,0)]dz;$ где $t = x^2 - y^2, \vartheta = y^2 - z^2, \omega = z^2 - x^2;$
4) $du _M = (f_t \cos x - f_9 \sin x)dx + f_t \cos y dy + f_9 \sin z dz,$ $du _{M_0} = f_t(0,0)dx + f_t(0,0)dy;$ где $t = \sin x + \sin y, \vartheta = \cos x - \cos z.$

3.2.12

1)	$du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x}} \left(3dy - \frac{y}{x} dx \right), u_{xy} = u_{yx} = -\frac{3}{4} \sqrt{\frac{y}{x^3}}, u_{xx} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{y^3}{x^5}}, u_{yy} = \frac{3}{4\sqrt{xy}};$
2)	$du = e^{xy} (y^2 dx + (1 + xy) dy), u_{xy} = u_{yx} = y e^{xy} (2 + yx),$ $u_{xx} = y^3 e^{xy}, u_{yy} = x e^{xy} (2 + yx);$
3)	$du = e^{-xy} (1 - xy) (y dx + x dy), u_{xy} = u_{yx} = e^{-xy} (1 - 3yx + x^2 y^2),$ $u_{xx} = e^{-xy} (y^3 x - 2y^2), u_{yy} = e^{-xy} (x^3 y - 2x^2);$
4)	$du = \cos(x^3 - y^3) (2x dx - 3y^2 dy), u_{xy} = u_{yx} = 6xy^2 \sin(x^2 - y^3),$ $u_{xx} = 2(\cos(x^2 - y^3) - 2x^2 \sin(x^2 - y^3)), u_{yy} = -3y(2\cos(x^2 - y^3) + 3y^2 \sin(x^2 - y^3));$
5)	$du = \frac{1}{x \cos^2 \frac{y}{x}} \left(dy - \frac{y}{x} dx \right), u_{xy} = u_{yx} = -\frac{x^2 \cos \frac{y}{x} + 2y \sin \frac{y}{x}}{x^3 \cos^3 \frac{y}{x}},$ $u_{xx} = \frac{2y \left(x \cos \frac{y}{x} + y \sin \frac{y}{x} \right)}{x^4 \cos^3 \frac{y}{x}}, u_{yy} = \frac{2 \sin \frac{2y}{x}}{x^2 \cos^3 \frac{y}{x}};$
6)	$du = \frac{1}{3(2x^2 - y)^{2/3}} (4x dx - dy), u_{xy} = u_{yx} = \frac{8}{9} (2x^2 - y)^{-1/3},$ $u_{xx} = -\frac{4}{3} (3y^2 + 2x^2) (2x^2 - y)^{-5/3}, u_{yy} = -\frac{2}{9} (2x^2 - y)^{-1/3};$
7)	$du = \frac{1}{2(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \left(\frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{dy}{\sqrt{y}} \right);$ $u_{xy} = u_{yx} = -\frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{y}(x + \sqrt{xy})^2}, u_{xx} = -\frac{\sqrt{y} + 2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}(x + \sqrt{yx})^2}, u_{yy} = -\frac{2\sqrt{y} + \sqrt{x}}{4\sqrt{y}(x + \sqrt{yx})^2};$
8)	$du = \frac{dx}{y \tan x \cos^2 x} - \frac{\ln \tan x}{y^2}, u_{xy} = u_{yx} = -\frac{2}{y^2 \sin 2x},$ $u_{xx} = -\frac{4 \cos 2x}{y \sin^2 2x}, u_{yy} = -\frac{2 \ln \tan y}{y^3};$
9)	$du = \frac{3x^2 dx + 8y dy}{2(x^3 + 4y^2)}, u_{xy} = u_{yx} = -12x^2 y (x^3 + 4y^2)^{-2},$ $u_{xx} = \frac{3}{2} \cdot \frac{8y^2 x - x^4}{(x^3 + 4y^2)^2}, u_{yy} = \frac{4(x^3 - 4y^2)}{(x^3 + 4y^2)^2};$

10)	$du = (x^2 - y^2)^{-1/2} \left(\frac{y}{x} dx - dy \right), u_{xy} = u_{yx} = x \cdot (x^2 - y^2)^{-3/2},$ $u_{xx} = -\frac{y(2x^2 - y^2)}{x^2(x^2 - y^2)^{3/2}}, u_{yy} = -y(x^2 - y^2)^{-3/2};$
11)	$du = (1 - (x - y)^2)^{-1/2} (dy - dx), u_{yx} = u_{xy} = (x - y)(1 - (x - y)^2)^{-3/2},$ $u_{xx} = u_{yy} = -(x - y)(1 - (x - y)^2)^{-3/2};$
12)	$du = \left(1 - \left(\frac{x}{y} \right)^2 \right)^{-1/2} (y^{-1} dx - xy^{-2} dy), u_{yx} = u_{xy} = -y(y^2 - x^2)^{-3/2},$ $u_{xx} = x(y^2 - x^2)^{-3/2}, u_{yy} = \frac{x(2y^2 - x^2)}{y^2(y^2 - x^2)^{3/2}};$

3.2.14

1) $u_{yxx} = -2y \sin xy - x y^2 \cos xy, u_{yyx} = -2x \sin xy - x^2 y \cos xy;$	
2) $u_{zyx} = (x^2 y^2 z^2 + 3xyz + 1)e^{xyz};$	3) $\frac{\partial^{10} u}{\partial x^4 \partial y^6} = -2^6 \sin x \cdot \cos 2y;$
4) $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} = 2^m e^{2x} \sin\left(y + \frac{n\pi}{2}\right) + 2^{-n} e^x \cos \frac{y + n\pi}{2};$	
5) $\frac{\partial^{10} u}{\partial x \cdot \partial y^9} = 10! \left(2x \operatorname{tg} x + \frac{x^2 + y}{\cos^2 x} \right);$	
6) так как $\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{2x n!}{(x - y)^{n+1}},$ то $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{2(-1)^m (n + m - 1)! (nx + my)}{(x - y)^{m+n+1}}.$	

3.2.15.

1)	$u_{xx} = f_{tt} + 4x f_{t\vartheta} + 4x^2 f_{\vartheta\vartheta} + 2f_{\vartheta}, u_{xy} = f_{tt} + 2(x + y)f_{t\vartheta} + 4xy f_{\vartheta\vartheta},$ $u_{yy} = f_{tt} + 4y f_{t\vartheta} + 4y^2 f_{\vartheta\vartheta} + 2f_{\vartheta}, \text{ где } t = x + y, \vartheta = x^2 + y^2;$
2)	$u_{xx} = y^2 f_{tt} + 2f_{t\vartheta} + \frac{1}{y^2} f_{\vartheta\vartheta}, u_{xy} = xy f_{tt} - \frac{x}{y^3} f_{\vartheta\vartheta} + f_t - \frac{1}{y^2} f_{\vartheta},$ $u_{yy} = x^2 f_{tt} - 2\frac{x^2}{y^2} f_{t\vartheta} + \frac{x^2}{y^4} f_{\vartheta\vartheta} + \frac{2x}{y^3} f_{\vartheta}, \text{ где } t = x \cdot y, \vartheta = \frac{x}{y};$
3)	$u_{xx} = -\frac{1}{f^2} (f_t + f_{\vartheta})^2 + \frac{1}{f} (f_{tt} + 2f_{t\vartheta} + f_{\vartheta\vartheta}), u_{xy} = -\frac{1}{f^2} (f_t + f_{\vartheta}) f_{\vartheta} + \frac{1}{f} (f_{t\vartheta} + f_{\vartheta\vartheta}),$ $u_{yy} = \frac{1}{f} f_{\vartheta\vartheta} - \frac{1}{f^2} f_{\vartheta}^2, \text{ где } t = x, \vartheta = x + y;$
4)	$u_{xx} = \cos^2 x \cdot f''_{xx} - \sin x \cdot f'_x, u_{xy} = -\sin y \cdot \cos x \cdot f''_{xy}, u_{yy} = \sin^2 y \cdot f''_{yy} - \cos y \cdot f'_y;$

$$5) \begin{cases} u_{xx} = g \cdot f^{g-2} [(g-1)f'^2 + f f''], & u_{xy} = f^{g-1} g' f' (1 + g \ln g), \\ u_{yy} = f^g (g'^2 \ln^2 f + g'' \ln f). \end{cases}$$

3.2.19

$d^2 u _M = f_{tt}(dx - dy)^2 + 2f_{t\vartheta}(dx^2 - dy^2) + f_{\vartheta\vartheta}(dx + dy)^2,$	
1)	$d^2 u _{M_0} = f_{tt}(0,2)(dx - dy)^2 + 2f_{t\vartheta}(0,2)(dx^2 - dy^2) + f_{\vartheta\vartheta}(0,2)(dx + dy)^2,$ где $t = x - y, \vartheta = x + y;$
2)	$d^2 u _M = f_{tt}(dx + dy)^2 + 4zf_{t\vartheta}dz(dx + dy) + 4z^2 f_{\vartheta\vartheta}dz^2 + 2f_{\vartheta}dz^2,$ $d^2 u _{M_0} = f_{tt}(0,0)(dx + dy)^2 + 2f_{t\vartheta}(0,0)dz^2,$ где $t = x + y, \vartheta = z^2;$
3)	$d^2 u _M = f_{tt}(y dx + x dy)^2 + 4f_{t\vartheta}(y dx + x dy)(x dx + y dy) +$ $+ 4f_{\vartheta\vartheta}(x dx + y dy)^2 + 2f_t dx dy + 2f_{\vartheta}(dx^2 + dy^2),$ $d^2 u _{M_0} = 2f_t(0,0)dx dy + 2f_{\vartheta}(0,0)(dx^2 + dy^2),$ где $t = x \cdot y, \vartheta = x^2 + y^2;$
4)	$d^2 u _M = -\sin f(x) \cdot e^{f(x)} f'^2(x) dx^2 + 2\cos f(x) \cdot e^{f(x)} f'(x) f'(y) dx dy +$ $+ \cos f(x) \cdot e^{f(x)} \cdot f''(x) dx^2 + \sin f(x) \cdot e^{f(x)} f'^2(y) dy^2 + \sin f(x) \cdot e^{f(x)} \cdot f''(y) dy^2,$ $d^2 u _{M_0} = e^{f(0)} \left[(\cos f(0) \cdot f''(0) - \sin f(0) \cdot f'^2(0)) dx^2 + 2\cos f(0) \cdot f'^2(0) dx dy + \right.$ $\left. + \sin f(0) (f''(0) + f'^2(0)) dy^2 \right].$

3.2.20

1) $10\vec{i} + 6\vec{j}, 11\frac{3}{5};$	2) $29\vec{i} + 18\vec{j}, 13\sqrt{5};$	3) $\vec{i} - \vec{j}, \frac{17}{13};$
4) $\frac{5\vec{i} + 3\vec{j}}{16}, \frac{1}{16\sqrt{13}};$	5) $-10\vec{j}, 8;$	6) $32\vec{i} + 96\vec{j}, 85\frac{1}{5};$
7) $3\vec{i} + 3\vec{j}, \frac{3}{\sqrt{5}};$	8) $26\vec{i} + 12\vec{j}, 10\sqrt{5};$	9) $-28\vec{i} + 8\vec{j}, -27\frac{1}{5};$
10) $11\vec{i} + 16\vec{j}, \frac{38}{\sqrt{5}};$	11) $\frac{7\vec{i} + 9\vec{j}}{25}, \frac{-11\sqrt{5}}{125};$	12) $\frac{2\vec{i} - 2\vec{j}}{5}, \frac{-17}{65};$
13) $\frac{10\vec{i} + 8\vec{j}}{9}, \frac{12}{9};$	14) $\frac{4\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{3}}, \frac{32}{13\sqrt{3}};$	15) $\frac{9\vec{i} + 12\vec{j}}{325}, 0.$

3.2.21

1) $\frac{\vec{i} + 3\vec{j}}{5}, \frac{11}{5\sqrt{13}};$	2) $4e^2(\vec{i} + \vec{j}), 0;$	3) $\frac{\vec{i} - \vec{j}}{2}, \frac{1}{2};$
4) $\frac{\vec{i} - \frac{\vec{j}}{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{15}};$	5) $\frac{\vec{i} + \vec{j}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{5};$	6) $\vec{i} + \vec{j}, 1;$
7) $8(\vec{i} + \vec{j}), \frac{24\sqrt{5}}{5};$	8) $12\vec{i} + 16\vec{j}, 0;$	9) $\frac{\vec{i}}{2} - \vec{j}, \frac{3\sqrt{2}}{4};$
10) $\frac{\vec{i} - 10\vec{j}}{10\sqrt{3}}, -\frac{4}{5\sqrt{15}};$	11) $-\frac{(4\vec{i} + \vec{j})}{26}, -\frac{5}{26\sqrt{2}};$	12) $\frac{\vec{i} - 2\vec{j}}{2\sqrt{3}}, 0;$

3.2.25

1) $u_{\min} = u(0,0) = 0;$	2) точек экстремума нет;
3) $u_{\min} = u(-2,-1) = -2;$	4) $u_{\min} = u(4/3, 4/3) = -64/27, u_{\max} = u(0,0) = 0;$
5) $u_{\min} = u(1,-1) = -6,$ $u_{\max} = u(-1,1) = 6;$	6) точек экстремума нет;
7) точек экстремума нет;	8) $u_{\min} = u(2/3, -4/3) = -(4/3)e^{-2};$
9) $u_{\min} = u(0,0) = 0;$	10) $u_{\min} = u(0,0) = 0, u_{\max} = u(0,1) = u(0,-1) = \frac{2}{e};$
11) $u_{\min} = u(-1/\sqrt{10}, 2/\sqrt{10}) = -\sqrt{5/(2e)},$ $u_{\max} = u(1/\sqrt{10}, -2/\sqrt{10}) = \sqrt{5/(2e)};$	12) $u_{\min} = u(1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}) =$ $= u(-1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}) = \frac{1}{2e};$

3.2.26

1) $u_{\min} = u(1,-1,3) = -11;$	2) $u_{\min} = u(1/2, 1/2, -2) = -17/4;$
3) $u_{\min} = u(1,-2,1/2) = -9/2;$	4) $u_{\max} = u(1/4, 1/4, 1/4) = 1/256;$
5) $u_{\min} = u(1/4, 1/4, 1/4) = -1/8;$	6) $u_{\min} = u\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{e}},$ $u_{\max} = u\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{\frac{3}{e}}.$

3.2.28

1) $u_{\min} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$ в точке $\left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}\right);$
2) $u_{\min} = 2\sqrt{2}a$ в точке $(\sqrt{2}a, \sqrt{2}a), u_{\max} = -2\sqrt{2}$ в точке $(-\sqrt{2}a, -\sqrt{2}a);$
3) $u_{\max} = 0,5$ в точках $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$

$$u_{\min} = -0,5 \text{ в точках } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ и } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

3.2.29

1) $u_{\min} = 0,4$ в точке $(0,4;-0,4;0,2)$; $u_{\max} = 7\frac{10}{27}$ в точке $\left(-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$;	2) $u_{\min} = 5$ в точке $(0,0,0)$;
3) нет точек экстремума;	4) $u_{\min} = -3$ в точке $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $u_{\max} = 3$ в точке $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$;
5) $u_{\max} = 1$ в точке $(1,1,1)$.	

3. 2.30 $d = h = 6$;

3.2.31 $S_{\min} = 48 \text{ см}^2$ при высоте 2 см и длинах сторон основания равных 4 см;

3.2.32 $\rho_{\min} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$

3.2.33 $\frac{7}{4\sqrt{2}}.$

3.2.34

1) $u_{\max}(1/2, 1/2) = 1/4$;	2) $u_{\min}(18/3, 18/13) = 36/13$;
3) $u_{\max}(2, 1) = 3$;	4) $u_{\min}(1, 0) = 0$, $u_{\max}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$;
5) $u_{\min}\left(\frac{5\pi}{8} + \pi k, \frac{3\pi}{8} + \pi k\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, $u_{\max}\left(\frac{\pi}{8} + \pi k, -\frac{\pi}{8} + \pi k\right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, $k \in \mathbb{Z}$;	
6) $u_{\min}(3, 4) = -20$, $u_{\max}(-3, -4) = 30$;	7) $u_{\min}(-4, 1) = 9$, $u_{\max}(4, -1) = -7$;
8) $u_{\min}\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$, $u_{\max}\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2}$;	9) $u_{\min}(\pm 3, \pm 2) = -50$, $u_{\max}\left(\pm 4, \pm \frac{3}{2}\right) = \frac{425}{4}$;
10) $u_{\min}\left(-\frac{r}{aA}, -\frac{r}{bA}\right) = -rA$, $u_{\max}\left(\frac{r}{aA}, \frac{r}{bA}\right) = rA$, где $A = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ ab }$.	

3.2.35

1) $u_{\min}\left(\frac{11}{4}, -\frac{5}{2}, -\frac{11}{4}\right) = \frac{605}{32}$;

$u_{\min}(2,2,1) = u(2,1,2) = u(1,2,2) = 4,$ 2) $u_{\max}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right) = u\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right) = u\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{112}{27};$
3) $u_{\min}(1,1,1) = 2, \quad u_{\max}(-1,1,1) = 0;$
4) $u_{\min}\left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1, \quad u_{\max}\left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2;$
5) $u_{\min}(-2,1,4) = 11, \quad u_{\max}(2,-1,-4) = 59.$

3.3 РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание №1

Найти область определения функции и изобразить ее на координатной плоскости

1	$z = \sqrt{-x} + \sqrt{y}$
2	$z = \arccos\left(\frac{x^2 + y^2}{9}\right)$
3	$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}, \quad (0 < r < R)$
4	$z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$
5	$z = \ln\left(\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - 1\right)$
6	$z = \frac{x}{\sqrt{x - y}} + \frac{y}{\sqrt{x + y}}$
7	$z = \sqrt{y \sin x}$
8	$z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$
9	$z = \arcsin\left(\frac{x}{y^2}\right) + \arcsin(1 - y)$
10	$z = xy + \sqrt{\ln \frac{9}{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

11	$z = \sqrt{x^2 + 2x + y^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + y^2}}$
12	$z = \arcsin \left(\frac{y}{1 + x^2} \right)$
13	$z = \arccos \left(\frac{y}{x} \right)$
14	$z = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$
15	$z = \ln(\cos(x^2 + y^2))$
16	$z = \operatorname{tg}(x + y)$
17	$z = \frac{1}{\sqrt{xy}} + \sqrt{1 - x^2}$
18	$z = \frac{1}{\sqrt{y - x^2}} + \arcsin y$
19	$z = \ln(x^2 + y^2 - 2x) + \sqrt{1 - y^2} + x$
20	$z = \sqrt{x \ln y}$
21	$z = \sqrt{\ln \frac{4}{x^2 - y^2}}$
22	$z = \frac{1}{\ln(1 - x^2 - y^2)} + \sqrt{x + y}$
23	$z = (\sqrt{x - y} + \sqrt{x + y})^{-1}$

24	$z = \sqrt{x+y} + \sqrt{\ln(x-y)}$
25	$z = \arcsin \left(2 \sin \left(x^2 + y^2 \right) \right)$
26	$z = \left(e^x - y \right)^{-1} + \left(x^2 + y^2 - 4y \right)^{1/2}$
27	$z = (2x - y)^{1/2} + \left(4 - x^2 - 4y^2 \right)^{1/2}$
28	$z = \sqrt{4^x - 2^y} + \sqrt{xy}$
29	$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \arcsin x + \sqrt{1 - y^2}$
30	$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - x^2} \arcsin y$

Задание №2
Найти C – уровень функции

1) $u = \sqrt{x + y};$	16) $u = x - 2y + z;$
2) $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2};$	17) $u = e^{x+2y+z};$
3) $u = \ln(y^2 - 4x + 8);$	18) $u = x^2 + y^2 + (z - 1)^2;$
4) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}};$	19) $u = x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2;$
5) $u = \ln(x^2 + y^2 - 1);$	20) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2);$
6) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 16(y^2 + 1)}};$	21) $u = x^2 + y^2 - z^2;$
7) $u = \ln(x^2 + 4y^2 - 2x - 3);$	22) $u = \frac{1}{x + z}$
8) $u = \frac{1}{x^2 + y^2};$	23) $u = \frac{2z}{x^2 + y^2};$
9) $u = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2};$	24) $u = \frac{z}{x + y + z - 1};$
10) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}};$	25) $u = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2 + z^2};$
11) $u = \frac{\sqrt{x}}{y};$	26) $u = \ln(1 - x - y - z);$
12) $u = \frac{\sqrt{y}}{x - 1}$	27) $u = \sqrt{16 - x^2 - z^2};$
13) $u = \sqrt{y - \sin x};$	28) $u = (x - 4)^2 + z^2;$
14) $u = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right);$	29) $u = \ln(36 - 36x^2 - 9y^2 - 4z^2);$

15) $u = \arctg\left(\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1}\right);$	30) $u = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}.$
--	---------------------------------------

Задание № 3

В каждом варианте по два примера.

1. Исследовать функцию на непрерывность
2. Найти предел функции

Вариант	Исследовать на непрерывность	Найти предел функции
Вар 1 и 16	$z = \frac{1}{x^2 + y^2};$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y}$
Вар 2 и 17	$z = \frac{1}{x - y};$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{x + y}$
Вар 3 и 18	$z = e^{1/(x^2 + y^2)}$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{1 + x^2 y^2}}{xy}$
Вар 4 и 19	$z = \frac{x - y}{x + y};$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^4 y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$
Вар 5 и 20	$z = \frac{2x - 3}{x^2 + y^2 - 4};$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)y^2 x^2}{1 - \cos(x^2 + y^2)}$
Вар 6 и 21	$z = \frac{x - y^2}{x + y^2};$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + x^2 y^2) \cdot \frac{1}{x^2 + y^2}$
Вар 7 и 22	$z = \frac{x - y}{x^3 - y^3};$	$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} (x^2 + y^2) \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$

Вар 8 и 23	$z = \ln(9 - x^2 - y^2); \quad \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^y$
Вар 9 и 24	$z = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 - y)^{1/x}$
Вар 10 и 25	$z = \frac{1}{xy}; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
Вар 11 и 26	$z = \frac{x}{ y }; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$
Вар 12 и 27	$z = \frac{3}{x^2 + y^2}; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(1 + \frac{1}{x+y}\right)^{x+y}$
Вар 13 и 28	$z = \sin\left(\frac{1}{y^2 - 4x}\right) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x^2 y}{\sqrt{1 + x^2 y} - 1}$
Вар 14 и 29	$z = \cos \frac{1}{x^2 + y^2 - 9}; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$
Вар 15 и 30	$z = \frac{10x}{(x-1)^2 + (y-1)^2}; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

Задание № 4

Найдите частные производные функции $z(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$. Запишите полный дифференциал функции $z(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

1	$z = \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{y+1}{x}}$	$M_0(-1; 1)$
2	$z = x - 3 \ln \frac{x}{y}$	$M_0(1; 1)$
3	$z = y \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{x}{y} \right)$	$M_0 \left(\frac{\pi}{2}; 2 \right)$
4	$z = x - y + \ln(x + y)$	$M_0(2; -1)$
5	$z = y\sqrt{x} - \frac{x}{\sqrt[3]{y}}$	$M_0(4; -8)$
6	$z = 2x - ye^{\sin(\pi xy)}$	$M_0(2; -1)$
7	$z = \frac{y - x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$M_0(8; 15)$
8	$z = x + 3y - e^{x-2y}$	$M_0(2; 1)$
9	$z = \ln \operatorname{ctg} \left(\frac{y}{x} \right)$	$M_0 \left(1; \frac{\pi}{4} \right)$
10	$z = (2x + 4y - 3)e^{-y} - x + 2$	$M_0(2; 0)$
11	$z = \sin 2x \cdot \cos y$	$M_0 \left(\frac{\pi}{4}; 0 \right)$

12	$z = \operatorname{arccctg} \sqrt{x^y}$	$M_0(1; 2)$
13	$z = 4x - x^3 y + y^2$	$M_0(2; 1)$
14	$z = x^{2y} + y^x$	$M_0(3; 1)$
15	$z = x y + \operatorname{arctg} y$	$M_0(5; -1)$
16	$z = \frac{x}{x^3 - y^3}$	$M_0(-1; 1)$
17	$z = (2x + 1)^{3y-4}$	$M_0(1; 2)$
18	$z = \ln(x + \ln y)$	$M_0(1; 1)$
19	$z = \sin \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{y \pi^2}{x}$	$M_0\left(1; \frac{2}{\pi}\right)$
20	$z = y e^{-xy}$	$M_0(1; 1)$
21	$z = \frac{\cos^2 xy}{x}$	$M_0\left(1; \frac{\pi}{3}\right)$
22	$z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$	$M_0\left(1; \frac{4}{\pi}\right)$
23	$z = x^2 e^{2y} - y^3 e^x$	$M_0(2; 1)$
24	$z = 2y - (1 + 4x)^{3y}$	$M_0(1; 1)$

25	$z = 8 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$	$M_0(-1; 1)$
26	$z = e^{y \cos x}$	$M_0(2\pi; 1)$
27	$z = (\sin x)^{2y}$	$M_0(\pi/6; -1)$
28	$z = x \operatorname{tg} y$	$M_0\left(-2; \frac{\pi}{4}\right)$
29	$z = x^y$	$M_0(4; 2)$
30	$z = e^{x \cos y}$	$M_0(1; \pi)$

Задание №5

Варианты 1 – 10.

1. Найти градиент функции $u(x, y)$ в точке $A(x_0, y_0)$.
2. Найти производную функции $u(x, y)$ в точке $A(x_0, y_0)$ по направлению линии L в сторону возрастания координаты «х».

1) $u = \ln(x + y)$,	$A(1; 3)$,	$L: y^2 = 9x$
2) $u = x e^y$,	$A(2; 2)$,	$L: xy = 4$
3) $u = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$,	$A(1; 1)$,	$L: x^2 + y^2 - 2x = 0$
4) $u = \operatorname{arctg} xy$,	$A(1; 1)$,	$L: y = x$
5) $u = \ln(x^2 + y^2)$,	$A(1; 1)$,	$L: x^2 + y^2 = 2x$
6) $u = x^2 + y^2$,	$A(4; 4)$,	$L: y^2 = 4x$
7) $u = x^2 + y^2$,	$A(6; 8)$,	$L: x^2 + y^2 = 100$
8) $u = x^2 + y^2 + xy$,	$A(3; 1)$,	$L: 4x - 3y - 9 = 0$
9) $u = \operatorname{arctg}(xy)$	$A(1; -1)$,	$L: x + y = 0$
10) $u = \arcsin \frac{x}{y-x}$	$A(-5; 5)$,	$L: y^2 = 5x$

Задание №5

Варианты 11 – 30.

1. Найти градиент функции $u(x, y, z)$ в точке $A(x_0, y_0, z_0)$.
2. Найти производную функции $u(x, y, z)$ в точке $A(x_0, y_0, z_0)$ по направлению нормали поверхности S , образующей острый угол с положительным направлением оси OZ .

11) $u = 4\ln(3 + x^3) - 8xyz$	$A(1, 1, 1),$	$S: x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1$
12) $u = xyz^2 + yz,$	$A(2, 4, 4),$	$S: 4z + 2x^2 - y^2 = 8$
13) $u = xyz,$	$A(1, 1, 1),$	$S: x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 1$
14) $u = \frac{1}{4}x^2y - \sqrt{x^2 + 5z^2}$	$A\left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$	$S: z^2 = x^2 + 4y^2 - 4$
15) $u = xz - \sqrt{xy},$	$A(2, 2, 4),$	$S: x^2 - y^2 - 3z^2 + 48 = 0$
16) $u = y\sqrt{x} - yz^2,$	$A(4, 0, -1),$	$S: x^2 + y^2 = 16z^2$
17) $u = x^2 + y^2 - 4xyz,$	$A(1, 1, 1),$	$S: 7x^2 - 4y^2 + 4z^2 = 7$
18) $u = \arctg\left(\frac{x}{z}\right) + xy,$	$A(1, -2, 4),$	$S: 4x^2 - y^2 + z^2 = 16$
19) $u = \ln(1 + y^2) - xy\sqrt{z},$	$A(2, 2, 1),$	$S: x^2 + y^2 - 8z^2 = 0$
20) $u = \sqrt{x^2 + y^2} - z,$	$A(3, 4, 1),$	$S: x^2 + y^2 = 25z$
21) $u = x\sqrt{y} - (z + y)\sqrt{x},$	$A(1, 1, -2),$	$S: x^2 - y^2 + z^2 = 4$

22) $u = \sqrt{xy} + \sqrt{4 - z^2},$	$A(1,1,0),$	$S: z = x^2 - y^2$
23) $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2},$	$A(0, -3, 4),$	$S: 2x^2 - y^2 + z^2 - 7 = 0$
24) $u = \ln(1 + x^3 + y^2) - xz$	$A(3, 0, -4),$	$S: x^2 - 6x + 9y^2 = 4z + 7$
25) $u = x^2y + z^3y,$	$A(1, 0, 1),$	$S: x^2 + y^2 = z$
26) $u = e^x + z^2y^3,$	$A(0, 1, 1),$	$S: x^2 + z^2 = y^2$
27) $u = \ln(1 + x + y) + z^3,$	$A(1, -1, 1),$	$S: 3 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$
28) $u = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right) + \sqrt{z},$	$A(1, 2, 4),$	$S: x^2 + y^2 + z^2 - 21 = 0$
29) $u = \arccos\left(\frac{x}{y}\right) + z^2,$	$A(1, 2, 2),$	$S: x + 7 = y^2 + z^2$
30) $u = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{z}\right) + x^2,$	$A(1, 1, 1),$	$S: x^2 + z^2 = y + 1$

Задание №6

Найти производные сложных функций

Замечания:

1. не подставляйте промежуточные функции в данную функцию
2. в каждом варианте по два примера.

1	Найти $\frac{du}{dt}$ Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$	$u = e^{x-2y}$ $z = \ln(u^2 - e^{-v})$	$x = \sin t$ $u = yx^2$	$y = t^3$ $v = 1 + \frac{y}{x}$
2	Найти $\frac{du}{dt}$ Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$	$u = \ln(e^x + e^{-y})$ $z = \arcsin \sqrt{xy}$	$x = t^2$ $x = \frac{u}{v}$	$y = t^3$ $y = uv$
3	Найти $\frac{du}{dt}$ Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$	$u = y^x$ $z = \arctg(x^2 + y^2)$	$x = \ln(t-1)$ $x = e^{v+u}$	$y = e^{t/2}$ $y = \sin(uv)$
4	Найти $\frac{du}{dt}$ Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$	$u = e^{y-2x+2}$ $z = \cos(u^3 - 2uv)$	$x = \operatorname{ctg} t$ $u = x + y$	$y = \cos(1-3t)$ $v = xy$
5	Найти $\frac{du}{dt}$ Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$	$u = x^2 e^y$ $z = \sin \sqrt{\frac{u}{v^3}}$	$x = \operatorname{tg} t$ $u = (x-y)^2$	$y = \sin t$ $v = \sqrt{x+y}$
6	Найти $\frac{du}{dt}$	$u = \ln(e^x + e^y)$	$x = t$	$y = t^3$

	Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$	$z = \operatorname{tg} (x^3 + y^2)$	$x = \ln (u + v)$	$y = \operatorname{tg} \sqrt{u v}$
7	Найти $\frac{du}{dt}$ Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$	$u = x^y$ $z = \operatorname{ctg} \sqrt{x y^3}$	$x = e^t$ $x = \sin \sqrt{u + v}$	$y = \ln t$ $y = e^{-u/v}$
8	Найти $\frac{du}{dt}$ Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$	$u = e^{y-2x}$ $z = e^{-u^2 + v^2}$	$x = \sin t$ $u = \sqrt{x^2 + y^2}$	$y = t^3$ $v = \sin (xy)$
9	Найти $\frac{du}{dt}$ Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$	$u = x^2 e^{-y}$ $z = \ln (3u^2 - v^4)$	$x = \sin t$ $u = x \sqrt{y}$	$y = \sin^2 t$ $v = \frac{x^2}{y+1}$
10	Найти $\frac{du}{dt}$ Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$	$u = \ln (e^{-x} + e^y)$ $z = \arccos \left(\frac{u}{v} \right)$	$x = t^2$ $u = \sin x \cdot \cos y$	$y = t^3$ $v = \sin (xy)$
11	Найти $\frac{du}{dt}$ Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$	$u = e^{y-2x-1}$ $z = \operatorname{arcctg} (x y^2)$	$x = \cos^3 t$ $x = u \operatorname{tg} \frac{v}{2}$	$y = \sin t$ $y = e^{-u^2 v}$
12	Найти $\frac{du}{dt}$ Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$	$u = \arcsin \left(\frac{y}{x} \right)$ $z = \cos \sqrt{u^2 - v^2}$	$x = \sqrt{2t-3}$ $u = 3^{x/y}$	$y = \frac{4}{t}$ $v = e^{-x+y}$

13	Найти $\frac{du}{dt}$ Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$	$u = \arccos\left(\frac{2x}{y}\right)$ $z = \sin \sqrt{u - v^3}$	$x = \sin^2 t$ $u = (x + y)^3$	$y = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$ $v = \frac{x}{y^2}$
14	Найти $\frac{du}{dt}$ Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$	$u = \frac{x^2}{y + 1}$ $z = \operatorname{tg}(u^3 v^3)$	$x = 1 - 2t$ $u = \sin x \operatorname{tg} y$	$y = \operatorname{arctg} t$ $v = \arcsin(xy)$
15	Найти $\frac{du}{dt}$ Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$	$u = \frac{x}{y}$ $z = \operatorname{ctg}(3x - 2y)$	$y = e^{2t}$ $x = \sin^2(u + v)$	$y = 2 - e^{2t}$ $x = e^{v/u}$
16	Найти $\frac{du}{dt}$ Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$	$u = \ln(e^{-x} + e^{-2y})$ $z = e^{2x^2 - y^5}$	$x = t^2$ $x = \sqrt{u - v}$	$y = \frac{1}{3}t^3$ $y = \frac{1}{\sqrt{u} + \sqrt{v}}$
17	Найти $\frac{du}{dt}$ Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$	$u = \sqrt{x + y^2 - 7}$ $z = \ln \sqrt{xy - 1}$	$x = \ln t$ $x = \frac{u}{v}$	$y = 1 - t^3$ $y = \frac{1}{v} + \frac{v^2}{u}$
18	Найти $\frac{du}{dt}$ Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$	$u = \arcsin\left(\frac{x^2}{y}\right)$ $z = \arcsin(2u^2 v)$	$x = \operatorname{ctg} t$ $u = \frac{1}{x - y}$	$y = \cos(t^2)$ $v = \sqrt{xy}$
19	Найти $\frac{du}{dt}$	$u = \frac{y^2}{x}$	$x = 1 - 2t$	$y = 1 + \operatorname{arctg} t$

	Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$	$z = x^2 \ln y$	$x = \frac{u}{v}$	$y = 3u - 2v$
20	Найти $\frac{du}{dt}$ Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$	$u = \operatorname{tg}(3t + 2x^2 - y)$ $z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$	$x = \frac{1}{t}$ $x = \sin(uv)$	$y = \sqrt{t}$ $y = \cos(2v - u)$
21	Найти $\frac{du}{dt}$ Найти $\frac{du}{dx}$	$u = \sqrt{x + y^2}$ $u = \arcsin \frac{x}{z}$	$x = \ln(3 - 2t)$ $z = \sqrt{x^2 + 1}$	$y = t^2$
22	Найти $\frac{du}{dt}$ Найти $\frac{dz}{dt}$	$u = \arcsin \frac{x}{2y}$ $z = \frac{1}{e^{1-x} \sqrt{\operatorname{tg} t}}$	$x = \sin(2 - t)$ $x = \sqrt{t}$	$y = \cos(t^2 + 1)$
23	Найти $\frac{du}{dt}$ Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$	$u = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ $z = \frac{\cos(xy)}{\sqrt{x + y}}$	$x = \sin 2t$ $x = \frac{u^2}{v}$	$y = \operatorname{tg}^2 t$ $y = \frac{v^2}{u}$
24	Найти $\frac{du}{dt}$ Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$	$u = \sqrt{x + y + 3}$ $z = 3\sqrt{x - y}$	$x = \ln^2 t$ $x = \sin u \cdot \cos v$	$y = t^3$ $y = 3\operatorname{tg} v$
25	Найти $\frac{du}{dt}$ Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$	$u = \frac{2 - 3y}{x + 4}$ $z = \ln(1 + x^2 - y^3)$	$x = e^t$ $x = (v + u)^2$	$y = 1 - e^{2t}$ $y = \frac{u}{v}$
26	Найти $\frac{du}{dt}$	$u = \arcsin(2xy)$	$x = \operatorname{tg} t$	$y = \cos t$

	Найти $\frac{du}{dx}$	$u = \frac{1}{\ln(y + x^2)}$	$y = \arcsin x$	
27	Найти $\frac{du}{dt}$	$u = \ln(e^{2x} + e^y)$	$x = t^2$	$y = t^4$
	Найти $\frac{\partial z}{\partial x},$ $\frac{\partial z}{\partial y}$	$z = \frac{1}{\sqrt{uv}} + \sqrt{1 - v^2}$	$u = \sin(xy)$	$v = y \cos x$
28	Найти $\frac{du}{dt}$	$u = \operatorname{arctg}(x + y)$	$x = t^2 + 2$	$y = 4 - t^2$
	Найти $\frac{\partial z}{\partial x},$ $\frac{\partial z}{\partial y}$	$z = \sqrt{\sin(u^2 + v^2)}$	$u = \frac{1}{\sqrt{xy}}$	$v = \sqrt{y - x}$
29	Найти $\frac{du}{dt}$	$u = \sqrt{x^2 + y^2 + 3}$	$x = \ln^2 t$	$y = 1 - t^3$
	Найти $\frac{\partial z}{\partial u},$ $\frac{\partial z}{\partial v}$	$z = \sqrt{x \ln y}$	$x = \cos(v + u)$	$y = e^{v^2 - u^2}$
30	Найти $\frac{du}{dt}$	$u = \operatorname{arctg}(xy)$	$x = t + 3$	$y = e^t$
	Найти $\frac{\partial z}{\partial u},$ $\frac{\partial z}{\partial v}$	$z = \arcsin \frac{x}{y}$	$x = \operatorname{tg}(uv)$	$y = \frac{v}{u}$

Задание №7

Найти производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданной функции $z = f(x, y)$.

1) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4$	16) $x + y + z + 2 - xyz = 0$
2) $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 2$	17) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 0$
3) $3x - 2y + z = xz + 5$	18) $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \frac{3}{2}$
4) $e^z + x + 2y + z = 4$	19) $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 15 = 0$
5) $x^2 + y^2 + z^2 - z - 4 = 0$	20) $x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x - 2y + z^2 - 8z = 0$
6) $z^3 + 3xyz + 3y = 7$	21) $x^2 + y^2 + z^2 = y - z + 3$
7) $e^z - xyz - x + 1 = 0$	22) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y = 0$
8) $e^{z-1} = \cos x \cdot \cos y + 1$	23) $x^2 - y^2 - z^2 + 6z + 2x - 4y + 12 = 0$
9) $x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0$	24) $\sqrt{x^2 + y^2} + z^2 - 3z - 3 = 0$
10) $xy = z^2 - 1$	25) $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 2$
11) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 59 = 0$	26) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 17 = 0$
12) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 0$	27) $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz + 6 = 0$
13) $\ln z - x + 2y - z + \ln 3 = 0$	28) $x \cos y + y \cos z + z \cos x = \pi/2$
14) $x^3 + 3xyz - z^3 - 27 = 0$	29) $3x^2y^2 + 2xyz^2 - 2x^3z + 4y^3 = 0$

15) $z^2 - xy + z - x^2 + 4 = 0$	30) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 2 = 0$
----------------------------------	--

Задание №8

Задана поверхность и на ней точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Найти:

1. уравнение касательной плоскости к поверхности в точке M_0
2. уравнение нормали к данной поверхности в точке M_0 .

Замечание:

В каждом варианте по два примера. Перечисленные выше задания выполнить для каждого примера.

$$1) \quad z = \sin x \cdot \cos y \quad M_0\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz - 2xz + 16 = 0 \quad M_0(1; 2; 3)$$

$$2) \quad z = e^{x \cos y} \quad M_0\left(1; \pi; \frac{1}{e}\right),$$

$$x(y+z) \cdot (xy-z) + 8 = 0 \quad M_0(2; 1; 3)$$

$$3) \quad z = y \operatorname{tg} \frac{x}{a} \quad M_0\left(\frac{\pi a}{4}; a; a\right),$$

$$2^{x/y} + 2^{y/z} = 6 \quad M_0(2; 2; 1).$$

$$4) \quad z = 4x - xy + y^2 \quad M_0(1; 1; 4),$$

$$z^2 - \sqrt{y^2 - z^2} + \frac{2}{x} = 0 \quad M_0(1; 2; 0).$$

$$5) \quad z = 4 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad M_0(1; 1; \pi),$$

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8 \quad M_0(0; -2; 0)$$

$$6) \quad z = x \operatorname{tg} \frac{y}{a} \quad M_0\left(a; \frac{\pi a}{4}; a\right),$$

$$z^3 + y^2 - 4xz + 3 = 0 \quad M_0(1; -2; 2)$$

- 7) $z = x + y - e^{x-2y} \quad M_0(1; -1; -e^3),$
 $z \ln(x+z) - \frac{xy}{z} = 0 \quad M_0(0; 1; 1).$
- 8) $z = x - y + \operatorname{tg} y \quad M_0\left(-1; \frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right),$
 $xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy} - z) = 0 \quad M_0(0; 0; 1).$
- 9) $z = x^2 e^{2y} - y^2 e^{2x} \quad M_0(1; 1; 0),$
 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{9} = 1 \quad M_0\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}\right).$
- 10) $z = e^{y \cos x} \quad M_0(\pi; 1; 1/e),$
 $4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z \quad M_0(2; 3; 6)$
- 11) $z = \frac{\cos^2 xy}{x} \quad M_0\left(1; \frac{\pi}{3}; \frac{1}{4}\right),$
 $(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5 \quad M_0(1; 1; 2)$
- 12) $z = x e^{-xy} \quad M_0\left(1; 1; \frac{1}{e}\right),$
 $x + 2y - \ln z + 4 = 0 \quad M_0(2; -3; 1)$
- 13) $z = x^y \quad M_0(2; 3; 8),$
 $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z - 8 = 0 \quad M_0(0; 2; 0).$
- 14) $z = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad M_0\left(1; 1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$
 $2x^2 - y^2 + 2z - xy - xz = 3 \quad M_0(-1; 2; 1)$
- 15) $z = \frac{x}{x^3 - y^3} \quad M_0\left(1; -1; \frac{1}{2}\right),$

$$e^z - x y^2 z = 1 \quad M_0(2;1;0).$$

$$16) \quad z = 4e^{-2y} + (2x + 4y - 3)e^{-y} - x + 2 \quad M_0(-1;0;2)$$

$$x^2 y - e^{xy} + z^2 - \sin z + 1 = 0 \quad M_0(1;0;0).$$

$$17) \quad z = x + ye^{\sin(\pi xy)} \quad M_0(1;3;4),$$

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz - 2xz + 16 = 0 \quad M_0(1;2;3).$$

$$18) \quad z = \operatorname{arctg} \sqrt{xy} \quad M_0\left(1;1;\frac{\pi}{4}\right),$$

$$x(y+z)(xy-z)+8=0 \quad M_0(2;1;3)$$

$$19) \quad z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y} \quad M_0\left(\frac{\pi}{4};1;0\right),$$

$$2^{x/z} + 2^{y/z} = 8 \quad M_0(2;2;1).$$

$$20) \quad z = (x + 2y)^{x+2y} \quad M_0(1;1;27),$$

$$x^2 + y + z^2 + 4z = 0 \quad M_0(2;-1;-1).$$

$$21) \quad z = (1 + xy)^y \quad M_0(1;1;2)$$

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8 \quad M_0(0;-2;0).$$

$$22) \quad z = x^{xy} \quad M_0(2;1;4),$$

$$x^3 + y^2 + 4xy + 3 = 0 \quad M_0(1;-2;2)$$

$$23) \quad z = \sin \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{y\pi^2}{x} \quad M_0\left(1;\frac{2}{\pi};1\right),$$

$$z \ln(x+z) - \frac{xy}{z} = 0 \quad M_0(0;1;1)$$

$$24) \quad z = \ln \operatorname{ctg} \frac{x}{y} \quad M_0\left(\frac{\pi}{4};1;0\right),$$

$$xy + \ln(e^{xy} - e^{-yz} - z) = 1 \quad M_0(1;1;-1).$$

$$\begin{aligned} 25) \quad z &= xy + \ln(x + y) \quad M_0(2;-1;-2), \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} &= x - z - 2y \quad M_0(6;-2;3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 26) \quad z &= \left(\frac{1}{3}\right)^{y/x} \quad M_0(1;-1;3), \\ (z^2 - y)xyz - x^3 &= 5 \quad M_0(1;1;2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 27) \quad z &= \ln(x + \ln y) \quad M_0(1;1;0), \\ e^{x-z} - xy^2z &= e \quad M_0(1;1;0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 28) \quad z &= y\sqrt{x} - \frac{x}{\sqrt[3]{y}} \quad M_0(1;-1;0), \\ x^2z - e^{xy} - \sin z + 1 &= 0 \quad M_0(1;0;0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 29) \quad z &= (\sin x)^{2y} \quad M_0(\pi/6;-1;4), \\ 2x + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz + 15 - 2xz &= 0 \quad M_0(1;2;3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 30) \quad z &= x + 2 \ln \frac{x}{y} \quad M_0(1;1;1), \\ y^3 - 4xz + z^2 - 4 &= 0 \quad M_0(1;2;2) \end{aligned}$$

Задание №9
Исследовать функцию на экстремум

1) $z = 36(x + y) - 6xy - 4x^2 - 4,5y^2$	16) $z = 2x^3 - xy^2 + 4x^2 + y^2$
2) $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$	17) $z = 2x^3 - xy^2 + 1,5x^2 + y^2$
3) $z = x^3 + y^3 - 3\ln x - 24\ln y$	18) $z = 4(x^2 + 2y^2) - 2x^2y - 5$
4) $z = x^4 + y^4 - x^2 + 2xy - y^2$	19) $z = x + y + \frac{1}{x} + \frac{4}{y}$
5) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$	20) $z = x^2 + y^2 - 2(x + y) - 4\sqrt{xy}$
6) $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$	21) $z = 1 + 3xy^2 - 2y^3 + 1,5x^2 + 6y^2$
7) $z = 2(x + y) + \frac{8}{x^2} + \frac{1}{y}$	22) $z = 2xy - 3(x^2 + y^2) + 8(x + y)$
8) $z = xy e^{x+y}$	23) $z = x^3 - 6xy + y^3 - 8$
9) $z = y^3 + 7,5y^2 + 2x^2(1 - y)$	24) $z = x^2 + y^2 + xy - 15x$
10) $z = 2(x^2 + y^2 - x^2y^2) - x^4 - y^4$	25) $z = 32\sqrt{xy} - 32x - y^2$
11) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$	26) $z = 5x^2 - 3xy + y^2$
12) $z = y^3 + 3(x^2 - y) - 6x(1 + y)$	27) $z = y^2 + y\sqrt{x} + x + 3y$
13) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$	28) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$
14) $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$	29) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$

15) $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$	30) $z = 2x\sqrt{y} - 2x^2 - y + 6x + 1$
---	--

Задание №10

Найти наибольшее и наименьшее значения функции
в замкнутой области D

1) $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$;	D: $x = 0, y = 0, 2x + 3y = 12$
2) $z = x^2 + 3y^2 + x - y$;	D: $x = 1, y = 1, x + y - 1 = 0$.
3) $z = x^3 + y^3 - 3xy$;	D: $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3$.
4) $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x$;	D: $x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0$.
5) $z = xy - 2x$;	D: $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4$.
6) $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$;	D: $y = \frac{1}{3}x^2, y = 3$.
7) $z = 2x + y - xy$;	D: $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4$.
8) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$;	D: $0 \leq x \leq 1, -4 \leq y \leq 2$.
9) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$;	D: $x = 0, y = 0, x - y - 3 = 0$.
10) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$;	D: $0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1$.
11) $z = x^2 - y^2 - x + y$;	D: $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$.
12) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$;	D: $x = 0, y = 0, 3y - 5x = 45$
13) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 5$;	D: $x + y = 5, x = -1, y = -1$.

14) $z = -3x^2 + 2y^2 + 12x - 4y;$	$D: x = 0, y = 0, 3x + 4y = 12$
15) $z = 3xy - 6x^2 - 6y^2 + 15x;$	$D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1.$
16) $z = x^2 + 6xy - x + 3y;$	$D: x = 0, x = 3, y = 0, y = 3.$
17) $z = x^2 - 4xy + y^2 + 6y;$	$D: y = x, y = 0, x = 4.$
18) $z = 5xy - y^2;$	$D: x = 4, y^2 = 5x + 5.$
19) $z = 3y - 2x - xy;$	$D: x = 0, y = 0, 3x - 4y = 12$
20) $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x;$	$D: y = x + 1, y = 0, x = 3.$
21) $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y;$	$D: y = x + 2, y = 0, x = 2.$
22) $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1;$	$D: x + y = -1, y = 0, x = -3.$
23) $z = 4x + 2y + 4x^2 + y^2 + 6;$	$D: x = 0, y = 0, x + y = 2.$
24) $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4;$	$D: x = -1, y = -1, x + y = 1.$
25) $z = 4x^2 + 9y^2 - 4x - 6y + 3;$	$D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0.$
26) $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x;$	$D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2.$
27) $z = 2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6;$	$D: 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4.$
28) $z = 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18(x + y)$	$D: 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3$
29) $z = 2xy - 3y^2 - 3x^2 + 4(x + y)$	$D: 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3$

$$30) \quad z = x^2 + xy - 2;$$

$$D: y = 4x^2 - 4, y = 0.$$

Задание №12

Приложения функции $z = f(x, y)$.

1) На эллипсе $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ найти точки, наименее и наиболее удаленные от прямой $3x - 4y - 9 = 0$.

2) Канал имеет в сечении равнобокую трапецию, площадь которой задана и равна S . Определить глубину канала и угол α так, чтобы периметр, смоченный водой, был наименьшим.

3) Найти объем наибольшего прямоугольного параллелепипеда, который можно вписать в эллипсоид с полуосями a, b, c .

4) Найти прямоугольный параллелепипед данной поверхности S , имеющий наименьший объем.

5) Около данного эллипса описать треугольник с основанием, параллельным большой оси, площадь которой была бы наименьшей.

6) В данный шар диаметром $2R$ вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

7) На плоскости Oxy найти точку, сумма квадратов расстояний которой от 3-х прямых $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y - 16 = 0$ была бы наименьшей.

8) На параболе $x^2 + 2x + 4y = 0$ найти точку, наименее удаленную от прямой $3x - 3y + 9 = 0$.

9) Указать наружные размеры открытого ящика формы прямоугольного параллелепипеда с заданной толщиной стенок α и объемом V , чтобы на него было израсходовано наименьшее количество материала.

10) К эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ провести нормаль, наиболее удаленную от начала координат.

11) Найти наибольший объем параллелепипеда при данной сумме ребер, равной $12a$.

12) Палатка имеет форму цилиндра с насаженной на него конической верхушкой. При каких соотношениях между линейными размерами палатки для ее изготовления потребуется наименьшее количество материала при заданном объеме?

13) Найти прямоугольный параллелепипед данного объема V , имеющий наименьшую поверхность.

14) Среди всех треугольников данного периметра 2ρ найти треугольник наибольшей площади.

15) На параболу $2x^2 - 4xy + 2y^2 - x - y = 0$ найти точку, ближайшую к прямой $9x - 7y + 16 = 0$.

16) Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих данную диагональ L , найти тот, объем которого наибольший.

17) Определить размеры конуса наименьшей боковой поверхности, если задан объем, равный V .

18) Из всех прямоугольных треугольников с заданной площадью S найти такой, гипотенуза которого имеет наименьшее значение.

19) К поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 11$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости $x + y + z = 1$.

20) Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 1 + x^2 + y^2$ в точке $M(1; 1; 3)$.

21) Стоимость сооружения 1 м^2 стен фасада равна ρ , а 1 м^2 остальных стен — q , стоимость крыши за 1 м^2 ее основания — S . Каковы должны быть соотношения между длиной, шириной, высотой для углового дома объемом $V\text{ м}^3$, чтобы стоимость его стен и крыши была наименьшей?

22) Определить размеры прямоугольного бассейна данного объема V так, чтобы на облицовку его поверхности потребовалось бы наименьшее количество материала.

23) В полушар радиуса R вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

24) На плоскости Oxy найти такую точку P , сумма расстояний которой до точек $A(-1; 2; 6)$ и $B(11; -16; 10)$ была бы наименьшей.

25) На плоскости $2x - 3y + 3z - 17 = 0$ найти такую точку P , сумма расстояний которой до точек $A(3; -4; 7)$; $B(-5; -14; 17)$ была бы наименьшей.

26) Найти точку треугольника $A(0; 0)$ $B(1; 0)$ $C(0; 1)$, сумма квадратов расстояний которой до его вершин имеет наименьшее значение.

27) Найти точку четырехугольника $(0; 0)$; $(a; 0)$; $(a; a)$; $(0; 2a)$, сумма квадратов расстояний которой до его вершин имеет наименьшее значение.

28) Определить размеры открытого ящика с данным объемом V и с наименьшей поверхностью.

29) Из всех треугольников, вписанных в круг радиуса R , найти тот, площадь которого наибольшая.

30) Из всех прямоугольников с заданной площадью S найти такой, периметр которого имеет наименьшее значение.

3.4 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

«Метод наименьших квадратов»

Пусть в результате некоторого эксперимента получены данные в виде чисел записанных в таблицу 3.4.1:

Таблица 3.4.1

x	x ₁	x ₂		x _n
y	y ₁	y ₂		y _n

На основании этих данных требуется установить функциональную зависимость величины y от величины x : $y = f(x)$. Вид функции $y = f(x)$ устанавливается обычно или из теоретических соображений или визуально, исследуя расположение n точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ на плоскости XOY .

Наиболее часто в качестве подбираемой функции используют следующие функции:

а) полином: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_mx^m = P_m(x)$;

б) дробно-рациональную: $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$;

в) экспоненциальную: $f(x) = \sum_{k=1}^m a_k \exp(b_k x)$; (3.4.1)

г) логарифмическую и другие функции,

где $a_0, a_1, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_m$ — числа, заранее неизвестные. И задача заключается именно в нахождении этих чисел.

Замечание:

1. Если нет никаких теоретических указаний о виде зависимости $y = f(x)$, то следует искать наиболее простую формулу, содержащую как можно меньшее количество параметров a_i, b_i ;

2. Полное совпадение с данными эксперимента и не желательно, т.к. определяемая функция будет повторять ошибки экспериментатора.

Существует много различных методов нахождения коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m$. Они излагаются в учебниках по численным методам математики, там же излагаются их достоинства и недостатки. Здесь будет рассмотрен один из этих методов - метод наименьших квадратов.

Итак, имеем $y = f(x, a_0, a_1, \dots, a_m)$ — функцию многих переменных, которая зависит от x и еще нескольких неизвестных величин $a_0, a_1, \dots, a_m$.

Составим новую функцию

$$\Phi = \Phi(a_0, a_1, \dots, a_m) = (y_1 - f(x_1, a_0, a_1, \dots, a_m))^2 + \\ + (y_2 - f(x_2, a_0, a_1, \dots, a_m))^2 + \dots + (y_n - f(x_n, a_0, a_1, \dots, a_m))^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m))^2. \quad (3.4.2)$$

Величины $a_0, a_1, \dots, a_m$ надо найти таким образом, чтобы функция $\Phi = \Phi(a_0, a_1, \dots, a_m)$ имела наименьшее значение. Иными словами, отклонение экспериментальных точек от теоретической кривой должно быть минимальным.

Применяем необходимое условие экстремума функции нескольких переменных:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_0} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 0; \quad \dots, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_m} = 0. \quad (3.4.3)$$

В результате получится система из $(m+1)$ линейного уравнения с $(m+1)$ -м неизвестными $a_0, a_1, \dots, a_m$. В каждом конкретном случае исследуется вопрос о существовании решения этой системы, единственности этого решения и о наличии минимума функции $\Phi = \Phi(a_0, a_1, \dots, a_m)$ при полученных значениях величин $a_0, a_1, \dots, a_m$.

Рассмотрим частные случаи подбираемой функции $y = f(x)$.

1. Пусть $y = f(x)$ — полином 1-й степени, т.е.

$y = f(x, a_0, a_1) = a_0 + a_1 x$. График этой функции есть прямая линия. В этом случае вспомогательная функция $\Phi = \Phi(a_0, a_1)$ есть функция двух переменных и имеет вид:

$$\Phi = \Phi(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1 x_i))^2. \quad (3.4.4)$$

Тогда система (3.4.2) будет представлена следующими двумя уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1 x_i)) \cdot (-1) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1 x_i)) \cdot (-x_i) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1 x_i)) = 0 \\ \sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1 x_i)) \cdot x_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n a_0 - a_1 \sum_{i=1}^n x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i - a_0 \sum_{i=1}^n x_i - a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \end{cases}. \quad (3.4.5)$$

Теперь необходимо вычислить коэффициенты системы (значения y_i и x_i даны в таблице (3.4.1). Обозначим

$$A_1 = \sum_{i=1}^n x_i; \quad A_2 = \sum_{i=1}^n x_i^2; \quad B_1 = \sum_{i=1}^n y_i; \quad B_2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Тогда система (3.4.5) принимает вид:

$$\begin{cases} na_0 + A_1 \cdot a_1 = B_1 \\ A_1 a_0 + A_2 a_1 = B_2 \end{cases} \quad (3.4.6)$$

Эта система из двух линейных уравнений с двумя неизвестными a_0 и a_1 .

Решим систему по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & A_1 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} = n \cdot A_2 - A_1^2; \quad \Delta_{a_0} = \begin{vmatrix} B_1 & A_1 \\ B_2 & A_2 \end{vmatrix} = B_1 A_2 - B_2 A_1;$$

$$\Delta_{a_1} = \begin{vmatrix} n & B_1 \\ A_1 & B_2 \end{vmatrix} = n \cdot B_2 - A_1 B_1.$$

Если $\Delta \neq 0$, то решение существует и оно единственно и это решение:

$$a_0 = \frac{\Delta_{a_0}}{\Delta} = \frac{B_1 A_2 - B_2 A_1}{n A_2 - A_1^2};$$

$$a_1 = \frac{\Delta_{a_1}}{\Delta} = \frac{n B_2 - A_1 B_1}{n A_2 - A_1^2}.$$

При найденных значениях a_0 и a_1 функция (3.4.4) имеет минимальное

значение. Это доказывается, если вычислить $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial a_0^2}$; $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial a_0 \partial a_1}$; $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial a_1^2}$ при полученных a_0, a_1 и подставить в достаточные условия экстремума функции нескольких переменных.

ПРИМЕР 3.4.1. На основании некоторого эксперимента получены данные

Таблица 3.4.2

x_i	1	2	3	5
y_i	3	4	2,5	0,5

Нанесем эти значения на координатную плоскость (рис.3.4.1), визуально исследуем расположение точек. В данном случае можно допустить линейную зависимость величины y от величины x , т.е. $y = a_0 + a_1 x$. Строим вспомогательную функцию

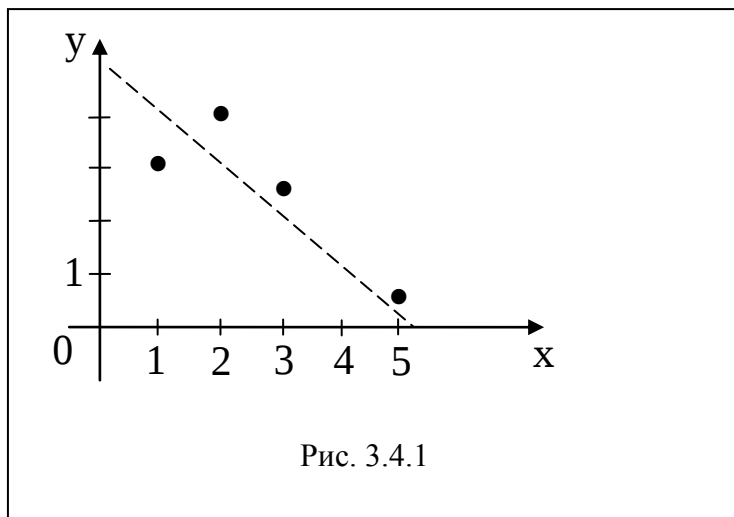


Рис. 3.4.1

$\Phi = \Phi(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^4 (y_i - (a_0 + a_1 x_i))^2$ и тогда система (3.4.5) имеет вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^4 y_i - \sum_{i=1}^4 a_0 - a_1 \sum_{i=1}^4 x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^4 x_i y_i - a_0 \sum_{i=1}^4 x_i - a_1 \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a_0 + A_1 a_1 = B_1 \\ A_1 a_0 + A_2 a_1 = B_2 \end{cases} \quad (3.4.7)$$

Вычислим коэффициенты A_1, A_2, B_1, B_2 :

$$A_1 = \sum_{i=1}^4 x_i = 1 + 2 + 3 + 5 = 11; \quad A_2 = \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 39;$$

$$B_1 = \sum_{i=1}^4 y_i = 3 + 4 + 2,5 + 0,5 = 10;$$

$$B_2 = \sum_{i=1}^4 x_i y_i = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2,5 + 5 \cdot 0,5 = 21 \quad .$$

Подставим в систему (3.4.7):

$$\begin{cases} 4a_0 + 11a_1 = 10 \\ 11a_0 + 39a_1 = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta = \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 11 & 39 \end{vmatrix} = 4 \cdot 39 - 11^2 = 156 - 121 = 35 \neq 0 \\ \Delta_{a_0} = \begin{vmatrix} 10 & 11 \\ 21 & 39 \end{vmatrix} = 10 \cdot 39 - 21 \cdot 11 = 390 - 231 = 159 \\ \Delta_{a_1} = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 11 & 21 \end{vmatrix} = 4 \cdot 21 - 11 \cdot 10 = 84 - 110 = -26 \end{cases}$$

Итак: $a_0 = \frac{159}{35}$; $a_1 = \frac{-26}{35}$. В результате получаем функцию

$$y = -\frac{26}{35}x + \frac{159}{35}.$$

2. Пусть $y = f(x)$ — полином 2-й степени, т.е. $y = f(x, a_0, a_1, a_2) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ — график этой функции есть парабола. В этом случае вспомогательная функция $\Phi = \Phi(a_0, a_1, a_2)$ есть функция трех переменных и имеет вид:

$$\Phi = \Phi(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2))^2 \quad (3.4.8)$$

Тогда система (3.4.3) будет представлена тремя уравнениями:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2)) \cdot (-1) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2)) \cdot (-x_i) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2)) \cdot (-x_i^2) = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2)) = 0 \\ \sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2)) \cdot x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2)) \cdot x_i^2 = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n a_0 - a_1 \sum_{i=1}^n x_i - a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i - a_0 \sum_{i=1}^n x_i - a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 - a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 = 0 \\ \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i^2 - a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 - a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 - a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 = 0 \end{cases} \quad (3.4.9)
\end{aligned}$$

Теперь необходимо вычислить коэффициенты этой системы (значения x_i и y_i даны в таблице (3.4.1)):

$$\begin{aligned}
A_1 &= \sum_{i=1}^n x_i & A_2 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 & A_3 &= \sum_{i=1}^n x_i^3 & A_4 &= \sum_{i=1}^n x_i^4 \\
B_1 &= \sum_{i=1}^n y_i & B_2 &= \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i & B_3 &= \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i^2
\end{aligned}$$

С использованием этих чисел система (3.4.9) принимает вид:

$$\begin{cases} na_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 = B_1 \\ A_1 a_0 + A_2 a_1 + A_3 a_2 = B_2 \\ A_2 a_0 + A_3 a_1 + A_4 a_2 = B_3 \end{cases} \quad (3.4.10)$$

Эта система из трех линейных уравнений с тремя неизвестными a_0 , a_1 , a_2 . Решим систему по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix}; \quad \Delta_{a_0} = \begin{vmatrix} B_1 & A_1 & A_2 \\ B_2 & A_2 & A_3 \\ B_3 & A_3 & A_4 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{a_1} = \begin{vmatrix} n & B_1 & A_2 \\ A_1 & B_2 & A_3 \\ A_2 & B_3 & A_4 \end{vmatrix}; \quad \Delta_{a_2} = \begin{vmatrix} n & A_1 & B_1 \\ A_1 & A_2 & B_2 \\ A_2 & A_3 & B_3 \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta \neq 0$, то система (3.4.10) имеет единственное решение:

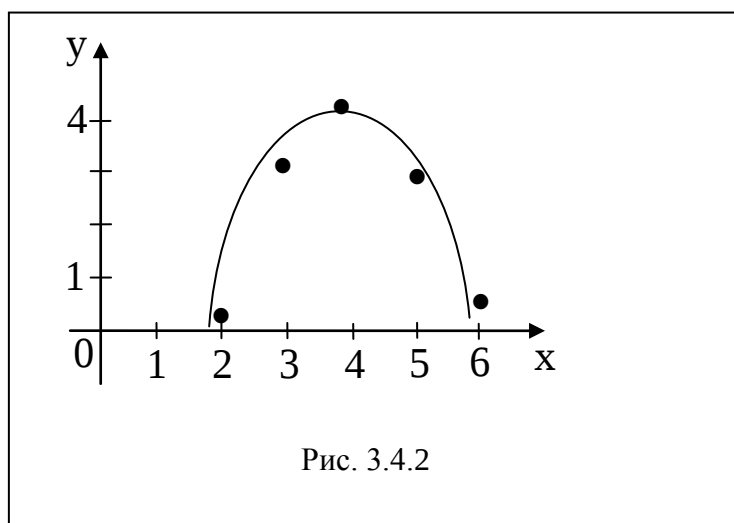
$$a_0 = \frac{\Delta_{a_0}}{\Delta}; a_1 = \frac{\Delta_{a_1}}{\Delta}; a_2 = \frac{\Delta_{a_2}}{\Delta}.$$

При найденных значениях a_0, a_1, a_2 функция (3.4.8) имеет минимальное значение. Это доказывается с использованием достаточных условий экстремума функции нескольких переменных (теорема 1.8).

ПРИМЕР 3.4.2. В результате эксперимента получены числовые данные, записанные в виде таблицы 3.4.3:

Таблица 3.4.3

x	2	3	4	5	6
y	0,2	3,0	4,2	2,8	0,5



Нанесем эти данные на координатную плоскость, исследуем расположение точек и видим, что зависимость величины y от величины x можно описать параболой, т.е. $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Строим вспомогательную функцию:

$\Phi = \Phi(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^5 \left(y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2) \right)^2$ и тогда система (3.4.9) имеет вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^5 y_i - \sum_{i=1}^5 a_0 - a_1 \sum_{i=1}^5 x_i^2 - a_2 \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^5 y_i x_i - a_0 \sum_{i=1}^5 x_i - a_1 \sum_{i=1}^5 x_i^2 - a_2 \sum_{i=1}^5 x_i^3 = 0 \\ \sum_{i=1}^5 y_i x_i^2 - a_0 \sum_{i=1}^5 x_i^2 - a_1 \sum_{i=1}^5 x_i^3 - a_2 \sum_{i=1}^5 x_i^4 = 0 \end{cases} \quad (3.4.11)$$

Теперь необходимо вычислить коэффициенты этой системы:

$$A_1 = \sum_{i=1}^5 x_i = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$$

$$A_2 = \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 90$$

$$A_3 = \sum_{i=1}^5 x_i^3 = 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 8 + 27 + 64 + 125 + 216 = 440$$

$$A_4 = \sum_{i=1}^5 x_i^4 = 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 = 16 + 81 + 256 + 625 + 1296 = 2274$$

$$B_1 = \sum_{i=1}^5 y_i = 0,2 + 3 + 4,2 + 2,8 + 0,5 = 10,7$$

$$B_2 = \sum_{i=1}^5 y_i x_i = 0,2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4,2 \cdot 4 + 2,8 \cdot 5 + 0,5 \cdot 6 = \\ = 0,4 + 9 + 16,8 + 14 + 3 = 43,2$$

$$B_3 = \sum_{i=1}^5 y_i x_i^2 = 0,2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2 + 4,2 \cdot 4^2 + 2,8 \cdot 5^2 + 0,5 \cdot 6^2 = \\ = 0,2 \cdot 4 + 3 \cdot 9 + 4,2 \cdot 16 + 2,8 \cdot 25 + 0,5 \cdot 36 = 0,8 + 27 + 67,2 + 70 + 18 = 183$$

Подставим полученные значения в систему (3.4.11) или в систему (3.4.10):

$$\begin{cases} 5a_0 + 20a_1 + 90a_2 = 10,7 \\ 20a_0 + 90a_1 + 440a_2 = 43,2 \\ 90a_0 + 440a_1 + 2274a_2 = 183 \end{cases}$$

Решаем эту систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 20 & 90 \\ 20 & 90 & 440 \\ 90 & 440 & 2274 \end{vmatrix} = 700; \quad \Delta_{a_0} = \begin{vmatrix} 10,7 & 20 & 90 \\ 43,2 & 90 & 440 \\ 183 & 940 & 2275 \end{vmatrix} = -7574; \\ \Delta_{a_1} = \begin{vmatrix} 5 & 10,7 & 90 \\ 20 & 43,2 & 440 \\ 90 & 183 & 2274 \end{vmatrix} = 5148; \quad \Delta_{a_2} = \begin{vmatrix} 5 & 20 & 10,7 \\ 20 & 90 & 43,2 \\ 90 & 440 & 183 \end{vmatrix} = -640.$$

$$a_0 = \frac{-7574}{700} = -10,82; a_1 = \frac{5148}{700} = 7,35; a_2 = \frac{-640}{700} = -0,91.$$

В результате получаем функцию $f(x) = -0,91x^2 + 7,35x - 10,82$.

Для анализа полученного уравнения составим таблицу 3.4.4

Таблица 3.4.4

x_i	y_i	$f(x_i)$	$y_i - f(x_i)$	$(y_i - f(x_i))^2$
2	0,2	0,24	- 0,04	0,0016
3	3,0	3,04	- 0,04	0,0016
4	4,2	4,02	0,18	0,0324
5	2,8	3,18	- 0,02	0,0002

Минимальное значение функции Φ при найденных коэффициентах равно:

$$\Phi = \sum_{i=1}^5 (y_i - f(x_i))^2 = 0,0016 + 0,0016 + 0,0324 + 0,1444 + 0,0002 = 0,1801.$$

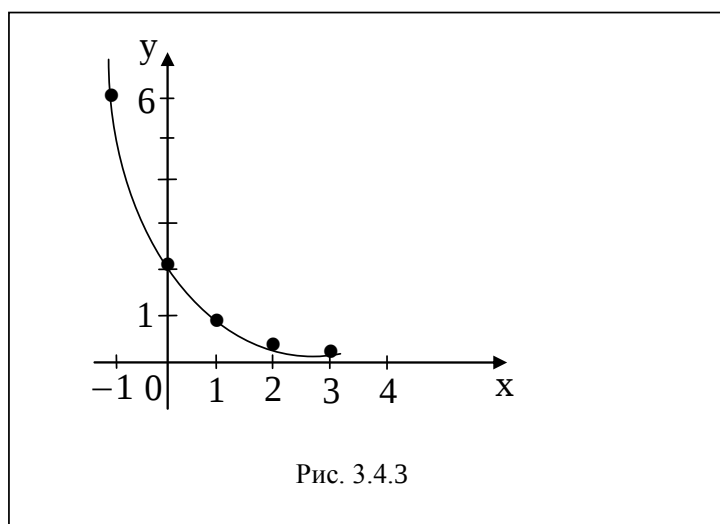
Если коэффициенты a_0, a_1, a_2 хотя бы немного изменить, то значение функции Φ будет увеличиваться.

3. Пусть $y = f(x)$ — экспоненциальная функция, а именно $y = f(x, b_0, b_1) = b_0 \cdot e^{b_1 x}$. В этом случае, при решении системы (3.4.3), возникают трудности, которые, однако, можно преодолеть линеаризацией уравнения $y = b_0 \cdot e^{b_1 x}$. Логарифмируем его: $\ln y = \ln b_0 + b_1 x$; $y > 0$; $b_0 > 0$. Обозначим $z = \ln y$; $a_0 = \ln b_0$; $a_1 = b_1$, тогда имеем $z = z(x, a_0, a_1) = a_0 + a_1 x$ — это линейное уравнение. Если найдем его коэффициенты, то исходные коэффициенты рассчитаем по формулам $b_0 = e^{a_0}$; $b_1 = a_1$.

ПРИМЕР 3.4.3. В результате эксперимента получены данные, выписанные в виде таблицы 3.4.5:

Таблица 3.4.5

x_i	- 1	0	1	2	3
y_i	6	2	7/9	1/3	1/10



Нанесем эти данные на координатную плоскость (рис.3.4.3), исследуем расположение точек и видим, что лучше всего зависимость величины y от величины x описывается экспоненциальной функцией:

$y = b_0 \cdot e^{b_1 x}$. Поскольку в данном случае $y > 0$; $b_0 > 0$, то прологарифмируем уравнение:

$\ln y = \ln b_0 + b_1 x$, сделаем обозначения $z = \ln y$;

$a_0 = \ln b_0$; $a_1 = b_1$ и получаем линейное уравнение $z = a_0 + a_1 x$. (3.4.12)

Для нахождения коэффициентов у последнего уравнения, воспользуемся изложенной выше теорией и обратимся к примеру 3.4.1.

Таблица 3.5.6

x_i	- 1	0	1	2	3
y_i	6	2	7/9	1/3	1/10
z_i	$\ln 6 = 1,792$	$\ln 2 = 0,693$	$\ln \frac{7}{9} = -0,251$	$\ln \frac{1}{3} = -1,1$	$\ln \frac{1}{10} = -2,303$

Строим вспомогательную функцию $\Phi = \Phi(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^5 (z_i - (a_0 + a_1 x_i))^2$.

Система (3.4.5) имеет вид в этом случае:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^5 z_i - \sum_{i=1}^5 a_0 - a_1 \sum_{i=1}^5 x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^5 x_i \cdot z_i - a_0 \sum_{i=1}^5 x_i - a_1 \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a_0 + A_1 a_1 = B_1 \\ A_1 a_0 + A_2 a_1 = B_2 \end{cases} \quad (3.4.13)$$

Вычислим коэффициенты A_1, A_2, B_1, B_2 :

$$A_1 = \sum_{i=1}^5 x_i = -1 + 0 + 1 + 2 + 3 = 5$$

$$A_2 = \sum_{i=1}^5 x_i^2 = (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 0 + 1 + 4 + 9 = 15$$

$$B_1 = \sum_{i=1}^5 z_i = 1,792 + 0,693 - 0,251 - 1,1 - 2,303 = -1,169$$

$$B_2 = \sum_{i=1}^5 z_i x_i = 1,792 \cdot (-1) + 0,693 \cdot 0 + (-0,251) \cdot 1 + (-1,1) \cdot 2 + (-2,303) \cdot 3 = -1,729 + 0 - 0,251 - 2,2 - 6,909 = -11,152.$$

Подставим в систему (3.4.13):

$$\begin{cases} 5a_0 + 5a_1 = -1,169 \\ 5a_0 + 15a_1 = -11,152 \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} = 75 - 25 = 50$$

$$\Delta_{a_0} = \begin{vmatrix} -1,169 & 5 \\ -11,152 & 15 \end{vmatrix} = -17,535 + 55,764 = 38,225$$

$$\Delta_{a_1} = \begin{vmatrix} 5 & -1,169 \\ 5 & -11,152 \end{vmatrix} = -55,76 + 5,845 = -49,915 \approx -50$$

$$a_0 = \frac{\Delta_{a_0}}{\Delta} = \frac{38,225}{50} = 0,7645, \quad a_1 = \frac{\Delta_{a_1}}{\Delta} = \frac{-50}{50} = -1.$$

Возвращаемся к коэффициентам b_0 и b_1 . Так как $a_0 = \ln b_0$, то найдем искомые коэффициенты: $b_0 = e^{a_0} = e^{0,7645} = 2,15$; $b_1 = a_1 = -1$, а также получим функцию $f(x) = 2,15 \cdot e^{-x}$.

Для анализа полученного уравнения составим таблицу 3.4.7:

Таблица 3.4.7

x_i	y_i	$f(x_i)$	$y_i - f(x_i)$	$(y_i - f(x_i))^2$
- 1	6	5,848	0,152	0,023
0	2	2,15	- 0,15	0,0225
1	$7/9 \approx 0,77$	0,79	- 0,012	0,000144
2	$1/3 \approx 0,33$	0,29	0,039	0,0015
3	$1/10 \approx 0,1$	0,107	- 0,007	0,00005

Минимальное значение функции Φ при найденных коэффициентах равно:

$$\Phi = \sum_{i=1}^5 (y_i - f(x_i))^2 = 0,023 + 0,0225 + 0,000144 + 0,0015 + 0,00005 = 0,0472$$

Задание к лабораторной работе

В результате эксперимента получены данные, выписанные в виде таблицы. Методом наименьших квадратов требуется установить функциональную зависимость величины y от величины x : $y = f(x)$

Вариант 1

x	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
y	0,5	7,5	12,5	14,5	14,5	15

Вариант 2

x	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5
y	10,5	9,5	6,5	4,5	2,5	2,5

Вариант 3

x	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5
y	0,5	3,5	4,5	4,5	4,5	4

Вариант 4

x	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
y	0,5	5,5	6,5	8,5	9,5	9

Вариант 5

x	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5
y	9,5	7,5	5,5	6,5	6,5	6,5

Вариант 6

x	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5
y	0,5	6,5	12,5	14,5	15,5	15

Вариант 7

x	-2,5	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5
y	0,5	1,5	2,5	2,5	2,5	4

Вариант 8

x	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
y	10,5	10,5	9,5	9,5	6,5	7,5

Вариант 9

x	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
y	0,5	3,5	8,5	8,5	9,5	10

Вариант 10

x	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5
y	9,5	9,5	8,5	7,5	6,5	7,5

Вариант 11

x	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5
y	0,5	4,5	5,5	5,5	6,5	8

Вариант 12

x	-2,5	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5
y	9,5	9,5	9,5	5,5	6,5	8

Вариант 13

x	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
y	0,5	3,5	3,5	3,5	4,5	4

Вариант 14

x	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5
y	10,5	10,5	10,5	8,5	8,5	11

Вариант 15

x	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
y	0,5	5,5	5,5	7,5	8,5	9

Вариант 16

x	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5
y	0,5	8,5	9,5	10,5	10,5	10

Вариант 17

x	-3,5	-2,5	-1,5	-0,5	0,5	1,5
y	9,5	7,5	7,5	10,5	11,5	12

Вариант 18

x	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
y	0,5	2,5	3,5	3,5	4,5	4

Вариант 19

x	-2,5	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5
y	0,5	1,5	3,5	3,5	4,5	6

Вариант 20

x	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
y	10,5	10,5	9,5	8,5	6,5	6,5

Вариант 21

x	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5
y	0,5	0,5	5,5	7,5	8,5	9

Вариант 22

x	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
y	9,5	8,5	8,5	6,5	5,5	6,5

Вариант 23

		-				
x	-3,5	2,5	-1,5	-0,5	0,5	1,5
y	0,5	7,5	7,5	9,5	10,5	11

Вариант 24

		-				
x	-4,5	3,5	-2,5	-1,5	-0,5	0,5
y	8,5	7,5	7,5	7,5	8,5	9

Вариант 25

x	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
y	0,5	3,5	4,5	6,5	6,5	6

Вариант 26

x	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5
y	10,5	8,5	6,5	6,5	4,5	5,5

Вариант 27

x	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5
y	0,5	9,5	11,5	12,5	12,5	12

Вариант 28

x	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
y	0,5	9,5	15,5	17,5	18,5	18

Вариант 29

x	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5
y	9,5	7,5	6,5	8,5	10,5	8,5

Вариант 30

x	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
y	0,5	0,5	1,5	3,5	3,5	3

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература:

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2 т. / Н. С. Пискунов. - стер. изд. - М. : Интеграл-Пресс. Т. 1. - 2009. - 416 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2 т. / Н. С. Пискунов. - стер. изд. - М. : Интеграл-Пресс. Т. 2. - 2008. - 544 с.

Дополнительная литература:

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике : полный курс / Д. Т. Письменный. 9-е изд. М. Айрис-пресс, 2010. 608 с
2. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. Ч. 1 / П.Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. - 7-е изд. - М. : ОНИКС : Мир и Образование, 2009. - 304 с.
3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. Ч. 2 / П.Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. - 7-е изд. - М. : ОНИКС : Мир и Образование, 2009. - 416 с
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пособие / Г.Н. Берман. - 22-е изд., перераб. - СПб. : Профессия, 2008. – 432 с

Учебно-методические издания:

1. Учебно-методический комплекс дисциплины «Математика». Раздел 5 «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных». Теоретические основы. Методические указания для студентов. Материалы для самостоятельной работы студентов. – Уфа: Издательство УГНТУ, 2009. – 130 с.
2. Учебно-методический комплекс дисциплины «Математика». Раздел 5 «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных». Контрольно-измерительные материалы. – Уфа: Издательство УГНТУ, 2010. – 135 с.
3. Функции нескольких переменных. – Гимаев Р.Г., Умергалина Т.В., Уфа, УГНТУ, 2005.
4. Практикум. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. – Галиакбарова Э.В., Хакимов Д.К., Уфа, УГНТУ, 2000.
5. Расчетные задания по теории функций нескольких переменных. – Галиакбарова Э.В., Егорова Р.А., Якубова Д.Ф., Уфа, УГНТУ, 2004.