

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЯНОЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математики

УЧЕБНО – МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
по дисциплине «Математика»

РАЗДЕЛ 15. ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Теоретические основы
Методические указания для студентов
Материалы для самостоятельной работы студентов

Уфа
Издательство УГНТУ
2015

Данное пособие содержит теоретические материалы, способы и методы решения практических задач, задания для самостоятельной работы студентов, контрольные вопросы для самопроверки, список рекомендуемой литературы.

Разработано для студентов, обучающихся по всем формам обучения по направлениям подготовки и специальностям, реализуемым в УГНТУ.

Для освоения материала по операционному исчислению рекомендуется предварительное изучение раздела математики «Теория функций комплексного переменного» (ТФКП), так как многие формулы, понятия и символы из ТФКП используются в операционном исчислении.

Первое издание пособия вышло в 2008 году.

Составители: Абзалимов Р.Р., Акмадиева Т.Р., Аносова Е.П., Ахтямов Н.Т., Байрамгулова Р.С., Галиуллин М.М., Галиакбарова Э.В., Гимаев Р.Г., Зарипов Э.М., Зарипов Р.М., Исламгулова Г.Ф., Ковалева Э.А., Лазарев В.А., Майский Р.А., Мухаметзянов И.З., Нагаева З.М., Сахарова Л.А., Сокова И.А., Степанова М.Ф., Сулейманов И.Н., Умергалина Т.В., Фаткуллин Н.Ю., Хайбуллин Р.Я., Хакимова З.Р., Чернятьева М.Р., Юлдыбаев Л.Х., Шамшович В.Ф., Якубова Д.Ф., Якупов В.М., Янчушка А.П., Яфаров Ш.А.

Ответственные за выпуск: Умергалина Т.В., доц. (часть 1, часть 2);
Ковалева Э.А., доц. (часть 3).

Компьютерный набор текста: Ахметзянова Л.У.

Рецензенты: Асадуллин Р.М., зав.каф. программирования и вычислительной математики БГПУ, д-р физ.-мат. наук, проф.
Морозкин Н.Д., зав. каф. вычислительной математики БГУ, д-р физ.-мат. наук, проф.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
1. Теоретические основы	
1.1. Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение	7
1.2. Примеры вычисления изображений	9
1.2.1. Функция Хевисайда и её изображение	10
1.2.2. Изображение для показательной функции	11
1.3. Теоремы существования изображения и единственности оригинала	12
1.4. Правила выполнения операций при преобразовании Лапласа (свойства преобразования Лапласа)	15
1.4.1. Теорема линейности	16
1.4.2. Теорема подобия	18
1.4.3. Теорема сдвига	19
1.4.4. Теорема запаздывания	20
1.4.5. Теорема дифференцирования оригинала	22
1.4.6. Теорема интегрирования оригинала	24
1.4.7. Теорема дифференцирования изображения	26
1.4.8. Теорема интегрирования оригинала	27
1.4.9. Теорема свёртывания (умножения изображений)	29
1.4.10. Теорема опережения оригинала	31
1.5. Импульсные функции и их изображение	32
1.6. Обратное преобразование Лапласа	35
1.6.1. Теорема обращения преобразования Лапласа	35
1.6.2. Частные методы определения оригинала по изображению	37
1.6.3. Теорема разложения	39
1.7. Применение операционного исчисления	44
1.7.1. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	44
1.7.2. Решение систем дифференциальных уравнений	51
1.7.3. Решение линейных дифференциальных уравнений в частных производных	53
2. Методические указания для студентов	
2.1. Нахождение изображения по заданному оригиналу через интеграл Лапласа	56
2.2. Нахождение изображения и оригинала с применением свойств преобразования Лапласа	58
2.3. Использование теоремы разложения	65
2.4. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	69

2.5. Решение системы дифференциальных уравнений	73
3. Материалы для самостоятельной работы студентов	
3.1. Контрольные вопросы	76
3.2. Задачи и упражнения для самостоятельной работы студентов	76
3.3. Расчетные задания	82
3.4. Решение варианта №0	96
Приложение	100
Список литература	102

ВВЕДЕНИЕ

Развитие и систематическое применение операционного исчисления началось с работ Оскара Хевисайда (≈ 1922 год), в которых он предложил правило формального обращения с операторами дифференцирования. Но строгое математическое обоснование для операционного исчисления было сделано другими математиками ($\approx$ с 1953 года), когда было введено понятие обобщенных функций.

Операционное исчисление является одной из глав современного математического анализа. Интегральное преобразование Лапласа и построенное на его базе операционное исчисление - эффективный аппарат решения дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и в частных производных), дифференциально-разностных и интегральных уравнений, к которым приводятся задачи электротехники, радиотехники, электроники, теории автоматического регулирования, теплотехники, механики и других областей науки и техники. Заметим, что операционное исчисление строится и на других преобразованиях, например, Фурье, Ханкеля, Меллина и т.д.

Методы операционного исчисления представляют собой своеобразный способ решения различных математических задач, в первую очередь дифференциальных уравнений, которыми описываются многие технические и технологические процессы. Идея заключается в следующем. Пусть требуется найти функцию $f(t)$ из некоторого уравнения, содержащего эту функцию под знаком производных или интегралов. От искомой функции $f(t)$ (ее называют оригиналом) переходят к другой функции $F(p)$ (ее называют изображением), являющейся результатом преобразования функции $f(t)$. В соответствии с правилами операционного исчисления операции над оригиналом заменяют соответствующими операциями над изображением, которые являются более простыми; например, дифференцированию $f(t)$ соответствует умножение $F(p)$ на p , интегрированию - деление на p и т.д. Это позволяет перейти от сложного уравнения относительно $f(t)$ к более простому уравнению относительно $F(p)$,

называемому операторным; например, от дифференциального уравнения - к алгебраическому. Решив операторное уравнение, от изображения $F(p)$ переходят к оригиналу $f(t)$ – искомой функции. Решение задачи операционным методом, таким образом, связано с двумя этапами: нахождением изображения искомого решения и обратным переходом к оригиналу.

Применение операционного метода можно сравнить с логарифмированием, которое позволяет сложные действия над числами заменить более простыми действиями над их логарифмами, после чего от найденного логарифма снова переходят к искомому числу. Здесь роль оригиналов играют числа, а роль изображений - их логарифмы.

1 Теоретические основы

1.1 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА. ОРИГИНАЛ И ИЗОБРАЖЕНИЕ

Пусть $f(t)$ – действительная функция действительного аргумента t , определенная при любых t .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем называть **оригиналом** функцию $f(t)$, если она удовлетворяет следующим условиям:

1⁰) $f(t)$ – кусочно-непрерывная функция при $t \geq 0$; это значит, что она или непрерывна, или имеет точки разрыва первого рода, число которых конечно на любом конечном интервале;

2⁰) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

3⁰) $f(t)$ с возрастанием t может возрастать, но не быстрее некоторой показательной функции. Это означает, что существуют такие числа $M > 0$ и $S_0 \geq 0$, что для всех t выполняется $|f(t)| \leq Me^{S_0 t}$; число S_0 называется показателем роста функции $f(t)$. Для ограниченных функций можно принять $S_0 = 0$.

Рассмотрим эти условия несколько подробнее. Условия 1⁰ и 3⁰ выполняются для большинства функций, отвечающих физическим процессам, в которых t принимается как время. Условие 2⁰ оправдано тем, что при изучении процесса безразлично, как ведут себя рассматриваемые функции до некоторого начального момента времени, который, разумеется, можно принять за момент $t = 0$.

В связи с условием 2⁰ в дальнейшем изложении, где это потребуется, будем записывать для краткости лишь то выражение $f(t)$, которое она имеет для $t \geq 0$, подразумевая, что для $t < 0$ $f(t) = 0$.

Например, запись $f(t) = t^2$ должна пониматься так: $f(t) = \begin{cases} t^2, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

Аналогично, если дано выражение $f(t-a)$, где $a > 0$, то данная функция будет оригиналом, если $t > a$ и $f(t-a) = 0$ при $t < a$.

Замечание. Если $f(t)$ не удовлетворяет хотя бы одному из указанных трех условий, то она не является оригиналом.

Пример. Функция $f(t) = 1/t$ - не является оригиналом, так как она не определена при $t = 0$. В этой точке функция терпит разрыв второго рода, то есть нарушено условие (1).

Пример. Функция $f(t) = te^{t^2}$ - не является оригиналом, так как нарушается условие (3) - она растет быстрее показательной функции.

Замечание. Функция $f(t)$ может быть и комплекснозначной, иметь вид $f(t) = u(t) + iv(t)$. Но чтобы $f(t)$ считать оригиналом, $u(t)$ и $v(t)$ должны быть оригиналами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $F(p)$ называется **функцией-изображением** (или просто **изображением**) для оригинала $f(t)$, если она определяется интегралом:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad (1.1)$$

где $p = x + iy$ - комплексная переменная.

Несобственный интеграл в правой части равенства (1.1), называемый интегралом Лапласа, зависит от параметра p .

Таким образом, функции $f(t)$ действительного переменного t поставлена в соответствие функция $F(p)$ комплексного переменного p .

Операцию перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ в соответствии с формулой (1.1) называют **преобразованием Лапласа** или, что то же, **прямым преобразованием Лапласа**.

Тот факт, что $F(p)$ есть изображение для функции-оригинала $f(t)$ (говорят также, изображение по Лапласу), символически записывают так: $f(t) \xrightarrow{\cdot} F(p)$, $F(p) = L\{f(t)\}$ или $f(t) \xleftarrow{\cdot} F(p)$ (стрелка направлена от изображения к оригиналу). Употребляются и другие символы. В дальнейшем будем придерживаться последнего из этих обозначений.

Отыскание оригинала $f(t)$ по изображению $F(p)$ называют **обращением преобразования Лапласа** или, что то же, **обратным преобразованием Лапласа**; его обозначают символом $L^{-1}\{F(p)\} = f(t)$. Об обратном преобразовании будет сказано ниже, во второй части.

Условились обозначать оригиналы малыми буквами $f(t), \varphi(t), \dots$, а их изображения - соответствующими заглавными буквами $F(p), \Phi(p), \dots$ или теми же буквами, что и оригиналы, но снабжать их черточками сверху: $\bar{f}(p), \bar{\varphi}(p), \dots$

Замечание. Обычно под оригиналом понимают такую функцию $f(t)$, у которой ее изображение существует. Определение оригинала, данное выше, гарантирует абсолютную сходимость несобственного интеграла (1.2). Действительно, согласно (1.1)

$$|F(p)| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |e^{-pt} f(t)| dt \leq \int_0^{+\infty} |e^{-pt}| \cdot M e^{S_0 t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} M e^{S_0 t} dt =$$

$$= M \int_0^{+\infty} e^{-(x-S_0)t} dt = -\frac{M}{(x-S_0)} e^{-(x-S_0)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{M}{x-S_0} \left(-\frac{1}{e^{(x-S_0)t}} \Big|_0^{+\infty} \right) = \frac{M}{(x-S_0)},$$

где $x = \operatorname{Re} p > S_0$. Отсюда следует $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} F(p) = 0$, то есть интеграл сходится, а это и есть необходимое условие для изображения.

1.2 ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Приведем примеры вычисления изображения по Лапласу, исходя из его определения.

1.2.1 Функция Хевисайда и ее изображение. Функция, определяемая

следующим образом: $\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ 1, & \text{если } t \geq 0, \end{cases}$ называется **единичной функцией**

или **функцией Хевисайда**.

График ее изображен на рисунке 1.1. Очевидно, эта функция является оригиналом, так как она удовлетворяет условиям $1^0, 2^0, 3^0$. Найдем изображение функции Хевисайда по формуле (1.1), полагая в ней $f(t)=1$:

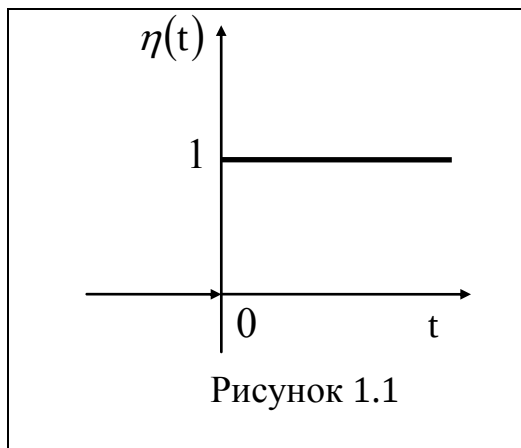


Рисунок 1.1

$$F(p) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-pt} dt =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^b \right) = \frac{1}{p} \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-pb}) = \frac{1}{p}.$$

Последнее заключение можно сделать только в том случае, когда $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-pb} = 0$. Покажем, что это

выполняется. По формуле Эйлера имеем $e^{yi} = (\cos y + i \sin y)$. Тогда

$e^{-pb} = e^{-(x+iy)b} = e^{-xb} \cdot e^{-iyb} = e^{-xb} (\cos(yb) - i \sin(yb))$. Вычисляем предел от полученного соотношения при b стремящемся к бесконечности:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-pb} = \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-xb} (\cos(yb) - i \sin(yb)) = \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-xb} \cos(yb) - i \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-xb} \sin(yb) = 0,$$

т.к. $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-xb} = 0$ при $x > 0$ и $\cos yb, \sin yb$ являются ограниченными

функциями. Следовательно, когда $\operatorname{Re} p = x > 0$, $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-pb} \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-xb} = 0$.

Таким образом, интеграл Лапласа для единичной функции сходится при $\operatorname{Re} p > 0$ и ее изображением является функция $\frac{1}{p}$. Итак,

$$\eta(t) \xleftrightarrow{\bullet} \frac{1}{p} \quad (\operatorname{Re} p > 0). \quad (1.2)$$

В связи с введением функции Хевисайда заметим следующее. Когда идет речь о некоторой функции - оригинале, например, e^t , $\sin t$ и т.д., то всегда

подразумевается, что $f_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ e^t, & \text{если } t \geq 0, \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \sin t, & t \geq 0 \end{cases} \quad \text{и т.д.}$

С помощью функции $\eta(t)$ можно записать: $f_1(t) = \eta(t)e^t$, $f_2(t) = \eta(t)\sin t$. Роль множителя $\eta(t)$ состоит в том, что он “гасит” (обращает в нуль) функцию при $t < 0$. Однако для сокращения записи множитель $\eta(t)$ иногда опускают.

1.2.2 Изображение для показательной функции. Найдем функцию – изображение для показательной функции $f(t) = e^{at}$, где $a = \alpha + i\beta$ - любое комплексное число. Согласно нашей договоренности $f(t) = 0$ при $t < 0$.

Условия 1^0 и 3^0 выполняются, причем в силу $|e^{at}| = e^{\alpha t}$ можно положить

$M = 1$, $S_0 = \alpha$. Следовательно, e^{at} – оригинал, так как

$$|e^{pt}| = |e^{(x+iy)t}| = e^{xt} \cdot |e^{iyt}| = e^{xt} \cdot |\cos yt + i \sin yt| = e^{xt} \cdot \sqrt{\cos^2(yt) + \sin^2(yt)} = e^{xt}.$$

По формуле (1.1) найдем

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-(p-a)t} dt = - \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-(p-a)t}}{p-a} \right|_0^b = \frac{1}{p-a} \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-(p-a)b}) = \frac{1}{p-a}.$$

Это имеет место в случае, если только $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-(p-a)b} = 0$. Последнее же выполняется, как было показано в предыдущем примере, когда $\operatorname{Re}(p-a) > 0$, Таким образом,

$$e^{at} \stackrel{\bullet}{\leftarrow} \frac{1}{\bullet p-a} \quad (\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a, \text{ т.е. } x > \alpha). \quad (1.3)$$

С помощью единичной функции соответствие (1.3) можно записать в виде

$$\eta(t) e^{at} \stackrel{\bullet}{\leftarrow} \frac{1}{\bullet p-a} (\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a). \quad \text{Полагая здесь } a = 0, \text{ снова получаем}$$

соответствие (1.2), которое можно записать и так: $\eta(t) \stackrel{\bullet}{\leftarrow} \frac{1}{\bullet p} \quad (\operatorname{Re} p > 0)$, и так:

$$1 \stackrel{\bullet}{\leftarrow} \frac{1}{\bullet p} \quad (\operatorname{Re} p > 0).$$

1.3 ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ОРИГИНАЛА

Требования $1^0, 2^0, 3^0$ наложены на функцию $f(t)$ неслучайно. Только при таких условиях несобственный интеграл (1.1) сходится и, следовательно, определяет некоторую функцию $F(p)$. Установлено, что условия $1^0 - 3^0$, которым удовлетворяют оригиналы, являются достаточными условиями сходимости интеграла Лапласа. Но если $f(t)$ является оригиналом, то возникает вопрос, в какой области комплексной плоскости p интеграл Лапласа сходится, то есть существует изображение $F(p)$? Именно с таким вопросом мы столкнулись и дали на него ответ при отыскании изображения единичной и показательной функции, исходя из его определения. Ответ на эти вопросы дает следующая теорема.

Теорема (существования изображения). Если функция $f(t)$ является оригиналом, то ее изображение $F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$ определено для всех значений комплексного переменного p , удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} p > S_0$, где S_0 — показатель роста функции $f(t)$, и из определения 1 является аналитической функцией в этой области. Геометрически теорему можно истолковать следующим образом. Если на комплексной плоскости через точку S_0 действительной оси OX (рисунок 1.2)

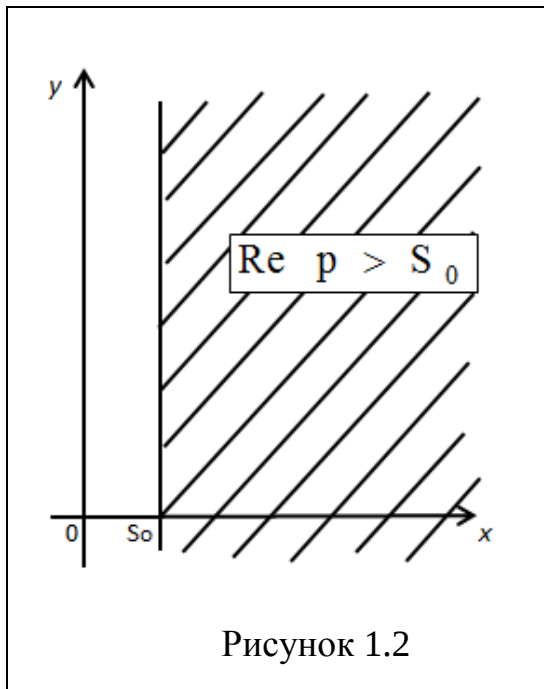


Рисунок 1.2

провести прямую $x = S_0$ параллельно мнимой оси OY , то интеграл (1.1) сходится везде в области, расположенной правее от этой прямой, причем функция $F(p)$ является аналитической в этой области.

Доказательство. Для доказательства первой части теоремы достаточно установить абсолютную сходимость интеграла Лапласа в области $\text{Re } p > S_0$. Известно, что абсолютная величина интеграла не больше интеграла от

абсолютной величины подынтегральной функции, то есть

$$\left| \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |f(t) e^{-pt}| dt. \text{ По условию } f(t) \text{ — оригинал и, следовательно,}$$

выполняется условие 3°, согласно которому $|f(t)| < M e^{S_0 t}$. Кроме того,

$$\begin{aligned} |e^{-pt}| &= |e^{-(x+iy)t}| = |e^{-xt}| \cdot |e^{-iyt}| = e^{-xt} |\cos yt - i \sin yt| = \\ &= e^{-xt} \sqrt{\cos^2 yt + \sin^2 yt} = e^{-xt}. \end{aligned}$$

$$\text{Поэтому } |f(t) e^{-pt}| = |f(t)| \cdot |e^{-pt}| < M e^{S_0 t} e^{-xt} = M e^{-(x-S_0)t}.$$

$$\text{Тогда } \left| \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| \leq M \int_0^{\infty} e^{-(x-S_0)t} dt = -M \frac{e^{-(x-S_0)t}}{x-S_0} \Big|_0^{\infty} = \frac{M}{x-S_0}, \quad (1.4)$$

если $x - S_0 > 0$. Отсюда в силу признака сравнения вытекает сходимость интеграла Лапласа, а значит, существование изображения $F(p)$ для тех значений p , у которых $\text{Re } p > S_0$.

Доказательство второй части теоремы, а именно аналитичности функции $F(p)$ в полуплоскости $\text{Re } p > S_0$, сложнее и здесь не будет проведено. Оно основано на свойствах равномерно сходящихся интегралов.

Следствие (поведение изображения на бесконечности). Если p стремится в бесконечность так, что $\operatorname{Re} p = x \rightarrow \infty$, то изображение $F(p) \rightarrow 0$.

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из неравенства (1.4). Действительно, $|F(p)| < \frac{M}{x - S_0}$, но $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{M}{x - S_0} \right) = 0$, а поэтому $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} F(p) = 0$.

Приведенные теоремы и следствие позволяют высказать следующее суждение: не всякая функция $F(p)$ комплексного переменного p может служить изображением некоторого оригинала $f(t)$. Из аналитичности функции $F(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p = x > S_0$ следует, что все особые точки $F(p)$ должны лежать левее прямой $x = S_0$ (или на самой прямой). По этой причине функция $F(p) = \operatorname{tg} p$ не является изображением: она имеет бесконечное число полюсов $p_k = \frac{2k-1}{2} \pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) на оси ox . Функция $F(p) = p^2$ также не является изображением, так как p^2 не стремится к нулю, когда $\operatorname{Re} p = x \rightarrow \infty$.

Обсудим полученные в п.1.2 операционные соотношения (1.2) и (1.3) в связи с приведенной теоремой. Правая часть формул - соответствий, скажем функция $F(p) = \frac{1}{p - a}$, определена и аналитична при всех значениях p , кроме

$p = a$, где она имеет полюс. Однако, пользуясь теоремой существования изображения, мы можем лишь утверждать, что функция представима

интегралом Лапласа $F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-at} dt$ только при $\operatorname{Re} p > S_0$ ($S_0 = \alpha$) и в

полуплоскости $\operatorname{Re} p > S_0$ $F(p)$ не будет иметь особых точек: все они оказываются лежащими или левее прямой $\operatorname{Re} p = S_0$ (или $x = S_0$) или на ней самой.

Таким образом, теорема существования устанавливает условия, при которых для функции $f(t)$ действительного переменного ставится в соответствие единственная функция $F(p)$ комплексного переменного - ее изображение. Другими словами, будет ли каждому изображению (некоторой функции комплексного переменного) соответствовать единственный оригинал. Ответ на этот вопрос дан в следующей теореме, которую мы приведем без доказательства.

Теорема (единственности оригинала). Если $F(p)$ является изображением двух оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то эти оригиналы совпадают во всех точках, в которых они непрерывны.

Замечание. Различные разрывные функции могут иметь одинаковое изображение.

1.4 ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ ОПЕРАЦИЙ ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЛАПЛАСА (СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА)

При практическом применении преобразования Лапласа операции выполняются не над заданными функциями, а над их изображениями. Весь процесс преобразования Лапласа можно представить себе как перевод с одного языка на другой. Как каждому слову одного языка соответствует определенное слово другого языка, точно так же при преобразовании Лапласа каждой функции пространства оригиналов соответствует определенная функция в пространстве изображений. Роль словаря, необходимого для перевода с одного языка на другой, играет таблица соответствий между оригиналами и изображениями. Два соответствия мы уже получили в п. 1.2, пользуясь непосредственно определением изображения функции. Для того чтобы перевести целое предложение, недостаточно знать перевод отдельных слов; необходимо еще знать, как грамматические образования одного языка передаются на другом языке. В применении к преобразованию Лапласа это

означает следующее: если над функцией, например, в пространстве оригиналов производится какая-либо операция, скажем, дифференцирование или интегрирование, то в пространстве изображений этой операции отвечает вполне определенная другая операция. Или, если в пространстве оригиналов несколько функций комбинируются одна с другой, например перемножаются, то в пространстве изображений такой комбинации отвечает определенная другая комбинация.

Таким образом, необходимо знать не только изображение отдельных функций, но и правила отображения выполняемых над ними операций. Правила, которые ниже будут установлены, иначе свойства преобразования Лапласа, позволят найти изображения для многих функций, не вычисляя каждый раз интеграл Лапласа, что, вообще говоря, весьма затруднительно, и таким образом составить таблицу соответствий между оригиналами и изображениями.

Некоторые основные теоремы операционного исчисления

Названия следующих теорем соответствуют операциям, которые выполняются над функциями – оригиналами и над функциями – изображениями.

1.4.1 Теорема линейности. Для любых действительных или комплексных чисел C_1 и C_2

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \leftarrow C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p), \quad (1.5)$$

то есть линейной комбинации оригиналов соответствует такая же линейная комбинация изображений.

Доказательство. Пусть оригинал $f(t)$ представлен линейной комбинацией функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$: $f(t) = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$. И пусть $f_1(t) \leftarrow \dot{F}_1(p)$, $f_2(t) \leftarrow \dot{F}_2(p)$, а $f(t) \leftarrow \dot{F}(p)$. Тогда по определению изображения найдем

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} [C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)] dt = C_1 \int_0^{\infty} e^{-pt} f_1(t) dt + C_2 \int_0^{\infty} e^{-pt} f_2(t) dt =$$

$= C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p)$, что следует из соответствующего свойства несобственного интеграла.

Заметим, что если интегралы справа абсолютно сходятся в разных полуплоскостях $\operatorname{Re} p > S_1$ и $\operatorname{Re} p > S_2$, то интеграл слева сходится в их общей части.

Разумеется, теорема линейности справедлива для любого конечного числа слагаемых: $\sum_{k=1}^n C_k f_k(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \sum_{k=1}^n C_k F_k(p)$. В частности, при $n=1$ имеем

$$C_1 f_1(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} C_1 F_1(p)$$

ПРИМЕР применения теоремы линейности.

В качестве применения теоремы линейности найдем изображения функций $\sin(yt)$, $\cos(yt)$, $\operatorname{sh}(yt)$, $\operatorname{ch}(yt)$, где y – действительное число.

По формуле Эйлера имеем: $\sin(yt) = \frac{e^{iyt} - e^{-iyt}}{2i}$, $\cos(yt) = \frac{e^{iyt} + e^{-iyt}}{2}$.

Применяя свойство линейности (1.5), где полагаем $C_1 = \frac{1}{2i}$, $C_2 = -\frac{1}{2i}$, и пользуясь формулой - соответствием (1.3), получим

$$\sin(yt) = \frac{1}{2i} e^{iyt} - \frac{1}{2i} e^{-iyt} \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{p - iy} - \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{p + iy} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{p + iy - p + iy}{(p - iy)(p + iy)} = \frac{y}{p^2 + y^2},$$

если $\operatorname{Re} p > 0$.

Аналогично для $\cos(yt)$ полагаем $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{1}{2}$ и находим

$$\cos(yt) = \frac{1}{2} e^{iyt} + \frac{1}{2} e^{-iyt} \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p - iy} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p + iy} = \frac{p}{p^2 + y^2}, \text{ если } \operatorname{Re} p > 0.$$

$$\text{Итак, } \sin(yt) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{y}{p^2 + y^2} \quad (\operatorname{Re} p > 0), \quad \cos(yt) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{p}{p^2 + y^2} \quad (\operatorname{Re} p > 0). \quad (1.6)$$

Исходя из определения гиперболических функций

$$\text{sh}(yt) = \frac{e^{yt} - e^{-yt}}{2}, \quad \text{ch}(yt) = \frac{e^{yt} + e^{-yt}}{2}, \quad (1.7)$$

найдем их изображения, пользуясь соотношением (1.5) и (1.3):

$$\text{sh}(yt) = \frac{1}{2}e^{yt} - \frac{1}{2}e^{-yt} \stackrel{\bullet}{\leftarrow} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p-y} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+y} = \frac{y}{p^2 - y^2}, \quad (1.8)$$

$$\text{ch}(yt) = \frac{1}{2}e^{yt} + \frac{1}{2}e^{-yt} \stackrel{\bullet}{\leftarrow} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p-y} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+y} = \frac{p}{p^2 - y^2}. \quad (1.9)$$

Это справедливо, когда одновременно выполняется $\text{Re } p > |y|$.

1.4.2 Теорема подобия. Если $f(t) \stackrel{\bullet}{\leftarrow} F(p)$, то для любого числа $a > 0$

$$f(at) \stackrel{\bullet}{\leftarrow} \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), \quad (1.10)$$

то есть умножение аргумента оригинала на положительное число a приводит к делению аргумента изображения и самого изображения $F(p)$ на это число.

Доказательство. Найдем изображение функции $f(at)$, то есть

$L\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f(at) dt$. Сделаем замену переменной $at = \tau$, откуда найдем

$$t = \frac{\tau}{a}, \quad dt = \frac{1}{a} d\tau, \quad 0 < \tau < \infty. \quad \text{Тогда} \quad \int_0^\infty e^{-pt} f(at) dt = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-\frac{p}{a}\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Таким образом, $L\{f(at)\} \stackrel{\bullet}{\leftarrow} \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$.

Проиллюстрируем применение этой теоремы на **ПРИМЕРЕ**. Найти изображение функции $\sin(yt)$. Допустим, что нам известно соответствие (1.6)

только для частного случая, когда $y=1$, то есть $\sin t \stackrel{\bullet}{\leftarrow} \frac{1}{p^2 + 1}$ ($\text{Re } p > 0$).

Применив теорему подобия к этому соответствию, найдем

$$\sin yt \overset{\bullet}{\leftarrow} \frac{1}{y} \frac{1}{\left(\frac{p}{y}\right)^2 + 1} = \frac{y}{p^2 + y^2} \quad (\operatorname{Re} p > 0), \text{ что, естественно, совпадает с}$$

полученным ранее результатом.

1.4.3 Теорема сдвига. Если $f(t) \overset{\bullet}{\leftarrow} F(p)$, то для любого числа a – действительного или комплексного имеет место соотношение

$$e^{at} f(t) \overset{\bullet}{\leftarrow} F(p - a) \text{ при } \operatorname{Re}(p - a) > S_0, \quad (1.11)$$

то есть умножение оригинала на функцию e^{at} влечет за собой “сдвиг” аргумента изображения на a .

Доказательство. Если функция $f(t)$ является оригиналом, то при любом a функция $e^{at} f(t)$ также является оригиналом, т.к. из оценки $|f(t)| < M e^{S_0 t}$ вытекает оценка $|e^{at} f(t)| < M e^{(S_0 + \operatorname{Re} a)t}$ при $t > 0$. Значит, показателем роста функции $e^{at} f(t)$ является число $(S_0 + \operatorname{Re} a)$, а ее изображение определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > (S_0 + \operatorname{Re} a)$, иначе, для тех значений p , для которых $\operatorname{Re}(p - a) > S_0$. Найдем изображение этой функции:

$$L\{e^{at} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{at} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} f(t) dt = F(p - a). \text{ Легко заключить, что}$$

справедливо также соотношение

$$e^{-at} f(t) \overset{\bullet}{\leftarrow} F(p + a), \text{ если } \operatorname{Re}(p + a) > S_0. \quad (1.11a)$$

Теорема сдвига дает возможность расширить таблицу соответствий: по известным операционным соотношениям находить изображения тех же функций, умноженных на экспоненту e^{at} или e^{-at} .

На основании формулы (1.9) и полученных ранее соответствий (1.6), найдем

$$e^{at} \sin(yt) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{y}{(p-a)^2 + y^2}, \quad e^{at} \cos(yt) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{p-a}{(p-a)^2 + y^2}. \quad (1.12)$$

Используя (1.11a) и те же соответствия (1.6), найдем изображения затухающих колебаний:

$$e^{-at} \sin(yt) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{y}{(p+a)^2 + y^2}, \quad e^{-at} \cos(yt) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{p-a}{(p+a)^2 + y^2} \quad (a > 0). \quad (1.13)$$

Аналогично из (1.7) и (1.8) получаем

$$e^{at} \operatorname{sh}(yt) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{y}{(p-a)^2 - y^2}, \quad e^{at} \operatorname{ch}(yt) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{p-a}{(p-a)^2 - y^2}, \quad (1.14)$$

$$e^{-at} \operatorname{sh}(yt) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{y}{(p+a)^2 - y^2}, \quad e^{-at} \operatorname{ch}(yt) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{p+a}{(p+a)^2 - y^2}. \quad (1.15)$$

Область комплексной плоскости, в которой имеет место каждое из этих соответствий, оговорена в теореме смещения.

1.4.4 Теорема запаздывания. Если $f(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} F(p)$, то для любого числа $\tau > 0$ имеет место

$$f(t-\tau) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} e^{-p\tau} F(p), \quad (1.16)$$

то есть запаздывание аргумента оригинала на положительную величину τ приводит к умножению изображения оригинала без запаздывания на $e^{-p\tau}$.

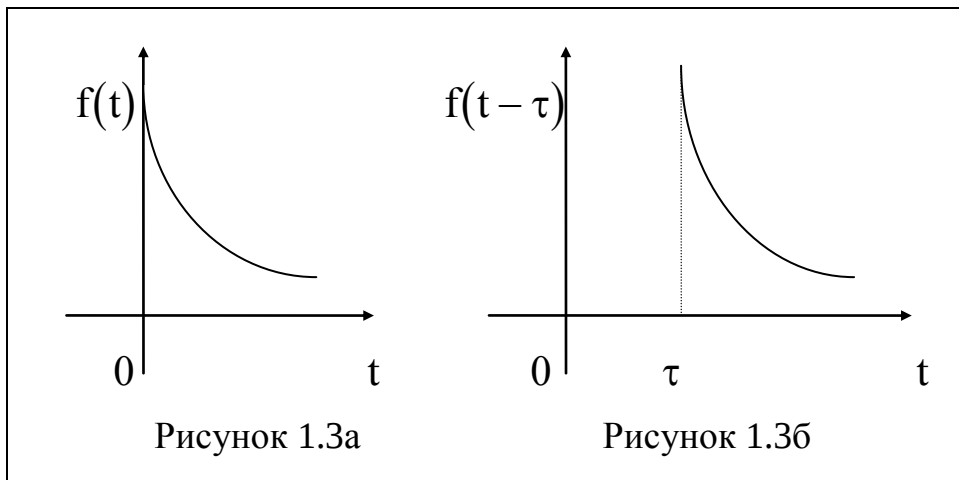
Доказательство. Найдем изображение функции $f(t-\tau)$, исходя из его определения

$$L\{f(t-\tau)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t-\tau) dt = \int_0^{\tau} e^{-pt} f(t-\tau) dt + \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f(t-\tau) dt = \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f(t-\tau) dt,$$

так как $f(t-\tau) = 0$, если $t-\tau < 0$, а значит, для $t \in [0, \tau]$ в силу условия 2^0 для оригинала. В последнем интеграле сделаем замену переменной, положив $t-\tau = u$. Тогда $t = \tau + u$, $dt = du$, $0 < u < \infty$ и

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f(t-\tau) dt = \int_0^{\infty} e^{-p(\tau+u)} f(u) du = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} e^{-pu} f(u) du = e^{-p\tau} F(p).$$

$$\text{Итак, } L\{f(t - \tau)\} \stackrel{\cdot}{\leftarrow} e^{-p\tau} F(p).$$



Обратим внимание на то, что графиком функции $f(t - \tau)$ является, как известно, график функции $f(t)$ (рисунок 1.3а),

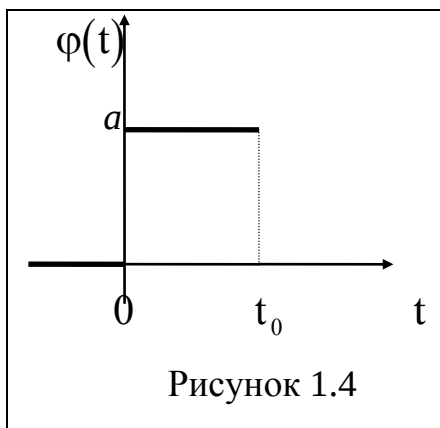
смещенный вдоль оси t вправо на τ единиц (рисунок 1.3б). Этот сдвиг означает, что процесс, описываемый функцией $f(t - \tau)$, начинается с запаздыванием на время τ относительно процесса, описываемого функцией $f(t)$. Ввиду такого физического толкования функций теорема о смещении аргумента оригинала получила название **теорема запаздывания оригинала**.

Учитывая замечание в п. 1.2.1 об использовании функции Хевисайда для записи оригиналов, соотношение (1.16) можно записать в виде

$$\eta(t - \tau)f(t - \tau) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} e^{-p\tau} F(p). \quad (1.16a)$$

Теорема запаздывания является удобным способом для нахождения изображений кусочно-непрерывных функций, которыми, как правило, описываются импульсные процессы. Часто встречающиеся в технических приложениях кусочно-непрерывные и периодические функции имеют различные аналитические выражения в различных промежутках значений аргумента; с помощью функции Хевисайда они могут быть записаны единым аналитическим выражением, после чего успешно применяется теорема запаздывания для получения изображений ступенчатых и периодических функций.

ПРИМЕР. Найти изображение импульса



$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ a, & \text{если } 0 \leq t \leq t_0, \\ 0, & \text{если } t > t_0, \end{cases}$$

действующего в течение промежутка времени t_0 . График его изображен на рисунке 1.4.

Решение. С помощью функции Хевисайда данную функцию можно записать единым

аналитическим выражением $\varphi(t) = a[\eta(t) - \eta(t - t_0)]$. Воспользовавшись

соответствием $\eta(t) \stackrel{\bullet}{\leftarrow} \frac{1}{p}$ и теоремой смещения, найдем $\eta(t - t_0) \stackrel{\bullet}{\leftarrow} \frac{e^{-pt_0}}{p}$. И,

наконец, по свойству линейности получаем

$$\varphi(t) \stackrel{\bullet}{\leftarrow} a \left(\frac{1}{p} - \frac{e^{-pt_0}}{p} \right) = \frac{a}{p} (1 - e^{-pt_0}).$$

1.4.5 Теорема дифференцирования оригинала. Если $f(t)$ непрерывно дифференцируема на $]0; \infty[$ и $f'(t)$ является оригиналом, то из $f(t) \stackrel{\bullet}{\leftarrow} F(p)$ следует

$$f'(t) \stackrel{\bullet}{\leftarrow} pF(p) - f(0), \quad (1.17)$$

то есть дифференцирование оригинала сводится к умножению его изображения на параметр p и вычитанию $f(0)$, где под $f(0)$ следует понимать $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$.

Доказательство. Найдем преобразование Лапласа для $f'(t)$:

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt. \text{ Напоминаем } p = x + iy \text{ - комплексная переменная.}$$

Проинтегрируем по частям, помня, что в точке $t = 0$ функция $f(t)$ может иметь разрыв первого рода. Полагаем $u = e^{-pt}$, $dv = f'(t)dt$, тогда, $du = -pe^{-pt}dt$, $v = f(t)$ и

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = f(t) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = f(t) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + pF(p). \quad \text{Значение первого}$$

слагаемого зависит от поведения $f(t)e^{-pt}$ при $t \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow +0$. В процессе доказательства теоремы существования изображения была получена оценка

$$|f(t)e^{-pt}| < Me^{-(x-S_0)t}, \quad \text{где } S_0 - \text{показатель роста оригинала } f(t). \text{ При условии}$$

$$x > S_0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} Me^{-(x-S_0)t} = 0. \text{ Следовательно, когда } \operatorname{Re} p > S_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-pt} = 0.$$

Оригинал $f(t)$ в точке $t=0$ является либо непрерывной функцией и тогда $f(0)=0$, так как, по определению, $f(t)=0$ при $t < 0$, либо имеет разрыв первого рода и тогда существует конечный правый предел, то есть $\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = f(0) \neq 0$. Следовательно, $\lim_{t \rightarrow +0} f(t)e^{-pt} = f(0)$. Итак, окончательно получаем $L\{f'(t)\} \leftarrow pF(p) - f(0)$. В частности, когда $f(0)=0$,

$$f'(t) \stackrel{\bullet}{\leftarrow} pF(p). \quad (1.17a)$$

Применим правило (1.17) ко второй производной $f''(t) = (f'(t))'$, предполагая, что производные любого порядка оригинала существуют и являются оригиналами.

$$L\{f''(t)\} = pL\{f'(t)\} - f'(0) = p[pF(p) - f(0)] - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0).$$

Так же найдем

$$L\{f'''(t)\} = pL\{f''(t)\} - f''(0) = p[p^2F(p) - pf(0) - f'(0)] - f''(0) =$$

$$= p^3F(p) - p^2f(0) - pf'(0) - f''(0).$$

Применив правило (1.17) $(n-1)$ раз, найдем

$$L\{f^{(n)}(t)\} = L\{f^{(n-1)}(t)\} - f^{(n-1)}(0) = p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - pf^{(n-2)}(0),$$

$$\text{где } f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t), \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Таким образом, получено обобщенное правило соответствия для производной любого порядка оригинала:

$$f^{(n)}(t) \stackrel{\bullet}{\leftarrow} p^n F(p) - p^{n-1}f'(0) - \dots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \quad (1.18)$$

Если $f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0)$, то формула - соответствие (1.18) приобретает простой вид

$$f^{(n)}(t) \stackrel{\bullet}{\leftarrow} p^n F(p). \quad (1.18a)$$

ПРИМЕР. Найти изображение функции $f(t) = \cos at$, если известно $\sin(at) \stackrel{\bullet}{\leftarrow} \frac{a}{p^2 + a^2}$, $\sin 0 = 0$. Используя (1.17a), получим

$$\cos(at) = \frac{1}{a} (\sin(at))' \stackrel{\bullet}{\leftarrow} \frac{1}{a} \cdot p \frac{a}{p^2 + a^2} = \frac{p}{p^2 + a^2}, \text{ что совпадает с полученным ранее результатом (1.7).}$$

Приведем без доказательств важное следствие из теоремы дифференцирования оригинала.

Следствие. $\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0)$, $\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$, если существует предел функции $f(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Это означает, что поведение изображения в бесконечности определяется поведением оригинала в нуле (при $t = 0$), а поведение оригинала в бесконечности (при $t \rightarrow \infty$) - поведением изображения в нуле. Практическое значение этих асимптотических равенств состоит в том, что по поведению изображения для малых и больших значений параметра p можно судить о поведении решения (оригинала) для больших и малых соответственно значений времени.

1.4.6 Теорема интегрирования оригинала. Если $f(t) \stackrel{\bullet}{\leftarrow} F(p)$, то

$$\int_0^t f(t) dt \stackrel{\bullet}{\leftarrow} \frac{F(p)}{p}, \quad (1.19)$$

то есть интегрированию оригинала в пределах от 0 до t соответствует деление изображения на параметр p .

Доказательство. Убедимся прежде всего в том, что функция

$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ является оригиналом (для удобства переменная

интегрирования переобозначена). Выполнимость условий 1^0 и 2^0 для оригинала следует из свойств определенного интеграла. Выполняется и условие 3^0 , т.к.

$$\left| \int_0^t f(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |f(\tau)| d\tau < \int_0^t M e^{S_0 \tau} d\tau = \frac{M}{S_0} (e^{S_0 t} - 1) < M_1 e^{S_0 t}.$$

Пусть $\Phi(p)$ – изображение функции $\varphi(t)$, то есть $\varphi(t) \stackrel{\bullet}{\leftarrow} \Phi(p)$. По теореме

дифференцирования оригинала будем иметь

$$\varphi'(t) = \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right)' \stackrel{\bullet}{\leftarrow} p \Phi(p) - \varphi(0). \text{ Так как } \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right)' = f(t), \text{ а } \varphi(0) = 0, \text{ то}$$

последнее соотношение можно переписать в виде $\varphi'(t) = f(t) \stackrel{\bullet}{\leftarrow} p \Phi(p)$. Но

$f(t) \stackrel{\bullet}{\leftarrow} F(p)$, следовательно, $F(p) = p \Phi(p)$, откуда находим, что $\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$.

$$\text{Итак, } \varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \stackrel{\bullet}{\leftarrow} \frac{F(p)}{p}.$$

ПРИМЕР. Найти оригинал по его изображению $F(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)}$.

Решение. Так как $\frac{1}{p^2 + 1} \stackrel{\bullet}{\leftarrow} \sin t$, то

$$\frac{1}{p(p^2 + 1)} \rightarrow \int_0^t \sin \tau d\tau = -\cos \tau \Big|_0^t = 1 - \cos t.$$

Соответствия (1.17) и (1.19) играют важнейшую роль в операционном исчислении. Из них следует, что сложным действиям анализа - дифференцированию и интегрированию оригиналов - соответствуют элементарные действия соответственно умножения и деления изображения на p . Величину p можно, таким образом, рассматривать как оператор

дифференцирования, а величину $\frac{1}{p}$ – как оператор интегрирования по отрезку $[0; t]$.

1.4.7 Теорема дифференцирования изображений. Если $f(t) \xrightarrow{\cdot} F(p)$, то

$$(-t)f(t) \xrightarrow{\cdot} F'(p), \quad (1.20)$$

то есть дифференцирование изображения сводится к умножению оригинала на $(-t)$.

Доказательство. Запишем изображение для функции $f(t)$:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Так как функция $F(p)$ является аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} p > S_0$, то ее можно дифференцировать по p :

$$F'(p) = \frac{d}{dp} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Перейти к дифференцированию под знаком интеграла правомерно только тогда, когда интеграл по параметру сходится равномерно. Доказано, что интеграл Лапласа сходится равномерно относительно p в полуплоскости $\operatorname{Re} p > S_0$. В силу этого обстоятельства можно записать

$$F'(p) = \int_0^{\infty} \frac{d}{dp} (e^{-pt} f(t)) dt = \int_0^{\infty} -te^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} (-tf(t)) dt.$$

Полученный результат показывает, что $F'(p)$ является изображением функции $(-t)f(t)$, если $\operatorname{Re} p > S_1 > S_0$, где S_1 – показатель роста этой функции.

Применяя свойство (1.20) несколько раз, можно найти оригиналы для производных $F(p)$ высших порядков

$$F''(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} (t^2 f(t)) dt, \quad F'''(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} (-t^3 f(t)) dt \quad \text{и вообще}$$

$F^{(n)}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} ((-t)^n f(t)) dt$. Таким образом, мы пришли к обобщенной

$$\text{формуле } (-t)^n f(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} F^{(n)}(p). \quad (1.20a)$$

Правило дифференцирования изображения (1.20a) может быть весьма эффективно использовано для интегрирования линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Пользуясь теоремой дифференцирования изображения, можно непосредственно найти некоторые интересные операционные соотношения. Например, по известным изображениям функций находить изображения тех же функций, умноженных на t^n , где n — целое положительное число.

ПРИМЕР. Найти изображение для функции $f(t) = t^n$.

Решение. Применяя последовательно (1.20) к известному соотношению

$$\eta(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{1}{p} \text{ или, что то же, } 1 \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{1}{p}, \text{ найдем}$$

$$\begin{array}{lll} -t \stackrel{\cdot}{\leftarrow} -\frac{1}{p^2} & \text{или} & t \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{1}{p^2} \\ -t \cdot t \stackrel{\cdot}{\leftarrow} -\frac{2}{p^3} & \text{или} & t^2 \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{2!}{p^3}, \\ -t \cdot t^2 \stackrel{\cdot}{\leftarrow} -\frac{6}{p^4} & \text{или} & t^3 \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{3!}{p^4} \end{array}$$

$$\text{и вообще } t^n \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (1.21)$$

1.4.8 Теорема интегрирования изображения. Если $f(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} F(p)$ и $\frac{f(t)}{t}$ —

$$\text{оригинал, то } \frac{f(t)}{t} \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \int_p^{\infty} F(p) dp, \quad (1.22)$$

то есть интегрирование изображения в пределах от p до ∞ соответствует делению оригинала на t .

Доказательство. Пусть $\frac{f(t)}{t} \stackrel{\bullet}{\leftarrow} \Phi(p)$. По правилу (1.20)

дифференцирования изображения получим $-t \cdot \frac{f(t)}{t} \stackrel{\bullet}{\leftarrow} \Phi'(p)$, то есть

$f(t) \stackrel{\bullet}{\leftarrow} -\Phi'(p)$. Но, по условию, $f(t) \stackrel{\bullet}{\leftarrow} F(p)$. Следовательно, $F(p) = -\Phi'(p)$.

Проинтегрируем это равенство в пределах от p до q , обозначив переменную интегрирования через z :

$$\int_p^q F(z) dz = - \int_p^q \Phi'(z) dz = \Phi(p) - \Phi(q).$$

Перейдя в последнем равенстве к пределу при $\operatorname{Re} q \rightarrow \infty$ и учитывая, что при этом изображение $\Phi(q) \rightarrow 0$ (см. следствие из теоремы существования изображения), будем иметь $\Phi(p) = \int_p^{\infty} F(z) dz$ или, что то же, $\frac{f(t)}{t} \stackrel{\bullet}{\leftarrow} \int_p^{\infty} F(p) dp$.

ПРИМЕР. Найти изображение функции $\frac{\sin t}{t}$.

Решение. Так как для оригинала $f(t) = \sin t$ изображение имеет вид $\frac{1}{p^2 + 1} = F(p)$, то $\frac{\sin t}{t} \stackrel{\bullet}{\leftarrow} \int_p^{\infty} F(z) dz = \int_p^{\infty} \frac{dz}{z^2 + 1} = \operatorname{arctg} z \Big|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p$.

Свертка функций

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Сверткой* двух функций $f(t)$ и $\varphi(t)$, непрерывных на

$[0; \infty)$, называется интеграл $\int_0^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau$.

Она обозначается символом $f * \varphi$. Итак, по определению

$$f * \varphi = \int_0^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau. \quad (1.23)$$

Из определения свертки как интеграла по параметру t следует, что свертка функций также является функцией, причем непрерывной на отрезке $[0; t]$.

Операцию получения свертки называют **свертыванием**. Операция свертки обладает свойством коммутативности, то есть $f * \varphi = \varphi * f$ иначе

$$\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau = \int_0^t \varphi(\tau)f(t-\tau)d\tau.$$

Примем также без доказательства утверждение, что если $f(t)$ и $\varphi(t)$ – оригиналы, то их свертка является оригиналом.

1.4.9 Теорема свертывания (умножения изображений). Если $f(t) \xleftrightarrow{\cdot} F(p)$

$$\text{и } \varphi(t) \xleftrightarrow{\cdot} \Phi(p), \text{ то } f * \varphi \xleftrightarrow{\cdot} F(p)\Phi(p), \quad (1.24)$$

то есть при свертывании оригиналов их изображения перемножаются.

Доказательство. По определению преобразования Лапласа имеем

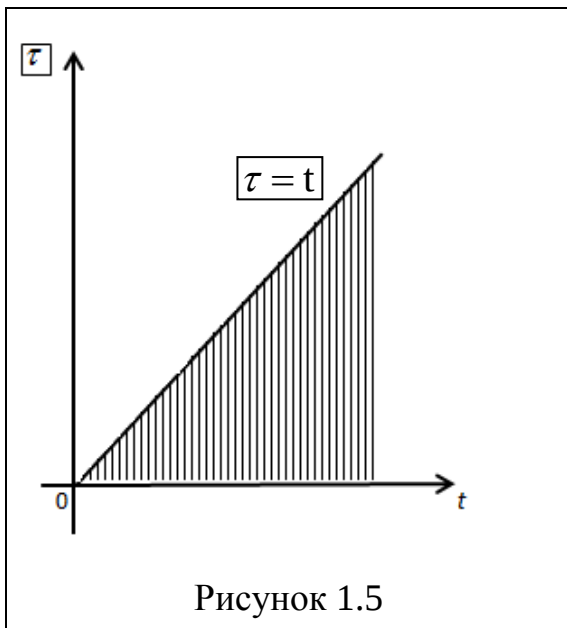


Рисунок 1.5

$$L\{f * \varphi\} = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau \right] e^{-pt} dt.$$

В данном случае интеграл Лапласа представляет собой двукратный интеграл по области D плоскости (t, τ) (рисунок 1.5). В этом интеграле изменим порядок интегрирования. Если в исходном интеграле внешнее интегрирование осуществлялось по переменной t ($0 \leq t < \infty$), а внутреннее – по τ ($0 \leq \tau \leq t$),

то теперь внешнее интегрирование будет осуществляться уже по τ ($0 \leq \tau < \infty$), а внутреннее – по t ($\tau \leq t < \infty$). Итак,

$$\int_0^\infty dt \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)e^{-pt}d\tau = \int_0^\infty d\tau \int_\tau^\infty f(\tau)\varphi(t-\tau)e^{-pt}dt = \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt}\varphi(t-\tau)dt.$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной, положив $t - \tau = u$, тогда $dt = du$, $0 \leq u < \infty$ и

$$\int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} \varphi(t-\tau) dt = \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-p(\tau+u)} \varphi(u) du = \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-p\tau} \cdot e^{-pu} \cdot \varphi(u) du =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-pu} \varphi(u) du = F(p) \cdot \Phi(p).$$

Таким образом мы показали, что $L\{f * \varphi\} = F(p)\Phi(p)$, то есть оригинал, соответствующий произведению двух изображений, равен свертке оригиналов сомножителей.

Проведенный в пункте 1.4 обзор свойств преобразования Лапласа позволяет сформировать таблицу соответствий между оригиналами и их изображениями. В таблицу как приложение к данной работе включены лишь те соответствия, которые здесь выведены или потребуются при решении приведенных примеров и задач. В книгах по операционному исчислению приведены подробные таблицы. В них, заметим, шире представлены свойства преобразования Лапласа и другие вопросы операционного исчисления.

ПРИМЕР. Найти функцию - оригинал по заданному изображению

$$F(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)^2}.$$

Решение. Очевидно, $\frac{p}{(p^2 + 1)^2} = \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{p}{p^2 + 1}$. Зная, что $\sin t \overset{\bullet}{\longleftarrow} \frac{1}{p^2 + 1}$,

$\cos t \overset{\bullet}{\longleftarrow} \frac{p}{p^2 + 1}$, на основании теоремы свертывания запишем

$\sin t * \cos t \overset{\bullet}{\longleftarrow} \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{p}{p^2 + 1}$. Найдем свертку функций $\sin t$ и $\cos t$ по

определению: $\sin t * \cos t = \int_0^t \sin(t-\tau) \cos \tau d\tau$. Для вычисления интеграла

применим тригонометрическую формулу. Если

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)), \text{ то}$$

$\sin(t - \tau) \cdot \cos \tau = \frac{1}{2}(\sin t + \sin(t - 2\tau))$. Вернемся к интегралу:

$$\begin{aligned} \int_0^t \sin(t - \tau) \cos \tau d\tau &= \frac{1}{2} \int_0^t (\sin t + \sin(t - 2\tau)) d\tau = \frac{1}{2} \left(\sin t \int_0^t d\tau + \int_0^t \sin(t - 2\tau) d\tau \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin t \cdot \tau \Big|_0^t + \frac{1}{2} \cos(t - 2\tau) \Big|_0^t \right) = \frac{1}{2} t \cdot \sin t. \end{aligned}$$

Таким образом $\frac{1}{2} t \sin t \stackrel{\bullet}{\leftarrow} \frac{p}{(p^2 + 1)^2}$.

1.4.10 Теорема. (Опережение оригинала). Если $f(t) \stackrel{\bullet}{\leftarrow} F(p)$, то

$$f(t + \tau) \stackrel{\bullet}{\leftarrow} e^{p\tau} \left[F(p) - \int_0^\tau f(u) e^{-pu} du \right], \quad (1.25)$$

где $\tau > 0$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} f(t + \tau) \stackrel{\bullet}{\leftarrow} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t + \tau) dt &= \left| \begin{array}{l} t + \tau = u, dt = du \\ u_H = \tau, u_B = +\infty \end{array} \right| = \\ &= \int_\tau^{+\infty} e^{-p(u-\tau)} f(u) du = e^{p\tau} \int_\tau^{+\infty} e^{-pu} f(u) du = \\ &= e^{p\tau} \left(\int_0^\tau e^{-pu} f(u) du + \int_\tau^{+\infty} e^{-pu} f(u) du - \int_0^\tau e^{-pu} f(u) du \right) = \\ &= e^{p\tau} \left(\int_0^{+\infty} e^{-pu} f(u) du - \int_0^\tau e^{-pu} f(u) du \right) = e^{p\tau} \left(F(p) - \int_0^\tau e^{-pu} f(u) du \right). \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР. Найти изображения функций $\sin(t + \tau)$, $\cos(t + \tau)$, $\tau > 0$.

Решение. Если $\sin t \stackrel{\bullet}{\leftarrow} \frac{1}{p^2 + 1}$, тогда согласно теореме

$$\sin(t + \tau) \stackrel{\bullet}{\leftarrow} e^{p\tau} \left(\frac{1}{p^2 + 1} - \int_0^\tau \sin u e^{-pu} du \right) =$$

$$= \left| \int_0^{\tau} \sin u e^{-pu} du = \frac{-p \sin u - \cos u}{p^2 + 1} e^{-pu} \right|_0^{\tau} = \frac{-p \sin \tau - \cos \tau}{p^2 + 1} \frac{1}{p^2 + 1} =$$

$$= \frac{p \sin \tau + \cos \tau}{p^2 + 1}.$$

Поступая аналогично, имеем $\cos t \overset{\cdot}{\leftarrow} \frac{p}{p^2 + 1},$

$$\cos(t + \tau) \overset{\cdot}{\leftarrow} e^{p\tau} \left(\frac{p}{p^2 + 1} - \int_0^{\tau} \cos u e^{-pu} du \right) =$$

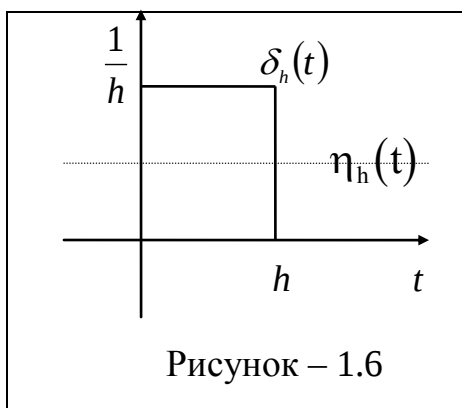
$$= \left| \int_0^{\tau} \cos u e^{-pu} du = \frac{-p \cos u + \sin u}{p^2 + 1} \cdot e^{-pu} \right|_0^{\tau} = \frac{-p \cos \tau + \sin \tau}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2 + 1} =$$

$$= \frac{p \cos \tau - \sin \tau}{p^2 + 1}.$$

Ответ: $\frac{p \sin \tau + \cos \tau}{p^2 + 1}; \frac{p \cos \tau - \sin \tau}{p^2 + 1}.$ Пример решен.

1.5 ИМПУЛЬСНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ИЗОБРАЖЕНИЕ

Пример изображения импульса $\varphi(t)$ и нахождения функции – изображения $F(p) = L\{\varphi(t)\}$ был приведен как иллюстрация к теореме 1.4.4. Рассмотрим сейчас подробнее импульсные функции.



Импульсные функции были введены Дираком и оказались полезными в ряде прикладных задач, в которых приходится иметь дело с величинами, имеющими характер мгновенного толчка.

Рассмотрим функцию $\delta_h(t)$, график которой изображен на рисунок 1.6

$$\delta_h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \quad t > h, \\ \frac{1}{h}, & 0 < t < h. \end{cases}$$

Эта функция представляет собой величину, которая действует лишь на интервале $(0;h)$, где имеет постоянное значение $\frac{1}{h}$, суммарный эффект ее

действия равен
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_h(t) dt = \int_0^h \frac{dt}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h dt = 1.$$

Предположим, что $h \rightarrow 0$; функция $\delta_h(t)$ при этом не имеет предела, но вводят условную функцию $\delta(t)$, которую считают пределом такой функции,

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta(t) - \eta(t-h)}{h}, \quad (1.26)$$

и называют импульсной функцией нулевого порядка или, короче, δ – функцией Дирака. Импульсная функция $\delta(t)$ равна нулю всюду, кроме точки $t=0$, где она равна ∞ , и тем не менее для нее считается справедливым соотношение $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$, которое является предельным для такого же соотношения для функции $\delta_h(t)$.

Таким образом, δ – функция представляет собой условное сокращенное обозначение для вполне определенного предельного процесса, который часто рассматривается в физике: бесконечно большая величина, действующая в бесконечно малый промежуток времени с суммарным эффектом, равным 1.

Из равенства (1.26) получаем $\delta(t) = \eta'(t)$.

Аналогично вводятся импульсные функции высших порядков. Рассмотрим функцию

$$\delta_h^{(1)}(t) = \frac{1}{h^2} (\eta(t) - 2\eta(t-h) + \eta(t-2h)). \quad \text{Ее предел при } h \rightarrow 0$$

$\delta_1(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h^{(1)}(t)$ называется импульсной функцией первого порядка. Из

равенства
$$\delta_h^{(1)}(t) = \frac{1}{h^2} (\eta(t) - \eta(t-h) + \eta(t-2h) - \eta(t-h)) =$$

$$= \frac{1}{h} \cdot \frac{\eta(t) - \eta(t-h)}{h} - \frac{\eta(t) - \eta(t-2h)}{h} = \frac{\eta'(t) - \eta'(t-h)}{h} \text{ следует, что при } h \rightarrow 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \delta_h^{(1)}(t) = \eta''(t).$$

$\delta_1(t) = \eta''(t)$ называется импульсной функцией первого порядка.

Аналогично определяется импульсная функция n -го порядка

$$\delta_n(t) = \frac{d^{n+1} \eta(t)}{dt^{n+1}}$$

Для любой функции $\varphi(t)$, которая является оригиналом, по теореме о среднем получаем

$$\int_0^{\infty} \varphi(t) \cdot \delta_h(t) dt = \frac{1}{h} \int_0^h \varphi(t) dt = \varphi(t^*), \text{ где } 0 < t^* < h. \text{ Переходя к пределу при}$$

$$h \rightarrow 0, \text{ получаем } \int_0^{\infty} \varphi(t) \delta(t) dt = \varphi(0).$$

В соответствии с этим получаем изображение δ -функции Дирака:

$$\delta(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1.$$

На основании последнего соотношения и теоремы запаздывания получаем

$$\delta(t - \tau) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} e^{-p\tau}.$$

Найдем изображение импульсной функции первого порядка. Будем считать, что ее изображение является пределом изображений

$$\delta_h^{(1)}(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{1 - 2\bar{e}^{hp} + e^{-2hp}}{h^2 p}, \text{ то есть. } \delta_1(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \bar{e}^{hp} + \bar{e}^{ghp}}{h^2 p} = p.$$

Аналогично можно получить изображение импульсной функции n -го

$$\text{порядка } \delta_n(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} p^n.$$

Функции $1, p, p^2, \dots, p^n$ можно считать изображениями лишь в совершенно условном смысле, так как они не стремятся к нулю при $p \rightarrow \infty$.

1.6 ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

При изучении свойств преобразования Лапласа рассматривалась в основном прямая задача: по заданному оригиналу $f(t)$ найти его изображение $F(p)$. Вместе с тем было показано, как в некоторых случаях с помощью приведенных теорем и выведенных формул - соответствий может быть решена обратная задача: отыскать оригинал $f(t)$ по заданному изображению $F(p)$. Однако многие задачи приводят к изображениям, от которых с помощью таблицы соответствий и свойств не удастся перейти к оригиналу. По этой причине в настоящем параграфе приведем формулу решения обратной задачи в общем виде, а также метод отыскания оригинала, обладающие достаточной общностью.

1.6.1 Теорема обращения преобразования Лапласа

Приведем формулу, позволяющую по заданному изображению находить оригинал.

Теорема обращения. Если функция $f(t)$ – оригинал, а $F(p)$ ее изображение, то в любой точке t непрерывности функции $f(t)$ имеет место формула обращения

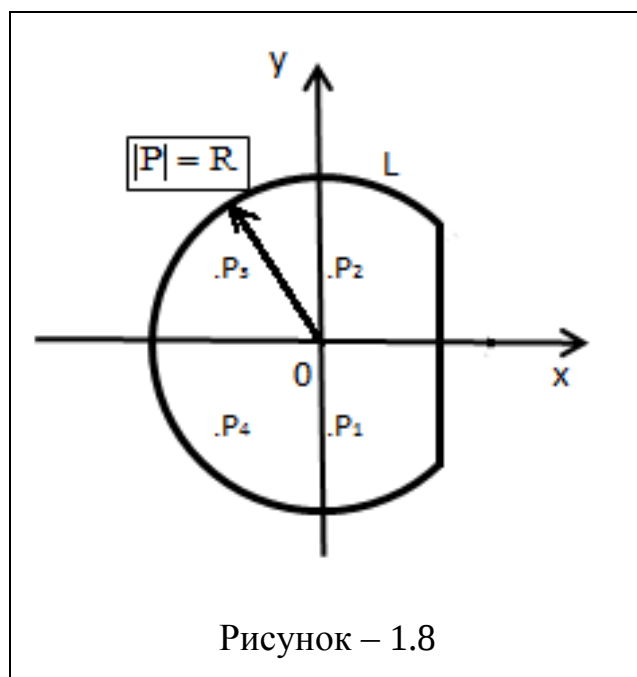
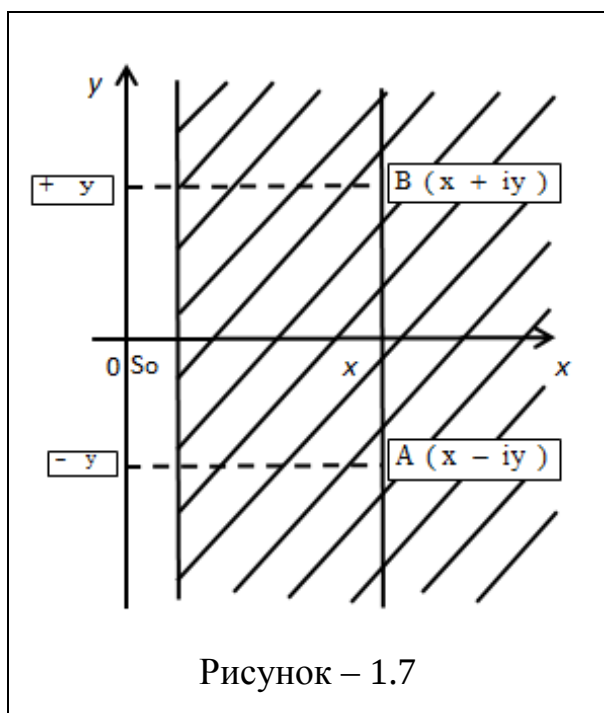
$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad (1.27)$$

где $\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{x-iy}^{x+iy}$ и x – любое действительное число больше показателя роста $f(t)$.

Комплексный интеграл в (1.27), осуществляющий обратное преобразование Лапласа, вычисляется вдоль любой вертикальной прямой $\operatorname{Re} p = x$, лежащей в полуплоскости $\operatorname{Re} p > S_0$ сходимости интеграла Лапласа от функции $f(t)$ (рисунок 1.7).

Соотношение (1.27), называемое формулой Римана - Меллина, решает в общем случае задачу отыскания оригинала $f(t)$ по заданному его изображению $F(p)$.

Вычисление интеграла в формуле (1.27) для произвольных функций $F(p)$ представляет большие трудности. При практическом использовании формулы Римана - Меллина путь интегрирования вдоль бесконечной прямой заменяется замкнутым контуром L . Тогда оказывается возможным вычислить интеграл в правой части формулы (1.27) с помощью основной теоремы Коши о вычетах. (Прямая $\operatorname{Re} p = x$ замыкается полуокружностью (рисунок 1.8) с центром в начале координат, радиус R которой растет до бесконечности, причем все особые точки функции $F(p)$ остаются внутри полуокружности).



Если функция $F(p)$ аналитична во всей комплексной плоскости, за исключением конечного (или счетного) числа изолированных особых точек $p_1, p_2, \dots, p_n$, лежащих левее прямой $\operatorname{Re} p = x$, кроме того, $\lim_{|p| \rightarrow \infty} F(p) = 0$, а $|e^{pt}| \leq e^{S_0 t}$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_L e^{pt} F(p) dp = \sum_{k=1}^{n(\infty)} \operatorname{Res}_{p=p_k} [e^{pt} F(p)], \quad (1.28)$$

где $\operatorname{Res}_{p=p_k} [e^{pt} F(p)]$ обозначает вычет функции $e^{pt} F(p)$ относительно особой

точки p_k .

ПРИМЕР. Найти по формуле обращения оригинал функции

$$F(p) = \frac{p^2 - p + 2}{p^3 - p^2 - 6p}.$$

Решение. По формуле (1.27) имеем $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{p^2 - p + 2}{p^3 - p^2 - 6p} e^{pt} dp$. Данная

функция $F(p) = \frac{p^2 - p + 2}{p^3 - p^2 - 6p}$ аналитична всюду, кроме точек $p_1 = 0$,

$p_2 = -2$, $p_3 = 3$, которые являются для нее простыми полюсами. Очевидно, что

$\lim_{|p| \rightarrow \infty} F(p) = 0$. Поэтому для вычисления интеграла можно воспользоваться

формулой (1.28). Найдем вычеты подынтегральной функции относительно

простых полюсов по известной формуле $\operatorname{Res}_{p=p_k} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}$, где

$F_1(p) = (p^2 - p + 2)e^{pt}$, $F_2(p) = p^3 - p^2 - 6p$. Будем иметь

$$\operatorname{Res}_{p=0} \{F(p)e^{pt}\} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}, \quad \operatorname{Res}_{p=-2} \{F(p)e^{pt}\} = \frac{4e^{-2t}}{5}, \quad \operatorname{Res}_{p=3} F(p)e^{pt} = \frac{8e^{3t}}{15}.$$

Следовательно, искомый оригинал равен сумме найденных вычетов:

$$f(t) = -\frac{1}{3} + \frac{4}{5}e^{-2t} + \frac{8}{15}e^{3t}.$$

1.6.2 Частные методы определения оригинала по изображению

В простейших случаях при нахождении оригинала можно не прибегать к формуле обращения (1.27), а, как уже отмечалось, пользоваться таблицей соответствий между оригиналами и изображениями и основными свойствами преобразования Лапласа. Проиллюстрируем некоторые приемы на примерах.

ПРИМЕР. Найти оригиналы по данным изображениям:

$$\text{а) } F(p) = \frac{p+8}{p^2+4p+5}, \quad \text{б) } F(p) = \frac{e^{-2p}}{p(p+1)}.$$

Решение. а) Представим $F(p)$ в виде $F(p) = \frac{(p+2)+6}{p^2+4p+4+1} =$

$$= \frac{p+2}{(p+2)^2+1} + \frac{6}{(p+2)^2+1}. \text{ Используя свойство линейности и соответствия (10),}$$

(9) из таблицы оригиналов и их изображений, найдем $f(t) = e^{-2t} \cos t + 6e^{-2t} \sin t;$

б) Заметим, что $\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$. Согласно свойству линейности из

таблицы получим, что $\frac{1}{p(p+1)} \xrightarrow{\bullet} 1 - e^{-t}$. Тогда для заданного изображения $F(p)$

оригинал может быть найден с помощью теоремы запаздывания. Полагая в

(1.16) $\tau = 2$, получим $\frac{e^{-2p}}{p(p+1)} \xrightarrow{\bullet} 1 - e^{-(t-2)}$. Пример решен.

Если изображение $F(p)$ представляет собой правильную рациональную

дробь $\frac{F_1(p)}{F_2(p)}$, где $F_1(p)$ и $F_2(p)$ – многочлены от p , причем степень числителя

меньше степени знаменателя, то при нахождении оригинала поступают следующим образом: разлагают дробь на сумму простейших дробей вида

$$\frac{A}{p-a}, \quad \frac{A}{(p-a)^k}, \quad \frac{Mp+N}{p^2+ap+b}, \quad \frac{Mp+N}{(p^2+ap+b)^k}, \text{ находят оригинал для}$$

каждого слагаемого и, суммируя, получают оригинал данной функции.

ПРИМЕР. Найти оригинал $f(t)$ для изображения $F(p) = \frac{-4p^2+14p+31}{(p+2)^2(p^2+9)}$.

Решение. Представим правильную рациональную дробь $F(p)$ в виде

суммы простейших дробей
$$\frac{-4p^2+14p+31}{(p+2)^2(p^2+9)} = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{(p+2)^2} + \frac{Cp+D}{p^2+9}.$$

Чтобы найти коэффициенты A, B, C, D , приведем дроби к общему знаменателю, в результате чего будем иметь

$$-4p^2 + 14p + 31 = A(p+2)(p^2+9) + B(p^2+9) + (Cp+D)(p+2)^2. \quad \text{Полагая}$$

$p = -2$, найдем, что $B = -1$. Далее, чтобы найти остальные коэффициенты, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях p , получим систему

$$\begin{array}{l|l} \text{уравнений} & \begin{array}{l} p^3 \quad A + C = 0 \\ p^2 \quad 2A + 4C + D = -4 \\ p \quad 9A + 4C + 4D = 14, \end{array} \end{array} \quad \text{откуда найдем } A = 2, C = -2, D = 1.$$

Следовательно,
$$F(p) = \frac{2}{p+2} - \frac{1}{(p+2)^2} - 2 \frac{p}{p^2+9} + \frac{1}{p^2+9}.$$
 На основании

свойства линейности и соответствий из таблицы получаем

$$f(t) = 2e^{-2t} - te^{-2t} - 2 \cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t. \text{ Пример решен.}$$

1.6.3 Теорема разложения

Рассмотренный прием отыскания оригинала путем разложения дробно-рациональной функции $F(p)$ на сумму простейших дробей хорош своей общностью, однако часто приводит к громоздким выкладкам при определении коэффициентов. В таких случаях более прост переход от изображения к оригиналу при помощи теоремы разложения, которая носит название второй теоремы разложения Хевисайда.

Теорема разложения. Пусть изображение представляет правильную рациональную дробь:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n}. \quad (1.29)$$

При разложении $F(p)$ на простейшие дроби могут иметь место два случая:

I) Корни знаменателя $F_2(p)$ простые; II) Корни знаменателя кратные.

Рассмотрим оба случая.

И) Знаменатель дроби (1.29) имеет только простые корни. Обозначим n простых корней знаменателя $F_2(p)$ через $p_1, p_2, \dots, p_n$. Тогда имеет место разложение $F_2(p) = a_0(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)$ и $F(p)$ можно представить в виде суммы простейших дробей

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{C_1}{p-p_1} + \frac{C_2}{p-p_2} + \dots + \frac{C_n}{p-p_n} = \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{p-p_k}. \quad (1.30)$$

Найдем коэффициенты C_k . Для определения C_1 умножим почленно это равенство на $p-p_1$ и затем перейдем к пределу при $p \rightarrow p_1$.

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)}(p-p_1) = C_1 + (p-p_1) \cdot \left[\frac{C_2}{p-p_2} + \frac{C_3}{p-p_3} + \dots + \frac{C_n}{p-p_n} \right].$$

При $p \rightarrow p_1$ второе слагаемое в правой части равенства стремится к нулю, а его левая часть становится неопределенностью вида $\frac{0}{0}$. Тогда

$$C_1 = \lim_{p \rightarrow p_1} \frac{F_1(p)(p-p_1)}{F_2(p)} = \lim_{p \rightarrow p_1} \frac{F_1(p)}{\frac{F_2(p) - F_2(p_1)}{p-p_1}} = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)}, \quad \text{заметим, что}$$

$$F_2(p_1) = 0.$$

Аналогично определяется любой коэффициент C_k .

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)}(p-p_k) = C_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{C_i(p-p_k)}{p-p_i}, \quad \text{откуда}$$

$$C_k = \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{F_1(p)(p-p_k)}{F_2(p)} = \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{F_1(p)}{\frac{F_2(p) - F_2(p_k)}{p-p_k}} = \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}.$$

Подставляя C_k в равенство (1.30), получаем

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \cdot \frac{1}{p-p_k}.$$

Воспользовавшись свойством линейности и соотношением $\frac{1}{p-p_k} \xrightarrow{\bullet} e^{p_k t}$,

получим формулу для искомого оригинала

$$f(t) = \sum \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \cdot e^{p_k t}. \quad (1.31)$$

Формула (1.31) представляет собой общую формулу теоремы разложения для случая простых корней знаменателя изображения.

Частный случай. В частном случае, когда один из корней знаменателя $F_2(p)$ равен нулю, формуле (1.31) можно придать несколько другой вид. Пусть

$$F_2(p) = p\Phi(p). \quad (1.32)$$

Обозначим корень, равный 0, через p_1 . Тогда корни $p_2, p_3, \dots, p_n$ определяются из уравнения $\Phi(p) = 0$. Продифференцируем равенство (1.32) по p и найдем $F_2'(p_k)$:

$$F_2'(p_k) = [\Phi(p) + p\Phi'(p)]_{p=p_k} = \Phi(p_k) + p_k \Phi'(p_k) = \begin{cases} \Phi(0) \cdot \text{при } k=1, \\ p_k \Phi'(p_k) \cdot \text{при } k=2, 3, \dots, n \end{cases}$$

Учитывая это, из (1.31) получим

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{p\Phi(p)} \xrightarrow{\bullet} f(t) = \frac{F_1(0)}{\Phi(0)} + \sum_{k=2}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k \Phi'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (1.33)$$

Для удобства принимаем, что многочлен $\Phi(p)$ имеет степень n (а не $n-1$), тогда корни его p_k будут нумероваться от 1 до n . И поэтому формула (1.33) переписывается в виде

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{p\Phi(p)} \xrightarrow{\bullet} f(t) = \frac{F_1(0)}{\Phi(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k \Phi'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (1.34)$$

Примечание. Простые корни p_k знаменателя $F_2(p)$ дроби $f(p)$ являются ее простыми полюсами. Используя формулу для вычисления вычетов функции $F(p)e^{pt}$ относительно простых полюсов, формуле разложения (1.31) можно придать вид $F(p) \xrightarrow{\bullet} f(t) = \sum_{k=1}^n \text{Res}[F(p)e^{pt}]$, что совпадает с общим результатом (1.28).

Отметим, что формулы разложения (1.31), (1.34) иногда оказываются применимыми и в том случае, когда изображение $F(p)$ имеет бесконечное число полюсов.

II) Знаменатель дроби (1.29) имеет кратные корни.

Пусть числа $p_1, p_2, \dots, p_\ell$ являются корнями кратности $r_1, r_2, \dots, r_\ell$ соответственно. Причем $r_1 + r_2 + \dots + r_\ell = n$. Тогда

$$F_2(p) = a_0 (p - p_1)^{r_1} \cdot (p - p_2)^{r_2} \cdot \dots \cdot (p - p_\ell)^{r_\ell}.$$

Ввиду громоздкости процедуры определения коэффициентов разложения $\frac{F_1(p)}{F_2(p)}$ на простейшие дроби в данном случае для отыскания оригинала $f(t)$ будем исходить из формулы (1.28).

Кратные корни $p_1, p_2, \dots, p_\ell$ знаменателя $F_2(p)$ являются полюсами порядка $r_1, r_2, \dots, r_\ell$ дроби $F(p)$. Воспользовавшись формулой для вычета функции $F(p)e^{pt}$ относительно полюса порядка r_k , из формулы (1.28) получим для функции $F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$ оригинал $f(t)$ будет вычислен следующим образом:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\ell} \operatorname{Res} \left[\frac{F_1(p)}{F_2(p)} e^{pt} \right] = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{(r_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{r_k-1}}{dp^{r_k-1}} \left[(p - p_k)^{r_k} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} e^{pt} \right] \quad (1.35)$$

В частности, когда все полюсы простые ($r_k = 1, k = \overline{1, n}$), формула (1.35) принимает вид (1.34).

Итак, если изображение $F(p)$ является дробно-рациональной функцией от p и $p_1, p_2, \dots, p_n$ — ее полюсы (простые или кратные), то соответствующий оригинал $f(t)$ определяется формулой (1.35).

При практическом использовании формулы (1.35) полезно учитывать, что знаменатель $F_2(p)$ содержит множитель $(p - p_k)^{r_k}$ и поэтому может быть записан в виде $F_2(p) = (p - p_k)^{r_k} \Phi(p)$, где $\Phi(p_k) \neq 0$. Тогда

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(r_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{r_k-1}}{dp^{r_k-1}} \left[\frac{F_1(p)e^{pt}}{\Phi(p)} \right]. \quad (1.36)$$

Замечание. Если дробь неправильная ($m \geq n$), то $F(p)$ не стремится к нулю при $p \rightarrow \infty$ и, следовательно, $F(p)$ не может быть изображением.

ПРИМЕР. По теореме разложения найти оригинал функции $F(p)$:

$$\text{а) } F(p) = \frac{p^2}{(p-3)(p^2+4)}, \quad \text{б) } F(p) = \frac{p+2}{(p-1)^2 p^3}.$$

Решение. а) по условию, $F_1(p) = p^2$, $F_2(p) = (p-3)(p^2+4) = (p-3) \cdot (p-2i) \cdot (p+2i)$. Знаменатель $F_2(p)$ имеет простые корни: $p_1 = 3$, $p_2 = 2i$, $p_3 = -2i$. Поэтому воспользуемся формулой (1.31). Тогда

$$f(t) = \sum_{k=1}^3 \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}.$$

$$\text{Здесь } F_1(p_1) = 9, \quad F_1(p_2) = -4, \quad F_1(p_3) = -4,$$

$$F_2'(p) = (p^3 - 3p^2 + 4p - 12)' = 3p^2 - 6p + 4, \quad F_2'(p_1) = 13, \quad F_2'(p_2) = -8 - 12i, \\ F_2'(p_3) = -8 + 12i.$$

Следовательно,

$$f(t) = \frac{9e^{3t}}{13} + \frac{e^{2it}}{2+3i} + \frac{e^{-2it}}{2-3i} = \frac{9}{13} e^{3t} + \frac{2-3i}{13} e^{2it} + \frac{2+3i}{13} e^{-2it} = \\ = \frac{9}{13} e^{3t} + \frac{4}{13} \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} - \frac{6i}{13} \frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i} = \frac{9}{13} e^{3t} + \frac{2}{13} (2 \cos 2t + 3 \sin 2t).$$

б) Здесь $F_1(p) = p+2$, $F_2(p) = (p-1)^2 p^3$. Функция $F(p)$ имеет два полюса: $p_1 = 1$ — полюс 2-го порядка, $p_2 = 0$ — полюс 3-го порядка. По формуле (1.35) находим

$$f(t) = \lim_{p \rightarrow 1} \frac{d}{dp} \left[(p-1)^2 \frac{p+2}{(p-1)^2 p^3} e^{pt} \right] + \frac{1}{2!} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^2}{dp^2} \left[p^3 \frac{p+2}{(p-1)^2 p^3} e^{pt} \right]. \quad \text{Чтобы}$$

вычислить первое слагаемое, необходимо сначала найти производную, а затем перейти к пределу при $p \rightarrow 1$.

$$\lim_{p \rightarrow 1} \frac{d}{dp} [p^{-3}(p+2)e^{pt}] = \lim_{p \rightarrow 1} [(-2p^{-3} - 6p^{-4})e^{pt} + tp^{-3}(p+2)e^{pt}] = e^t(-8+3t).$$

Для второго слагаемого найдем производную первого порядка от выражения, стоящего в скобках:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \left[\frac{p+2}{(p-1)^2} e^{pt} \right] &= -\frac{2}{(p-1)^3} (p+2)e^{pt} + \frac{1}{(p-1)^2} e^{pt} + \frac{t(p+2)}{(p-1)^2} e^{pt} = \\ &= \frac{t(p^2+p-2)-p-5}{(p-1)^3} e^{pt}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \frac{1}{2!} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^2}{dp^2} \left[\frac{p+2}{(p-1)^2} e^{pt} \right] &= \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} \left[\frac{t(p^2+p-2)-p-5}{(p-1)^3} e^{pt} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{(t(2p+1)-1)(p-1)^3 - 3(p-1)^2 [t(p^2+p-2)-p-5]}{(p-1)^6} e^{pt} + \right. \\ &\quad \left. + t \frac{t(p^2+p-2)-p-5}{(p-1)^3} e^{pt} \right] = t^2 + 5t + 8. \end{aligned}$$

Итак, $f(t) = e^t(-8+3t) + t^2 + 5t + 8$.

1.7 ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Операционное исчисление можно рассматривать как своеобразный и эффективный метод интегрирования линейных дифференциальных уравнений и их систем, а также некоторых типов линейных дифференциальных уравнений в частных производных.

1.7.1 Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 x(t) = f(t), \quad (1.37)$$

где a_i — действительные числа. Требуется найти функцию $x(t)$, которая является решением этого уравнения для $t \geq 0$. Кроме того, это решение должно удовлетворять начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \quad (1.38)$$

Иначе говоря, требуется решить задачу Коши.

Предположим, что правая часть $f(t)$ уравнения (1.37) и искомая функция $x(t)$ вместе со своими производными до n -го порядка включительно являются оригиналами. Так как функция $x(t)$ является решением уравнения (1.37), удовлетворяющим (1.38), то после подстановки этой функции в (1.37) мы получим тождество. Значит, линейная комбинация функций, стоящих в левой части (1.37), и функция $f(t)$ имеют одно и то же изображение Лапласа. Поэтому имеет место равенство

$$L\left\{\sum_{k=0}^n a_k x^{(k)}(t)\right\} = L\{f(t)\}.$$

В силу свойства линейности изображения запишем

$$a_n L\{x^{(n)}(t)\} + a_{n-1} L\{x^{(n-1)}(t)\} + \dots + a_0 L\{x(t)\} = L\{f(t)\}. \quad (1.39)$$

$$\text{Пусть } x(t) \xleftrightarrow{\cdot} X(p) \text{ и } f(t) \xleftrightarrow{\cdot} F(p). \quad (1.40)$$

По теореме о дифференцировании оригинала с учетом начальных условий (1.38) будем иметь

$$\begin{aligned} x'(t) &\xleftrightarrow{\cdot} pX(p) - x_0, \\ x''(t) &\xleftrightarrow{\cdot} p^2X(p) - px_0 - x'_0, \\ &\dots\dots\dots \\ x^{(n)}(t) &\xleftrightarrow{\cdot} p^nX(p) - p^{n-1}x_0 - p^{n-2}x'_0 - \dots - x_0^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Подставляя в равенство (1.39) вместо изображений функций $f(t)$, $x(t)$ и ее производных выражения (1.40) и (1.41), получим

$$\begin{aligned} a_n [p^n X(p) - p^{n-1}x_0 - p^{n-2}x'_0 - \dots - x_0^{(n-1)}] + a_{n-1} [p^{n-1}X(p) - p^{n-2}x_0 - \dots - x_0^{(n-2)}] + \\ + \dots + a_1 [pX(p) - x_0] + a_0 X(p) = F(p). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Последнее уравнение, а также (1.39) называют **уравнением в изображениях** или **операторным уравнением**. Операторное уравнение для

данного дифференциального уравнения (1.37) является алгебраическим уравнением первой степени относительно изображения $X(p)$.

Перепишем уравнение (1.42) так:

$$X(p)[a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0] = F(p) + a_n [p^{n-1} x_0 + p^{n-2} x'_0 + \dots + x_0^{(n-1)}] + a_{n-1} [p^{n-2} x_0 + p^{n-3} x'_0 + \dots + x_0^{(n-2)}] + \dots + a_2 [p x_0 + x'_0] + a_1 x_0,$$

откуда найдем изображение

$$X(p) = \frac{F(p) + \Phi_{n-1}(p)}{R_n(p)}, \quad (1.43)$$

где $R_n(p)$ и $\Phi_{n-1}(p)$ – многочлены от p соответственно степеней n и $n-1$.

$$R_n(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0,$$

$$\Phi_{n-1}(p) = a_n (p^{n-1} x_0 + p^{n-2} x'_0 + \dots + x_0^{(n-1)}) + \dots + a_2 (p x_0 + x'_0) + a_1 x_0.$$

Если, в частности, начальные условия нулевые, то формула (1.43) упростится:

$$X(p) = \frac{F(p)}{R_n(p)}. \quad (1.43a)$$

Теперь по найденному изображению $X(p)$ отыскиваем оригинал $x(t)$ (или непосредственно по таблице или по теореме обращения). В силу теоремы единственности оригинал $x(t)$ будет искомым решением задачи Коши.

ПРИМЕР. Найти решение уравнения $x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = t^3 e^{-2t}$ при начальных условиях: $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

Решение. Переходим к уравнению в изображениях, полагая, что $x(t) \xleftrightarrow{\cdot} X(p)$. Найдем изображения для $x'(t)$ и $x''(t)$:

$$x'(t) \xleftrightarrow{\cdot} pX(p) - 1, \quad x''(t) \xleftrightarrow{\cdot} p^2 X(p) - p - 2.$$

Из соответствия $t^3 \xleftrightarrow{\cdot} \frac{3!}{p^4}$ (см. в таблице соответствий), пользуясь

теоремой смещения, найдем изображение правой части уравнения

$t^3 e^{-2t} \xrightarrow{\bullet} \frac{3!}{(p+2)^4}$. Тогда операторное уравнение запишется в виде

$$p^2 X(p) - p - 2 + 4(pX(p) - 1) + 4X(p) = \frac{3!}{(p+2)^4}$$

$$\text{или } X(p)(p^2 + 4p + 4) - (p + 6) = \frac{3!}{(p+2)^4},$$

$$\text{откуда } X(p) = \frac{3!}{(p+2)^6} + \frac{p+6}{(p+2)^2} = \frac{3!}{(p+2)^6} + \frac{1}{p+2} + \frac{4}{(p+2)^2}.$$

С помощью таблицы соответствий восстанавливаем оригиналы для каждого слагаемого:

$$\frac{3!}{(p+2)^6} = \frac{3!}{5!} \frac{5!}{(p+2)^6} \xrightarrow{\bullet} \frac{3!}{5!} t^5 e^{-2t}; \quad \frac{1}{p+2} \xrightarrow{\bullet} e^{-2t}; \quad \frac{4}{(p+2)^2} \xrightarrow{\bullet} 4te^{-2t}.$$

$$\text{Следовательно, } x(t) = e^{-2t} \left(1 + 4t + \frac{1}{20} t^5 \right). \text{ Пример решен.}$$

Обсудим подробнее преимущества операционного метода интегрирования дифференциальных уравнений. При решении задачи Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения n -го порядка обычным путем, рассмотренным в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, необходимо сначала найти общее решение, которое зависит от n произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$. Определение произвольных постоянных требует дополнительного решения системы n линейных алгебраических уравнений, определяющих при $t = 0$ искомую функцию и ее производные до $(n-1)$ -го порядка включительно, а это для случая $n \geq 3$ довольно громоздко и утомительно. Применение преобразования Лапласа сильно упрощает решение задачи потому, что, во-первых, надо решать не дифференциальное уравнение относительно оригинала, а алгебраическое уравнение относительно его изображения, во-вторых, не требуется находить значения произвольных постоянных, исходя из начальных условий, т.к. они автоматически вводятся в решение относительно изображения, а затем и в

решение относительно оригинала. Наиболее частый на практике случай нулевых начальных условий при классическом методе решения не освобождает от решения упомянутой системы алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Использование в этом случае операционного метода обеспечивает исключительно простой ход вычислений. Кроме того, отыскание общего решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений традиционным способом состоит из двух этапов: решение соответствующего однородного уравнения и затем решения неоднородного уравнения по методу вариации постоянных. Операционный метод позволяет сразу решить неоднородное уравнение. Если же требуется найти общее, а не частное решение дифференциального уравнения, то и это можно сделать операционным методом.

И в том случае, когда в правой части уравнения (1.37) стоит кусочно-непрерывная функция $f(t)$, которую записывают с помощью нескольких аналитических выражений, успешно применяется операционный метод. Это является еще одним преимуществом операционного метода по сравнению с традиционным: при использовании последнего уравнения, правая часть которого имеет различный вид на разных интервалах изменения аргумента, пришлось бы интегрировать по этапам, то есть на каждом таком интервале по отдельности. При этом на каждом этапе пришлось бы искать свое решение неоднородного уравнения, отвечающее данному виду правой части, определять свои начальные условия и по найденным начальным условиям определять свои значения произвольных постоянных, входящих в решение. По теореме запаздывания находят изображение кусочно-непрерывной функции, после чего получают одно операторное уравнение относительно изображения искомого решения задачи Коши.

ПРИМЕР. Найти решение уравнения $x''(t) + x(t) = f(t)$ при нулевых начальных условиях: $x(0) = x'(0) = 0$, если функция $f(t)$ задана графиком, изображенным на рисунке 1.9.

Решение. Исходя из графика функции $f(t)$, получим ее аналитическое представление

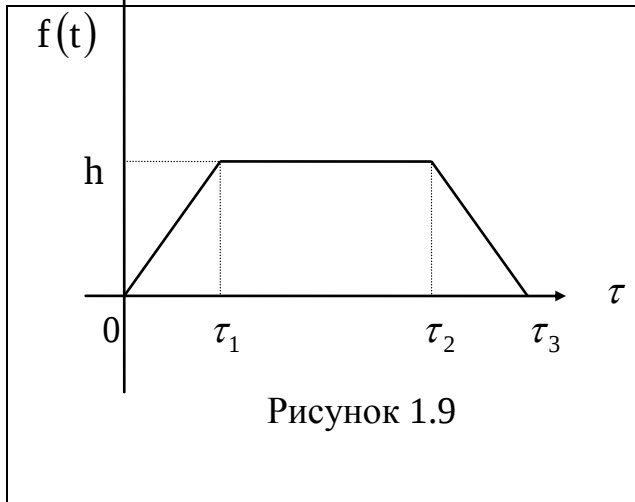


Рисунок 1.9

$$f(t) = \begin{cases} \frac{h}{\tau_1} t, & \text{если } 0 \leq t \leq \tau_1, \\ h, & \text{если } \tau_1 \leq t \leq \tau_2, \\ -\frac{h}{\tau_3 - \tau_2} (t - \tau_3), & \text{если } \tau_2 \leq t \leq \tau_3. \end{cases}$$

С помощью функции Хевисайда она может быть записана одним

выражением
$$f(t) = \frac{h}{\tau_1} t [\eta(t) - \eta(t - \tau_1)] + h [\eta(t - \tau_1) - \eta(t - \tau_2)] - \frac{h}{\tau_3 - \tau_2} (t - \tau_3) [\eta(t - \tau_2) - \eta(t - \tau_3)].$$

Для определения изображения $F(p)$ функции $f(t)$ преобразуем ее к виду, допускающему применение теоремы запаздывания к соответствию $t \cdot \eta(t) \xrightarrow[p]{\bullet} \frac{1}{p^2}$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{h}{\tau_1} [t \eta(t) - (t - \tau_1 + \tau_1) \eta(t - \tau_1)] + h [\eta(t - \tau_1) - \eta(t - \tau_2)] - \\ &- \frac{h}{\tau_3 - \tau_2} [(t - \tau_2 + \tau_2 - \tau_3) \eta(t - \tau_2) - (t - \tau_3) \eta(t - \tau_3)], \text{ откуда получаем} \\ f(t) &= \frac{h}{\tau_1} [t \eta(t) - (t - \tau_1) \eta(t - \tau_1)] - \\ &- \frac{h}{\tau_3 - \tau_2} [(t - \tau_2) \eta(t - \tau_2) - (t - \tau_3) \eta(t - \tau_3)]. \end{aligned}$$

Тогда

$$F(p) = \frac{h}{\tau_1} \left[\frac{1}{p^2} (1 - e^{-p\tau_1}) \right] - \frac{h}{\tau_3 - \tau_2} \left[\frac{1}{p^2} (e^{-p\tau_2} - e^{-p\tau_3}) \right] \text{ или}$$

$$F(p) = \frac{h}{p^2} \left[\frac{1}{\tau_1} (1 - e^{-p\tau_1}) - \frac{h}{\tau_3 - \tau_2} (e^{-p\tau_2} - e^{-p\tau_3}) \right].$$

Так как $x(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} X(p)$ и $x''(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} p^2 X(p)$ (в силу нулевых начальных условий), то операторное уравнение имеет вид $p^2 X(p) + X(p) = F(p)$, откуда находим

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^2 + 1} = \frac{h}{p^2(p^2 + 1)} \left[\frac{1}{\tau_1} (1 - e^{-p\tau_1}) - \frac{h}{\tau_3 - \tau_2} (e^{-p\tau_2} - e^{-p\tau_3}) \right].$$

Воспользовавшись таблицей соответствий, найдем

$$\frac{1}{p^2(p^2 + 1)} \stackrel{\cdot}{\rightarrow} t - \sin t. \text{ Оригиналы остальных слагаемых изображения } X(p),$$

отличающихся от первого слагаемого множителем вида $e^{-p\tau}$, определяются с помощью теоремы запаздывания, а именно

$$\frac{1}{p^2(p^2 + 1)} \stackrel{\cdot}{\rightarrow} \eta(t - \tau) [(t - \tau) - \sin(t - \tau)].$$

Таким образом, окончательный вид решения задачи Коши следующий:

$$x(t) = \frac{h}{\tau_1} (t - \sin t) - \frac{h}{\tau_1} \eta(t - \tau_1) [(t - \tau_1) - \sin(t - \tau_1)] - \\ - \frac{h}{\tau_3 - \tau_2} \eta(t - \tau_2) \cdot [(t - \tau_2) - \sin(t - \tau_2)] + \frac{h}{\tau_3 - \tau_2} \eta(t - \tau_3) \cdot [(t - \tau_3) - \sin(t - \tau_3)].$$

Хотя операционный метод был проиллюстрирован на примере уравнений второго порядка, ясно, что упрощение вычислительной работы благодаря его применению становится существенным при решении дифференциальных уравнений порядка более высокого, чем два.

ПРИМЕР. При изучении уравнений электрических колебаний приходится рассматривать различные виды внешней силы $f(t)$. В момент времени $t_k = k\tau, k = 0, 1, 2, \dots$ сообщаются электрические импульсы величины a . Надо найти распределение тока по проводнику, при условии, что начальная сила тока и изменение силы тока равны нулю.

Уравнение для определения силы тока имеет вид

$L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = a \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau)$, где L – индуктивность, C – емкость, $\delta(t)$ – дельта-функции Дирака, $i(t)$ – сила тока.

$i(0) = 0, i'(0) = 0$. Полагая $i(t) \leftarrow \dot{J}(P)$, перейдем к операторному уравнению,

его решение имеет вид: $J(P) = \frac{a}{L} \cdot \frac{1}{p^2 + \omega^2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\tau p}$, где $\omega^2 = \frac{1}{CL}$ или

$$J(P) = \frac{a}{L} \frac{1}{(p^2 + \omega^2)(1 - e^{-\tau p})}, \text{ где } \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\tau p} = \frac{1}{1 - e^{-\tau p}}.$$

Согласно теореме разложения оригинал представляет собой сумму вычетов функции $J(P) \cdot e^{pt}$ во всех ее полюсах: $p = 0, p = \pm i\omega$ и $p_k = \frac{2k\pi i}{\tau}$

($k = 1, 2, \dots$). Если τ не является целым кратным числа $\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega}$, то все полюсы

простые, и, найдя вычеты, мы получаем окончательно

$$i(t) = \frac{a}{\omega L} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{\omega}{2 \sin \frac{\omega \tau}{2}} \cos \omega \left(t + \frac{\tau}{2} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\tau}{\tau^2 - k^2 \tau_1^2} \cos \frac{k \cdot \tau_1}{\tau} \omega t \right).$$

1.7.2 Решение систем дифференциальных уравнений

В большей мере преимущества преобразования Лапласа проявляются при решении систем линейных дифференциальных уравнений, причем оно принципиально не отличается от решения одного дифференциального уравнения. Каждое уравнение данной системы заменяется соответствующим операторным уравнением, тогда вместо системы дифференциальных уравнений образуется система линейных алгебраических уравнений относительно изображений искомых функций. Такие системы изящно решаются по правилу Крамера. Затем от найденных изображений переходят к искомым функциям. Операционный метод интегрирования систем дифференциальных уравнений покажем на примере.

ПРИМЕР. Решить систему уравнений $\begin{cases} x'(t) + 2x(t) + 2y(t) = 10e^{2t} \\ y'(t) - 2x(t) + y(t) = 7e^{2t} \end{cases}$ при

начальных условиях $x(0) = 1, y(0) = 3$.

Решение. Полагаем $x(t) \leftarrow X(p), y(t) \leftarrow Y(p)$. С учетом начальных условий найдем $x'(t) \leftarrow pX(p) - 1, y'(t) \leftarrow pY(p) - 3$. Вносим в уравнения системы изображения вместо оригиналов, приходим к следующей системе

операторных уравнений:
$$\begin{cases} pX(p) - 1 + 2X(p) + 2Y(p) = \frac{10}{p-2} \\ pY(p) - 3 - 2X(p) + Y(p) = \frac{7}{p-2} \end{cases}.$$

Приведем систему алгебраических уравнений к нормальной форме:

$$\begin{cases} (p+2)X(p) + 2Y(p) = \frac{p+8}{p-2} \\ -2X(p) + (p+1)Y(p) = \frac{3p+1}{p-2} \end{cases}. \text{ Теперь по формулам Крамера решаем её}$$

$$X(p) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{p+8}{p-2} & 2 \\ \frac{3p+1}{p-2} & p+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p+2 & 2 \\ -2 & p+1 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{p-2} [(p+8) \cdot (p+1) - 2(3p+1)]}{(p+2) \cdot (p+1) + 4} = \frac{1}{p-2},$$

$$Y(p) = \frac{\begin{vmatrix} p+2 & \frac{p+8}{p-2} \\ -2 & \frac{3p+1}{p-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p+2 & 2 \\ -2 & p+1 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{p-2} [(p+2) \cdot (3p+1) - 2(p+8)]}{(p+2) \cdot (p+1) + 4} = \frac{3}{p-2}.$$

Переходим от изображений $X(p)$ и $Y(p)$ к их оригиналам. Получаем искомые решения $x(t) = e^{2t}, y(t) = 3e^{2t}$. Пример решен.

1.7.3 Решение линейных дифференциальных уравнений в частных производных

Операционный метод используется и при решении линейных дифференциальных уравнений в частных производных при определенных краевых условиях. Применение этого метода к уравнению в частных производных, где искомая функция является функцией двух переменных, приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению, что, естественно, упрощает решение задач. Применение операционного метода для интегрирования линейных в частных производных покажем на примере уравнения второго порядка относительно функции двух переменных, не обсуждая здесь физический смысл уравнения и условий, наложенных на искомую функцию.

ПРИМЕР. В области $0 \leq x < \infty, 0 \leq t < \infty$ найти решение $u(x, t)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2a}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (1.44)$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x, t)|_{t=0} = u_0, \quad (1.45)$$

$$u(x, t)|_{x=0} = u_0, \quad u(x, t) \rightarrow u_0 \text{ при } x \rightarrow \infty. \quad (1.46)$$

Решение. Умножим каждый член уравнения (1.44) на $e^{-pt} dt$ и проинтегрируем по t от 0 до ∞ . В результате получим операторное уравнение относительно аргумента t :

$$\int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dt = \frac{2a}{c^2} \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial u}{\partial t} dt. \quad (1.47)$$

При фиксированном x интеграл $\int_0^\infty e^{-pt} u(x, t) dt$ есть лапласово изображение функции $\bar{u}(x, p)$. Итак, в наших обозначениях

$$u(x, t) \xleftrightarrow{\cdot} \bar{u}(x, p) = \int_0^\infty e^{-pt} u(x, t) dt. \quad (1.48)$$

С учетом (1.48) интеграл в левой части уравнения (1.47) можно представить в виде

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{\infty} e^{-pt} u(x, t) dt = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}. \quad (1.49)$$

К интегралу в правой части (1.47) применим формулу интегрирования по частям. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial u}{\partial t} dt &\Rightarrow \left| \begin{array}{l} u_1 = e^{-pt}, \quad d\nu_1 = \frac{\partial u}{\partial t} dt \\ du_1 = -pe^{-pt} dt, \quad \nu_1 = u(x, t) \end{array} \right| \Rightarrow \\ &= u(x, t) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} u(x, t) dt = -u(x, 0) + p \bar{u}(x, p). \end{aligned}$$

С учетом условия (1.45) окончательно получаем

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial u}{\partial t} dt = p \bar{u} - u_0. \quad (1.50)$$

Подставляя (1.49) и (1.50) в (1.44), будем иметь обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка по аргументу x .

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} = \frac{2a}{c^2} (p \bar{u} - u_0), \quad (1.51)$$

которое следует решить при условиях

$$\bar{u}|_{x=0} = \int_0^{\infty} e^{-pt} u, dt = u, \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{u}{p}, \quad (1.52)$$

$$\bar{u}|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} u_0 dt = \frac{u_0}{p}. \quad (1.53)$$

Применяя теорию интегрирования линейных уравнений второго порядка, согласно которой общее решение неоднородного уравнения складывается из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения, найдем, что общее решение уравнения (1.51) имеет вид

$$\bar{u}(x, p) = C_1 e^{\sqrt{2ap} \frac{x}{c}} + C_2 e^{-\sqrt{2ap} \frac{x}{c}} + \frac{u_0}{p},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Определим их из условий (1.52), (1.53). Из ограниченности функции $\bar{u}(x, p)$ при $x \rightarrow \infty$ в силу условий (1.53)

следует, что $C_1 = 0$. Из условия (1.52) $\bar{u}|_{x=0} = C_2 + \frac{u_0}{p} = \frac{u}{p}$ получаем

$$C_2 = \frac{u - u_0}{p}.$$

$$\text{Итак, } \bar{u}(x, p) = \frac{u - u_0}{p} e^{-\sqrt{2ap} \frac{x}{c}} + \frac{u_0}{p}.$$

По найденному изображению $\bar{u}(x, p)$ определим оригинал $u(x, t)$ – искомое решение задачи. Из таблицы соответствий устанавливаем, что

$$\frac{e^{-\sqrt{2ap} \frac{x}{c}}}{p} = 1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{2a}{c^2 t}} \cdot \frac{x}{2}\right), \text{ где } \operatorname{erf} y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-z^2} dz - \text{ так называемый интеграл}$$

ошибок, табулированная функция. А $\frac{u_0}{p} = u_0$, следовательно,

$$u(x, t) = u_0 + (u - u_0) \left[1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{2a}{c^2 t}} \cdot \frac{x}{2}\right) \right].$$

2 Методические указания для студентов

Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение

Основными понятиями операционного исчисления являются понятия функции–оригинала $f(t)$ и функции–изображения $F(p)$ ($p = x + iy$ – комплексная переменная), определения которых даны в первой теоретической части. Во второй (методической) части будет приведена серия примеров с подробным описанием их решения и с указанием применяемых теорем (из первой части).

2.1 Нахождение изображения по заданному оригиналу через интеграл Лапласа

ПРИМЕР 2.1. Найти изображение для функции – оригинала $f(t)=1+t$ через интеграл Лапласа, то есть исходя из определения изображения.

Решение.
$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} (1+t)e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt + \int_0^{+\infty} te^{-pt} dt$$

Решаем отдельно каждый интеграл

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt &= -\frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} d(-pt) = -\frac{1}{p} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(e^{-pt} \right) \Big|_0^b = -\frac{1}{p} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e^{pb}} \right) \Big|_0^b = -\frac{1}{p} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{pb}} - \frac{1}{e^0} \right) = \\ &= -\frac{1}{p} (0 - 1) = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Итак: $1 \xleftarrow{\bullet} \frac{1}{p}$, если $\operatorname{Re} p > 0$.

$$\begin{aligned} \text{б) } \int_0^{+\infty} te^{-pt} dt &= \left| \begin{array}{l} u = t \\ du = dt \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} dv = e^{-pt} dt \\ v = -\frac{1}{p} e^{-pt} \end{array} \right| = -\frac{1}{p} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(t \cdot e^{-pt} \right) \Big|_0^b + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b}{e^{pb}} - 0 \right) + \\ &+ \frac{1}{p} \left(-\frac{1}{p} \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-pt} \right) \Big|_0^b = -\frac{1}{p} (0 - 0) - \frac{1}{p^2} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{pb}} \right) \Big|_0^b = -\frac{1}{p^2} \left(\frac{1}{e^\infty} - \frac{1}{e^0} \right) = -\frac{1}{p^2} (0 - 1) = \frac{1}{p^2} \end{aligned}$$

Итак: $t \xleftarrow{\bullet} \frac{1}{p^2}$, если $\operatorname{Re} p > 0$. Ответ: $(1+t) \xleftarrow{\bullet} \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}$.

ПРИМЕР 2.2. Найти изображение для функции – оригинала $f(t) = \sin t$, исходя из определения изображения.

Решение. $F(p) = L\{\sin t\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot \sin t \, dt =$ интегрируем по частям:

$$\left| \begin{array}{l} u = \sin t \quad du = \cos t \, dt \\ dv = e^{-pt} \, dt \quad v = -\frac{1}{p} e^{-pt} \end{array} \right| = -\frac{1}{p} \lim_{b \rightarrow \infty} (\sin t \cdot e^{-pt}) \Big|_0^b - \left(-\frac{1}{p}\right) \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot \cos t \, dt =$$

последний интеграл вновь интегрируем по частям:

$$\left| \begin{array}{l} u = \cos t \quad du = -\sin t \, dt \\ dv = e^{-pt} \, dt \quad v = -\frac{1}{p} e^{-pt} \end{array} \right| = -\frac{1}{p} \lim_{b \rightarrow \infty} (\sin t \cdot e^{-pt}) \Big|_0^b + \frac{1}{p} \left(-\frac{1}{p} \lim_{b \rightarrow \infty} (\cos t \cdot e^{-pt}) \Big|_0^b - \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot \sin t \, dt \right) =$$

$$= -\frac{1}{p} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} (\sin t \cdot e^{-pt}) \Big|_0^b - \frac{1}{p^2} \lim_{b \rightarrow \infty} (\cos t \cdot e^{-pt}) \Big|_0^b \right) - \frac{1}{p^2} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot \sin t \, dt.$$

Итак, мы два раза проинтегрировали по частям и вернулись к исходному интегралу. Получаем так называемую рекуррентную формулу (исходный интеграл обозначим через J):

$$J = -\frac{1}{p} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} (\sin t \cdot e^{-pt}) \Big|_0^b - \frac{1}{p^2} \lim_{b \rightarrow \infty} (\cos t \cdot e^{-pt}) \Big|_0^b \right) - \frac{1}{p^2} \cdot J$$

или $\left(1 + \frac{1}{p^2}\right)J = -\frac{1}{p} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\sin b}{e^{pb}} - \frac{\sin 0}{e^0} \right) - \frac{1}{p^2} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\cos b}{e^{pb}} - \frac{\cos 0}{e^0} \right),$

так как $\sin b$ и $\cos b$ – ограниченные функции, $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{pb}} = 0$ (при $\operatorname{Re} p > 0$),

значит: $\left(1 + \frac{1}{p^2}\right)J = -\frac{1}{p}(0 - 0) - \frac{1}{p^2}(0 - 1), \quad \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)J = \frac{1}{p^2}. \quad \text{Итак } J = \frac{1}{1 + p^2}.$

Ответ: $\sin t \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{1 + p^2},$ если $\operatorname{Re} p > 0.$

Замечание. Данный путь нахождения изображения является довольно объемным. В дальнейших примерах мы будем использовать формулы Эйлера, с помощью которых $\sin at$ и $\cos at$ представляются через экспоненциальные функции и тогда интеграл Лапласа вычисляется проще.

ПРИМЕР 2.3. Найти изображение для функций – оригиналов:

$$f_1(t) = \cos(3t) \text{ и } f_2(t) = \sin\left(\frac{t}{5}\right).$$

Решение. В данном примере применяем формулы Эйлера:

$$\cos(3t) = \frac{e^{3ti} + e^{-3ti}}{2}, \quad \sin\left(\frac{t}{5}\right) = \frac{e^{ti/5} - e^{-ti/5}}{2i}.$$

$$\begin{aligned} 1) F_1(p) &= L\{\cos(3t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot \cos(3t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot \frac{e^{3ti} + e^{-3ti}}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (e^{-t(p-3i)} + e^{-t(p+3i)}) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-(p-3i)t} dt + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-(p+3i)t} dt \right) = \frac{1}{2} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{-(p-3i)} e^{-(p-3i)t} \Big|_0^b + \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{-(p+3i)} e^{-(p+3i)t} \Big|_0^b \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{(p-3i)} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{(p-3i)b}} - 1 \right) + \frac{1}{-(p+3i)} \cdot \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{(p+3i)b}} - 1 \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-3i} + \frac{1}{p+3i} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{2p}{p^2 + 3^2} = \frac{p}{p^2 + 3^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) F_2(t) &= L\left\{\sin \frac{t}{5}\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot \sin \frac{t}{5} dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot \frac{e^{ti/5} - e^{-ti/5}}{2i} dt = \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} (e^{-t(p-i/5)} - e^{-t(p+i/5)}) dt = \\ &= \frac{1}{2i} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-(p-i/5)t} dt - \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-(p+i/5)t} dt \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{-(p-i/5)} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{(p-i/5)b}} - 1 \right) + \frac{1}{p+i/5} \times \right. \\ &\times \left. \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{(p+i/5)b}} - 1 \right) \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p-i/5} - \frac{1}{p+i/5} \right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(p^2 + 1/25)}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \cos(3t) \xleftarrow{\bullet} \frac{p}{p^2 + 3^2}; \quad \sin\left(\frac{t}{5}\right) \xleftarrow{\bullet} \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p^2 + 1/25}.$$

2.2 Нахождение изображения и оригинала с применением свойств преобразования Лапласа

ПРИМЕР 2.4. Применяя теорему подобия, найти изображение для функции $f(t) = \cos(5t)$.

Решение. Предположим, что для $f(t) = \cos t$ мы знаем (или из таблицы, или

из вычисления интеграла Лапласа) $F(p) = \frac{p}{p^2 + 1}$. По теореме подобия, если

$f(t) \xleftrightarrow{\bullet} F(p)$, то $f(\alpha t) \xleftrightarrow{\bullet} \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$. Тогда $\cos(5t) \xleftrightarrow{\bullet} \frac{1}{5} \cdot \frac{p/5}{(p/5)^2 + 1}$. Выражение справа

необходимо преобразовать. И тогда $\cos(5t) \xleftrightarrow{\bullet} \frac{p}{p^2 + 25}$.

ПРИМЕР 2.5. Найти изображения функций $\eta(t)\text{sh}^3 t$; $\eta(t)\text{ch}^3 t$, применяя теорему линейности.

Решение. Так как $\text{sh} t = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)$,

$$\text{тогда } \text{sh}^3 t = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3t} - 3e^{2t}e^{-t} + 3e^t e^{-2t} - e^{-3t}) =$$

$$= \frac{1}{8}(e^{3t} - 3e^t + 3e^{-t} - e^{-3t}) = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3t} - e^{-3t}}{2} - 3\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(\text{sh} 3t - 3\text{sh} t). \text{ По таблице соответствий находим изображения для}$$

$\text{sh} 3t$ и $\text{sh} t$ и применяем теорему линейности:

$$F(p) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{p^2 - 9} - \frac{3}{p^2 - 1}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{p^2 - 9} - \frac{1}{p^2 - 1}\right) =$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{(p^2 - 9) \cdot (p^2 - 1)} = \frac{6}{(p^2 - 9) \cdot (p^2 - 1)}. \text{ Далее, так как } \text{ch} t = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right), \text{ то}$$

аналогично получаем

$$\text{ch}^3 t = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^3 = \dots = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3t} + e^{-3t}}{2} + 3\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right) = \frac{1}{4}(\text{ch} 3t + 3\text{ch} t). \text{ Затем по}$$

таблице находим изображение для $\text{ch} 3t$ и $\text{ch} t$ применяем теорему линейности:

$$F(p) = \frac{1}{4}\left(\frac{p}{p^2 - 3^2} + 3\frac{p}{p^2 - 1}\right) = \frac{p(p^2 - 7)}{(p^2 - 9) \cdot (p^2 - 1)}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{6}{(p^2 - 9) \cdot (p^2 - 1)}; \quad \frac{p(p^2 - 7)}{(p^2 - 9) \cdot (p^2 - 1)}.$$

Замечание. По ходу решения мы получили формулы, равносильные нижеследующим

$$\operatorname{sh} 3t = 3\operatorname{sh} t + 4\operatorname{sh}^3 t; \operatorname{ch} 3t = 4\operatorname{ch}^3 t - 3\operatorname{ch} t, \quad (2.1)$$

являющиеся аналогами соответствующих тригонометрических формул:

$$\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t; \cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t. \quad (2.2)$$

Отсюда, используя теорему линейности и таблицу соответствий, имеем

$$\sin^3 t = \frac{1}{4}(3\sin t - \sin 3t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{1}{4} \left(\frac{3}{p^2 + 1} - \frac{3}{p^2 + 9} \right) = \frac{6}{(p^2 + 1) \cdot (p^2 + 9)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Аналогично, } \cos^3 t &= \frac{1}{4}(\cos 3t + 3\cos t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{1}{4} \left(\frac{p}{p^2 + 9} + \frac{3p}{p^2 + 1} \right) = \\ &= \frac{p}{4} \left(\frac{1}{p^2 + 9} + \frac{3}{p^2 + 1} \right) = \frac{p}{4} \cdot \frac{(4p^2 + 28)}{(p^2 + 9)(p^2 + 1)} = \frac{p(p^2 + 7)}{(p^2 + 9)(p^2 + 1)}. \end{aligned} \quad \text{Окончательно}$$

$$\text{получаем } \sin^3 t \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{6}{(p^2 + 1) \cdot (p^2 + 9)}; \cos^3 t \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{p(p^2 + 7)}{(p^2 + 9)(p^2 + 1)}.$$

ПРИМЕР 2.6. Найти изображение для функции $e^t \cdot \sin t$, применяя теорему смещения.

Решение: По теореме смещения, если $f(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} F(p)$, то $e^{at} \cdot f(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} F(p - a)$. Значит если $\sin t \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{1}{p^2 + 1^2}$, то $e^{at} \cdot \sin t \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{1}{(p - a)^2 + 1^2}$. У нас для оригинала $e^t \cdot \sin t$ получим $e^t \cdot \sin t \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{1}{(p - 1)^2 + 1^2}$. Пример решен.

ПРИМЕР 2.7. Найти изображения для оригиналов $f_1(t) = e^{\beta t} \cdot \cos at$ и $f_2(t) = e^{\beta t} \sin at$, применяя теорему смещения изображения.

Решение. По теореме смещения, если $f(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} F(p)$, то $e^{\beta t} \cdot f(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} F(p - \beta)$

Из таблицы соответствий находим $\cos at \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{p}{p^2 + a^2}; \sin at \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{a}{p^2 + a^2}$.

Тогда $e^{\beta t} \cdot \cos at \overset{\bullet}{\leftarrow} \frac{p \quad \beta}{(p - \beta)^2 + a^2} \quad e^{\beta t} \cdot \sin at \overset{\bullet}{\leftarrow} \frac{a}{(p - \beta)^2 + a^2}$. Пример решен.

ПРИМЕР 2.8. Найти изображение для функции $\text{cht} \sin t$, применяя теорему смещения.

Решение. Так как $\text{cht} \sin t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \sin t = \frac{1}{2}(e^t \sin t + e^{-t} \sin t)$, то и по теореме линейности, и по теореме смещения, и согласно таблице соответствий имеем:

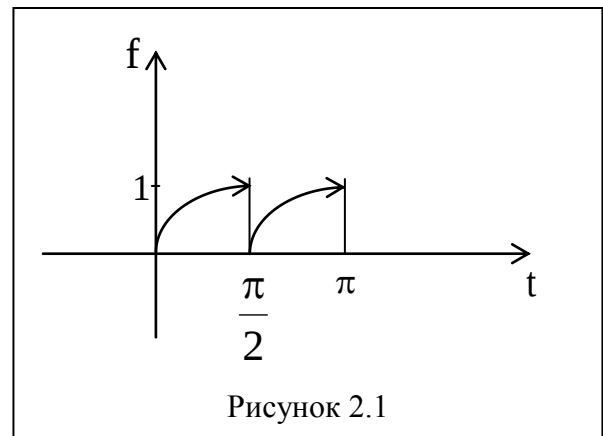
$$F(p) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(p-1)^2 + 1} + \frac{1}{(p+1)^2 + 1} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(p^2 + 2) - 2p} + \frac{1}{(p^2 + 2) + 2p} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2(p^2 + 2)}{(p^2 + 2)^2 - 4p^2} = \frac{p^2 + 2}{p^4 + 4}.$$

Ответ: $\text{cht} \cdot \sin t \overset{\bullet}{\leftarrow} \frac{p^2 + 2}{p^4 + 4}$.

ПРИМЕР 2.9. Используя теорему запаздывания, найти изображение

функции $f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{при } 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ -\cos t & \text{при } \frac{\pi}{2} \leq t < \pi \\ 0 & \text{при } t \geq \pi \end{cases}$



Решение. Убедимся, что $f(t)$ можно задать единой формулой.

$$\text{Действительно, } f(t) = \left[\eta(t) - \eta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \right] \sin t - \left[\eta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - \eta(t - \pi) \right] \cos t =$$

$$= \eta(t) \sin t - \eta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \eta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - \eta(t - \pi) \cos(t - \pi).$$

Теперь надо воспользоваться теоремой запаздывания и таблицей, что дает

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1} - e^{-\frac{\pi}{2}p} \frac{p}{p^2+1} + e^{-\frac{\pi}{2}p} \frac{1}{p^2+1} - e^{-\pi p} \frac{p}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1} \left(1 + e^{-\frac{\pi}{2}p} \right) -$$

$$- \frac{e^{-\frac{\pi}{2}p} \left(1 + e^{-\frac{\pi}{2}p} \right) p}{p^2+1} = \frac{\left(1 + e^{-\frac{\pi}{2}p} \right) \left(1 - p e^{-\frac{\pi}{2}p} \right)}{p^2+1}.$$

Ответ:
$$\frac{\left(1 + e^{-\frac{\pi}{2}p} \right) \left(1 - p e^{-\frac{\pi}{2}p} \right)}{p^2+1}.$$

ПРИМЕР 2.10. Доказать, что если $F_0(p) \stackrel{\bullet}{\leftarrow} f_0(t)$, где

$$f_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ f(t) & \text{при } 0 \leq t < \ell, \\ 0 & \text{при } t \geq \ell \end{cases}, \quad \text{а функция } f(t) \text{ при } t > \ell \text{ периодическая с}$$

периодом ℓ : $f(t+\ell) = f(t)$, то

$$f(t) \stackrel{\bullet}{\leftarrow} \frac{F_0(p)}{1 - e^{-\ell p}} = F(p). \quad (2.3)$$

Доказательство. $f_0(t) = [\eta(t) - \eta(t-\ell)]f(t) = \eta(t)f(t) -$

$-\eta(t-\ell)f(t-\ell) \stackrel{\bullet}{\leftarrow} F(p) - e^{-\ell p} F(p)$. С другой стороны $f_0(t) \stackrel{\bullet}{\leftarrow} F_0(p)$. В силу

этого $F_0(p) = F(p)(1 - e^{-\ell p})$, $F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-\ell p}}$. Что и следовало доказать.

ПРИМЕР 2.11. Найти изображение функции

$f(t) = \sin t [\eta(t-2\pi) + \eta(t-3\pi)]$, используя теорему запаздывания оригинала.

Решение. $f(t) = \eta(t-2\pi)\sin t + \eta(t-3\pi)\sin t =$
 $= \eta(t-2\pi)\sin(t-2\pi) - \eta(t-3\pi)\sin(t-3\pi).$

Теперь надо воспользоваться таблицей соответствий, что дает

$$f(t) \stackrel{\bullet}{\leftarrow} \frac{e^{-2\pi p}}{p^2+1} - \frac{e^{-3\pi p}}{p^2+1} = \frac{e^{-2\pi p}}{p^2+1} (1 - e^{-\pi p}).$$

Ответ: $F(p) = \frac{e^{-2\pi p}}{p^2 + 1} (1 - e^{-\pi p})$.

ПРИМЕР 2.12. Найти изображение функции $t^2 \cdot e^{at}$, применяя теорему дифференцирования изображения.

Решение. По теореме дифференцирования изображения, если $f(t) \xleftrightarrow{\bullet} F(p)$, то $(-t) \cdot f(t) \xleftrightarrow{\bullet} F'(p)$. Из таблицы $e^{at} \xleftrightarrow{\bullet} \frac{1}{p-a}$, тогда $(-t)e^{-at} \xleftrightarrow{\bullet} \left(\frac{1}{p-a} \right)' = -\frac{1}{(p-a)^2}$. Повторяя теорему, получим $(-t) \cdot (-t) \cdot e^{at} \xleftrightarrow{\bullet} \left(-\frac{1}{(p-a)^2} \right)'$. Окончательно $t^2 \cdot e^{at} \xleftrightarrow{\bullet} \frac{2}{(p-a)^3}$. Пример решен.

ПРИМЕР 2.13. Вычислить свертку функций $f(t) = t$, $\varphi(t) = e^t$.

Решение. По формуле (1.23) найдем

$$t * e^t = \int_0^t \tau e^{t-\tau} d\tau \Rightarrow \left| \begin{array}{l} u = \tau, \quad dv = e^{t-\tau} d\tau \\ du = d\tau, \quad v = -e^{t-\tau} \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$= -\tau e^{t-\tau} \Big|_0^t + \int_0^t e^{t-\tau} d\tau = -t - e^{t-\tau} \Big|_0^t = -t - 1 + e^t.$$

Предоставляем читателю проверить, что то же самое получится при вычислении $e^t \cdot t$.

ПРИМЕР 2.14. Найти оригинал для изображения $\frac{1}{p^2(p-1)}$, применяя теорему интегрирования оригинала.

Решение. По теореме, если $f(t) \xleftrightarrow{\bullet} F(p)$, то $\int_0^t f(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\bullet} \frac{F(p)}{p}$.

Пусть мы знаем, что $e^t \xleftrightarrow{\bullet} \frac{1}{p-1}$, тогда $\int_0^t e^\tau d\tau \xleftrightarrow{\bullet} \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p-1}$ или $e^t - 1 \xleftrightarrow{\bullet} \frac{1}{p(p-1)}$.

Применяем теорему еще раз $\int_0^t (e^\tau - 1) d\tau \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{1}{p(p-1)} \right)$ или

$$e^\tau \Big|_0^t - \tau \Big|_0^t = e^t - 1 - t \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{p^2(p-1)}. \text{ Итак, для функции } \frac{1}{p^2(p-1)} \text{ оригиналом}$$

служит $e^t - 1 - t$. Пример решен.

ПРИМЕР 2.15. Найти оригинал по заданному его изображению $\frac{1}{p} (2 - 3e^{-p} + e^{-3p})$.

Решение. Раскрывая скобки, получаем

$$\frac{1}{p} (2 - 3e^{-p} + e^{-3p}) = \frac{2}{p} - \frac{3e^{-p}}{p} + \frac{e^{-3p}}{p}. \text{ Для каждой дроби имеем } 1) \frac{2}{p} \xrightarrow{\bullet} 2\eta(t);$$

$$2) \frac{e^{-p}}{p} \xrightarrow{\bullet} \eta(t-1); \quad 3) \frac{e^{-3p}}{p} \xrightarrow{\bullet} \eta(t-3). \text{ Здесь 2) и 3) получены по теореме}$$

запаздывания для $f(t) = \eta(t)$. Теперь, пользуясь свойством линейности изображения Лапласа, окончательно получаем

$$\frac{1}{p} (2 - 3e^{-p} + e^{-3p}) \xrightarrow{\bullet} 2\eta(t) - 3\eta(t-1) + \eta(t-3).$$

$$\text{Ответ: } 2\eta(t) - 3\eta(t-1) + \eta(t-3).$$

ПРИМЕР 2.16. Найти оригинал для изображения $F(p) = \frac{p}{(p^2 + \beta^2)^2}$.

Решение: $\frac{p}{(p^2 + \beta^2)^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2 + \beta^2} \right)'_p, \quad \frac{1}{p^2 + \beta^2} = \frac{1}{\beta} \frac{\beta}{p^2 + \beta^2} \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{\beta} \sin \beta t.$

Используя теорему о дифференцировании изображения, получим:

$$\left(\frac{1}{p^2 + \beta^2} \right)'_p = -\frac{2p}{(p^2 + \beta^2)^2} \xrightarrow{\bullet} -\frac{t \sin \beta t}{\beta}, \text{ тогда } \frac{p}{(p^2 + \beta^2)^2} \xrightarrow{\bullet} \frac{t \sin \beta t}{2\beta}$$

$$\text{Ответ: } \frac{t \sin \beta t}{2\beta}.$$

2.3 Использование теорем разложения

ПРИМЕР 2.17. Найти оригинал для изображения $F(p) = \frac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)}$.

Решение: **I способ (разложение на элементарные (простейшие) дроби).**

Заданную правильную рациональную дробь разлагаем на элементарные

дроби:
$$\frac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)} = \frac{1}{(\alpha-\beta)} \left(\frac{1}{p-\alpha} - \frac{1}{p-\beta} \right) \xrightarrow{\cdot} \frac{1}{(\alpha-\beta)} (e^{\alpha t} - e^{\beta t}),$$

где использовались соотношения из таблицы соответствия.

Ответ:
$$\frac{1}{(\alpha-\beta)} (e^{\alpha t} - e^{\beta t}).$$

II способ (выделение полного квадрата). Проиллюстрируем его на более общем примере без излишних детальных объяснений и ссылок. Пусть

$$F(p) = \frac{Ap + B}{p^2 + bp + c} = \frac{Ap + B}{\left(p + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}}. \quad (2.4)$$

Если $c - \frac{b^2}{4} = \omega^2 > 0$, $\omega = \sqrt{c - \frac{b^2}{4}}$, преобразуем (2.4) к виду

$$\frac{Ap + B}{p^2 + bp + c} = \frac{A\left(p + \frac{b}{2}\right)}{\left(p + \frac{b}{2}\right)^2 + \omega^2} + \frac{\left(B - \frac{Ab}{2}\right)}{\left(p + \frac{b}{2}\right)^2 + \omega^2}. \quad \text{И согласно таблице в}$$

этом случае имеем

$$F(p) \rightarrow A e^{-\frac{b}{2}t} \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} \left(B - \frac{Ab}{2}\right) e^{-\frac{b}{2}t} \sin(\omega t). \quad (2.5)$$

Если $c - \frac{b^2}{4} = -\omega^2 < 0$, $\omega = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ (корни квадратного трехчлена

вещественны), тогда имеем
$$\frac{Ap + B}{p^2 + bp + c} = \frac{A\left(p + \frac{b}{2}\right)}{\left(p + \frac{b}{2}\right)^2 - \omega^2} + \frac{\left(B - \frac{Ab}{2}\right)}{\left(p + \frac{b}{2}\right)^2 - \omega^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow A e^{-\frac{b}{2}t} \operatorname{ch} \omega t + \frac{1}{\omega} \left(B - \frac{Ab}{2} \right) e^{-\frac{b}{2}t} \operatorname{sh} \omega t. \quad (2.6)$$

При $c - \frac{b^2}{4} = 0$ получаем

$$\frac{Ap + B}{p^2 + bp + c} = \frac{A(p + \frac{b}{2} - \frac{b}{2}) + B}{(p + \frac{b}{2})^2} = \frac{A}{p + \frac{b}{2}} + \frac{\left(B - \frac{Ab}{2} \right)}{\left(p + \frac{b}{2} \right)^2} \rightarrow A e^{-\frac{b}{2}t} + \left(B - \frac{Ab}{2} \right) t e^{-\frac{b}{2}t}. \quad (2.7)$$

Проверка. Нам надо убедиться в справедливости (2.5), (2.6), (2.7), прочитанных справа налево. Действительно, используя таблицу, находим

$$(1): \quad \cos \omega t \leftarrow \frac{p}{p^2 + a^2}; \quad e^{-\frac{b}{2}t} \cos \omega t \leftarrow \frac{p + \frac{b}{2}}{\left(p + \frac{b}{2} \right)^2 + \omega^2}$$

$$\sin \omega t \leftarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}; \quad e^{-\frac{b}{2}t} \sin \omega t \leftarrow \frac{\omega}{\left(p + \frac{b}{2} \right)^2 + \omega^2}$$

$$A e^{-\frac{b}{2}t} \cos \omega t + \frac{1}{a} \left(B - \frac{Ab}{2} \right) e^{-\frac{b}{2}t} \sin \omega t \leftarrow \frac{A \left(p + \frac{b}{2} \right)}{\left(p + \frac{b}{2} \right)^2 + \omega^2} + \frac{\left(B - \frac{Ab}{2} \right)}{\left(p + \frac{b}{2} \right)^2 + \omega^2} = \frac{Ap + B}{p^2 + bp + c};$$

$$(2): \quad \operatorname{ch} \omega t \leftarrow \frac{p}{p^2 - \omega^2}; \quad e^{-\frac{b}{2}t} \operatorname{ch} \omega t \leftarrow \frac{p + \frac{b}{2}}{\left(p + \frac{b}{2} \right)^2 - \omega^2};$$

$$\operatorname{sh} \omega t \leftarrow \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}; \quad e^{-\frac{b}{2}t} \operatorname{sh} \omega t \leftarrow \frac{\omega}{\left(p + \frac{b}{2} \right)^2 - \omega^2}$$

$$A e^{-\frac{b}{2}t} \operatorname{ch} \omega t + \frac{1}{\omega} \left(B - \frac{Ab}{2} \right) e^{-\frac{b}{2}t} \operatorname{sh} \omega t \leftarrow \frac{A \left(p + \frac{b}{2} \right)}{\left(p + \frac{b}{2} \right)^2 - \omega^2} + \frac{\left(B - \frac{Ab}{2} \right)}{\left(p + \frac{b}{2} \right)^2 - \omega^2} = \frac{Ap + B}{p^2 + bp + c};$$

$$(3): Ae^{-\frac{b}{2}t} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \frac{A}{p + \frac{b}{2}}; \left(B - \frac{Ab}{2}\right) te^{-\frac{b}{2}t} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \left(B - \frac{Ab}{2}\right) t \frac{1}{\left(p + \frac{b}{2}\right)^2},$$

$$Ae^{-\frac{b}{2}t} + \left(B - \frac{Ab}{2}\right) te^{-\frac{b}{2}t} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \frac{A}{p + \frac{b}{2}} + \frac{\left(B - \frac{Ab}{2}\right)}{\left(p + \frac{b}{2}\right)^2} = \frac{Ap + B}{\left(p + \frac{b}{2}\right)^2} = \frac{Ap + B}{p^2 + bp + c}.$$

Что и надо доказать.

ПРИМЕР 2.18. Найти оригинал для изображения $\frac{p}{p^4 + 4}$.

Решение. Сначала преобразуем $p^4 + 4$ к виду: $p^4 + 4 = p^4 + 4p^2 + 4 - 4p^2 = (p^2 + 2)^2 - 4p^2 = (p^2 - 2p + 2) \cdot (p^2 + 2p + 2)$. Вследствие этого

$$\frac{1}{p^4 + 4} = \frac{1}{(p^2 - 2p + 2) \cdot (p^2 + 2p + 2)} = \frac{1}{4p} \left(\frac{1}{p^2 - 2p + 2} - \frac{1}{p^2 + 2p + 2} \right),$$

$$\frac{p}{p^4 + 4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(p-1)^2 + 1} - \frac{1}{(p+1)^2 + 1} \right) \rightarrow \frac{1}{4} (e^t \sin t - e^{-t} \sin t) = \frac{\sin t}{2} \text{sht}.$$

Ответ: $\frac{\sin t \text{sht}}{2}$.

ПРИМЕР 2.19. Найти оригинал для изображений а) $F(p) = \frac{1}{p(p-1)}$;

б) $F(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)}$; в) $F(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2 + 1)}$; д) $F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p^2 + 1)}$;

е) $F(p) = \frac{1}{(p^2 + 1) \cdot (p^2 - 1)}$.

Решение. Вначале разлагаем исходные дроби на элементарные дроби:

а) $F(p) = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}$; б) $F(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1}$;

в) $F(p) = \frac{1}{(p-1) \cdot (p^2 + 1)} = \frac{1}{2}(p+1) \left(\frac{1}{p^2 - 1} - \frac{1}{p^2 + 1} \right) =$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{p+1}{p^2 + 1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{1}{p^2 + 1} \right);$

$$d) F(p) = \frac{1}{p(p-1) \cdot (p^2+1)} = \frac{1}{p^2+1} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right) = \frac{1}{(p-1) \cdot (p^2+1)} - \frac{1}{p(p^2+1)}.$$

$$e) F(p) = \frac{1}{(p^2+1) \cdot (p^2-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2-1} - \frac{1}{p^2+1} \right).$$

Теперь остается воспользоваться результатами b) и c), что дает

$$\frac{1}{p(p-1) \cdot (p^2+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+1} \right) - \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} \right). \text{ Далее по таблице}$$

соответствий для каждого случая находим оригинал:

$$a) f(t) = e^t - \eta(t) = e^t - 1; \quad b) f(t) = \eta(t) - \cos t;$$

$$c) f(t) = \frac{1}{2}(e^t - \cos t - \sin t); \quad d) f(t) = \frac{1}{2}(e^t - \cos t - \sin t) - \eta(t) - \cos t.$$

$$e). f(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} t - \sin t). \text{ Пример решен.}$$

ПРИМЕР 2.20. Найти оригинал для функции $F(p) = \frac{1}{p^3-8}$.

Решение. К знаменателю применим формулу алгебры (разность кубов):

$$p^3 - 2^3 = (p-2)(p^2 + 2p + 4). \text{ Тогда}$$

$$\frac{1}{p^3-8} = \frac{1}{(p-2)(p^2+2p+4)} = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{p-2} - \frac{p+4}{p^2+2p+4} \right) = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{p-2} - \frac{(p+1)+3}{(p+1)^2+3} \right) =$$

$$= \frac{1}{12} \left(\frac{1}{p-2} - \frac{(p+1)}{(p+1)^2 + (\sqrt{3})^2} - \sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{(p+1)^2 + (\sqrt{3})^2} \right). \text{ Теперь по таблице}$$

соответствий находим оригиналы для каждой из дробей: $\frac{1}{p-2} \xrightarrow{\bullet} e^{2t};$

$$\frac{(p+1)}{(p+1)^2 + (\sqrt{3})^2} \xrightarrow{\bullet} e^{-t} \cdot \cos(\sqrt{3} \cdot t); \quad \frac{\sqrt{3}}{(p+1)^2 + (\sqrt{3})^2} \xrightarrow{\bullet} e^{-t} \cdot \sin(\sqrt{3} \cdot t).$$

Далее по теореме линейности соединяем всё в

$$\text{ответ: } \frac{1}{p^3-8} \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{12} (e^{2t} - e^{-t} \cdot \cos(\sqrt{3} \cdot t) - \sqrt{3} \cdot e^{-t} \sin(\sqrt{3} \cdot t)).$$

2.4 Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Общий принцип интегрирования данных уравнений методами операционного исчисления покажем на конкретных примерах. При этом предполагается, что правые части уравнений являются оригиналами.

ПРИМЕР 2.21. Найти решение уравнения с заданными начальными условиями: $x'' + 3x' = e^{-3t}$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

Решение. Предполагаем, что $x(t) \xleftrightarrow{\bullet} X(p)$, тогда по теореме дифференцирования оригинала и используя начальные условия, имеем $x'(t) \xleftrightarrow{\bullet} pX(p) - x(0) = pX(p)$; $x''(t) \xleftrightarrow{\bullet} p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - 1$.

По таблице находим $F(p)$ для правой части: $e^{-3t} \xleftrightarrow{\bullet} \frac{1}{p+3}$. Подставляем всё в исходное уравнение: $p^2X(p) - 1 + 3pX(p) = \frac{1}{p+3}$,

$(p^2 + 3p)X(p) = \frac{1}{p+3} + 1$ или $p(p+3)X(p) = \frac{p+4}{p+3}$. Тогда

$$X(p) = \frac{p+4}{p(p+3)^2} = \frac{4}{9} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+3} \right) - \frac{1}{3(p+3)^2}.$$

Теперь согласно таблице $\frac{1}{p} \xleftrightarrow{\bullet} \eta(t)$; $\frac{1}{p+3} \rightarrow e^{-3t}$; $\frac{1}{(p+3)^2} \rightarrow te^{-3t}$. В силу этого и свойству линейности $X(p) \xleftrightarrow{\bullet} \frac{4}{9}[\eta(t) - e^{-3t}] - \frac{1}{3}te^{-3t}$; $\eta(t) = 1$ при $t \geq 0$.

Ответ: $x(t) = \frac{4}{9}[\eta(t) - e^{-3t}] - \frac{1}{3}te^{-3t}$.

Проверка. $x'(t) = \frac{4}{9} \cdot 3e^{-3t} - \frac{1}{3}(e^{-3t} - 3te^{-3t}) = e^{-3t} + te^{-3t}$;

$$x''(t) = -3e^{-3t} + e^{-3t} - 3te^{-3t} = -2e^{-3t} - 3te^{-3t};$$

$x'' + 3x' = +e^{-3t}$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$. Полученное тождество (относительно t) указывает на верность полученного решения. В чем и следовало убедиться.

Замечание. Удобство операторного метода плюс ко всему состоит еще в том, что в полученном решении уже учтены начальные условия.

ПРИМЕР 2.22. Найти решение уравнения $x^{IV} - x = \text{sh } t$ с заданными начальными условиями $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$; $x'''(0) = 1$.

Решение. Пусть имеем $x(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} X(p)$; тогда согласно теореме дифференцирования оригинала имеем

$$x'(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} pX(p) - x(0) = pX(p), \quad x''(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p)$$

$$x'''(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} p^3 X(p) - p^2 x(0) - px'(0) - x''(0) = p^3 X(p),$$

$$x^{iv}(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} p^4 X(p) - p^3 x(0) - p^2 x'(0) - px''(0) - x'''(0) = p^4 X(p) - 1.$$

По таблице находим изображение для правой части уравнения: $\text{sh } t \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{1}{p^2 - 1}$. Далее, поступая как и в примере 2.21 настоящего параграфа, найдем операторное уравнение

$$\begin{aligned} p^4 X(p) - 1 - X(p) &= \frac{1}{p^2 - 1}, \quad X(p)(p^4 - 1) = \frac{1}{p^2 - 1} + 1 = \\ &= \frac{p^2}{p^2 - 1}; \quad X(p) = \frac{p^2}{(p^2 - 1)(p^4 - 1)} = \frac{p^2}{(p^2 - 1)^2 (p^2 + 1)}. \end{aligned}$$

I способ. Получили рациональную дробь. Корни ее знаменателя являются особыми точками: $p_1 = i$, $p_2 = -i$ — простые полюсы; $p_3 = 1$; $p_4 = -1$ — полюсы 2-го порядка. Согласно второй теореме разложения

$$x(t) = \sum_{k=1}^m \text{Res} \left[X(p_k) e^{p_k t} \right]. \text{ Находим последовательно вычеты:}$$

$$1) \operatorname{Res}[X(p_1)e^{p_1 t}] = \lim_{p \rightarrow i} \left[(p-i) \frac{p^2 e^{pt}}{(p^4-1)(p^2-1)} \right] = \lim_{p \rightarrow i} \frac{p^2 e^{pt}}{(p^2-1)^2(p+i)} = \frac{-e^{it}}{8i} = \frac{ie^{it}}{8};$$

$$2) \operatorname{Res}[X(p_2)e^{p_2 t}] = \lim_{p \rightarrow -i} \frac{p^2(p+i)e^{pt}}{(p^2+1)(p^2-1)^2} = \lim_{p \rightarrow -i} \frac{p^2 e^{pt}}{(p-i)(p^2-1)^2} = \frac{e^{-it}}{8i} = \frac{-ie^{-it}}{8};$$

$$\begin{aligned} 3) \operatorname{Res}[X(p_3)e^{p_3 t}] &= \lim_{p \rightarrow 1} \left\{ \frac{p^2(p-1)^2 e^{pt}}{(p^2+1)(p^2-1)^2} \right\}'_p = \lim_{p \rightarrow 1} \left\{ \frac{e^{pt} p^2}{(p^2+1)(p+1)^2} \right\}'_p = \\ &= \lim_{p \rightarrow 1} \frac{\{ (te^{pt} p^2 + 2pe^{pt}) (p^2+1)(p+1)^2 - p^2 e^{pt} [2p(p+1)^2 + 2(p^2+1)(p+1)] \}}{(p^2+1)^2(p+1)^4} = \\ &= \frac{8e^t(t+2) - 16e^t}{4 \cdot 16} = \frac{e^t(t+2-2)}{8} = \frac{te^t}{8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \operatorname{Res}[X(p_4)e^{p_4 t}] &= \lim_{p \rightarrow -1} \left\{ \frac{(p+1)^2 e^{pt} p^2}{(p^2+1)(p-1)^2(p+1)^2} \right\}'_p = \lim_{p \rightarrow -1} \left\{ \frac{p^2 e^{pt}}{(p^2+1)(p-1)^2} \right\}'_p = \\ &= \lim_{p \rightarrow -1} \frac{(e^{pt} tp^2 + 2pe^{pt})(p^2+1)(p-1)^2 - p^2 e^{pt} [2p(p-1)^2 + 2(p^2+1)(p-1)]}{(p^2+1)^2(p-1)^4} = \\ &= \frac{-8e^{-t}(2-t) + 16e^{-t}}{4 \cdot 16} = \frac{e^{-t}(2-2+t)}{8} = \frac{te^{-t}}{8}. \end{aligned}$$

$$\text{Итак } x(t) = \frac{i}{8}e^{it} - \frac{i}{8}e^{-it} + \frac{1}{8}te^t + \frac{1}{8}te^{-t}$$

Окончательно получаем, что искомое решение имеет вид

$$x(t) = -\frac{1}{4}\sin t + \frac{t}{4}\operatorname{cht} = \frac{1}{4}(t\operatorname{cht} - \sin t).$$

$$\text{Ответ: } x(t) = \frac{1}{4}(t\operatorname{cht} - \sin t).$$

Проверка

$$x'(t) = \frac{1}{4}(\operatorname{cht} + t\operatorname{sht} - \cos t); \quad x''(t) = \frac{1}{4}(2\operatorname{sht} + t\operatorname{cht} + \sin t);$$

$$x'''(t) = \frac{1}{4}(3\operatorname{cht} + t\operatorname{sht} + \cos t); \quad x^{iv}(t) = \frac{1}{4}(4\operatorname{sht} + t\operatorname{cht} - \sin t);$$

$$x^{iv}(t) - x(t) = \frac{1}{4}(4\operatorname{sh} t + t \operatorname{ch} t - \sin t - t \operatorname{ch} t + \sin t) = \operatorname{sh} t;$$

$x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 1$. В чем и следовало убедиться.

II способ (разложение на простейшие дроби)

Так как $\frac{p^2}{p^4 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2 - 1} + \frac{1}{p^2 + 1} \right)$, тогда

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(p^2 - 1)^2} + \frac{1}{(p^2 + 1) \cdot (p^2 - 1)} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{p - 1} - \frac{1}{p + 1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2 - 1} - \frac{1}{p^2 + 1} \right) \right] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(p - 1)^2} - \frac{2}{p^2 - 1} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{(p + 1)^2} \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2 - 1} - \frac{1}{p^2 + 1} \right) \right\} = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{(p - 1)^2} + \frac{1}{(p + 1)^2} \right] + \\ &\quad + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{p^2 + 1} \right) \rightarrow \frac{1}{8} \left[t(e^t + e^{-t}) + \frac{1}{4}(-\sin t) \right] = \frac{1}{4}(t \operatorname{ch} t - \sin t). \end{aligned}$$

Таким образом, оба способа дают один и тот же результат, как и должно быть.

Замечание. Так как $\frac{1}{p^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{p - a} - \frac{1}{p + a} \right)$, $a > 0$, то $\frac{1}{(p^2 - a^2)^2} =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4a^2} \left[\frac{1}{(p - a)^2} - \frac{2}{(p - a)(p + a)} + \frac{1}{(p + a)^2} \right] = \frac{1}{4a^2} \left[\frac{1}{(p - a)^2} - \frac{2}{p^2 - a^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(p + a)^2} \right] \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{4a^2} \left[t(e^{at} + e^{-at}) - \frac{2}{a} \operatorname{sh} at \right] = \frac{t}{2a^2} \operatorname{ch} at - \frac{1}{2a^3} \operatorname{sh} at = \\ &= \frac{1}{2a^2} \left(t \operatorname{ch} at - \frac{1}{a} \operatorname{sh} at \right). \text{ Таким образом,} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(p^2 - a^2)^2} \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{2a^2} \left(t \operatorname{ch} at - \frac{1}{a} \operatorname{sh} at \right). \quad (2.8)$$

И этот процесс возведения в натуральную степень n можно продолжить.

2.5 Решение системы дифференциальных уравнений

ПРИМЕР 2.23. Решить систему дифференциальных уравнений при

заданных начальных условиях:
$$\begin{cases} x'(t) - 3x(t) + 4y(t) = 0 \\ y'(t) - 4x(t) + 3y(t) = 0 \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

Решение. Пусть имеем $x(t) \xleftrightarrow{\cdot} X(p)$ и $y(t) \xleftrightarrow{\cdot} Y(p)$, тогда по теореме

дифференцирования оригинала $x'(t) \xleftrightarrow{\cdot} pX(p) - x(0) = pX(p) - 1$ и

$$y'(t) \xleftrightarrow{\cdot} pY(p) - y(0) = pY(p) - 1$$

Подставим в систему:

$$\begin{cases} pX(p) - 1 - 3X(p) - 4Y(p) = 0 \\ pY(p) - 1 - 4X(p) + 3Y(p) = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (p-3)X(p) - 4Y(p) = 1 \\ -4X(p) + (p+3)Y(p) = 1 \end{cases}$$

Мы получили систему из двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными. Можно решить её с помощью формулы Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} (p-3) & -4 \\ -4 & (p+3) \end{vmatrix} = (p-3)(p+3) - 16 = p^2 - 25$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & (p+3) \end{vmatrix} = (p+3) + 4 = p+7$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} (p-3) & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = (p-3) + 4 = p+1$$

$$X(p) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{p+7}{p^2-25}; \quad Y(p) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{p+1}{p^2-25}$$

$$X(p) = \frac{p+7}{p^2-25} = \frac{p+7}{(p+5)(p-5)} = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{p-5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p+5}$$

$$Y(p) = \frac{p+1}{p^2-25} = \frac{p+1}{(p+5)(p-5)} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{p-5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{p+5}.$$

Теперь для найденных функций – изображений $X(p)$ и $Y(p)$ необходимо найти функции – оригиналы $x(t)$ и $y(t)$. Для этого по таблице соответствий для

каждой дроби находим оригинал $\frac{1}{p-5} \xrightarrow{\bullet} e^{5t}$; $\frac{1}{p+5} \xrightarrow{\bullet} e^{-5t}$.

$$\text{Ответ: } x(t) = \frac{6}{5}e^{5t} - \frac{1}{5}e^{-5t} = e^{5t} + \frac{2}{5}\text{sh}5t; \quad y(t) = \frac{3}{5}e^{5t} + \frac{2}{5}e^{-5t} = \frac{1}{5}e^{5t} + \frac{4}{5}\text{ch}5t.$$

ПРИМЕР 2.24. Найти решение системы дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях

$$\begin{cases} x''(t) - y'(t) = 0, & x(0) = y'(0) = 0, \\ x'(t) - y''(t) = 2 \cos t, & x'(0) = y(0) = 2 \end{cases}$$

Решение. Пусть имеем $x(t) \xleftarrow{\bullet} X(p)$; $y(t) \xleftarrow{\bullet} Y(p)$, тогда согласно теореме дифференцирования оригинала с использованием начальных условий имеем

$$x'(t) \xleftarrow{\bullet} p X(p); \quad x''(t) \xleftarrow{\bullet} p^2 X(p) - 2;$$

$$y'(t) \xleftarrow{\bullet} p Y(p) - 2; \quad y''(t) \xleftarrow{\bullet} p[pY(p) - 2] = p^2 Y(p) - 2p.$$

Подставляем полученные изображения в систему. Предварительно найдем из таблицы соответствий $\cos t \xleftarrow{\bullet} \frac{p}{p^2 + 1}$. Получим систему операторных

уравнений

$$\begin{cases} p^2 X(p) - 2 - (p Y(p) - 2) = 0 \\ p X(p) - (p^2 Y(p) - 2p) = 2 \frac{p}{p^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p^2 X(p) - p Y(p) = 0 \\ X(p) - p Y(p) = -2 + \frac{2}{p^2 + 1} = 2 \left(\frac{1}{p^2 + 1} - 1 \right) = -\frac{2p^2}{p^2 + 1}. \end{cases}$$

Относительно неизвестных $X(p)$ и $Y(p)$ имеем систему из 2-х линейных неоднородных уравнений, которую решаем по формулам Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} p^2 & -p \\ 1 & -p \end{vmatrix} = -p^3 + p = p(1 - p^2)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -p \\ -\frac{2p^2}{p^2 + 1} & -p \end{vmatrix} = \frac{-2p^3}{p^2 + 1}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} p^2 & 0 \\ 1 & -\frac{2p^2}{p^2 + 1} \end{vmatrix} = \frac{-2p^4}{p^2 + 1}.$$

$$X(p) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-2p^3}{(p^2 + 1)p(1 - p^2)} = \frac{2p^2}{(p^2 - 1)(p^2 + 1)} = \frac{1}{p^2 - 1} + \frac{1}{p^2 + 1};$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-2p^4}{(p^2 + 1)p(1 - p^2)} = \frac{2p^3}{(p^2 + 1)(p^2 - 1)} = p \left(\frac{1}{p^2 - 1} + \frac{1}{p^2 + 1} \right) =$$

$$= \frac{p}{p^2 - 1} + \frac{p}{p^2 + 1}.$$

И далее по таблице для каждой дроби находим оригинал. В результате получаем $x(t) = \operatorname{sh} t + \sin t$; $y(t) = \operatorname{ch} t + \cos t$. Пример решен.

3 Материалы для самостоятельной работы студентов

3.1 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 1 Понятие оригинала. Условия, которым удовлетворяет оригинал. Единичная функция Хевисайда.
- 2 Изображение Лапласа. Необходимое условие. Аналитичность изображения (формулировка).
- 3 Единственность оригинала. Свойства линейности изображения Лапласа.
- 4 Теоремы подобия, запаздывания и смещения.
- 5 Дифференцирование оригинала. Следствие. Интегрирование оригинала.
- 6 Интегрирование изображения.
- 7 Свертка функций.
- 8 Интеграл Дюамеля.
- 9 Теоремы разложения.
- 10 Операторный метод интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

3.2 ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

3.2.1 Найти изображения функций $f(t)$ и $f'(t)$

- 1) $f(t) = \sin t - t \cos t$; 2) $f(t) = t \sin t + \cos t$;
- 3) $f(t) = e^{-t} \sin^2(t)$; 4) $f(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} t \sin t + \operatorname{sh} t \cos t)$.

3.2.2 Найти изображения функций

- 1) $\int_0^t \frac{\operatorname{ch} \tau - 1}{\tau} d\tau$; 2) $\int_0^t \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} d\tau$;
- 3) $\int_0^t \frac{\operatorname{sh} \tau}{\tau} d\tau$; 4) $\int_0^t \frac{\cos \beta \tau - \cos \alpha \tau}{\tau} d\tau$.

3.2.3 Используя теорему запаздывания, найти изображения следующих функций:

- 1) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t < \tau \\ 0 & \text{при } t \geq \tau \end{cases}$ (единичный импульс, действующий в

течение промежутка времени от $t = 0$ до $t = \tau$).

$$2) f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < T \\ 1 & \text{при } T \leq t < T + \tau \quad (\text{запаздывающий единичный импульс}). \\ 0 & \text{при } t \geq T + \tau \end{cases}$$

$$3) f(t) = \begin{cases} \frac{h}{\tau} t & \text{при } 0 \leq t < \tau \\ h & \text{при } \tau \leq 2\tau \\ -\frac{h}{\tau}(t - 3\tau) & \text{при } 2\tau \leq t < 3\tau \\ 0 & \text{при } t \geq 3\tau \end{cases}$$

$$4) f(t) = \begin{cases} h & \text{при } 0 \leq t < 1 \\ h e^{-(t-1)} & \text{при } t \geq 1 \end{cases}.$$

$$5) f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{при } 0 \leq t < \pi \\ \text{sh}(t - \pi) & \text{при } t \geq \pi \end{cases}$$

3.2.4 Используя результат примера 2.4, зная функцию $f_0(t)$ и период ℓ , найти изображения следующих периодических функций.

$$1) f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t < \tau \\ 0 & \text{при } \tau \leq t < T \end{cases}; \quad \ell = T$$

(периодическая последовательность единичных импульсов)

$$2) f(t) = \begin{cases} \frac{h}{c} t & \text{при } 0 \leq t < c \\ \frac{h}{c} & \text{при } c \leq t < 2c \end{cases}; \quad \ell = 2c$$

Найти изображение функций

$$3) f(t) = 1 + e^{-t} \eta(t - 1);$$

$$4) f(t) = 5 - 2t \eta(t - 3).$$

3.2.5 Найти оригинал по заданному его изображению и сделать проверку

$$1) \frac{3 - 2p^3}{p^4}; \quad 2) \frac{1}{(p^2 + 1)p^2}; \quad 3) \frac{4 - p}{(p - 2)^3}; \quad 4) \frac{p + 2}{p^2 - 1};$$

$$\begin{aligned}
 &5) \frac{5p^3 + 5p^2 - 11p + 3}{(p+3)p^3}; \quad 6) \frac{1}{p^2 - 2p + 5}; \quad 7) \frac{p+3}{p^2 + 6p + 11}; \\
 &8) \frac{3p^4 - 12p^3 + 16p^2 - 6p + 8}{p^5 - 4p^4 + 5p^3}; \quad 9) \frac{3p+2}{(p^2 - 4p + 6)^2}; \\
 &10) \frac{1}{p} (2 - 3e^{-p} + e^{-3p}); \quad 11) \frac{1}{p^4} + \frac{1}{(p+4)^4} e^{-2p}; \quad 12) -\frac{p^2}{(p^2 + 1)^2}.
 \end{aligned}$$

3.2.6 Используя теорему умножения изображений и формулу Дюамеля, найти оригиналы $f(t)$ для следующих изображений:

$$\begin{aligned}
 &1) \frac{1}{p^2(p-a)}; \quad 2) \frac{k}{p(p^2 + k^2)}; \quad 3) \frac{p}{(p^2 + a^2)^2}; \quad 4) \frac{1}{(p^2 + a^2)^2}; \\
 &5) \frac{1}{(p^2 - 6p + 13)(p^2 - 6p + 10)}; \quad 6) \frac{p^2}{(p^2 + 4)(p^2 + 9)}.
 \end{aligned}$$

3.2.7 Используя первую теорему разложения, найти оригинал $f(t)$ по его изображению

$$1) \frac{1}{p} \cos \frac{1}{p}; \quad 2) \frac{1}{p} \sin \frac{1}{p}.$$

3.2.8 Используя вторую теорему разложения, найти оригинал $f(t)$ для следующих изображений:

$$\begin{aligned}
 &1) \frac{p^2 + 1}{p(p+1)(p+2)(p+3)}; \quad 2) \frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}; \\
 &3) \frac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}; \quad 4) \frac{1}{(p+1)^3(p+3)}.
 \end{aligned}$$

3.2.9 Решить дифференциальные уравнения при указанных начальных условиях

$$\begin{aligned}
 &1) x'' + 4x = \cos 3t, \quad x(0) = x'(0) = 2; \\
 &2) x'' - 2\alpha x' + (\alpha^2 + \beta^2)x = 0; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1; \\
 &3) x''' + x' = e^{2t}; \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0; \\
 &4) x^{iv} + x''' = \cos t; \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0, \quad x'''(0) = 2; \\
 &5) 4x''' - 8x'' - x' - 3x = -8e^t; \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 1; \\
 &6) x^{iv} + 4x = t^2; \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0;
 \end{aligned}$$

$$7) x^{(v)} + 2x''' + x' = 2t + \cos t; \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = x^{(iv)}(0) = 0;$$

$$8) x'' - 2x' + 2x = 1 + \eta(t-1), \quad x(0) = x'(0) = 0;$$

$$9) x'' + \omega^2 x = a\{\eta(t) + \eta(t-\tau)\}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

3.2.10 Решить систему дифференциальных уравнений

$$1) \begin{cases} x' + y = 0, \\ y' - 2x - 2y = 0, \end{cases} \quad x(0) \neq y(0) = 1;$$

$$2) \begin{cases} x' + 2x + 2y = 10e^{2t}, & x(0) = 1 \\ y' - 2x + y = 7e^{2t}, & y(0) = 3 \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} 2x' + y' - 3x = 0 \\ x'' + y' - 2y = e^{2t} \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 1, \quad y(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = y - z \\ y' = x + y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2, \quad z(0) = 3.$$

3.2.11 Решить дифференциальное уравнение и систему двух уравнений, если все начальные условия равны нулю.

$$1) x'' + x = f(t), \quad f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t < 1, \\ -1 & \text{при } 1 \leq t < 2, \\ 0 & \text{при } t \geq 2. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x'' - y = 0 \\ y'' - x = f(t) \end{cases}, \quad f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t < \pi, \\ -1 & \text{при } \pi \leq t < 2\pi, \\ 0 & \text{при } t \geq 2\pi. \end{cases}$$

ОТВЕТЫ:

3.2.1

$$1) \frac{2}{(p^2 + 1)^2}, \quad \frac{2p}{(p^2 + 1)}; \quad 2) \frac{p(p^2 + 3)}{(p^2 + 1)^2}, \quad \frac{p^2 - 1}{(p^2 + 1)^2};$$

$$3) \frac{2}{(p+1)(p^2 + 2p + 2)}, \quad \frac{2p}{(p+1)(p^2 + 2p + 2)};$$

$$4) \frac{p^2}{p^4 + 4}, \quad \frac{p^3}{p^4 + 4}.$$

3.2.2

$$\begin{aligned} 1) & -\frac{1}{2p} \ln \left(1 - \frac{1}{p^2} \right); & 2) & \frac{1}{p} \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right); & 3) & \frac{1}{2p} \ln \frac{p+1}{p-1}; \\ 4) & \frac{1}{2p} \ln \frac{p^2 + \alpha^2}{p^2 + \beta^2}; & 5) & \frac{1}{p} \ln \frac{p-\alpha}{p-\beta}. \end{aligned}$$

3.2.3

$$\begin{aligned} 1) & \frac{1}{p} (1 - e^{-p\tau}); & 2) & \frac{1}{p} (1 - e^{-p\tau}) e^{-pT}; & 3) & \frac{h}{\tau p^2} (1 - e^{-p\tau} - e^{-2p\tau} + e^{-3p\tau}); \\ 4) & h \left(\frac{1}{p} + \frac{e^{-p}}{p(p-1)} \right); & 5) & \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{2p^2 e^{-p\pi}}{p^4 + 1}. \end{aligned}$$

3.2.4

$$\begin{aligned} 1) & \frac{1 - \ell^{-p\tau}}{p(1 - \ell^{-p\tau})}; & 2) & \frac{h}{cp^2} \operatorname{th} \frac{cp}{2}; & 3) & \frac{1}{p} + \frac{e^{-(p+1)}}{p+1}; \\ 4) & \frac{5}{p} - \frac{2}{p} e^{-2p} \left(\frac{1}{p} + 2 \right) + \frac{e^{-3p}}{p}. \end{aligned}$$

3.2.5

$$\begin{aligned} 1) & -\frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t; & 2) & e^{3t} \cos(t\sqrt{2}); & 3) & 3 + \frac{t^2}{t} - 2e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t; \\ 4) & e^{2t} \left[\left(\frac{3}{2\sqrt{2}} t + \sqrt{2} \right) \sin(t\sqrt{2}) - 2t \cos(t\sqrt{2}) \right]; \\ 5) & 2 - 3 \cdot \eta(t-1) + \eta(t-3); \\ 6) & \frac{1}{6} t^3 [1 + e^{-3t} \eta(t-2)]; & 7) & \frac{1}{2} (t \cos t + \sin t). \end{aligned}$$

3.2.6

$$\begin{aligned} 1) & \frac{1}{a^2} (e^{at} - at - 1); & 2) & \frac{1}{k} (1 - \cos kt); & 3) & \frac{t}{2a} \sin at; \\ 4) & \frac{1}{2a^3} (\sin at - at \cos at); & 5) & \frac{1}{6} e^{3t} (2 \sin t - \sin 2t); \\ 6) & \frac{1}{5} (3 \sin 3t - 2 \sin 2t). \end{aligned}$$

3.2.7

$$1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^2}{[(2k)!]^2}; \quad 2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{[(2k+1)!]^2};$$

3.2.8

$$1) \frac{1}{6} - e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-3t}; \quad 2) -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{12}e^{-2t};$$

$$3) \frac{1}{2}(t^2 e^{2t} - 4te^{2t} + 6e^{2t} - 2te^t - 6e^t);$$

$$4) \frac{1}{8}(2t^2 e^{-t} - 2te^{-t} - e^{-t} - e^{-3t}).$$

3.2.9

$$1) x = \frac{11}{5} \cos 2t - \frac{1}{5} \cos 3t + \sin 2t; \quad 2) x = \left(\frac{1}{\beta}\right) e^{\alpha t} \sin t;$$

$$3) x = -\frac{1}{2} + \frac{e^{2t}}{10} + \frac{2}{5} \cos t - \frac{1}{5} \sin t;$$

$$4) x = t^2 - t + 1 - \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{\cos t}{2} - \frac{\sin t}{2};$$

$$5) x = e^t; \quad 6) x = \frac{1}{4}(t^2 - \sin t \cdot \sin t);$$

$$7) x = t^2 - 4 + \left(4 - \frac{3}{8}t\right) \cos t + \left(\frac{3}{8} + t - \frac{1}{8}t^2\right) \sin t;$$

$$8) x = \frac{1}{2}[1 - e^t(\cos t - \sin t)] \cdot 1(t) + \frac{1}{2}[1 - e^t(\cos(t-1) - \sin(t-1))] \eta(t-1);$$

$$9) x = \frac{2a}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega t}{2} [\eta'(t) - \eta(t - \tau)].$$

3.2.10

$$1) \begin{cases} x = e^t(\cos t - 2 \sin t) \\ y = e^t(\cos t + 3 \sin t) \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = e^{2t} \\ y = y = 3e^{2t} \end{cases}$$

3.2.11

$$1) x(t) = 2 \left[\sin^2 \frac{t}{2} - 2\eta(t-1) \sin^2 \frac{t-1}{2} + \eta(t-2) \sin^2 \frac{t-2}{2} \right].$$

$$2) x(t) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} t + \cos t - 2) - \eta(t-\pi) [\operatorname{ch}(t-\pi) + \cos(t-\pi)] + \\ + \frac{1}{2} \eta(t-2\pi) [\operatorname{ch}(t-2\pi) + \cos(t-2\pi) - 2];$$

$$y(t) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} t - \cos t) - \eta(t-\pi) [\operatorname{ch}(t-\pi) - \cos(t-\pi)] + \\ + \frac{1}{2} \eta(t-2\pi) [\operatorname{ch}(t-2\pi) - \cos(t-2\pi)].$$

3.3 РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание № 1

Пользуясь определением изображения функции, найти изображения следующих функций

- | | | |
|-------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 1 $f(t) = t;$ | 13 $f(t) = \sin 2t;$ | 25 $f(t) = e^{-t} \cos t;$ |
| 2 $f(t) = t + 1;$ | 14 $f(t) = \cos 2t;$ | 26 $f(t) = t^2 e^t;$ |
| 3 $f(t) = t - 1;$ | 15 $f(t) = t e^t;$ | 27 $f(t) = t^2 e^{-t};$ |
| 4 $f(t) = t^2;$ | 16 $f(t) = \operatorname{sh}(t-1);$ | 28 $f(t) = e^t \operatorname{sh} t;$ |
| 5 $f(t) = (t+1)^2;$ | 17 $f(t) = \operatorname{ch}(t-1);$ | 29 $f(t) = e^t \operatorname{ch} t;$ |
| 6 $f(t) = (t-1)^2;$ | 18 $f(t) = \operatorname{sh} 2t;$ | 30 $f(t) = e^t \sin 2t;$ |
| 7 $f(t) = \sin(t-1);$ | 19 $f(t) = \operatorname{ch} 2t;$ | 31 $f(t) = t + e^{-t};$ |
| 8 $f(t) = \sin(t+1);$ | 20 $f(t) = \sin 3t;$ | 32 $f(t) = e^t \cos 2t;$ |
| 9 $f(t) = \cos(t-1);$ | 21 $f(t) = \cos 3t;$ | 33 $f(t) = t \cdot \sin t;$ |
| 10 $f(t) = \cos(t+1);$ | 22 $f(t) = t e^{-t};$ | 34 $f(t) = t \cdot \cos t;$ |
| 11 $f(t) = t + \sin t;$ | 23 $f(t) = t + e^t;$ | 35 $f(t) = 3 \sin \frac{t}{2};$ |

$$12 \quad f(t) = t + \cos t; \quad 24 \quad f(t) = e^t \sin t; \quad 36 \quad f(t) = 2 + 3a^t.$$

Задание №2

Пользуясь свойствами преобразования Лапласа, найти изображения функций

По теореме подобия и запаздывания

$$1 \quad f(t) = \sin\left(2t - \frac{\pi}{3}\right); \quad 4 \quad f(t) = \sin\left(2t - \frac{2\pi}{3}\right);$$

$$2 \quad f(t) = \sin\left(2t - \frac{2\pi}{3}\right); \quad 5 \quad f(t) = \sin\left(5t - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$3 \quad f(t) = \cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right); \quad 6 \quad f(t) = \cos\left(5t - \frac{\pi}{4}\right).$$

По теореме смещения и подобия

$$7 \quad f(t) = e^{3t} \operatorname{ch} 2t; \quad 11 \quad f(t) = e^{3t} \sin 2t;$$

$$8 \quad f(t) = e^{-t} \operatorname{sh} 3t; \quad 12 \quad f(t) = e^{-2t} \sin 2t;$$

$$9 \quad f(t) = e^{-4t} \operatorname{coz} 2t; \quad 13 \quad f(t) = e^{3t} \operatorname{sh} 2t;$$

$$10 \quad f(t) = e^{-t} \operatorname{ch} 3t; \quad 14 \quad f(t) = e^{2t} \cos 3t.$$

По теоремам смещения, подобия, опережения

$$15 \quad f(t) = e^t \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right); \quad 17 \quad f(t) = e^t \cos\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right);$$

$$16 \quad f(t) = e^{2t} \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right); \quad 18 \quad f(t) = e^{-t} \cos\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right).$$

По теоремам дифференцирования, подобия и смещения

$$19 \quad f(t) = t \cos^2 2t; \quad 24 \quad f(t) = t(e^{2t} + \operatorname{ch} 2t);$$

$$20 \quad f(t) = t \sin^2 2t; \quad 25 \quad f(t) = t(e^t + \operatorname{sh}^2 3t);$$

$$21 \quad f(t) = t^2(e^{4t} + \sin 2t); \quad 26 \quad f(t) = t \cdot e^{3t} \sin 2t;$$

$$22 \quad f(t) = t \sin^3 2t; \quad 27 \quad f(t) = t \cdot \operatorname{sh} 2t;$$

$$23 \quad f(t) = (t+1) \cos^3 2t; \quad 28 \quad f(t) = t \cdot \operatorname{ch} 4t.$$

По теореме интегрирования изображения

$$29 \ f(t) = \frac{e^t - 1}{t};$$

$$30 \ f(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t};$$

$$31 \ f(t) = \frac{\sin^2 t}{t};$$

$$32 \ f(t) = \frac{1 - \cos t}{t};$$

$$33 \ f(t) = \frac{\cos t - \cos 2t}{t};$$

$$34 \ f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{t};$$

$$35 \ f(t) = \frac{1 - \cos 2t}{t};$$

$$36 \ f(t) = \frac{e^{-t} - 1}{t}.$$

Задание № 3

Пользуясь теоремой разложения и свойствами преобразования Лапласа, найти оригиналы следующих изображений:

$$1 \ F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p^2+4)};$$

$$19 \ F(p) = \frac{p-2}{(p+1)(p+2)(p^2+4)};$$

$$2 \ F(p) = \frac{1}{p(p^2+2p+1)(p^2+1)};$$

$$20 \ F(p) = \frac{p}{(p+2)(p^3-1)};$$

$$3 \ F(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)};$$

$$21 \ F(p) = \frac{p-1}{(p-1)^2(p+1)};$$

$$4 \ F(p) = \frac{1}{p(p^2+4p+5)};$$

$$22 \ F(p) = \frac{p}{(p+1)(p^2-6p+10)};$$

$$5 \ F(p) = \frac{1}{p(p^2+1)(p^2-2p+1)};$$

$$23 \ F(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2+4p+5)};$$

$$6 \ F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)};$$

$$24 \ F(p) = \frac{1}{p^4-16};$$

$$7 \ F(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p-1)(p^2+9)};$$

$$25 \ F(p) = \frac{p}{(p+1)^2(p^3-8)};$$

$$8 \ F(p) = \frac{p}{(p-1)^2(p^3+1)};$$

$$26 \ F(p) = \frac{1}{p(p^3+1)};$$

$$9 \ F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p^2+1)};$$

$$27 \ F(p) = \frac{1}{(p+1)(p^3-1)};$$

$$10 \quad F(p) = \frac{2p+3}{p^3+4p^2+5p};$$

$$11 \quad F(p) = \frac{p-1}{p^2(p^2+6p+13)};$$

$$12 \quad F(p) = \frac{1}{(p^2+5p+6)(p^2+1)};$$

$$13 \quad F(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+2p+2)};$$

$$14. \quad F(p) = \frac{p}{(p-1)^2(p^2+2p+5)};$$

$$15 \quad F(p) = \frac{p+8}{(p+1)^2(p^2+4p+5)};$$

$$16 \quad F(p) = \frac{1}{(p-2)^2(p^2+9)};$$

$$17 \quad F(p) = \frac{p}{(p+a)^2(p^2+b^2)}; \quad a \neq b;$$

$$18 \quad F(p) = \frac{5p+3}{(p-1)^2(p^2+2p+5)};$$

$$28 \quad F(p) = \frac{1}{(p-2)^3(p^3+1)};$$

$$29 \quad F(p) = \frac{3p}{(p^2+9)^2};$$

$$30 \quad F(p) = \frac{2p^2}{(p^2+4)^2};$$

$$31 \quad F(p) = \frac{1}{p(1+p^4)};$$

$$32 \quad F(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2-4)};$$

$$33 \quad F(p) = \frac{p+3}{p(p^2-4t+3)};$$

$$34 \quad F(p) = \frac{4-p}{p^2+4p+8};$$

$$35. \quad F(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+4)};$$

$$36 \quad F(p) = \frac{6p-1}{p^2-4p+13}.$$

Задание № 4

Решить следующие дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

$$1 \quad x'' + 3x' = e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1;$$

$$2 \quad x'' - 2x' = e^{2t}, \quad x(0) = x'(0) = 0;$$

$$3 \quad x'' + 2x' - 3x = e^{-t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1;$$

$$4 \quad x'' - x' = t e^t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0;$$

$$5 \quad x'' + 2x' = t, \quad x(0) = x'(0) = 0;$$

$$6 \quad x'' + 2x' + x = \sin t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1;$$

$$7 \quad x'' + x' = 4 \sin^2 t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1;$$

- 8 $x'' - 3x' + 2x = e^t, \quad x(0) = x'(0) = 0;$
- 9 $x'' - 2x' + x = e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1;$
- 10 $x'' - x' = t^2, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1;$
- 11 $x'' - 2x' + 2x = 1, \quad x(0) = x'(0) = 0;$
- 12 $x'' + x' = \cos t, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0;$
- 13 $x'' + 2x' + x = t^2, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0;$
- 14 $x'' + x = t + 1, \quad x(0) = x'(0) = 0$
- 15 $x'' + x = \cos t, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 1;$
- 16 $x'' + 2x' + 5x = 3, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0;$
- 17 $x'' + 2x' + 2x = 1, \quad x(0) = x'(0) = 0;$
- 18 $x'' + x = 1, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 0$
- 19 $x'' + 4x = t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0;$
- 20 $x'' - 2x' + 5x = 1 - t, \quad x(0) = x'(0) = 0;$
- 21 $x'' + x' = \cos t, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0;$
- 22 $x'' - x' = te^t, \quad x(0) = x'(0) = 0;$
- 23 $x'' + 2x' + x = t, \quad x(0) = x'(0) = 0;$
- 24 $x'' - x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1;$
- 25 $x'' - x = \sin t, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 0$
- 26 $x'' + x = 2\sin t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1;$
- 27 $x'' - 2x' + x = t - \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0;$
- 28 $x'' + 2x' + x = 2\cos^2 t, \quad x(0) = x'(0) = 0;$
- 29 $x'' + 4x = 2\cos t \cdot \cos 3t, \quad x(0) = x'(0) = 0;$
- 30 $x'' + x = te^t + 4\sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0;$
- 31 $x'' + x = \sin t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1/2;$
- 32 $x'' + x = 2\sin t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1;$
- 33 $x'' + 2x' + 10x = 2e^{-t} \cos 3t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2;$
- 34 $x'' + 4x = \sin 3t, \quad x(0) = x'(0) = 0;$

$$35 \quad x'' - 2x' + 2x = 2t - 2, \quad x(0) = x'(0) = 0;$$

$$36 \quad x'' - 2x' - 3x = e^{3t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Задание № 5

Решить следующие системы дифференциальных уравнений
операционным исчислением

$$1 \quad \begin{cases} x' + y - x = \sin t - t, \\ y' + x = t + 1 + \cos t, \end{cases} \quad x(0) = 1; \quad y(0) = 0;$$

$$2 \quad \begin{cases} x' + y = 2t + e^t, \\ y' - y + x = t^2, \end{cases} \quad x(0) = 0; \quad y(0) = 1;$$

$$3 \quad \begin{cases} x' + x + y = 1 + t + \sin t, \\ y' + x = t + \cos t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0;$$

$$4 \quad \begin{cases} x' + x + y = t^2, \\ y' + x = 2t + e^{-t}, \end{cases} \quad x(0) = 1; \quad y(0) = 0;$$

$$5 \quad \begin{cases} x'' - x + y = e^t + 2\cosh t, \\ y'' + y' + x = 0, \end{cases} \quad x(0) = 0; \quad y(0) = -y'(0) = x'(0) = 1;$$

$$6 \quad \begin{cases} x' + x + y = 2 + \sinh t, \\ y' + y - x = -(2\sinh t + \cosh t), \end{cases} \quad x(0) = 1; \quad y(0) = 0;$$

$$7 \quad \begin{cases} x'' - x' + y = 1 - \sin t, \\ x'' + y' - x = -1 + 2\cos t, \end{cases} \quad x(0) = x'(0) = 0; \quad y(0) = y'(0) = 0;$$

$$8 \quad \begin{cases} x'' + x + y = 2e^t + \cos t, \\ y'' + y + x = e^t + \sin t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = x'(0) = 1; \quad y'(0) = 0;$$

$$9 \quad \begin{cases} x' + x - y = e^t, \\ y' + y - x = e^t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1;$$

$$10 \quad \begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ x'' + 2y' + x = 0, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = x'(0) = 0;$$

$$11 \quad \begin{cases} x'' - 3x' + 2x + y' - y = 0, \\ y'' - 5y' + 4y - x' + x = 0, \end{cases} \quad x(0) = x'(0) = y'(0) = 0; \quad y(0) = 1;$$

- 12 $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2x + 2y, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1;$
- 13 $\begin{cases} 2x'' - x' + 9x - y'' - y' - 3y = 0, \\ 2x'' + x' - 7x + y'' + y' - 5y = 0, \end{cases} \quad \begin{aligned} x(0) &= x'(0) = 1 \\ y(0) &= y'(0) = 1 \end{aligned}$
- 14 $\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0;$
- 15 $\begin{cases} 3x' + 2x + y' = 1, \\ x' + 4y' + 3y = 0, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0;$
- 16 $\begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ -2x + y' - y = t, \end{cases} \quad x(0) = 2; \quad y(0) = 4;$
- 17 $\begin{cases} x' - x + 2y = 0, \\ x'' - 2y' = 2t - \cos 2t, \end{cases} \quad x(0) = 0; \quad x'(0) = -1; \quad y(0) = \frac{1}{2};$
- 18 $\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ x'' + 2y' + x = 0, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = x'(0) = 0;$
- 19 $\begin{cases} x'' - 4x' - y' + y = 1, \\ x' + 6x + y'' - y' = e^{4t}, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0;$
- 20 $\begin{cases} 2x'' - x' + 9x - y'' - y' - 3y = 0, \\ 2x'' + x' + 7x - y'' + y' - 5y = 0, \end{cases} \quad \begin{aligned} x(0) &= x'(0) = 1; \\ y(0) &= y'(0) = 0; \end{aligned}$
- 21 $\begin{cases} x' = -y - z, \\ y' = -x - z, \\ z' = -x - y, \end{cases} \quad x(0) = -1; \quad y(0) = 0; \quad z(0) = 1;$
- 22 $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = 3x + z, \\ z' = 3x + y, \end{cases} \quad x(0) = 0; \quad y(0) = z(0) = 1;$
- 23 $\begin{cases} x' = 3y - x, \\ y' = y + x + e^t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1;$
- 24 $\begin{cases} x'' + x' + y' + y = 0, \\ y' = 2x + 2y, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1; \quad x'(0) = 1;$

$$25 \begin{cases} -x'' - x' + y = \cos t, \\ x'' - y'' + y' = 2\cos t + \sin t, \end{cases} \quad x'(0) = y(0) = 0; \quad x(0) = y'(0) = 1;$$

$$26 \begin{cases} x'' + 3x - y'' = 0, \\ 3y + x' + y' = 5\cos 2t, \end{cases} \quad x(0) = y'(0) = 0; \quad x'(0) = 2; \quad y(0) = 1;$$

$$27 \begin{cases} x' + y = 2\cos t, \\ y' + x = 0, \end{cases} \quad x(0) = 0; \quad y(0) = 1;$$

$$28 \begin{cases} x'' - x' + y' = 2\sin 2t, \\ y' + 4y + x'' = \cos 2t - 1, \end{cases} \quad x(0) = 1; \quad y(0) = x'(0) = 0;$$

$$29 \begin{cases} x' + y = 2\cosh t, \\ y' - x = 0, \end{cases} \quad x(0) = 0; \quad y(0) = 1;$$

$$30 \begin{cases} x'' - x + y = e^{-t}, \\ y'' + y + x = 2t + 4\cosh t, \end{cases} \quad x(0) = 2; \quad x'(0) = 3; \\ y(0) = 1; \quad y'(0) = 0;$$

$$31 \begin{cases} x' - 2y = 0, \\ y' - 2x = 0 \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 2;$$

$$32 \begin{cases} x' - 3x - 4y = 0, \\ y' = 4x - 3y \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

$$33 \begin{cases} x' + x - y = \sin t, \\ y' + 2x = \sin t, \end{cases} \quad x(0) = 0; \quad y(0) = 1;$$

$$34 \begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = 4x - 3y \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1;$$

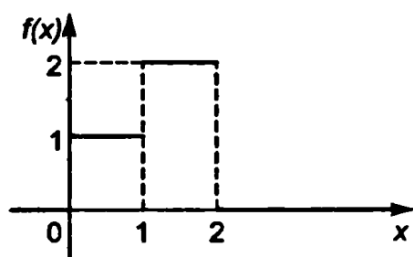
$$35 \begin{cases} x' + 2x + 2y = 10e^{2t}, \\ y' - 2x + y = 7e^{2t}, \end{cases} \quad x(0) = 1; \quad y(0) = 3;$$

$$36 \begin{cases} x' = y - z, \\ y' = x + y, \\ z' = x + z, \end{cases} \quad x(0) = 1; \quad y(0) = 2; \quad z(0) = 3.$$

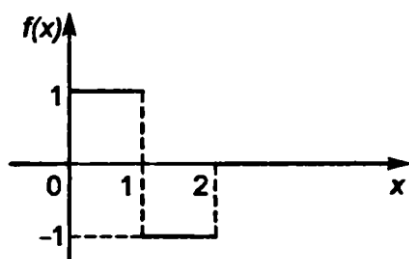
Задание № 6

Найти изображение по графику оригинала.

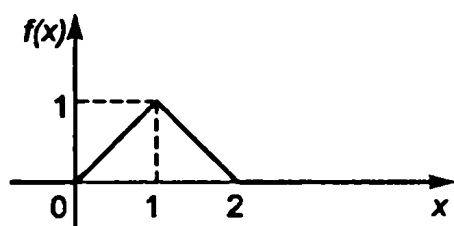
1



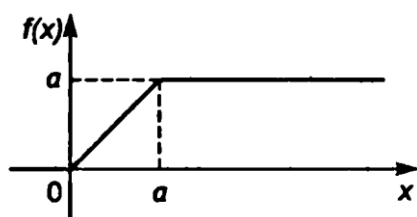
2



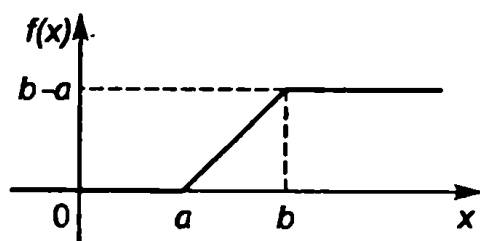
3



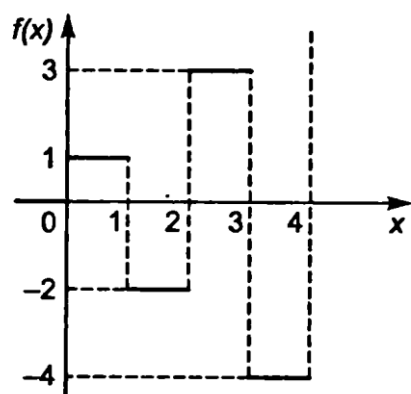
4



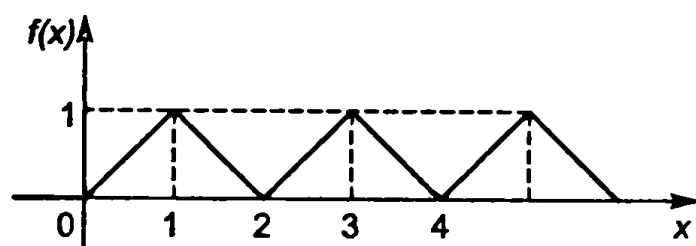
5



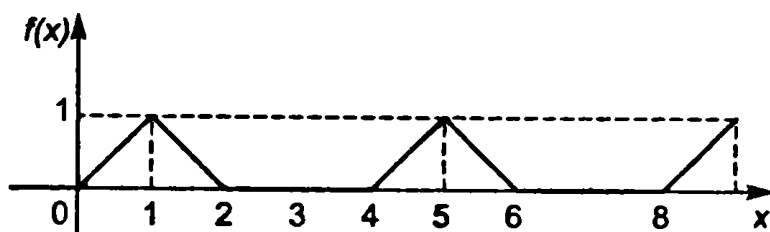
6



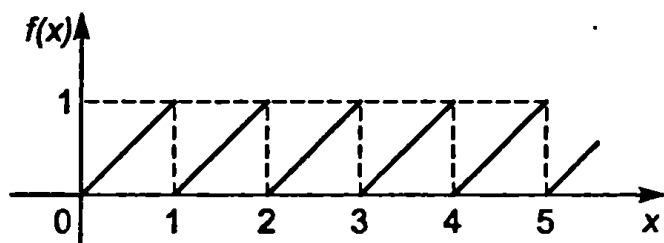
7



8



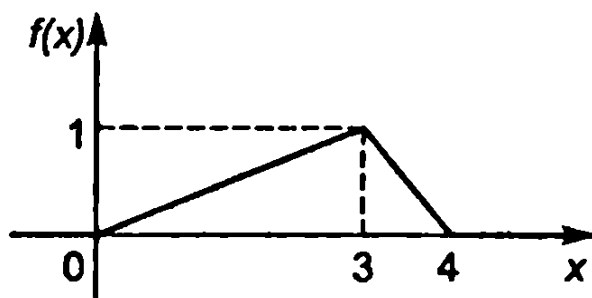
9



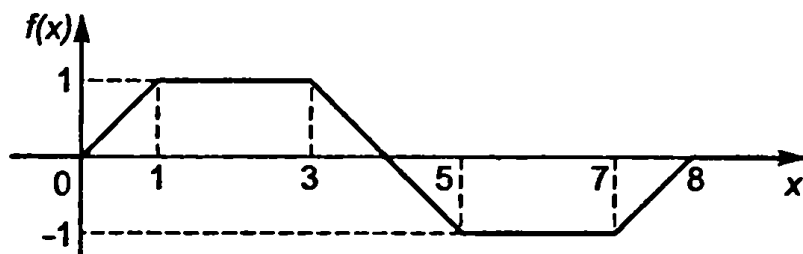
10



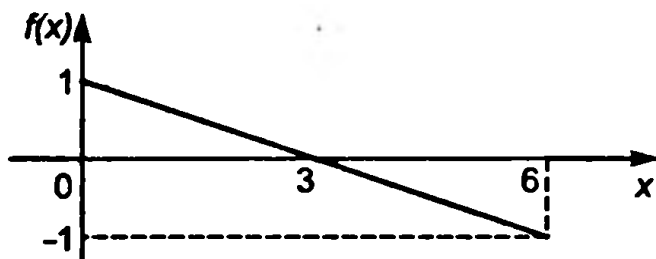
11



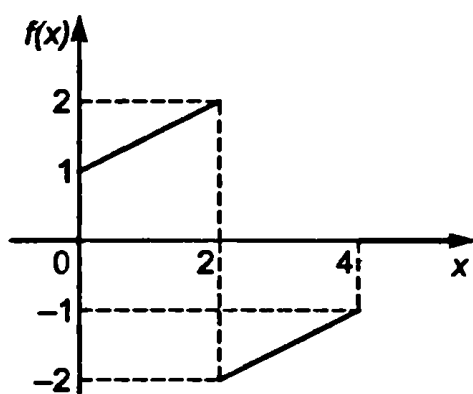
12



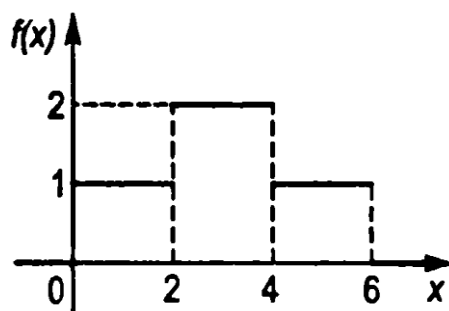
13

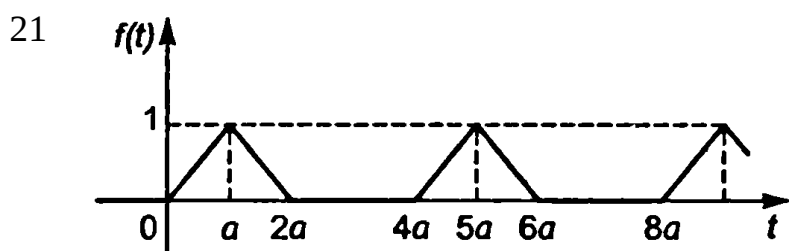
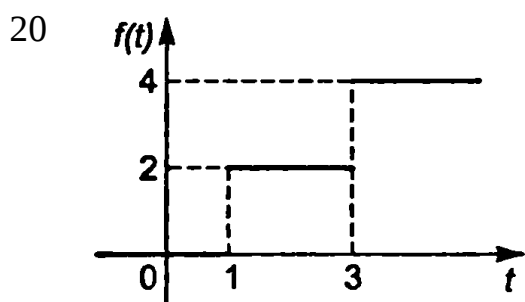
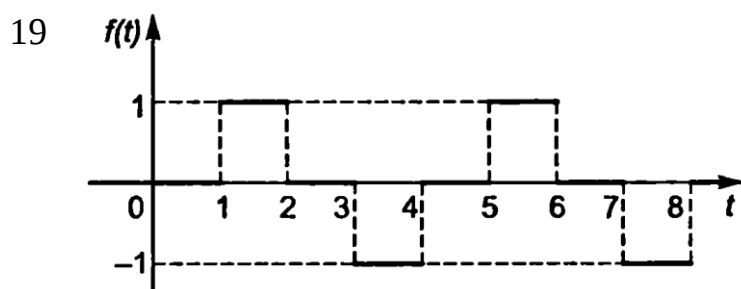
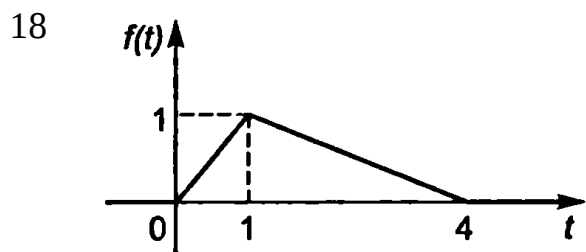
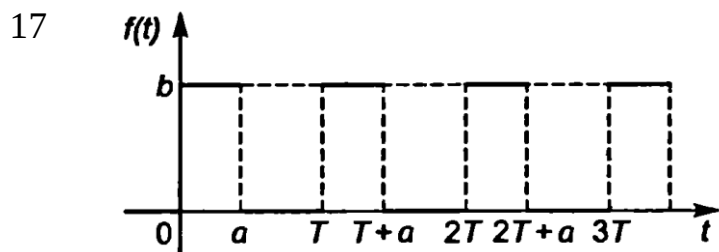
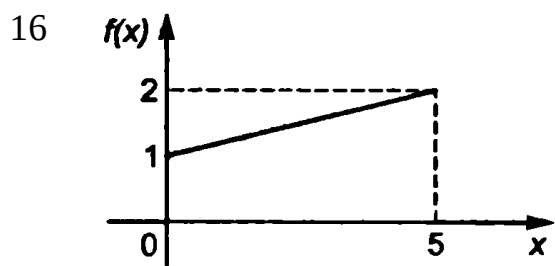


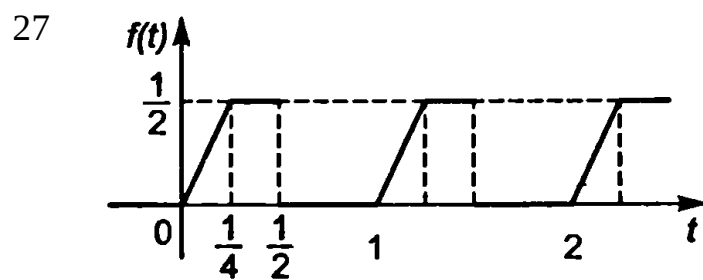
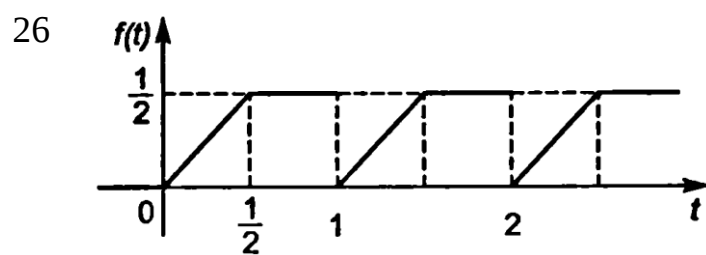
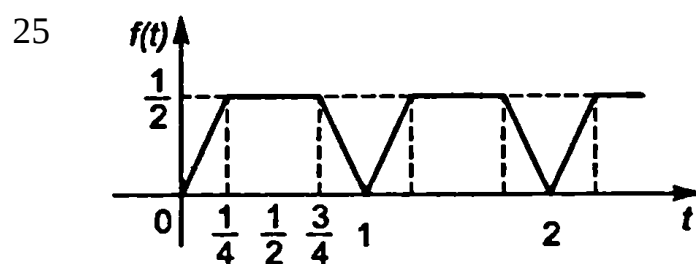
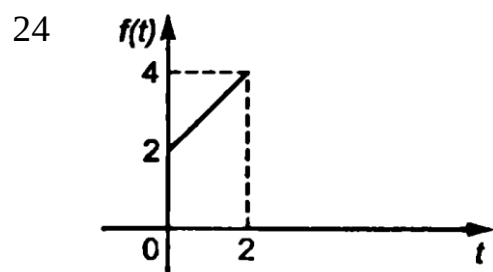
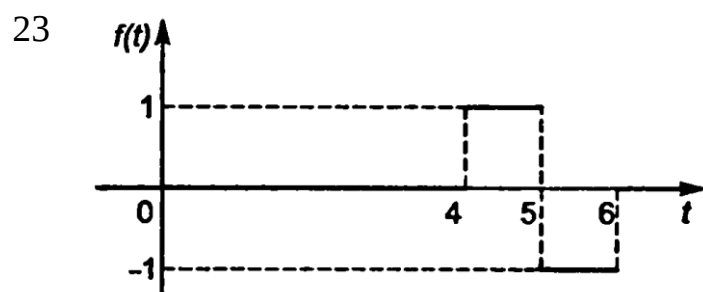
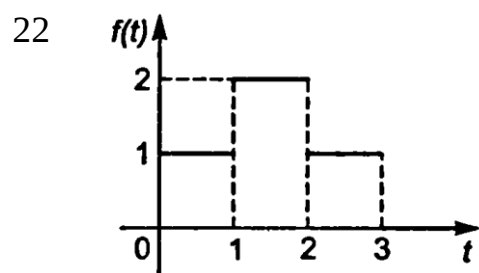
14

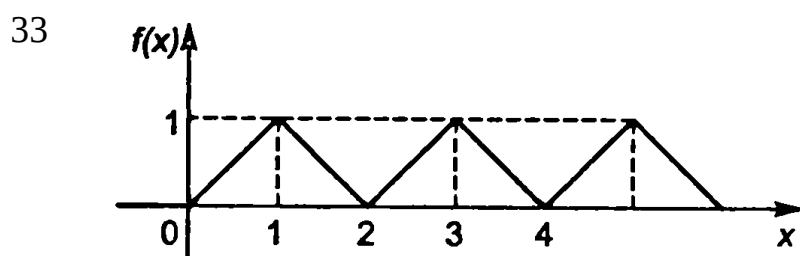
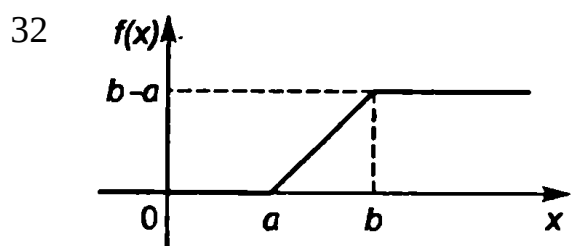
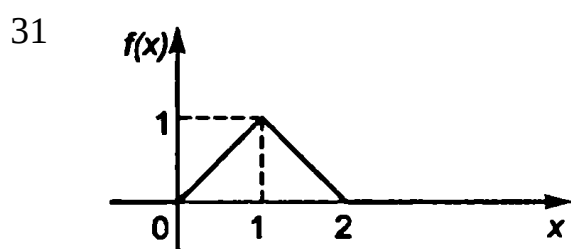
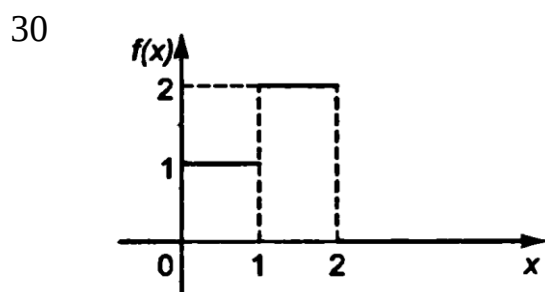
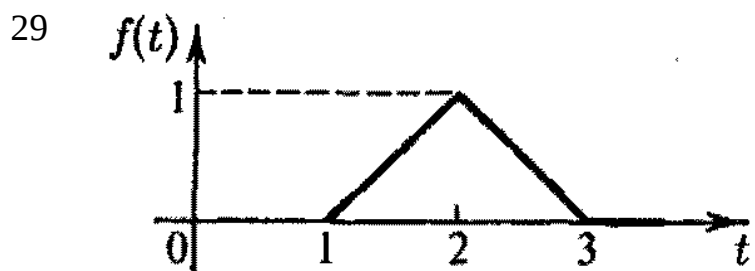
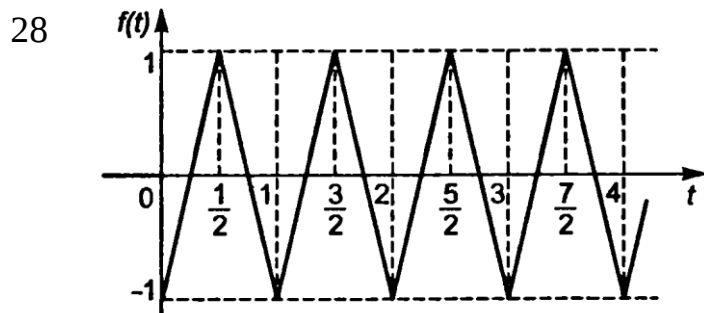


15

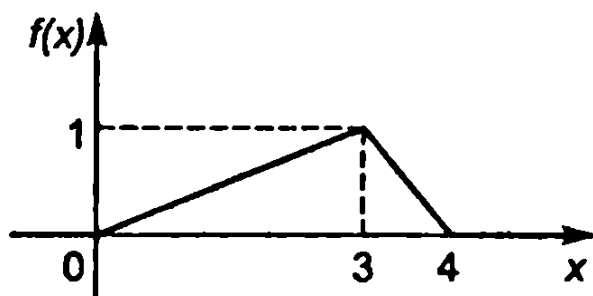




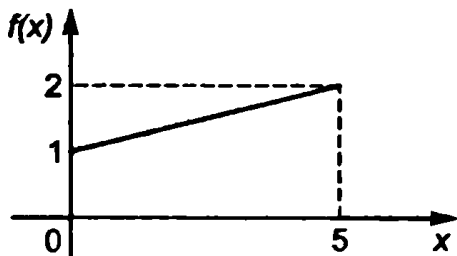




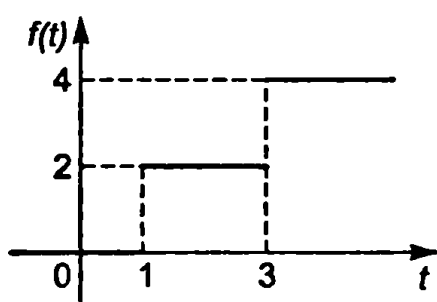
34



35



36



3.4 Решение варианта №0

Задание 1. Пользуясь определением функции–изображением, найти $F(p)$

для следующего оригинала $f(t) = e^{3t}$.

Решение. Изображение функции находится по формуле

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt.$$

$$\text{В нашем случае } F(p) = \int_0^{+\infty} e^{3t} \cdot e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-(p-3)t} dt =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{3-p} e^{-(p-3)t} \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3-p} \cdot e^{-(p-3)b} - \frac{1}{3-p} \cdot e^{-(p-3) \cdot 0} \right) = \frac{1}{3-p} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{(p-3)b}} - 1 \right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{при } \operatorname{Re}_p > 3 \\ \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{(p-3)b}} = 0 \end{array} \right| = -\frac{1}{3-p} = \frac{1}{p-3}.$$

Следовательно, $e^{3t} \xleftrightarrow{\bullet} \frac{1}{p-3}$. Пример решен.

Задание 2. Пользуясь свойствами преобразования Лапласа, найти изображение для функции-оригинала $f(t) = t^2 \cdot \text{ch}5t$.

Решение. Известно, $\text{ch } t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$. По теореме линейности следует, что

$$\text{ch } t \xleftrightarrow{\bullet} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2p}{p^2-1} = \frac{p}{p^2-1}.$$

По теореме подобия $\text{ch}5t \xleftrightarrow{\bullet} \frac{1}{5} \cdot \frac{p/5}{(p/5)^2-1} = \frac{p}{p^2-5^2}$.

По теореме о дифференцировании изображения

$$(-t)^2 \cdot \text{ch}5t \xleftrightarrow{\bullet} \left[\left(\frac{p}{p^2-5^2} \right)' \right]' = \left[\frac{p' \cdot (p^2-5^2) - p(p^2-5^2)'}{(p^2-5^2)^2} \right]' =$$

$$= - \left[\frac{p^2+5^2}{(p^2-5^2)^2} \right]' = - \frac{2p(p^2+75)}{(p^2-5)^3}. \text{ Пример решен.}$$

Задание 3. Пользуясь теоремой разложения и свойствами преобразования Лапласа, найти оригинал следующего изображения $F(p) = \frac{p}{(p^2+4)^2}$.

Решение. Представим изображение в виде $F(p) = \frac{p}{p^2+4} \cdot \frac{1}{p^2+4}$. Так как

по таблице соответствий $\frac{1}{p^2+4} \xleftrightarrow{\bullet} \frac{1}{2} \sin 2t$, $\frac{p}{p^2+4} \xleftrightarrow{\bullet} \cos 2t$, то на основании

теоремы о свёртке

$$\frac{p}{p^2+4} \cdot \frac{1}{p^2+4} \rightarrow \cos 2t * \frac{1}{2} \sin 2t = \frac{1}{2} \int_0^t \cos 2\tau \sin (2t-2\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^t (\sin 2t + \sin(2t-4\tau)) d\tau = \frac{1}{4} \left(\tau \cdot \sin 2t \Big|_0^t + \frac{1}{4} \cos(2t-4\tau) \Big|_0^t \right) = \frac{1}{4} t \cdot \sin 2t +$$

$$+\frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{4}\cos 2t = \frac{1}{4}t \cdot \sin 2t = f(t). \text{ Пример решен.}$$

Задание 4 Найти изображение $f(t)$ по графику.

Решение

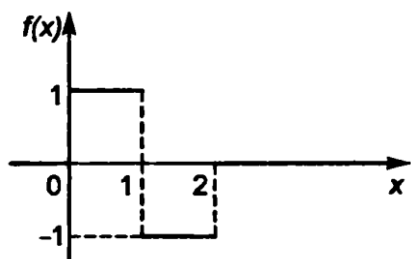


Рисунок 1

Очевидно, $f(t) = \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2)$. По

теореме смещения оригинала $f(t-\tau) \xleftrightarrow{\cdot} e^{-p\tau} F(p)$,

получим

$$f(t) \xleftrightarrow{\cdot} \frac{1}{p} - 2\frac{e^{-p}}{p} + 1e^{-2p} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p}(1 - 2e^{-p} + e^{-2p})$$

Пример решен.

Задание 5. Решить дифференциальное уравнение с заданными начальными условиями. $x'' - x = 1$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.

Решение. Пусть имеем $x(t) \xleftrightarrow{\cdot} X(p)$, тогда по теореме

дифференцирования оригинала: $x'(t) \xleftrightarrow{\cdot} pX(p) - x(0) = pX(p)$;

$x''(t) \xleftrightarrow{\cdot} p^2X(p) - p \cdot x(0) - x'(0) = p^2X(p) + 1$. Подставляем в исходное

уравнение. Для правой части нашего уравнения по таблице соответствий

находим изображение: $1 \xleftrightarrow{\cdot} \frac{1}{p}$.

Тогда операторное уравнение имеет вид: $p^2X(p) + 1 - X(p) = \frac{1}{p}$; решаем его

$$(p^2 - 1)X(p) = \frac{1}{p} - 1; \quad (p-1) \cdot (p+1)X(p) = \frac{1-p}{p}; \quad X(p) = -\frac{1}{p(p+1)}.$$

Для нахождения оригинала для функции $-\frac{1}{p(p+1)}$ воспользуемся её разложением на сумму простейших дробей $\frac{-1}{p(p+1)} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}$.

Далее для каждой из дробей по таблице находим оригиналы и в результате получим $x(t) = -t + e^{-t}$. Пример решен.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ТАБЛИЦА СООТВЕТСТВИЙ ОРИГИНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$	Примечание
1 $\eta(t)$	$\frac{1}{p}$	
2 e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	
3 t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	
4 $t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	
5 $\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	
6 $\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	
7 $\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	
8 $\operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	
9 $e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}$	
10 $e^{at} \cos \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}$	
11 $e^{at} \operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2 - \omega^2}$	
12 $e^{at} \operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 - \omega^2}$	
13 $t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$	
14 $t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$	

Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$	Примечание
15 $t \cdot \text{sh} \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 - \omega^2)^2}$	
16 $t \cdot \text{ch} \omega t$	$\frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$	
17 $t - \frac{1}{a} \sin at$	$\frac{a^2}{p^2(p^2 + a^2)}$	
18 $\text{erf} \frac{a}{2\sqrt{t}}$	$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p}$	
19 $f(at) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$	теорема подобия
20 $e^{at} f(t)$	$F(p - a)$	теорема смещения
21 $f(t - \tau) \quad (\tau > 0, \text{const})$	$e^{-\tau p} F(p)$	теорема запаздывания
22 $f'(t)$	$pF(p) - f(0)$	дифференцирование оригинала
23 $f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} f^{(k)}(0)$	
24 $\int_0^{\tau} f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{p} F(p)$	интегрирование оригинала
25 $(-1)^n t^n f(t)$	$\frac{d^n F(p)}{dp^n}$	дифференцирование изображения
26 $\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{\infty} F(q) dq$	интегрирование изображения
27 $f_1(t) * f_2(t) =$ $= \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$	$F_1(p) \cdot F_2(p)$	умножение изображений
28 $\delta(t)$	1	
29 $\delta_1(t)$	p	
30 $\delta_n(t)$	p^n	

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Список основной литературы

- 1 Араманович И.Г., Лунц Т.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. - М.: Наука, 1968. – 415 с.
- 2 Бугров Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: учебник. – Ростов-на-Дону: Феникс, 1998. – 512 с.
- 3 Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: учебник для втузов. - Ростов-на-Дону: Феникс, 1997.- 511 с.
- 4 Болгов В.А., Демидович Б.П., Ефименко В.А. и др. Сборник задач по математике. Специальные разделы математического анализа /под ред. А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича.- М.: Наука, 1986. – 416 с.
- 5 Жевержеев В.Ф., Кальницкий Л.А., Сапогов Н.А. Специальный курс высшей математики для втузов. - М.: Высшая школа, 1970. - 416 с.
- 6 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2 Т. - М.: Интеграл - Пресс, 2008. – Т.2. – 416 с.
- 7 Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – М.: Айрис – Пресс, 2005. –Ч.2.-256 с.

Список дополнительной литературы

- 1 Данко П.В., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. - М.: Высшая школа, 1997.-Ч.2. – 415 с.
- 2 Краснов М.А., Киселев А.И., Макаренко Т.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: учебное пособие. - М.: Наука, 1981.- 304 с.
- 3 Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Задачи и примеры с подробными решениями: учеб. пособие. - М.: Едиториал УРСС, 2003.-176 с. (Высшая математика в задачах).
- 4 Кожевников Н.И., Краснощекова Т.И., Шишкин Н.Е. Ряды и интегралы Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. - М.: Наука, 1964. – 184 с.
- 5 Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. Ряды и интегралы. Векторный и комплексный анализ. Дифференциальные уравнения. Теория вероятностей. Операционное исчисление. – М.: Айрис-пресс, 2004.-592 с.
- 6 Рябушко А.П. Индивидуальные задания по высшей математики. Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятности. Математическая статистика. В 4 частях. – Минск: Высшэйшая школа, 2006. – Ч 4. – 338 с.

7 Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

8 Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1982. – 487 с.

Список учебных пособий кафедры

1. Основы интегрального преобразования Лапласа Зарипов Э.М., Степанова М.Ф., Якупов В.М. – Уфа: УГНТУ, 1999. – 46 с.

2. Яфаров Ш.А. Практикум по операционному исчислению. –Издание второе. - Уфа, 2006. – 39 с.

3. Расчетные задания по математике. Раздел «Элементы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления». / Андреева Г.П., Егорова Р.А., Якубова Д.Ф. – Уфа: УГНТУ, 2002. – 26 с.

4. Учебно – методический комплекс дисциплины «Математика». Раздел 11. Теория функций комплексного переменного. Элементы операционного исчисления. – Уфа: УГНТУ, 2008. – 229 с.