МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра математики

УЧЕБНО – МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

дисциплины «Математика»

РАЗДЕЛ 13 «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»

Теоретические основы
Методические указания для студентов
Материалы для самостоятельной работы студентов

Уфа
2016

Данное пособие содержит теоретические материалы, способы и методы решения практических задач, задания для самостоятельной работы студентов, контрольные вопросы для самопроверки, список рекомендуемой литературы.

Разработано для студентов, обучающихся по всем формам обучения по направлениям подготовки и специальностям, реализуемым в УГНТУ.

Первое издание пособия вышло в 2008 году.

Авторы:

Абзалимов Р.Р., АкмадиеваТ.Р., Аносова Е.П., Ахтямов Н.Т., Байрамгулова Р.С., Галиуллин М.М., Галиева Л.М., Галиакбарова Э.В., Гимаев Р.Г., Гудкова Е.В., Дружинская Е.В., Егорова Р.А., Жданова Т.Г., Зарипов Э.М., Зарипов Р.М., Исламгулова Г.Ф., Ковалева Э.А., Майский Р.А., Мухаметзянов И.З., Нагаева З.М., Савлучинская Н.М., Сахарова Л.А., Степанова М.Ф., Сокова И.А., Сулейманов И.Н., Умергалина Т.В., Фаткуллин Н.Ю., Хайбуллин Р.Я., Хакимов Д.К., Хакимова З.Р., Чернятьева М.Р., Юлдыбаев Л.Х., Шамшович В.Ф., Шварева Е.Н., Якубова Д.Ф., Якупов В.М., Янчушка А.П., Янчушка З.И., Яфаров Ш.А.

Рецензенты:

Кафедра программирования и вычислительной математики Башкирского государственного педагогического университета.
Заведующий кафедрой д. ф.-м. наук, профессор Р.М. Асадуллин
Кафедра вычислительной математики Башкирского государственного университета
Заведующий кафедрой д. ф.-м. наук, профессор Н.Д. Морозкин

© Уфимский государственный нефтяной технический университет, 2016, дополнение и исправление

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Теоретические основы	4
1.1.	Предмет теории вероятностей. Краткая историческая справка	5
1.2.	Элементарная теория вероятностей	6
1.2.1.	Испытания и события. Классификация событий	6
1.2.2.	Частость, ее свойства	7
1.2.3.	Статическое определение вероятности	8
1.2.4.	Схема случаев. Классическое определение вероятности	10
1.2.5.	Элементы комбинаторики	11
1.2.6.	Геометрическая вероятность	13
1.3.	Математические основы теории вероятности	15
1.3.2.	Условная вероятность. Независимость событий. Теоремы умножения вероятностей	17 17
1.3.3.	Теоремы сложения вероятностей	20
1.3.4.	Формула полной вероятности. Формула Байеса	21
1.4.	Последовательность независимых испытаний	23
1.4.1.	Схема и формула Бернулли	24
1.4.2.	Локальная и интегральная теоремы Муавра – Лапласа	26
1.4.3.	Предельная теорема Пуассона	28
1.5.	Случайные величины	29
1.5.1.	Виды случайных величин	29
1.5.2.	Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины	30
1.5.3.	Биномиальное распределение	31
1.5.4.	Распределение Пуассона	32
1.5.5.	Геометрическое распределение	33
1.5.6.	Гипергеометрическое распределение	34
1.6.	Числовые характеристики дискретных случайных величин	35
1.6.1.	Математическое ожидание дискретной случайной величины	35
1.6.2.	Вероятностный смысл математического ожидания	36
1.6.3.	Свойства математического ожидания	37
1.6.4.	Дисперсия дискретной случайной величины	40

1.6.5.	Свойства дисперсии	44
1.6.6.	Среднее квадратическое отклонение	45
1.6.7.	Числовые характеристики основных распределений дискретных случайных величин	46
1.7.	Начальные и центральные моменты	47
1.8.	Функция распределения вероятностей случайной величины	48
1.8.1.	Свойства функции распределения	49
1.9.	Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины	55
1.9.1.	Свойства плотности распределения	57
1.9.2.	Вероятностный смысл плотности распределения	58
1.10.	Числовые характеристики непрерывных случайных величин	60
1.10.1.	Другие числовые характеристики случайных величин	62
1.11	Нормальное распределение	66
1.11.1.	Нормальная кривая	68
1.11.2.	Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины	71
1.11.3.	Вычисление вероятности заданного отклонения	72
1.11.4.	Правило трех сигм	74
1.12.	Показательное распределение	74
1.12.1	Числовые характеристики показательного распределения	76
1.13	Равномерное распределение вероятностей	77
1.14	Закон больших чисел	78
1.14.1.	Неравенство Чебышева	79
1.14.2.	Теорема Чебышева	80
1.14.3.	Сущность и практическое значение теоремы Чебышева	82
1.14.4.	Теорема Бернулли	84
1.14.5.	Понятие о центральной предельной теореме	84
1.15.	Система двух случайных величин	85
1.15.1.	Понятие о системе нескольких случайных величин	85
1.15.2.	Закон распределения вероятностей дискретной двумерной случайной величины	85

1.15.3. Функция распределения двумерной случайной величины 87
1.15.4. Свойства функции распределения двумерной случайной величины 87
1.15.5. Вероятность попадания случайной точки в полуполосу 89
1.15.6. Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник 89
1.15.7. Плотность совместного распределения вероятностей непрерывной двумерной случайной величины (двумерная плотность вероятности) 89
1.15.8. Нахождение функции распределения системы по известной плотности распределения 90
1.15.9. Свойства двумерной плотности вероятности 91
1.15.10. Отыскание плотностей вероятности составляющих двумерной случайной величины 91
1.15.11. Условные законы распределения составляющих системы дискретных случайных величин 93
1.15.12. Условные законы распределения составляющих системы непрерывных случайных величин 94
1.15.13. Условное математическое ожидание 96
1.15.14. Зависимые и независимые случайные величины 97
1.15.15. Числовые характеристики системы двух случайных величин. Корреляционный момент. Коэффициент корреляции 98
1.15.16. Коррелированность и зависимость случайных величин 100
1.15.17. Нормальный закон распределения на плоскости 101
1.15.18. Линейная регрессия. Прямые линии среднеквадратической регрессии 102
1.15.19. Линейная корреляция. Нормальная корреляция 104
2. Методические указания для студентов 106
2.1. Комбинаторика 107
2.2. Вычисление вероятности по классической формуле 113
2.3. Геометрическое и статистическое определения вероятности 114
2.4. Теоремы сложения и умножения вероятностей 118

2.5.	Формула полной вероятности. Формула Бейеса	121
2.6.	Повторные испытания	123
2.7.	Случайная величина и ее числовые характеристики	125
2.8.	Некоторые распределения дискретных случайных величин	128
2.9.	Некоторые распределения непрерывных случайных величин	130
2.10.	Функция одного случайного аргумента	132
2.11.	Система двух случайных величин. Способы задания системы двух случайных величин	135
2.12.	Числовые характеристики системы двух случайных величин	140
2.13.	Условные законы распределения вероятностей и условные числовые характеристики составляющих двумерной случайной величины. Регрессия	144
2.14.	Предельные теоремы теории вероятности	149
3.	Материалы для самостоятельной работы студентов	154
3.1.	Контрольные вопросы	158
3.2.	Задачи и упражнения для самостоятельной работы	155
3.3.	Расчетные задания	185
Список литературы		213

УЧЕБНО - МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

РАЗДЕЛ 13 «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»

1. Теоретические основы

1.1 Предмет теории вероятностей. Краткая историческая справка

Математика занимается изучением математических моделей реальных явлений. Явления окружающего нас мира можно условно разделить на закономерные (причинно-следственные) и случайные.

Закономерные явления – это явления, исход которых однозначно определяется некоторыми условиями. Примером успешно работающей математической модели закономерных явлений является механика, построенная на системе законов Ньютона. Основу математического аппарата таких моделей составляет теория дифференциальных уравнений.

Случайные явления – это явления, исход которых неоднозначен при повторении опытов с сохранением условий их проведения. К неоднозначности исхода приводит влияние большого числа случайных факторов, каждый из которых сам по себе не может изменить результат опыта. Примеры: броуновское движение, выпадение герба или решки при бросании монеты, рассеивание снарядов при стрельбе по цели и т.д.

Между случайными и закономерными явлениями нет четкой границы. В силу всеобщей связи и взаимозависимости любое явление подвержено влиянию множества случайных факторов, и в этом смысле все явления можно считать случайными. В некоторых случаях действием случайных факторов можно пренебречь, и мы приходим к закономерному явлению. В тех же случаях, когда для правильного описания явления необходимо учитывать действие случайных факторов, мы имеем дело со случайным явлением.

А есть ли вообще закономерности у случайных явлений? Такие закономерности есть, но они обнаруживаются лишь при массовом (многократном) наблюдении случайного явления в одинаковых (однородных) условиях, носят иной, чем для закономерных явлений, характер и нуждаются для своего описания в ином математическом аппарате.

Итак, предметом теории вероятностей является изучение закономерностей массовых однородных случайных явлений, а теория вероятностей – это раздел математики, изучающий математические модели случайных явлений. Теория вероятностей, как и другие разделы математики, возникла из потребностей практики.

Зарождение теории вероятностей относится к середине XVII века и связано с именами Гюйгенса (1629 – 1695), Паскаля (1623 – 1662), Ферма (1601 – 1665) и Якоба Бернулли (1654 – 1705), которые исследовали закономерности, присущие азартным играм.

Потребности естествознания и общественной практики (теория ошибок наблюдений, задачи теории стрельбы, проблемы страхования и демографии) привели к дальнейшему развитию теории вероятностей. Важную роль в развитии аналитических методов теории вероятностей сыграли Муавр (1667 – 1754), Лаплас (1749 – 1827), Гаусс (1777 – 1855), Пуассон (1781 – 1840).

С середины XIX века развитие теории вероятностей в значительной мере связано с именами русских ученых: П.Л.Чебышева (1821 – 1894), А.А.Маркова (1856 – 1922), А.М.Ляпунова (1857 – 1918).

Большой вклад в развитие теории вероятностей внесли советские математики С.Н.Бернштейн (1880 -1968), А.Н.Колмогоров (1903 – 1987), А.Я. Хинчин (1894 – 1959). Отечественная теория вероятностей занимает ведущее положение в мире.

Методы теории вероятностей широко применяются в современной физике, астрономии, электротехнике, радиоэлектронике, теории автоматического регулирования, геодезии, теории надежности, теории информации, теории массового обслуживания, биологии, экономике, медицине и т.д.

1.2 ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.2.1 Испытания и события. Классификация событий

Как любая наука, теория вероятностей имеет свои исходные понятия, через которые определяются другие понятия. К основным понятиям теории вероятностей относятся: испытание, событие, вероятность события.

Изучение явлений происходит путем наблюдений и опытов, проводимых при определенных условиях. Испытанием в теории вероятностей называется осуществление какого-либо комплекса условий, при котором наблюдается данное явление. Предполагается, что данный комплекс условий может быть воспроизведен сколь угодно большое число раз. Итак, в теории вероятностей вместо слов “произведено наблюдение при осуществлении определенного комплекса условий” говорят кратко “произведено испытание”.

Событием называется всякий факт, который может наступить в результате испытания.

Примеры:

1) бросание монеты - испытание, выпадение герба – событие;
2) стрельба по цели – испытание, промах – событие;
3) бросание игральной кости – испытание, выпало пять очков – событие.

События можно классифицировать по степени возможности их появления и по характеру взаимосвязи.

Достоверным называется ***событие***, которое в данном испытании всегда наступает, его обозначают U или Ω.

Невозможным называется ***событие***, которое в данном испытании никогда не наступает, его обозначают V или $\varnothing$.

Случайным называется ***событие***, которое в данном испытании может наступить, а может не наступить. Случайные события обозначают заглавными буквами латинского алфавита A, B, C,…

Примеры:

1) В урне три белых и пять красных шаров. Из урны наугад извлекается один шар – испытание.

События: A={шар красный} – случайное;

B ={шар синий} – невозможное;

C ={шар красный или белый} – достоверное.

2) По цели произведен пуск двух ракет – испытание.

События: А = {попадание в цель не более двух ракет} – достоверное;

В= { попадание в цель трех ракет} – невозможное;

С = {одно попадание в цель} – случайное.

События называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление других событий в данном испытании. В противном случае события называются совместными. Примеры несовместных событий: появление герба и цифры при одном бросании монеты, попадание и промах при одном выстреле. Те же попадание и промах при двух выстрелах являются уже совместными событиями.

Несколько событий образуют полную группу событий, если в результате испытания обязательно наступит хотя бы одно из них. В частности, если события образуют полную группу и несовместны, то в результате испытания появится одно и только одно из этих событий.

Суммой событий $A_1, A_2, ... A_n$ называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.

$$B = A_1 + A_2 + ... + A_n .$$

Произведением событий $A_1, A_2, ... A_n$ называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

$$C = A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n .$$

1.2.2 Частость, ее свойства

Вероятность события – числовая величина, характеризующая степень объективной возможности наступления события. В обыденной речи часто используем выражения: «более вероятно», «менее вероятно», «невероятно», «достоверно». Чтобы подобные высказывания сделать строгими, в теории вероятностей каждому событию по определенным правилам приписывается некоторое число, которое характеризует объективную возможность наступления этого события. Следует отметить, что не существует общего определения вероятности, позволяющего сразу находить ее числовые значения. О существовании вероятности как меры объективной возможности наступления события говорит практика.

Пусть произведена серия из n испытаний в одинаковых условиях, в каждом из которых могло появиться или не появиться событие А.

Частостью (относительной частотой) события А называется отношение числа испытаний m, в которых событие А появилось, к числу всех испытаний n:

$$P^*(A)=m/n . \qquad (1.1)$$

Экспериментально установлено, что частость обладает свойством устойчивости. Это свойство заключается в том, что частость мало меняется от серии к серии при большом числе испытаний в серии n, колеблясь около некоторого числового значения. В качестве примера приведём результаты испытаний с монетой, в которых подсчитывали число появлений гербов.

Испытатель	Число испытаний n	Число появления герба m	Частость P*(A)
Бюффон	4040	2048	0,5069
I серия (Пирсон)	12000	6019	0,5016
II серия	2400	12012	0,5005

Из приведенного примера следует, что частости выпадения герба группируются около числа P=0,5, тем меньше отличаясь от него, чем больше n. Число P=0,5 принимают за вероятность выпадения герба при одном бросании монет.

1.2.3 Статическое определение вероятности

Вероятностью P(A) случайного события A называется число, около которого группируются частости этого события при неограниченном увеличении числа испытаний. Символически это можно записать так:

$$P^*(A) = \frac{m}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} P(A).$$

Таким образом, вероятность события есть объективная характеристика этого события, существующая независимо от испытаний. Частость события определяется только по результатам испытаний, в то время как вероятность события имеет вполне определённое значение, независимо от того, проводились испытания или нет.

Рассмотрим свойства частости, вытекающие из её определения:

1. Частость случайного события A есть неотрицательное число, удовлетворяющее неравенству

$$0 \le P^*(A) \le 1$$

Из этого следует, что $0 \le m \le n$ и $P^*(A) = \frac{m}{n}$.

2. Частость достоверного события Ω равна единице:

$P^*(\Omega) = 1$, т.к. m=n для события Ω.

3. Частость невозможного события $\varnothing$ равна нулю:

$P^*(\varnothing)=0$, т.к. m=0 для события $\varnothing$.

4. Частость суммы двух несовместных событий A и B равна сумме частостей событий (правило сложения частостей):

P*(A+B)=P*(A)+P*(B).

Доказательство: $P^*(A)=\frac{m}{n}$; $P^*(B)=\frac{k}{n}$,

где m – частота наступления события A, k – частота наступления события B. Тогда частота наступления события A+B будет равна m+k, т.к. они несовместны. Имеем

$$P^*(A+B)=\frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P^*(A) + P^*(B).$$

Для совместных событий A и B введены понятия условной частости. ***Условной частостью*** называется частость одного события, вычисленная при условии наступления другого события. Обозначения условной частости:

$$P^*(A/B),\ P^*(B/A).$$

5. Правило умножения частостей для совместных событий. Частость произведения двух совместных событий равна произведению частости одного из них на условную частость другого:

$$P^*(AB) = P^*(A)\cdot P^*(B/A) = P^*(B)\cdot P(A/B).$$

Доказательство: Пусть в серии из n опытов событие A наступило m раз, B – k раз, AB – *l* раз. Тогда

$$P^*(A) = \frac{m}{n};\ P^*(B) = \frac{k}{n};\ P^*(AB) = \frac{\ell}{n};\ P^*(B/A) = \frac{\ell}{m};\ P^*(A/B) = \frac{\ell}{k};$$

имеем

$$\frac{\ell}{n} = \frac{m}{n}\cdot\frac{\ell}{m} = \frac{k}{n}\cdot\frac{\ell}{k} \Rightarrow P^*(AB) = P^*(A)\cdot P^*(B/A) = P^*(B)\cdot P^*(A/B).$$

В силу определения этими же свойствами должны обладать статистические вероятности событий.

Статистическое определение вероятности отражает суть понятия вероятности как меры объективной возможности наступления события. Зная вероятность события, можно, не производя испытаний, предсказать, насколько часто оно будет наступать при большом числе испытаний. Если вероятность событий мала, то оно будет редко появляться при большом числе испытаний, и практически можно считать, что при единичном испытании это событие не наступит (принцип практической невозможности маловероятных событий). Если случайное событие имеет вероятность, близкую к единице, то практически можно считать, что в единичном испытании это событие наступит. Здесь речь идёт о практической, а не об абсолютной уверенности, так как абсолютно точно предсказать результат испытания со случайным исходами нельзя. Данное испытание может оказаться тем редким испытанием, в котором появится событие, имеющее вероятность, близкую к нулю, а событие, имеющее вероятность, близкую к единице, не наступит. Вопрос о том, какую вероятность считать близкой к нулю или единице, зависит от существа задачи.

Достоинством статистического определения вероятности является его опора на испытания (практику). Для существования статистической вероятности требуется:

1. Возможность, хотя бы принципиально, производить неограниченное число испытаний, в каждом из которых событие A может наступить или не наступить.
2. Устойчивость относительных частот (частостей) появления события A для разных серий при достаточно большом числе испытаний.

Недостатки статистического определения вероятности:

- для нахождения вероятности требуются материальные затраты на испытания;
- по результатам испытаний находится лишь приближенная оценка

неизвестной вероятности, а не ее точное значение;

— оно не позволяет непосредственно вычислять вероятность (по определению).

1.2.4 Схема случаев. Классическое определение вероятности

В некоторых простейших случаях вероятности событий можно вычислять непосредственно, исходя из условий испытания. Для этого нужно, чтобы различные исходы испытания обладали симметрией и в силу этого были объективно одинаково возможными.

События называют ***равновозможными*** в данном испытании, если по условиям симметрии есть основание считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

События, образующие полную группу несовместных и равновозможных событий, назовем случаями (шансами). Про испытания, исходы которых образуют полную группу попарно несовместных и равновозможных событий, говорят, что они сводятся к “схеме случаев” или “схеме урн”.

По отношению к любому событию, связанному с данным испытанием, случаи делятся на благоприятные, при наступлении которых это событие происходит, и неблагоприятные при наступлении которых это событие не происходит.

Вероятностью P(A) события **A** называется отношение числа случаев N(A) благоприятных A к общему числу случаев *N (Ω):*

$$P(A)=N(A)/N(\Omega) \qquad (1.2)$$

Формула (2) дает классическое определение вероятности.

Так как $0 \le N(A) \le N(\Omega)$, то классическое определение вероятности обладает всеми свойствами частости, а следовательно, и статистической вероятности:

1. $0 \le P(A) \le 1$
2. $P(\Omega)=1$
3. $P(\varnothing)=0$
4. $P(A+B)=P(A)+P(B)$,

где A и B – несовместные события.

5. $P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B)$, где P(A/B) и P(B/A) – условные вероятности.

Пример 1.1. В урне находится 2 белых и 3 красных шара.

Из урны наугад извлекается шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение. Событие A – извлечение белого шара.

$N(\Omega) = 5$ – общее число случаев, N(A)=2 – число случаев, благоприятных A. По формуле (2) имеем

$$P(A)=2/5.$$

Пример 1.2. Монета бросается один раз. Событие A – выпал герб. Найти P(A) .

Решение. $N(\Omega) = 2$; N(A)=1 P(A)=1/2=0.5 (p=0.5).

Преимуществом классического определения является то, что с его помощью вероятность можно вычислять непосредственно по формуле до опыта. Недостаток классического определения состоит в том, что оно применимо, только когда имеет место «схема случаев». Задачи, при решении которых можно исходить из соображения симметрии, встречаются на практике весьма редко.

1.2.5 Элементы комбинаторики

Комбинаторика изучает количества комбинаций (наборов), подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов заданного конечного множества. При непосредственном вычислении вероятностей формулы комбинаторики часто используются. Из конечного множества $E=\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, состоящего из n различных элементов, можно образовывать различные наборы, состоящие из m $(m \le n)$ элементов.

Перестановками из n различных элементов называются наборы, содержащие по n элементов и отличающиеся только порядком их расположения (упорядоченные наборы без повторений из n элементов по n). Число всех таких перестановок обозначают P и определяют по формуле

$$P = n!, \text{ где } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \text{ (n - факториал).} \qquad (1.3)$$

Конечное множество называется упорядоченным, если его элементы перенумерованы некоторым образом. Каждое упорядочение заключается в том, что какой-то элемент получает номер 1, какой-то – номер 2, …, какой-то номер – n. Номер 1 может получить любой элемент множества E; значит, выбор первого элемента можно произвести n способами. Если первый элемент выбран, то на второе место остается лишь (n-1) кандидат, так как повторить сделанный выбор нельзя. Третий элемент можно выбрать (n-2) способами и т.д. Последний элемент можно выбрать лишь одним способом, он и займет n-е место. Общее число способов упорядочения равно:

$$n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n! \Rightarrow P_n = n$$

Здесь мы воспользовались правилом произведения: если элемент x можно выбрать m способами, а элемент y можно выбрать n способами, то упорядоченную пару (x,y) можно выбрать $m \cdot n$ способами.

Пример 1.3 Сколькими способами можно трех студентов рассадить на трех стульях?

Решение. Искомое число: $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Размещениями называются наборы из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком (упорядоченные наборы без повторений из n элементов по m). Число всех размещений равно:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = n!/(n-m)! \qquad (1.4)$$

Пример 1.4 Сколькими способами из 7 студентов группы можно отобрать для участия в олимпиадах по математике и физике по одному студенту.

Решение. $A_7^2 = 7 \cdot 6 = 42$.

Сочетаниями называются наборы, составленные из n различных элементов по m (неупорядоченные наборы без повторений из n элементов по m). Их число обозначается C_n^m. Так как каждый набор можно упорядочить P_m =m! способами, то имеем

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m, \text{ откуда получаем } C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (1.5)$$

Пример 1.5 Сколькими способами из 6 студентов можно отобрать для участия в соревнованиях двух студентов?

Решение. $C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{4!5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 4!} = 15.$

Для чисел C_n^m, называемых также биномиальными коэффициентами, справедливы следующие тождества, часто оказывающиеся полезными при решении задач.

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$ (свойства симметрии)
2. $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}, C_n^0 = 1$ (рекуррентное соотношение)
3. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$ (следствие бинома Ньютона).

Если выбор m элементов из n различных элементов производится с возвращением (отобранный элемент возвращается в исходное множество и может быть снова выбран – схема выбора с возвращением) и с упорядочиванием, то различные наборы будут с повторениями, отличаясь либо составом элементов, либо порядком их следования. Получаемые в результате комбинации называются размещениями с повторениями, а их общее число определяется формулой

$$\overline{A}_n^m = n^m. \qquad (1.6)$$

Если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т.д., то число перестановок с повторениями определяются формулой

$$P_n(n_1, n_2, \ldots n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}, \qquad (1.7)$$

где $n_1 + n_2 + n_k = n$.

Число сочетаний с повторениями из n элементов по m равно числу сочетаний без повторений из n+m-1 элементов по m элементов, т.е.

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m. \qquad (1.8)$$

При решении задач комбинаторики используют следующие правила.

Правило суммы. Если некоторый объект A может быть выбран из множества объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно m+n способами.

***Правило произведения*.** Если объект A можно выбрать из множества объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно

выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot n$ способами.

Пример 1.6 Кодовый замок имеет четыре диска, посаженных на одну ось. Каждый диск разбит на сектора с номерами 0, 1, 2, 3, 4. Замок открывается при установке одной определенной комбинации цифр. Найти вероятность того, что в результате набора наугад цифровой комбинации в окне замка он откроется.

Решение. Имеем схему урн. Общее число случаев равно числу размещений с повторениями из 5 элементов по 4, т.е. $N(\Omega)=5^4$.

Событие A – замок открылся. Этому событию благоприятен лишь один случай N(A)=1. Поэтому $P(A)=1/5^4=0{,}0016$.

Пример 1.7 Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр 1; 1; 1; 2; 2; 2?

Решение. Здесь нужно найти число перестановок с повторениями, которое определяется формулой (1.7). При k=2, $n_1=3$, $n_2=3$, n=6 по формуле получаем

$$P(3;3) = 6!/(3!\cdot 3!) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6/1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3 = 20.$$

Пример 1.8 Из букв слова РОТОР, составленного с помощью разрезной азбуки, наудачу последовательно извлекают 3 буквы и складывают в ряд. Какова вероятность того, что получится слово ТОР?

Решение. Чтобы отличить одинаковые буквы друг от друга, снабдим их номерами: $р_1, р_2, о_1, о_2$. Общее число случаев равно: $A_5^3 = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$. Слово “тор” получится в случаях $(то_1р_1, то_1р_2, то_2р_1, то_2р_2)$. Искомая вероятность равна

$$P=4/60=1/15.$$

При подсчете числа благоприятных случаев воспользовались правилом произведения: букву “т” можно выбрать одним способом, букву “о” – двумя, букву “р” – двумя способами.

1.2.6 Геометрические вероятности

Пусть задача сводится к случайному бросанию точки на ограниченную фигуру Ω (отрезок прямой [a,b] , часть плоскости D, тело в пространстве V) меры $\mu(\Omega)$.

Пусть имеет место «схема случаев». Классическое определение к данному испытанию неприменимо, так как число исходов несчетно (оно равно числу точек фигуры Ω, количество точек посчитать невозможно). В этом случае применяется геометрическое определение вероятности.

Пусть событие A состоит в том, что случайная точка попадает в область ω, являющуюся частью фигуры Ω и имеющую меру $\mu(\omega)$. Тогда вероятность события определяется по формуле

$$P(A)=\mu(\omega)/\mu(\Omega). \qquad (1.9)$$

Здесь фигура Ω есть множество возможных, а фигура ω- множество благоприятных исходов испытания. Следовательно, формула (1.9) есть обобщение формулы (1.2) на случай испытаний с несчетным числом исходов.

Пример 1.9 *(задача Бюффона)* Плоскость расчерчена параллельными прямыми, расстояние между которыми равно 2a. На плоскость наудачу брошена игла длиной 2ℓ (a>ℓ (похожа на единицу, нужно сделать курсивом)).Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.

Решение. Пусть U – расстояние от центра иглы до ближайшей прямой, а φ - угол, составленный иглой с этой прямой. Пара чисел (u,φ) задает положение иглы с точностью до выбора конкретной прямой. Поскольку нас интересует взаимное расположение иглы с ближайшей прямой, то в качестве Ω возьмем прямоугольник:

$$\Omega = \{(\varphi, u)/0 \le \varphi \le \pi, 0 \le u \le a\}.$$

Пересечение иглы с прямой происходит только в том случае, когда $u \le \ell \sin\varphi$ (см. рис. 1.1)

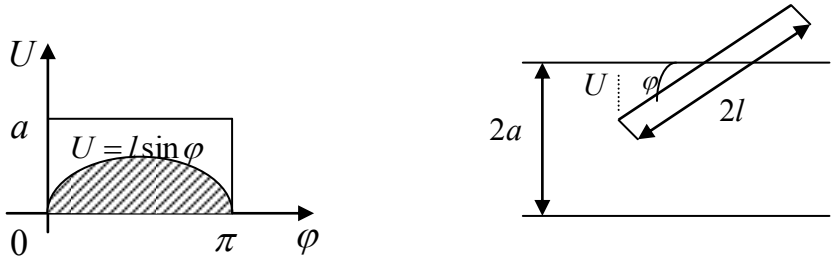


Рис.1.1

Множество точек фигуры ω, благоприятных для наступления интересующего нас события A, описывается условием

$$\omega = \{(\varphi, u)/u \le \ell \sin\varphi\}.$$

$$\mu(\Omega) = a\pi$$

Имеем:
$$\mu(\omega) = \int_0^{\pi} \ell \sin\varphi d\varphi = 2\ell$$

$\mu(\Omega)$ - площадь прямоугольника, $\mu(\omega)$ - площадь заштрихованной фигуры.

По формуле (1.9) получим $P(A)=\dfrac{\mu(\omega)}{\mu(\Omega)} = \dfrac{2\ell}{a\pi}$.

Соответствие рассмотренной математической модели опыту можно проверить экспериментально.

Пусть игла брошена n раз, m раз при этом пересекла линию.

Тогда $P^*(A)=\dfrac{m}{n} \approx P(A) = \dfrac{2\ell}{a\pi} \Rightarrow \pi \approx \dfrac{2\ell}{a} \cdot \dfrac{n}{m}$.

Тем самым можно экспериментально найти оценку числа π. Результаты такой проверки приведены в таблице:

Испытатель	l/a	n	m	Оценка π
Вольф,1950г.	0,8	5000	2532	3,1596
Рейн, 1925г.	0,5419	2520	850	3,1795

1.3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Обобщение фактов, связанных со свойствами относительных частот, привело к аксиоматическому определению вероятности. Аксиоматическая теория вероятностей в ее современном виде была создана А.Н.Колмогоровым в 1933 году. Исходя из этих аксиом, свойства вероятностей и зависимости между ними выводятся в качестве теорем. К основным теоремам теории вероятностей относятся теоремы сложения вероятностей для совместных и несовместных событий и теоремы умножения для зависимых и независимых событий.

1.3.1 Пространство элементарных событий. Поле событий. Алгебра событий. Аксиоматическое определение вероятности

При математической формализации модели испытания исходным является понятие пространства элементарных событий (обозначается Ω), связанного с данным испытанием.

Пример 1.10 Игральная кость бросается один раз. Обозначим $\omega_к$ событие, состоящее в выпадении к очков. Элементарными событиями в данном испытании являются события $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$.

Составные события, или просто события, могут быть описаны как подмножества множества элементарных событий: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Например: событие А ={выпало четное число очков} через элементарные события выражается так: $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$.

Пример 1.11 Испытание состоит в радиолокационном обнаружении цели. Событие – положение светящегося пятна (сигнала отраженного импульса от цели) на экране индикатора цели, имеющего форму круга радиуса 10 см, в декартовой системе координат с началом, совпадающим с центром экрана. Пространство элементарных событий в этом испытании есть множество точек экрана:

$$\Omega = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 100\},$$

а элементарными событиями являются координаты $(x; y)$ случайной точки на плоскости экрана. Событие $A = \{\text{цель находится в первой четверти}\}$ может быть записано в виде

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 100,\ x > 0;\ y > 0\}.$$

В рассмотренных примерах элементарные события представляли собой все мыслимые взаимоисключающие исходы испытания. В общем случае пространством элементарных событий называется произвольное множество $\Omega = \{\omega\}$, а элементы ω этого множества называют элементарными событиями. Любое подмножество данного множества Ω интерпретируется как событие (возможно, и не наблюдаемое). Совокупность всех наблюдаемых событий составляет поле событий для данного испытания.

Говорят, что событие А наступило, если результатом испытания оказалось событие $\omega \in A$. Событие, совпадающее с пустым множеством, называется

невозможным событием, а событие, совпадающее со всем множеством Ω, - достоверное событие.

Два события A и B совместны, если соответствующие множества A и B имеют общие элементы, и несовместны в противном случае.

Множество Ω для данного испытания может быть дискретным (конечное или счетное множество) (см. пример 1.10) или непрерывным (множество типа континуума). (см. пример 1.11).

Алгебра событий. Так как событие отождествляется с элементом множества, то операции над событиями аналогичны операциям над множествами. В частности, определены следующие операции и отношения между событиями:

Отношение включения: $A \subset B$ (множество A является подмножеством множества B) – событие A влечет за собой событие B.

Отношение эквивалентности: A = B (эквивалентность множеств) – событие A тождественно событию B.

$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$

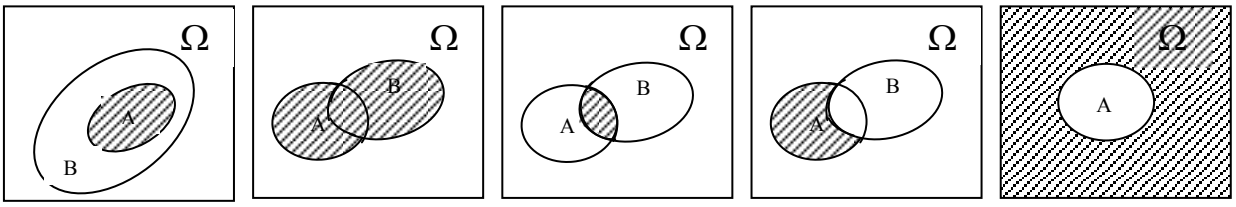
$A + B \quad (A \cup B)$ (объединение множеств) - сумма событий.

$A\,B \quad (A \cap B)$ (пересечение множеств) - произведение событий.

$A - B \quad (A / B)$ (разность множеств) - разность событий.

$\overline{A} = \Omega - A \quad (\overline{A} = \Omega \backslash A)$ (дополнение множества A до Ω) – противоположное событие. Событие $\overline{A}$ означает, что событие A не произошло.

Условно изображая события в виде областей на плоскости, получим диаграммы Венна, которые иллюстрируют введенные определения. Наступление события A трактуется как попадание случайной точки в область, соответствующую этому событию.



$A \subset B$ $\quad A \cup B$ $\quad A \cap B$ $\quad A \setminus B$ $\quad \overline{A}$

$A + B$ $\quad A\,B$ $\quad A - B$ $\quad \overline{A} = \Omega - A$

Понятие произведения и суммы событий переносится на бесконечные последовательности событий:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} A_k; \quad (A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n \cup \ldots = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k);$$

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots A_n \cdot \ldots = \prod_{k=1}^{\infty} A_k; \quad (A_1 \bigcap A_2 \bigcap \ldots \bigcap A_n \bigcap \ldots = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k).$$

Приведем некоторые полезные тождества, которые вытекают из данных выше определений:

$$AA=A, \; A+A=A, \; A+\varnothing = A, \; A\varnothing = \varnothing,$$
$$A\Omega = A, \; A+\Omega = \Omega, \; A+\overline{A} = \Omega, \; A\overline{A} = \varnothing.$$

Аксиоматическое определение вероятности события

Аксиомы теории вероятностей вводят таким образом, чтобы вероятность события A обладала всеми свойствами частости P*(A). В этом случае теория вероятностей будет согласовываться с практикой.

Пусть F – поле событий для данного испытания. Вероятностью P(A) называется числовая функция, определенная для всех $A \in F$ и удовлетворяющая трем условиям (аксиомам) :

A1. Аксиома неотрицательности. Каждому событию $A \in F$ сопоставлено неотрицательное число P(A) :

$$P(A) \geq 0 \quad \forall A \in F.$$

A2. Аксиома нормированности. Вероятность достоверного события равна единице :

$$P(\Omega) = 1.$$

A3. Аксиома аддитивности. Вероятность наступления хотя бы одного из попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(\sum_k A_k) = \sum_k P(A_k), \text{ где } A_i \cdot A_j = \varnothing \text{ при } i \neq j, k = \overline{1, n(\infty)}.$$

Опираясь на эти аксиомы, доказывают основные теоремы и формулы теории вероятностей. Математическая формализация модели испытания включает в себя:

1) построение пространства элементарных событий Ω,
2) описание поля событий F для данного испытания,
3) задание вероятностного распределения на поле событий.

Последний этап наиболее труден. Аксиомы теории вероятностей не содержат указаний о численных значениях вероятностей интересующих нас событий, а определяют лишь общие свойства, которыми должна обладать вероятность как числовая функция. Вопрос о том, какое значение вероятности следует приписать тем или иным событиям в реальных испытаниях, решается методами математической статистики.

В случае, когда пространство элементарных событий представляет собой конечное множество равновероятных исходов (схема урн) (т.е. $P(\omega_1) = P(\omega_2) = ... = P(\omega_n) = 1/n$), то испытание сводится к классической схеме или схеме урн. Поэтому вероятность события $A = \{\omega_{k_1}, \omega_{k_2}, ..., \omega_{k_m}\}$ определяется по формуле классической вероятности:

$P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)}$, где N(A) – число случаев, благоприятных событию A, $N(\Omega)$ - общее число случаев.

1.3.2 Условные вероятности. Независимость событий. Теоремы умножения вероятностей

Случайное событие определяется как событие, которое при осуществлении определенного комплекса условий S может произойти или не произойти. Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме условий S не налагается, то такую вероятность называют безусловной, если же

налагаются другие дополнительные условия, то вероятность называют условной. Например, часто приходится вычислять вероятность одного события при дополнительном условии, что произошло другое событие.

Пусть A и B – наблюдаемые события в испытании.

Условной вероятностью P(B/A) наступления события B при условии, что событие A произошло в результате испытания, называется величина определяемая равенством

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}. \qquad (1.10)$$

Аналогично определяется условная вероятность P(A/B)

$$P(A/B)=\frac{P(BA)}{P(B)},\ \text{где } P(A)>0,\ P(B)>0. \qquad (1.11)$$

Основанием для подобного введения условной вероятности служит свойство 5, справедливое для статистического и классического определения вероятности.

Пример 1.12 В урне 3 белых и 2 красных шара. Из урны последовательно без возвращения извлекают два шара (испытание). Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие B), если при первом испытании был извлечен красный шар (событие A).

Решение. После первого испытания, когда произошло событие A, в урне осталось 4 шара, из них 3 белых.

Искомая условная вероятность равна $P(B/A)=\frac{3}{4}$.

Определим теперь $P(B/A)$ по формуле (1.10). Вероятность появления красного шара в первом испытании $P(A)=\frac{2}{5}=0{,}4$.

Найдем вероятность $P(AB)$ того, что в первом испытании извлечен красный шар, а затем – белый. Общее число случаев совместного появления двух шаров любого цвета $N(\Omega)=A_5^2=5\cdot 4=20$.

При этом событию AB благоприятствуют $N(AB)=2\cdot 3=6$ случаев.

Следовательно, $P(AB)=\frac{N(AB)}{N(\Omega)}=\frac{6}{20}=0{,}3$.

По формуле (1.10) $P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0{,}3}{0{,}4}=\frac{3}{4}$.

Как и следовало ожидать, ответ получился такой же, как и при непосредственном вычислении.

Из формул (1.10),(1.11) получается теорема умножения вероятностей для зависимых событий. Случайные события называются зависимыми, если вероятность наступления одного из них зависит от того, имело место или нет другое событие. Если для примера 1.12 в первом испытании наступило бы событие $\overline{A}$ (извлечен не красный, а белый шар), то

$$P(B/\overline{A}) = \frac{2}{4} = 0{,}5.$$

Следовательно, событие B зависит от события A.

Теорема 1.1 Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B). \quad (1.12)$$

Пример 1.13 Вероятность попадания ракеты в цель (событие A) $P(A) = 0{,}9$. Вероятность поражения цели при попадании в нее одной ракеты (событие B) $P(B/A) = 0{,}4$. Найти вероятность поражения цели при пуске одной ракеты.

Решение. Событие AB – ракета попала в цель и цель поражена.

По теореме 1.1: $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = 0{,}9 \cdot 0{,}4 = 0{,}36.$

Теорему 1.1 можно обобщить на случай любого числа событий.

Теорема 1.2 Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности остальных событий, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что предыдущие события уже наступили.

$$P(A_1; A_2; ...; A_n) = P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1A_2) \cdot ... \cdot P(A_n/A_1A_2 \cdot ... \cdot A_n). \quad (1.13)$$

В частности, для трех событий:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB). \quad (1.14)$$

Событие A называется независимым от события B, если выполняется условие

$$P(A/B) = P(A), \text{ где } P(B) \neq 0. \quad (1.15)$$

Если событие A не зависит от события B, то и событие B не зависит от события A, что следует из формулы (1.13) с учетом формулы (1.15):

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B) = P(B) \cdot P(A) \Rightarrow P(B/A) = P(B), \quad (1.16)$$

где $P(A) \neq 0$.

Это означает, что свойство независимости событий взаимно.

События A и B называются независимыми, если

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \quad (1.17)$$

Формула (1.17) выражает теорему умножения для независимых событий.

Теорема 1.3 Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются ***независимыми*** в совокупности, если для любого набора из m событий $(m = 2, 3, ..., n)$ выполняется равенство:

$$P(A_{k_1}, A_{k_2}, ..., A_{k_m}) = P(A_{k_1}) \cdot P(A_{k_2}) \cdot ... \cdot P(A_{k_m}).$$

Теорема 1.4 Вероятность произведения нескольких независимых в совокупности событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1, A_2, ..., A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n). \qquad (1.18)$$

Формулы (1.17), (1.18) позволяют установить независимость (зависимость) событий, если известны вероятности всех нужных событий. На практике независимость событий обычно устанавливают из физических соображений.

Пример 1.14 Два стрелка производят по одному выстрелу по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка (событие A_1) $P(A_1) = 0{,}7$, вероятность попадания в цель для второго стрелка (событие A_2) $P(A_2) = 0{,}8$.

Чему равна вероятность того, что оба стрелка попадут в цель?

Решение. События A_1 и A_2 - независимы.

$$P(A_1A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56.$$

1.3.3 Теоремы сложения вероятностей

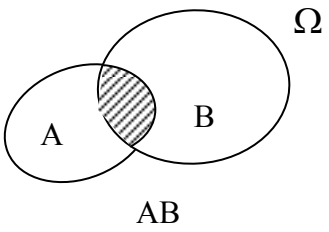
В соответствии с аксиомой А3 вероятность суммы несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий. Рассмотрим теоремы вероятности суммы совместимых событий.

Теорема 1.5 Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) \qquad (1.19)$$

Доказательство: представим события A, B и A+B в виде суммы несовместных событий:

$$A = A\overline{B} + AB; \quad B = B\overline{A} + AB;$$
$$A + B = A\overline{B} + B\overline{A} + AB.$$



С учетом аксиомы А3 имеем

$$P(A) = P(A\overline{B}) + P(AB) \Rightarrow P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB); \quad (I)$$
$$P(B) = P(B\overline{A}) + P(AB) \Rightarrow P(B\overline{A}) = P(B) - P(AB); \quad (II)$$
$$P(A + B) = P(A\overline{B}) + P(B\overline{A}) + P(AB). \quad (III)$$

Подставив (I) и (II) в (III), получим

$$P(A + B) = P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) + P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (1.20)$$

Пример 1.15 Вероятность попадания в цель при стрельбе из первого и второго орудия соответственно равны: $P_1 = 0{,}8$; $P_2 = 0{,}9$.

Найти вероятность хотя бы одного попадания при одном залпе.

Решение. Пусть $A_1 = \{\text{попадание из первого орудия}\}$, $A_2 = \{\text{попадание из второго орудия}\}$. События A_1 и A_2 совместны и независимы. Имеем

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72;$$
$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) = 0{,}8 + 0{,}9 - 0{,}72 = 0{,}98.$$

Методом полной математической индукции формулу (1.20) можно обобщить на случай любого числа совместных событий:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{\substack{i\ j \\ i<j}} \sum P(A_i A_j) + \\ + \sum_{\substack{i\ j\ k \\ i<j<k}} \sum \sum P(A_i A_j A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdot \ldots A_n). \quad (1.21)$$

В частности, для трех совместных событий формула (1.21) имеет вид

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC). \quad (1.22)$$

Выведем ряд следствий теорем сложения и умножения вероятностей.

Следствие 1. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Следствие 2. Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - полная группа попарно несовместных событий, то $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$.

Следствие 3. Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, независимых в совокупности, равна

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n).$$

Пример 1.16 Истребитель атакует бомбардировщик и производит пуск четырех неуправляемых ракет. Для поражения бомбардировщика достаточно хотя бы одного попадания ракеты. Найти вероятность поражения бомбардировщика, если вероятность попадания каждой ракеты в цель $p = 0{,}4$.

Решение. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 - попадание в цель соответственно каждой по счету ракетой. Тогда $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3, \overline{A}_4$ - промахи этих ракет. Пусть событие B – цель поражена (хотя бы одно попадание), тогда $\overline{B}$ - нет попаданий. Событие $\overline{B} = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4$.

По условию $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = p = 0{,}4$.

Имеем $P(\overline{A}_1) = P(\overline{A}_2) = P(\overline{A}_3) = P(\overline{A}_4) = q = 1 - p = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

Так как события $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, $\overline{A}_4$ независимые, то

$$P(\overline{B}) = P(\overline{A}_1) P(\overline{A}_2) P(\overline{A}_3) P(\overline{A}_4) = q^4 = 0{,}6^4$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - q^4 = 1 - 0{,}6^4 \approx 1 - 0{,}12 = 0{,}88.$$

1.3.4. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу. События $\{H_i\}_{i=1}^n$ назовем гипотезами. Пусть известны вероятности гипотез $P(H_i)$ и условные вероятности $P(A/H_i)$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$. Чему равна вероятность $P(A)$?

Теорема. Вероятность события A, которое может наступить вместе с одной из гипотез $H_1, H_2, ..., H_n$, равна сумме произведений вероятности каждой из гипотез на соответствующую ей условную вероятность события A:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i). \qquad (1.23)$$

Формулу (1.23) называют ***формулой полной вероятности***.

Доказательство: Так как $H_1 + H_2 + ... + H_n = \Omega$, $H_i H_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то событие A можно представить в виде следующей суммы попарно несовместных событий:

$$A = A\Omega = A(H_1 + H_2 + ... + H_n) = AH_1 + AH_2 + ... + AH_n.$$

Используя аксиому A3 и формулу (1.2), получим

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + ... + P(AH_n) =$$

$$= P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + ... + P(H_n) \cdot P(A/H_n).$$

Пусть в результате испытания событие A наступило. Поставим задачу: определить, как изменились (в связи с тем, что событие A уже наступило) вероятности гипотез, то есть будем искать условные вероятности

$$P(H_i/A) \qquad (i = \overline{1,n}).$$

По теореме умножения имеем

$$P(AH_i) = P(A) \cdot P(H_i/A) = P(H_i) \cdot P(A/H_i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}.$$

Заменив $P(A)$ по формуле (1.23), окончательно получим

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}, \qquad (i = \overline{1,n}). \qquad (1.24)$$

Формулу (1.24) называют формулой Байеса.

Формулы Байеса позволяют по априорным (известным до испытания) вероятностям $P(H_i)$ найти апостериорные (вычисленные после испытания) вероятности $P(H_i/A)$, если известен результат испытания (событие A наступило).

Пример 1.17 В пирамиде 5 винтовок, две из них снабжены оптическим прицелом. Вероятность поразить мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом равна 0,9, а для винтовки без оптического прицела – 0,7. Требуется: 1) Найти вероятность поражения мишени, если стрелок произвел один выстрел из наудачу взятой винтовки. 2) Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: мишень поражена из винтовки с оптическим прицелом или без него?

Решение. Введем гипотезы:

H_1 - выбрана винтовка с оптическим прицелом;

H_2 - выбрана винтовка без оптического прицела;

A – цель поражена при одном выстреле.

$$P(H_1)=\frac{2}{5};\qquad P(H_2)=\frac{3}{5};\qquad P(A/H_1)=0{,}9;\qquad P(A/H_2)=0{,}7.$$

1) По формуле полной вероятности найдем:

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=\frac{2}{5}\cdot 0{,}9+\frac{3}{5}\cdot 0{,}7=0{,}78.$$

2) По формуле Байеса найдем вероятности гипотез после испытания:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{5}\cdot 0{,}9}{0{,}78}=\frac{6}{13};$$

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{5}\cdot 0{,}7}{0{,}78}=\frac{7}{13}.$$

Так как $P(H_2/A)>P(H_1/A)$, то более вероятно, что цель поражена из винтовки без оптического прицела.

Знание основных теорем и формул теории вероятностей позволяет по известным вероятностям элементарных событий находить вероятности сложных событий, что имеет важное практическое значение.

1.4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ

Как известно, испытанием называется осуществление определенного комплекса условий S, при которых могут наступать некоторые события. В результате каждого испытания появляется одно из нескольких попарно несовместных событий, которые называют исходами. На практике часто приходится решать задачи, связанные с повторением испытаний, в которых требуется оценить число наступления некоторых исходов в серии из n испытаний определенное количество раз. Испытания называются независимыми, если вероятности исходов каждого испытания не зависят от исходов других испытаний. Частный случай схемы независимых испытаний, в котором каждое испытание может закончиться только одним из двух исходов, называют схемой Бернулли. Пример независимых испытаний по схеме Бернулли – стрельба по цели одиночными выстрелами с индивидуальным прицеливанием и двумя исходами (попадание, промах). Если же по результатам предыдущих выстрелов производится корректировка прицела, то эти испытания уже будут зависимыми. Если же испытания проводятся в одинаковых условиях, то вероятности исходов остаются постоянными. Если же условия испытаний в процессе их проведения изменяются, то и вероятности исходов будут меняться от испытания к испытанию.

1.4.1. Схема и формула Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых может появиться, либо не появиться событие A. Пусть вероятность появления события A в каждом испытании одна и та же.

Обозначим $P(A) = p;\ P(\overline{A}) = q = 1 - p$.

Поставим задачу вычислить вероятность того, что при n испытаниях событие A наступит ровно m раз. Искомую вероятность обозначим $P_n(m)$, где $(0 \le m \le n)$.

Решение. Имеем схему независимых испытаний в одинаковых условиях (схему Бернулли): $\left(\begin{array}{c|c} A & \overline{A} \\ \hline p & q \end{array}\right)^n$.

Результаты одной серии испытаний, в которой событие A наступило ровно m раз, запишем в виде таблицы, где единица соответствует наступлению события A, а ноль – наступлению $\overline{A}$:

Испытания	1	2	3	4	5	...	...	...	n–1	n
Событие A, $\overline{A}$	1	0	1	1	0	...	...	...	0	1
Вероятность	p	q	p	p	q	...	...	...	q	p

Очевидно, что сумма единиц во второй строке таблицы должна равняться m, а число нулей, равно $n - m$. Вероятность появления данной комбинации по теореме умножения вероятностей для независимых событий равна $p^m \cdot q^{n-m}$. Число же различных комбинаций наступления события A m раз в серии из n испытаний будет равно числу способов расстановки m единиц по n клеткам, что дает C_n^m. Так как все комбинации представляют собой несовместные события, то по теореме о вероятности суммы несовместных событий получаем, что искомая вероятность будет равна

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \qquad (1.25)$$

Формула (1.25) называется формулой Бернулли. Вероятности $P_n(m)$ $\left(m = \overline{0, n}\right)$ называют биномиальными, так как правая часть формулы (1.25) равна коэффициенту при x^m в разложении бинома $(q + px)^n$ по степеням x:

$$(q + px)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} x^m = \sum_{m=0}^{n} P_n(m) x^m . \qquad (1.26)$$

Функция $\varphi(x) = (q + px)^n$, обладающая тем свойством, что коэффициент при x^m в разложении (1.26) дает вероятность $P_n(m)$ наступления события A в серии из n независимых испытаний, проводимых в одинаковых условиях, ровно m раз, называется производящей функцией для $P_n(m)$.

Из формулы (1.26) при $x = 1$ с учетом того, что $p + q = 1$, получаем

$$\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = (q+p)^n = 1. \qquad (1.27)$$

Этот результат (сумма всех биномиальных коэффициентов равна 1) можно было предвидеть, так как в (1.27) суммируются вероятности для полной группы несовместных событий.

Пример 1.18 Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжении одних суток не превысит установленной нормы, равна 0,8. Найти вероятность того, что в ближайшие 5 суток расход электроэнергии в течение 2 суток не превысит нормы.

Решение. Имеем схему Бернулли:

$n = 5,\ m = 2,\ p = 0{,}8,\ q = 0{,}2$. По формуле Бернулли находим:

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^{5-2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0512 .$$

Рассмотрим еще ряд задач, которые решаются с использованием формулы Бернулли.

Обозначим $R_{m_1 m_2} = P_n(m_1 \le m \le m_2)$ - вероятность того, что в n испытаниях схемы Бернулли событие A наступит от m_1 до m_2 раз $(0 \le m_1 \le m_2 \le n)$.

Тогда имеет место формула

$$R_{m_1 m_2} = P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m} . \qquad (1.28)$$

В частности, вероятность $P_n(1 \le m \le n)$ того, что в n испытаниях событие A наступит хотя бы один раз, равна

$$R_{1,n} = P_n(1 \le m \le n) = 1 - q^n; \qquad (1.29)$$

вероятность того, что событие A в n испытаниях наступит не менее k раз, равна

$$R_{k,n} = P(k \le m \le n) = \sum_{m=k}^{n} P_n(m) = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} P_n(m). \qquad (1.30)$$

Пример 1.19 Планируется нанесение бомбового удара по цели, для поражения которой необходимо попадание хотя бы одной бомбы. Вероятность попадания в цель одной бомбы равна 0,3. Определить необходимое количество бомб для поражения цели с гарантированной вероятностью $\alpha = 0{,}8$.

Решение. Имеем схему Бернулли, $p = 0{,}3,\ q = 0{,}7$.

$$P_n(1 \le m \le n) = 1 - q^n \ge \alpha \Rightarrow q^n \le 1 - \alpha = 1 - 0{,}8 = 0{,}2 \Rightarrow q^n \le 0{,}2 \Rightarrow$$

$$n \lg q \le \lg(1-\alpha) \Rightarrow n \ge \frac{\lg(1-\alpha)}{\lg q} = \frac{\lg 0{,}2}{\lg 0{,}7} = 4{,}4 .$$

Вывод: для поражения цели с $p = 0{,}8$ необходимо не менее 5 бомб.

Если независимые испытания проводятся с изменением условий, то правило вычисления вероятностей $P_n(m)$ можно сформулировать так: если

производится n независимых испытаний по схеме Бернулли, причем вероятность наступления события A в i - м испытании равна p_i $(i=\overline{1,n})$, то вероятность появления события A ровно m раз равна коэффициенту при x^m разложения производящей функции $\varphi_n(x)$ по степеням x:

$$\varphi_n(x)=\prod_{i=1}^{n}(q_i+p_i x)=\sum_{i=1}^{n}P_n(m)x^m. \qquad (1.30)$$

Очевидно, что и в этом случае условие (1.27) должно выполняться, что используется при проверке правильности вычисления $P_n(m)$, где $m=\overline{0,n}$.

Пример 1.20 По цели производится два выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле $P_1=0{,}8$, при втором $P_2=0{,}6$. Найти вероятности событий: B_0 - нет попаданий, B_1 - одно попадание, B_2 - два попадания.

Решение. Эта задача может быть решена непосредственно с использованием основных теорем теории вероятностей. Пусть A_1 - попадание при первом выстреле, $\overline{A}_1$ - промах, A_2 - попадание при втором выстреле, $\overline{A}_2$ - промах.

Тогда $B_0=\overline{A}_1\overline{A}_2$; $B_1=A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2$; $B_2=A_1A_2$.

Имеем

$$P(B_0)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)=(1-P_1)(1-P_2)=0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}08$$

$$P(B_1)=P(A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2)=P(A_1)P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1)P(A_2)=$$

$$=0{,}8\cdot 0{,}4+0{,}2\cdot 0{,}6=0{,}44$$

$$P(B_2)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=0{,}8\cdot 0{,}6=0{,}48.$$

Проверка $P(B_0)+P(B_1)+P(B_2)=0{,}08+0{,}44+0{,}48=1$.

Второй способ. Обозначим $q_1=1-p_1$; $q_2=1-p_2$;

$q_1=1-0{,}8=0{,}2$; $q_2=1-0{,}6=0{,}4$.

Имеем схему Бернулли с изменением условий. Составим производящую функцию:

$$\varphi_2(x)=(0{,}2+0{,}8x)(0{,}4+0{,}6x)=0{,}08+0{,}44x+0{,}48x^2.$$

Отсюда: $P_2(0)=P(B_0)=0{,}08$; $P_2(1)=P(B_1)=0{,}44$; $P_2(2)=P(B_2)=0{,}48$.

Получили те же результаты.

Перейдем теперь к рассмотрению предельных теорем в схеме Бернулли.

1.4.2 Локальная и интегральная теоремы Муавра – Лапласа

Вернемся к схеме независимых испытаний Бернулли с постоянными условиями. Легко убедиться, что точное вычисление вероятностей для больших значений n по формуле Бернулли через факториалы достаточно трудоемко. В ряде случаев можно вычисления упростить, если воспользоваться таблицами факториалов или формулой Стирлинга: $n!\sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ (запись $(a_n\sim b_n)$

означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1$). Однако и этот путь остается громоздким и не всегда обеспечивает требуемую точность. Возникла необходимость в асимптотических формулах, позволяющих с достаточной степенью точности определять эти вероятности. (Функцию $\varphi(x)$ называют асимптотическим приближением функции $f(x)$, если $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=1$). Впервые формула такого рода была найдена Муавром в 1730 г. для частного случая схемы Бернулли при $p=q=\dfrac{1}{2}$, а затем обобщена Лапласом в 1783г. на случай произвольного p, отличного от 0 и 1. Поэтому формулу, о которой идет речь, называют теоремой Муавра – Лапласа. Теоремы Муавра – Лапласа применяются для приближенного вычисления вероятностей

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m} \quad \text{и} \quad P(m_1\le m\le m_2)=\sum_{m=m_1}^{m_2}P_n(m)$$

в схеме Бернулли при больших $n,\ m,\ m_1,\ m_2$.

Локальная теорема Муавра – Лапласа (без вывода)

Теорема. Если вероятность наступления события A в n независимых испытаниях постоянна и равна $p\,(0<p<1)$, то вероятность $P_n(m)$ того, что в этих испытаниях событие A наступит ровно m раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n)

$$P_n(m)\cong\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \qquad (1.31)$$

где p - вероятность наступления события A в каждом испытании,

$$q=1-p;\qquad x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}};\qquad \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Интегральная теорема Муавра – Лапласа (без вывода)

Теорема. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(m_1,m_2)$ того, что в n испытаниях событие A наступит от m_1 до m_2 раз, приближенно равна

$$P_n(m_1,m_2)=P(m_1\le m\le m_2)\cong\Phi(x_2)-\Phi(x_1), \qquad (1.32)$$

где $x_1=\dfrac{m_1-np}{\sqrt{npq}};\ x_2=\dfrac{m_2-np}{\sqrt{npq}};$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - функция Лапласа.

Для функции $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ имеются таблицы для $x \geq 0$.

Для отрицательных аргументов $x\,(x < 0)$ значения этих функций находят с учетом того, что $\varphi(x)$- четная, а $\Phi(x)$- нечетная функции. Приближенные формулы (1.31,1.32) применяют в случаях, когда p и q не малы, а $npq \geq 9$.

Пример 1.21 Вероятность наступления события A в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие A произойдет: 1). 750 раз; 2) от 710 до 740 раз.

Решение. Так как $npq = 900 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 144 > 9$, то формулы (1.31,1.32) можно использовать.

1) $x = \frac{750 - 900 \cdot 0.8}{\sqrt{900 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = 2.5; \varphi(2.5) \approx 0.0175$; $P_{900}(750) \approx \frac{1}{\sqrt{144}} \cdot \varphi(2.5) \approx 0.00146$;

2) $x_1 = \frac{710 - 720}{12} \approx -0.83$ $x_2 = \frac{740 - 720}{12} = 1.67$

$\Phi(-0.83) = -\Phi(0.83) \approx -0.2967$; $\Phi(1.67) \approx 0.4527$

$P_{900}(710 \leq m \leq 740) \approx 0.4527 + 0.2967 = 0.7494$.

1.4.3 Предельная теорема Пуассона

При применении локальной теоремы Муавра – Лапласа можно заметить, что асимптотическое представление вероятности $P_n(m)$ посредством функции $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ действует тем хуже, чем больше вероятность p отличается от половины, то есть чем меньше значения p или q приходится рассматривать, и это представление отказывается служить при $p = 0$, $q = 1$, а также при $p = 1$, $q = 0$.

Однако значительный круг задач связан с необходимостью вычисления вероятностей $P_n(m)$ именно при малых значениях p.

Для того, чтобы в этом случае теорема Муавра – Лапласа дала результаты с незначительной ошибкой, необходимо, чтобы число n испытаний было очень велико. Возникает, таким образом, задача разыскания асимптотической формулы, специально приспособленной для случая малых p. Такая формула была найдена Пуассоном.

Теорема Пуассона. Если $n \to \infty$ и $p \to 0$ так, что $np \to \lambda$ $(0 < \lambda < \infty)$, то

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \to P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, (m = 0,1,2,...) \qquad (1.33)$$

(для функции $P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ имеется таблица).

Доказательство:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m} = | np = \lambda \ | =$$

$$= \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} .$$

Таким образом, при больших n и малых p справедлива формула (обычно $p<0.1;\ npq \le 9$)

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np. \qquad (1.34)$$

Пример 1.22 Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0.001. Найти вероятность того, что на базу прибудут не более 2 негодных изделий.

Решение. $p = 0.001 < 0.1 \ \ npq = 5000 \cdot 0.001 \cdot 0.999 \approx 5 < 9$.

Значит, можно использовать формулу Пуассона

$\lambda = np = 0.001 \cdot 5000 = 5;$

$$P_n(0) = \frac{5^0}{0!} e^{-5} \approx 0.0067 ; \ P_n(1) = \frac{5}{1!} e^{-5} \approx 0.0337 ; \ P_n(2) = \frac{5^2}{2!} e^{-5} \approx 0.08375 ;$$

$$P(0 \le m \le 2) = P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) = 0.0067 + 0.0337 + 0.08375 = 0.12415 .$$

1.5. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1.5.1. Виды случайных величин

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, заранее неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Пример 1.23 Число появлений герба при трех бросаниях монеты.

Пример 1.24 Дальность полета артиллерийского снаряда в общем случае зависит от температуры воздуха, атмосферного давления, скорости и направления ветра и т.д.

Будем далее обозначать случайные величины большими буквами *X, Y, Z,* а их возможные значения - соответствующими малыми буквами *x, y, z.*

Например, если случайная величина *X* - число попаданий при трех выстрелах, то ее возможные значения $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3$.

Рассматривая примеры, приведенные выше, заметим, что в первом из них случайная величина *X* могла принять одно из следующих возможных значений: 0, 1, 2, 3. Эти значения отделены одно от другого промежутками, в которых нет возможных значений *X*. Таким образом, в этом примере случайная величина принимает отдельные, изолированные возможные значения. В примере 1.24 случайная величина могла принять любое из значений промежутка (a;b). Здесь

нельзя отделить одно возможное значение от другого промежутком, не содержащим возможных значений случайной величины.

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Очевидно, число возможных значений непрерывной случайной величины несчетно.

1.5.2. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины

Рассмотрим дискретную случайную величину *X* с возможными значениями $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. В результате опыта величина *X* примет одно из этих значений, т.е. произойдет одно из полной группы несовместных событий

$$X = x_1,$$
$$X = x_2,$$
$$X = x_3,$$
$$\ldots,$$
$$X = x_n$$

Обозначим вероятности этих событий

$$P(X = x_1) = p_1, P(X = x_2) = p_2, P(X = x_3) = p_3, \ldots, P(X = x_n) = p_n.$$

Так как несовместные события образуют полную группу, то $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, т.е. сумма вероятностей всех возможных значений равна единице. Эта суммарная вероятность каким-то образом распределена между отдельными значениями. Случайная величина будет полностью описана с вероятностной точки зрения, если будет задано это распределение, т.е. в точности будет указано, какой вероятностью обладает каждое из событий $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Этим устанавливается т.н. *закон распределения* случайной величины.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями; его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая - их вероятности:

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Если множество возможных значений *X* бесконечно (счетно), то ряд

$\sum_{i=1}^{\infty} P_i$ сходится и его сумма равна единице.

Пример 1.25 Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4. За каждое попадание стрелку засчитывается 5 очков. Найти закон распределения случайной величины X - числа выбитых очков.

Решение. Напишем возможные значения *X:* $x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = 10, x_4 = 15$.

Соответствующие вероятности этих возможных значений найдем по формуле Бернулли

$$p_1 = 0{,}6^3 = 0{,}216, \qquad p_2 = C_3^1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}432,$$

$$p_3 = C_3^2 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}288, \qquad p_4 = 0{,}4^3 = 0{,}064.$$

Напишем искомый закон распределения

x_i	0	5	10	15
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

Контроль:
0,216+0,432+0,288+0,064=1.

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить и графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки (x_i, p_i), а затем соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют ***многоугольником распределения*** (рис.1.2).

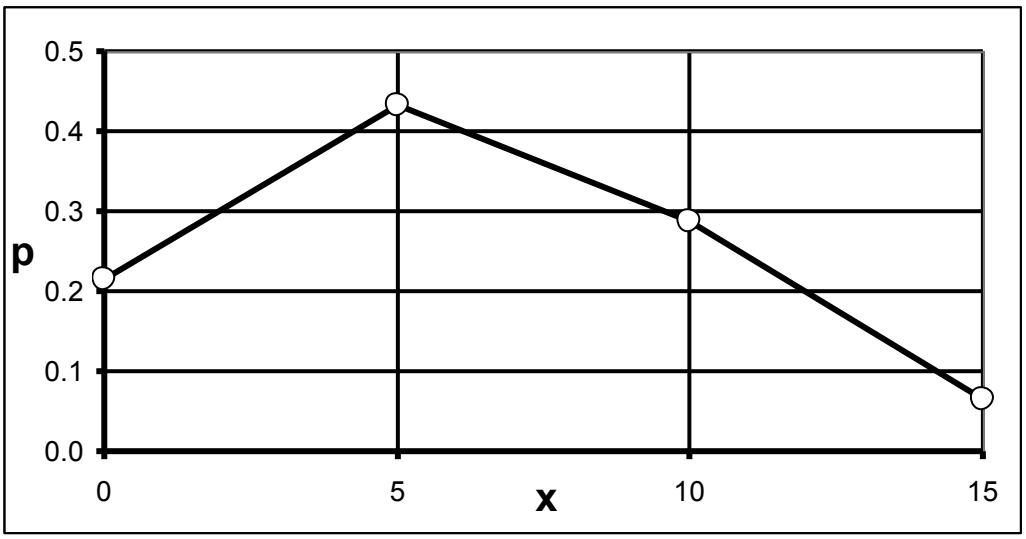


Рис.1.2

Среди законов распределения для дискретных случайных величин наиболее распространенными являются биномиальное распределение, распределение Пуассона, геометрическое распределение и некоторые другие.

1.5.3 Биномиальное распределение

Пусть производится *n* независимых испытаний, в каждом из которых событие *A* может появиться либо не появиться. Вероятность наступления события во всех испытаниях постоянна и равна *p* (следовательно, вероятность не появ-

ления *q=1-p).* Рассмотрим в качестве дискретной случайной величины *X* число появлений события *A* в этих испытаниях.

Поставим перед собой задачу: найти закон распределения величины *X*. Для ее решения требуется определить возможные значения *X* и их вероятности. Очевидно, событие *A* в *n* испытаниях может либо не появиться, либо появиться 1 раз, либо 2 раза, ..., либо *n* раз. Таким образом, возможные значения *X* таковы: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, ..., x_{n+1} = n$. Остается найти вероятности этих возможных значений, для чего достаточно воспользоваться формулой Бернулли:

$$P_n(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k},$$

где k=0, 1, 2, …, n.

Формула Бернулли и является аналитическим выражением искомого закона распределения.

Биномиальным называют распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли. Закон назван «биномиальным» потому, что правую часть равенства (1.26) можно рассматривать, как общий член разложения бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i p^{n-i} q^i = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q^1 + ... + C_n^k p^{n-k} q^k + ... + C_n^0 q^n$$

Таким образом, первый член разложения p^n определяет вероятность наступления рассматриваемого события *n* раз в *n* независимых испытаниях; второй член $n\,p^{n-1}q$ определяет вероятность наступления события *n -1* раз; последний член q^n определяет вероятность того, что событие не появится ни разу.

Напишем биномиальный закон в виде таблицы:

x_i	n	n-1	…	k	…	0
p_i	p^n	$np^{n-1}q$	…	$C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$	…	q^n

Биномиальное распределение имеет, например, случайная величина X, выражающая число бракованных изделий в повторной выборке из n изделий или число очков, выбиваемых стрелком при стрельбе по мишени (см. пример 1.25) и т.д.

1.5.4. Распределение Пуассона

Пусть производится *n* независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *A* равна *p*. Для определения вероятности *k* появлений события в этих испытаниях используют формулу Бернулли. Если же *n* велико, то пользуются асимптотической формулой Лапласа. Однако эта формула непригодна, если вероятность события мала ($p \le 0{,}1$). В этих случаях *(n* велико, *p* мало) прибегают к асимптотической формуле Пуассона.

Итак, поставим перед собой задачу найти вероятность того, что при очень большом числе испытаний, в каждом из которых вероятность события очень мала, событие наступит ровно k раз. Сделаем важное допущение: произведение np сохраняет постоянное значение, а именно: $np=\lambda$. Как будет следовать из

дальнейшего, это означает, что среднее число появлений события в различных *сериях испытаний, т. е. при различных значениях n остается неизменным.*

$$P_n(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Эта формула выражает закон распределения Пуассона вероятностей массовых (*n* велико) и редких *(p* мало) событий.

Пример 1.26 Тигр-альбинос появляется в природе в среднем один на десять тысяч особей. В год рождается около 500 особей. Какова вероятность появится в следующем году двум тиграм-альбиносам?

Решение. По условию, n =500, p=0,0001, k=2. Найдем :

$$\lambda = np = 500 \cdot 0{,}0001 = 0{,}05.$$

По формуле Пуассона искомая вероятность приближенно равна

$$P_{500}(X=2)=\frac{0{,}05^2}{2!}e^{-0{,}05}\approx 0{,}0012.$$

1.5.5. Геометрическое распределение

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события *A* равна *p* (0<p<1) и, следовательно, вероятность его непоявления *q=1-p.* Испытания заканчиваются, как только появится событие *A.* Таким образом, если событие *A* появилось в k-м испытании, то в предшествующих k-1 испытаниях оно не появлялось.

Обозначим через *X* дискретную случайную величину - число испытаний, которые нужно провести до первого появления события *A.* Очевидно, возможными значениями *X* являются натуральные числа: $x_1=1, x_2=2,\ldots$.

Пусть в первых *k-1* испытаниях событие *A* не наступило, а в k-м испытании появилось. Вероятность этого события, по теореме умножения вероятностей независимых событий, есть

$$P(X=k)=q^{k-1}\cdot p.$$

Полагая k=l, 2, ... в данной формуле, получим геометрическую прогрессию с первым членом *p* и знаменателем *q* (0<q<1):

$$p, qp, q^2p, \ldots, q^{k-1}p, \ldots$$

По этой причине данное распределение называют ***геометрическим.***

Легко убедиться, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}p$ сходится и сумма его равна единице. Действительно, по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии сумма ряда есть

$$S=\frac{p}{1-q}=\frac{p}{p}=1.$$

Пример 1.27 Электрическая лампочка включается и выключается до перегорания спирали. Вероятность перегорания p=0,001. Найти вероятность того,

что перегорание произойдет на 100-м включении.

Решение. По условию p=0,001, q=0,999, k=100.

Искомая вероятность

$$P(X=100)=0{,}999^{100-1}\cdot 0{,}001\approx 0{,}0009\,.$$

1.5.6. Гипергеометрическое распределение

Прежде чем дать определение гипергеометрического распределения, рассмотрим задачу. Пусть в партии из *N* изделий имеется *M* стандартных *(M < N).* Из партии случайно отбирают *n* изделий (каждое изделие может быть извлечено с одинаковой вероятностью), причем отобранное изделие перед отбором следующего не возвращается в партию (поэтому формула Бернулли здесь неприменима). Обозначим через *X* случайную величину - число *m* стандартных изделий среди *n* отобранных. Очевидно, возможные значения *X* таковы:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \min(M,\ n).$$

Найдем вероятность того, что *X = m,* т. е. что среди *n* отобранных изделий ровно *m* стандартных. Используем для этого классическое определение вероятности.

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь *n* изделий из *N* изделий, т. е. числу сочетаний C_N^n.

Найдем число исходов, благоприятствующих событию *X=m* (среди взятых *n* изделий ровно *m* стандартных); *m* стандартных изделий можно извлечь из *M* стандартных изделий C_M^m способами; при этом остальные *n-m* изделий должны быть нестандартными; взять же *n-m* нестандартных изделий из *N-m* нестандартных изделий можно C_{N-M}^{n-m} способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}$.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию *X=m,* к числу всех элементарных исходов

$$P(X=m)=\frac{C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}\,.$$

Данная формула определяет распределение вероятностей, которое называют ***гипергеометрическим.***

Учитывая, что m - случайная величина, заключаем, что гипергеометрическое распределение определяется тремя параметрами: N, M, n. Иногда в качестве параметров этого распределения рассматривают N, n и p=M/N, где p - вероятность того, что первое извлеченное изделие стандартное.

Заметим, что если n значительно меньше N (практически если $n < 0{,}1\cdot N$), то гипергеометрическое распределение дает вероятности, близкие к вероятностям, найденным по биномиальному закону.

Пример 1.28 Среди 12 изделий имеется 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных 5 изделий окажется ровно 3 стандартных.

Решение. По условию N=12, M=8, n=5, m=3. Искомая вероятность

$$P(X=3)=\frac{C_8^3\cdot C_{12-8}^{5-3}}{C_{12}^5}=\frac{14}{33}.$$

1.6. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Как уже известно, закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако часто закон распределения неизвестен и приходится ограничиваться меньшими сведениями. Иногда даже выгоднее пользоваться числами, которые описывают случайную величину суммарно; такие числа называют ***числовыми характеристиками случайной величины.*** К числу важных числовых характеристик относится математическое ожидание.

Математическое ожидание, как будет показано далее, приближенно равно среднему значению случайной величины. Для решения многих практических задач достаточно знать математическое ожидание. Например, если известно, что математическое ожидание числа выбиваемых очков у первого стрелка больше, чем у второго, то первый стрелок в среднем выбивает больше очков, чем второй, и, следовательно, стреляет лучше второго. Хотя математическое ожидание дает о случайной величине значительно меньше сведений, чем закон ее распределения, но для решения задач, подобных приведенной, знание математического ожидания оказывается достаточным.

1.6.1. Математическое ожидание дискретной случайной величины

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Пусть случайная величина X может принимать только значения $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, вероятности которых соответственно равны $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$. Тогда математическое ожидание $M(X)$ случайной величины X определяется равенством

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n.$$

Если дискретная случайная величина X принимает счетное множество возможных значений, то

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i,$$

причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

Замечание. Из определения следует, что математическое ожидание дискретной случайной величины есть неслучайная (постоянная) величина. В дальнейшем будет показано, что математическое ожидание непрерывной случайной величины также есть постоянная величина.

Пример 1.29 Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения:

x_i	0	5	10	15
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

Решение. Искомое математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности:

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}216 + 5 \cdot 0{,}432 + 10 \cdot 0{,}288 + 15 \cdot 0{,}064 = 6.$$

Пример 1.30 Найти математическое ожидание числа появлений события *A* в одном испытании, если вероятность события *A* равна *p*.

Решение. Случайная величина *X* - число появлений события *A* в одном испытании - может принимать только два значения $x_1=1$ (событие *A* наступило) с вероятностью *p* и $x_2=0$ (событие *A* не наступило) с вероятностью $q=1-p$. Искомое математическое ожидание

$$M(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p.$$

Итак, *математическое ожидание числа появлений события в одном испытании равно вероятности этого события.*

1.6.2. Вероятностный смысл математического ожидания

Пусть произведено *n* испытаний, в которых случайная величина *X* приняла m_1 раз значение x_1, m_2 раз значение x_2, ..., m_k раз значение x_k, причем

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n.$$

Тогда сумма всех значений, принятых *X*, равна

$$x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k.$$

Найдем среднее арифметическое $\overline{X}$ всех значений, принятых случайной величиной, для чего разделим найденную сумму на общее число испытаний:

$$\overline{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n}$$

или

$$\overline{X} = x_1\left(\frac{m_1}{n}\right) + x_2\left(\frac{m_2}{n}\right) + \ldots + x_k\left(\frac{m_k}{n}\right).$$

Заметив, что отношение $\left(\frac{m_1}{n}\right)$ - относительная частота W_1 значения x_1, $\left(\frac{m_2}{n}\right)$ - относительная частота W_2 значения x_2 и т. д., запишем соотношение для $\overline{X}$ так:

$$\overline{X} = x_1 W_1 + x_2 W_2 + \ldots + x_k W_k.$$

Допустим, что число испытаний достаточно велико. Тогда относительная частота приближенно равна вероятности появления события:

$$W_1 \approx p_1, W_2 \approx p_2, \ldots, W_k \approx p_k.$$

Заменяя далее относительные частоты соответствующими вероятностями, получим

$$\overline{X} \approx x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k.$$

Правая часть этого приближенного равенства есть *M (X).* Итак,

$$\overline{X} \approx M(X).$$

Вероятностный смысл полученного результата таков: *математическое ожидание приближенно равно (тем точнее, чем больше число испытаний) среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.*

Замечание. Очевидно, что математическое ожидание больше наименьшего и меньше наибольшего возможных значений. Таким образом, на числовой оси возможные значения расположены слева и справа от математического ожидания. С этой точки зрения математическое ожидание характеризует расположение распределения и поэтому его часто называют ***центром распределения.***

Этот термин заимствован из механики: если массы $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ расположены в точках с абсциссами $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, причем $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, то абсцисса центра тяжести

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = M(X) \end{array} \right| = M(X).$$

Итак, математическое ожидание есть абсцисса центра тяжести системы материальных точек, абсциссы которых равны возможным значениям случайной величины, а массы - их вероятностям.

1.6.3. Свойства математического ожидания

Свойство 1. *Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:*

$$M(C) = C.$$

Доказательство. Будем рассматривать постоянную *C* как дискретную случайную величину, которая имеет одно возможное значение *C* и принимает его с вероятностью *p*=1. Следовательно,

$$M(C) = C \cdot 1 = C.$$

Замечание 1. Определим *произведение постоянной величины C на дискретную случайную величину X* как дискретную случайную *C·X,* возможные значения которой равны произведениям постоянной C на возможные значения *X*, вероятности возможных значений *C·X* равны вероятностям соответствующих возможных значений *X*. Например, если вероятность возможного значения x_k равна p_k, то вероятность того, что величина *C·X* примет значение $C \cdot x_k$, также равна p_k.

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания

$$M(CX) = C \cdot M(X).$$

Доказательство. Пусть случайная величина задана законом распределения вероятностей:

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Учитывая замечание 1, напишем закон распределения случайной величины $C \cdot X$:

CX	Cx_1	Cx_2	…	Cx_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Тогда

$$M(CX) = Cx_1p_1 + Cx_2p_2 + \ldots + Cx_np_n =$$
$$= C(x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n) = C \cdot M(X).$$

Итак,

$$M(CX) = C \cdot M(X).$$

Замечание 2. Две случайные величины называют ***независимыми,*** если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина. В противном случае случайные величины *зависимы.* Несколько случайных величин называют ***взаимно независимыми,*** если законы распределения любого числа из них не зависят от того, какие возможные значения приняли остальные величины.

Замечание 3. Определим *произведение независимых случайных величин X* и *Y* как случайную величину $X \cdot Y$, возможные значения которой равны произведениям каждого возможного значения X на каждое возможное значение Y; вероятности возможных значений произведения $X \cdot Y$ равны произведениям вероятностей возможных значений сомножителей. Например, если вероятность возможного значения x_k равна p_k, вероятность возможного значения y_m равна g_m, то вероятность возможного значения $x_k \cdot y_m$ равна $p_k \cdot g_m$.

Следующее свойство приведем без доказательства.

Свойство 3. *Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:*

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y).$$

Следствие. *Математическое ожидание произведения нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.*

Например, для трех случайных величин имеем

$$M(XYZ) = M(XY) \cdot M(Z) = M(X) \cdot M(Y) \cdot M(Z).$$

Пример 1.31 Независимые случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

X	0	5	10	15
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

Y	-1	0	1
p_i	0,2	0,5	0,3

Найти математическое ожидание случайной величины *XY*.

Решение. Найдем математические ожидания каждой из данных величин:

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}3 + 15 \cdot 0{,}1 = 6{,}5,$$

$$M(Y) = -1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}3 = 0{,}1.$$

Случайные величины *X* и *Y* независимые, поэтому искомое математическое ожидание

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y) = 6{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}65.$$

Замечание 4. Определим *сумму случайных величин X* и *Y* как случайную величину *X*+*Y*, возможные значения которой равны суммам каждого возможного значения *X* с каждым возможным значением *Y*; вероятности возможных значений *X*+*Y* для независимых величин *X* и *Y* равны произведениям вероятностей слагаемых; для зависимых величин - произведениям вероятности одного слагаемого, на условную вероятность второго.

Следующее свойство справедливо как для независимых, так и для зависимых случайных величин, его приведем без доказательства.

Свойство 4. *Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых*

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

Следствие. *Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.*

Например, для трех слагаемых величин имеем

$$M(X + Y + Z) = M((X + Y) + Z) = M(X + Y) + M(Z) = M(X) + M(Y) + M(Z).$$

Пример 1.32 Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые могут выпасть при бросании двух игральных костей.

Решение. Обозначим число очков, которое может выпасть на первой кости, через *X* и на второй - через *Y*. Возможные значения этих величин одинаковы и равны 1, 2, 3, 4, 5 и 6, причем вероятность каждого из этих значений равна 1/6.

Найдем математическое ожидание числа очков, которые могут выпасть на первой кости:

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

Очевидно, что и

$$M(Y) = \frac{7}{2}.$$

Искомое математическое ожидание

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7.$$

Рассмотрим следующую задачу. Пусть производится *n* независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *A* постоянна и равна *p*. Чему равно среднее число появлений события *A* в этих испытаниях? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. *Математическое ожидание M (X) числа появлений события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании:*

$$M(X) = n \cdot p .$$

Пример 1.33 Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия *p=0,6*. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

Решение. Попадание при каждом выстреле не зависит от исходов других выстрелов, поэтому рассматриваемые события независимы и, следовательно, искомое математическое ожидание

$$M(X) = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}6 = 6 .$$

1.6.4. Дисперсия дискретной случайной величины

Легко указать такие случайные величины, которые имеют одинаковые математические ожидания, но различные возможные значения. Рассмотрим, например, дискретные случайные величины *X* и *Y*, заданные следующими законами распределения:

X	-0,1	0	0,1
p_i	0,3	0,4	0,3

Y	-100	0	100
p_i	0,3	0,4	0,3

Найдем математические ожидания этих величин;

$$M(X) = -0{,}1 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0 ,$$

$$M(Y) = -100 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}4 + 100 \cdot 0{,}3 = 0 .$$

Таким образом, математические ожидания обеих величин одинаковы, а возможные значения различны, причем *X* имеет возможные значения, близкие к математическому ожиданию, а *Y* - далекие от своего математического ожидания. Поэтому, зная лишь математическое ожидание случайной величины, еще нельзя судить ни о том, какие возможные значения она может принимать, ни о том, как они рассеяны вокруг математического ожидания. Другими словами, математическое ожидание полностью случайную величину не характеризует.

По этой причине наряду с математическим ожиданием вводят и другие числовые характеристики. Так, например, для того, чтобы оценить, как рассеяны возможные значения случайной величины вокруг ее математического ожидания, пользуются, в частности, числовой характеристикой, которую называют дисперсией.

Предварительно введем понятие отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

Пусть *X* - случайная величина и $M(X)$ - ее математическое ожидание. Рассмотрим в качестве новой случайной величины разность $X - M(X)$.

Отклонением называют разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием.

Пусть закон распределения X известен:

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Определим закон распределения отклонения. Для того, чтобы отклонение приняло значение $x_1 - M(X)$ достаточно, чтобы случайная величина приняла значение x_1. Вероятность же этого события равна p_1, следовательно, и вероятность того, что отклонение примет значение $x_1 - M(X)$, также равна p_1. Аналогично обстоит дело и для остальных возможных значений отклонения.

Таким образом, отклонение имеет следующий закон распределения:

$X - M(X)$	$x_1 - M(X)$	$x_2 - M(X)$	…	$x_n - M(X)$
p	p_1	p_2	…	p_n

Приведем важное свойство отклонения.

Теорема. *Математическое ожидание отклонения равно нулю:*

$$M[X - M(X)] = 0.$$

Доказательство. Так как математическое ожидание разности равно разности математических ожиданий, математическое ожидание постоянной равно самой постоянной и учитывая, что $M(X)$ - постоянная величина, имеем

$$M[X - M(X)] = M(X) - M[M(X)] = M(X) - M(X) = 0.$$

Пример 1.34 Задан закон распределения дискретной случайной величины *X:*

X	0	5	10	15
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

Проверить, что математическое ожидание отклонения равно нулю.

Решение. Найдем математическое ожидание *X:*

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}3 + 15 \cdot 0{,}1 = 6{,}5.$$

Найдем возможные значения отклонения, для чего из возможных значений X вычтем математическое ожидание $M(X)$:

$$x_1 - M(X) = 0 - 6{,}5 = -6{,}5,$$
$$x_2 - M(X) = 5 - 6{,}5 = -1{,}5,$$
$$x_3 - M(X) = 10 - 6{,}5 = 3{,}5,$$
$$x_4 - M(X) = 15 - 6{,}5 = 8{,}5.$$

Итак,

$X-M(X)$	$-6,5$	$-1,5$	$3,5$	$8,5$
p	0,2	0,4	0,3	0,1

Найдем математическое ожидание отклонения:

$$M[X-M(X)]=-6,5\cdot 0,2-1,5\cdot 0,4+3,5\cdot 0,3+8,5\cdot 0,1=0.$$

На практике часто требуется оценить рассеяние возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения. Например, в артиллерии важно знать, насколько кучно лягут снаряды вблизи цели, которая должна быть поражена.

Первоначально может показаться, что для оценки рассеяния проще всего вычислить все возможные значения отклонения случайной величины и затем найти их среднее значение. Однако такой путь ничего не даст, так как среднее значение отклонения, т. е. $M[X-M(X)]$, для любой случайной величины равно нулю. Это свойство объясняется тем, что одни возможные отклонения положительны, а другие - отрицательны; в результате их взаимного погашения среднее значение отклонения равно нулю. Поэтому целесообразно заменить возможные отклонения их абсолютными значениями или их квадратами.

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X)=M[X-M(X)]^2.$$

Пусть случайная величина задана законом распределения

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Тогда квадрат отклонения имеет, следующий закон распределения:

$[X-M(X)]^2$	$[x_1-M(X)]^2$	$[x_2-M(X)]^2$	…	$[x_n-M(X)]^2$
p	p_1	p_2	…	p_n

По определению дисперсии,

$$D(X)=M[X-M(X)]^2=$$

$$=[x_1-M(X)]^2p_1+[x_2-M(X)]^2p_2+\ldots+[x_n-M(X)]^2p_n.$$

Таким образом, для того, чтобы найти дисперсию, достаточно вычислить сумму произведений возможных значений квадрата отклонения на их вероятности.

Замечание. Из определения следует, что дисперсия дискретной случайной величины есть неслучайная (постоянная) величина.

Пример 1.35 Найти дисперсию случайной величины ***X,*** которая задана следующим законом распределения:

X	0	5	10	15
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

Решение. Найдем математическое ожидание:

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}3 + 15 \cdot 0{,}1 = 6{,}5.$$

Найдем все возможные значения квадрата отклонения:

$$[x_1 - M(X)]^2 = [0 - 6{,}5]^2 = 42{,}25,$$
$$[x_2 - M(X)]^2 = [5 - 6{,}5]^2 = 2{,}25,$$
$$[x_3 - M(X)]^2 = [10 - 6{,}5]^2 = 12{,}25,$$
$$[x_4 - M(X)]^2 = [15 - 6{,}5]^2 = 72{,}25.$$

Напишем закон распределения квадрата отклонения:

$[X - M(X)]^2$	42,25	2,25	12,25	72,25
p	0,2	0,4	0,3	0,1

По определению

$$D(X) = 42{,}25 \cdot 0{,}2 + 2{,}25 \cdot 0{,}4 + 12{,}25 \cdot 0{,}3 + 72{,}25 \cdot 0{,}1 = 20{,}25$$

Вычисление, основанное на определении дисперсии, оказалось относительно громоздким. На практике обычно пользуются результатом следующей теоремы.

Теорема. *Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:*

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Доказательство. Математическое ожидание $M(X)$ есть постоянная величина, следовательно, $2M(X)$ и $M^2(X)$ есть также постоянные величины. Используя, кроме того, свойства математического ожидания (постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания, математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых), упростим формулу, выражающую определение дисперсии:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M[X^2 - 2XM(X) + M^2(X)] =$$
$$= M(X^2) - 2M(X)M(X) + M^2(X) = M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) =$$
$$= M(X^2) - M^2(X).$$

Пример 1.36 Найти дисперсию случайной величины *X*, которая задана следующим законом распределения:

X	0	5	10	15
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

Решение. Найдем математическое ожидание $M(X)$:

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}3 + 15 \cdot 0{,}1 = 6{,}5 .$$

Напишем закон распределения случайной величины X^2:

X^2	0	25	102	225
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

Найдем математическое ожидание $M(X^2)$:

$$M(X^2) = 0 \cdot 0{,}2 + 25 \cdot 0{,}4 + 100 \cdot 0{,}3 + 225 \cdot 0{,}1 = 62{,}5 .$$

Искомая дисперсия

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 62{,}5 - 42{,}25 = 20{,}25 .$$

Замечание. Казалось бы, если X и Y имеют одинаковые возможные значения и одно и то же математическое ожидание, то и дисперсии этих величин равны. Однако в общем случае это не так, т.к. одинаковые возможные значения рассматриваемых величин имеют, вообще говоря, различные вероятности, *а величина дисперсии определяется не только самими возможными значениями, но и их вероятностями.* Например, если вероятности «далеких» от математического ожидания возможных значений X больше, чем вероятности этих же значений Y, и вероятности "близких" значений X меньше, чем вероятности тех же значений Y, то, очевидно, дисперсия X больше дисперсии Y.

Приведем иллюстрирующий пример.

Пример 1.37

X	-1	0	1	3
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

Y	-1	0	1	3
p_i	0,3	0,2	0,1	0,4

Решение. Легко убедиться, что

$$M(X) = 0{,}4, \quad M(Y) = 1,$$
$$D(X) = 1{,}24, \quad D(Y) = 3 .$$

Таким образом, возможные значения и математические ожидания X и Y одинаковы, а дисперсии различны, причем $D(X) < D(Y)$. Этот результат можно было предвидеть без вычислений, глядя лишь на законы распределений.

Далее без доказательств, приведем свойства дисперсии.

1.6.5. Свойства дисперсии

Свойство 1. *Дисперсия постоянной величины C равна нулю:*

$$D(C) = 0 .$$

Данное свойство очевидно, если учесть, что постоянная величина сохраняет одно и то же значение и рассеяния, конечно, не имеет.

Свойство 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:*

$$D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X) .$$

Свойство 3. *Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:*

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

Следствие 1. *Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.*

Например, для трех слагаемых имеем

$$D(X+Y+Z)=D((X+Y)+Z)=D(X+Y)+D(Z)=D(X)+D(Y)+D(Z).$$

Следствие 2. *Дисперсия суммы постоянной величины и случайной равна дисперсии случайной величины:*

$$D(C+X)=D(X).$$

Свойство 4. *Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:*

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

Рассмотрим следующую задачу. Пусть производится *n* независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *A* постоянна. Чему равна дисперсия числа появлений события в этих испытаниях? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. Дисперсия числа появлений события *A* в *n* независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность *p* появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании:

$$D(X)=n\cdot p\cdot q.$$

Пример 1.38 Производятся 10 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна 0,6. Найти дисперсию случайной величины *X* - числа появлений события в этих испытаниях.

Решение

$$D(X)=n\cdot p\cdot q=n\cdot p\cdot(1-p)=10\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4=2{,}4.$$

1.6.6. Среднее квадратическое отклонение

Для оценки рассеяния возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения, кроме дисперсии, служат и некоторые другие характеристики, например, среднее квадратическое отклонение.

Средним квадратическим отклонением случайной величины *X* называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Легко показать, что дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины. Так как среднее квадратическое отклонение равно квадратному корню из дисперсии, то размерность $\sigma(X)$ совпадает с размерностью *X*. Поэтому в тех случаях, когда желательно, чтобы оценка рассеяния имела размерность случайной величины, вычисляют среднее квадратическое отклонение, а не дисперсию. Например, если *X* выражается в метрах, то

$\sigma(X)$ будет выражаться также в метрах, а $D(X)$ - в квадратных метрах.

Пример 1.39 Случайная величина X задана законом распределения

X	0	5	10	15
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

Найти среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Решение. Найдем математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$:

$$M(X) = 6{,}5, \quad D(X) = 20{,}25.$$

Тогда

$$\sigma(X) = \sqrt{20{,}25} = 4{,}5.$$

1.6.7. Числовые характеристики основных распределений дискретных случайных величин

Приведем без вывода основные числовые характеристики дискретных случайных величин:

1) **биномиальное распределение**

$$P_n(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \qquad k=0, 1, 2, \ldots, n,$$

$$M(X) = n \cdot p, \quad D(X) = n \cdot p \cdot q, \quad \sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q};$$

2) **распределение Пуассона**

$$P_n(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k=0, 1, 2, \ldots, n$$

$$M(X) = \lambda, \quad D(X) = \lambda, \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda};$$

3) **геометрическое распределение**

$$P(X = k) = q^{k-1} \cdot p, \quad k=0, 1, 2, \ldots,$$

$$M(X) = \frac{1}{p}, \quad D(X) = \frac{q}{p^2}, \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p};$$

4) **гипергеометрическое распределение**

$$P(X = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$$

$$M(X) = \frac{n \cdot M}{N}, \quad D(X) = \frac{n \cdot m \cdot M \cdot (N-M)}{N^2} + n \cdot (n-1) \cdot \left[\frac{M}{N} \cdot \frac{M-1}{N-1} - \left(\frac{M}{N} \right)^2 \right].$$

1.7. НАЧАЛЬНЫЕ И ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ

Рассмотрим дискретную случайную величину *X*, заданную законом распределения:

X	1	10	20	150
P	0,2	0,4	0,3	0,1

Найдем математическое ожидание $M(X)$:

$$M(X) = 1 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}4 + 20 \cdot 0{,}3 + 150 \cdot 0{,}1 = 25{,}2.$$

Напишем закон распределения случайной величины X^2:

X^2	1	100	400	22500
P	0,2	0,4	0,3	0,1

Найдем математическое ожидание $M(X^2)$:

$$M(X^2) = 1 \cdot 0{,}2 + 100 \cdot 0{,}4 + 400 \cdot 0{,}3 + 22500 \cdot 0{,}1 = 2410{,}2.$$

Видим, что $M(X^2)$ значительно больше $M(X)$. Это объясняется тем, что после возведения в квадрат возможное значение величины X^2, соответствующее значению $x=150$ величины *X*, стало равным 22500, т. е. значительно увеличилось; вероятность же этого значения мала (0,1).

Таким образом, переход от $M(X)$ к $M(X^2)$ позволил лучше учесть влияние на математическое ожидание того возможного значения, которое велико и имеет малую вероятность. Разумеется, если бы величина *X* имела несколько больших и маловероятных значений, то переход к величине X^2, а тем более к величинам X^3, X^4 и т. д., позволил бы еще больше "усилить роль" этих больших, но маловероятных возможных значений. Вот почему оказывается целесообразным рассматривать математическое ожидание целой положительной степени случайной величины (не только дискретной, но и непрерывной).

Начальным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины X^k:

$$\nu_k = M(X^k).$$

В частности,

$$\nu_1 = M(X), \quad \nu_2 = M(X^2).$$

Пользуясь этими моментами, формулу для вычисления дисперсии

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

можно записать так:

$$D(X) = \nu_2 - \nu_1^{\,2}.$$

Кроме моментов случайной величины *X*, целесообразно рассматривать моменты отклонений $X - M(X)$.

Центральным моментом порядка *k* случайной величины X называют математическое ожидание величины $(X - M(X))^k$:

$$\mu_k = M\left[(X - M(X))^k\right].$$

В частности,

$$\mu_1 = M[(X - M(X))] = 0,$$

$$\mu_2 = M[(X - M(X))^2] = D(X).$$

Легко выводятся соотношения, связывающие начальные и центральные моменты. Например, сравнивая выражения для дисперсии, получим

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2.$$

Нетрудно, исходя из определения центрального момента и пользуясь свойствами математического ожидания, получить формулы

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3,$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4.$$

Моменты более высоких порядков применяются редко.

Отметим, что моменты, рассмотренные здесь, называют ***теоретическими.*** В отличие от теоретических моментов моменты, которые вычисляются по данным наблюдений, называют ***эмпирическими.***

1.8. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Как говорилось ранее, дискретная случайная величина может быть задана перечнем всех ее возможных значений и их вероятностей. Такой способ задания не является общим: он неприменим, например, для непрерывных случайных величин.

Действительно, рассмотрим случайную величину ***X,*** возможные значения которой сплошь заполняют интервал *(a;b)*. Можно ли составить перечень всех возможных значений *X*? Очевидно, что этого сделать нельзя. Этот пример указывает на целесообразность дать общий способ задания любых типов случайных величин. С этой целью и вводят функции распределения вероятностей случайной величины.

Пусть *x* - действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что *X* примет значение, меньшее *x,* т. е. вероятность события $X < x$, обозначим через *F(x).* Разумеется, если *x* изменяется, то, вообще говоря, изменяется и *F(x),* т. е. *F(x)*-функция от *x.*

Функцией распределения называют функцию *F(x),* определяющую вероятность того, что случайная величина *X* в результате испытания примет значение, меньшее *x,* т. е.

$$F(x) = P(X < x).$$

С геометрической точки зрения это равенство можно истолковать так: *F(x)* есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки *x.*

Иногда вместо термина «функция распределения» используют термин «интегральная функция».

С учетом вышесказанного, можно дать более точное определение непрерывной случайной величины: случайную величину называют ***непрерывной,*** ес-

ли ее функция распределения есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция.

1.8.1 Свойства функции распределения

Свойство 1. *Значения функции распределения принадлежат отрезку [0;1]*:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

Доказательство. Свойство вытекает из определения функции распределения как вероятности: вероятность всегда есть неотрицательное число, не превышающее единицы.

Свойство 2. *F (x) - неубывающая функция, т. е.*

$$F(x_2) \ge F(x_1), \text{ если } x_2 > x_1.$$

Доказательство. Пусть $x_2 > x_1$. Событие, состоящее в том, что X примет значение, меньшее x_2, можно подразделить на следующие два несовместных события:

1) X примет значение, меньшее x_2, с вероятностью $P(X < x_1)$;

2) X примет значение, удовлетворяющее неравенству $x_1 \le X < x_2$, с вероятностью $P(x_1 \le X < x_2)$. По теореме сложения имеем

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2).$$

Отсюда

$$P(X < x_2) - P(X < x_1) = P(x_1 \le X < x_2)$$

или

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \le X < x_2).$$

Так как любая вероятность есть число неотрицательное, то

$$F(x_2) - F(x_1) \ge 0$$

или

$$F(x_2) \ge F(x_1).$$

Следствие 1. *Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (a;b), равна приращению функции распределения на этом интервале:*

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

Это важное следствие вытекает из свойства 2, если

$$x_2 = b,\ x_1 = a.$$

Пример 1.40 Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 1, \\ \dfrac{(x-1)^2}{4}, & \text{при } 1 < x \le 3, \\ 1, & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу (1;2).

Решение. Так как на интервале (1;2), по условию,

$$F(x) = \frac{(x-1)^2}{4},$$

то

$$P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = \frac{(2-1)^2}{4} - \frac{(1-1)^2}{4} = \frac{1}{4}.$$

Следствие 2. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.*

Действительно, положив

$$a = x_1, \quad b = x_1 + \Delta x$$

в формуле

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a),$$

имеем

$$P(x_1 + \Delta x \le X < x_1) = F(x_1 + \Delta x) - F(x_1).$$

Пусть $\Delta x \to 0$. Тогда в силу непрерывности функции *F(x)* (*X* - непрерывная случайная величина)

$$\left(F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)\right) \to 0;$$

следовательно,

$$P(X = x_1) = 0.$$

Тогда

$$P(a \le X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b).$$

Например, равенство $P(a \le X < b) = P(a < X < b)$ доказывается так:

$$P(a \le X < b) = P(X = a) + P(a < X < b) = P(a < X < b).$$

Замечание. Ранее мы уже встречались с событиями, вероятности которых были равны нулю, – невозможные события. Теперь же рассматриваются события возможные, но с нулевой вероятностью. Они появляются только при рассмотрении опытов, не сводящихся к схеме случаев. Понятие о событии “возможном, но обладающем нулевой вероятностью”, не более парадоксально, чем представление о фигуре, имеющей определенную площадь, тогда как ни одна из точек внутри фигуры отличной от нуля площадью не обладает. Фигура *состоит* из таких точек, но ее площадь *не равна* сумме их площадей. Сколь угодно малый элемент, выделенный из этой фигуры, имеет площадь; она приближается к нулю при уменьшении размеров элемента и в пределе равна нулю для точки.

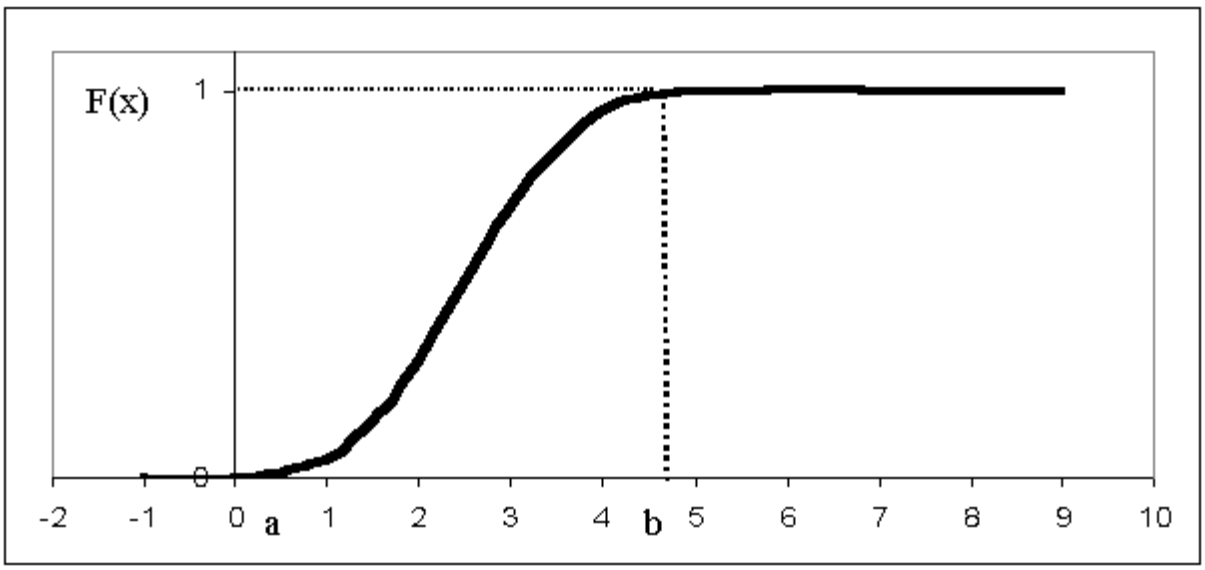


Рис.1.3

Если производится опыт, в котором непрерывная случайная величина должна принять одно из своих возможных значений, то до опыта вероятность каждого из таких значений равна нулю. Однако в исходе опыта случайная величина непременно примет одно из своих возможных значений, т.е. заведомо произойдет одно из событий, вероятности которых были равны нулю.

Свойство 3. *Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a;b), то:*

1) $F(x) = 0$, если $x \le a$;

2) $F(x) = 1$, если $x \ge b$.

Доказательство. 1) Пусть $x_1 \le a$. Тогда событие $X < x_1$ невозможно (так как значений, меньших x_1, величина *X* по условию не принимает) и, следовательно, вероятность его равна нулю.

2) Пусть $x_2 \ge b$. Тогда событие $X < x_2$ достоверно (так как все возможные значения *X* меньше x_2) и, следовательно, вероятность его равна единице.

Следствие. *Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей оси x, то справедливы следующие предельные соотношения:*

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

Сформулированные свойства позволяют представить, как выглядит график функции распределения непрерывной случайной величины.

График расположен в полосе, ограниченной прямыми $y = 0$, $y = 1$ (первое свойство).

При возрастании x в интервале (a;b), в котором заключены все возможные значения случайной величины, ордината точек графика не убывает (второе свойство).

При $x \le a$ ординаты графика равны нулю; при $x \ge b$ ординаты графика равны единице (третье свойство).

График функции распределения непрерывной случайной величины изображен на рис.1.3.

Функция распределения дискретной случайной величины всегда есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, и равны вероятностям этих значений. Сумма всех скачков функции $F(x)$ равна единице.

Пример 1.41 Дискретная случайная величина *X* задана таблицей распределения

X	-1	2	5
p_i	0,2	0,3	0,5

Найти функцию распределения и построить ее график.

Решение. Если $x \le -1$, то $F(x) = 0$ (третье свойство).

Если $-1 < x \le 2$, то $F(x) = 0{,}2$, т.к. *X* может принять единственное возможное в данном случае значение -1 с вероятностью 0,2.

Если $2 < x \le 5$, то $F(x) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$. Действительно, т.к. *X* может принять значение -1 (вероятность этого события равна 0,2) или значение 2 (вероятность этого события равна 0,3). Поскольку эти два события несовместны, то по теореме сложения вероятность события $X < x$ равна *сумме* вероятностей 0,2+0,3=0,5.

Если $x > 5$, то $F(x) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}5 = 1$. Действительно, событие $X \le 8$ достоверно, следовательно, его вероятность равна единице.

Итак, функция распределения аналитически может быть записана так:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le -1, \\ 0{,}2, & \text{при} \quad -1 < x \le 2, \\ 0{,}5, & \text{при} \quad 2 < x \le 5, \\ 1, & \text{при} \quad x > 5. \end{cases}$$

График этой функции приведен на рис.1.4.

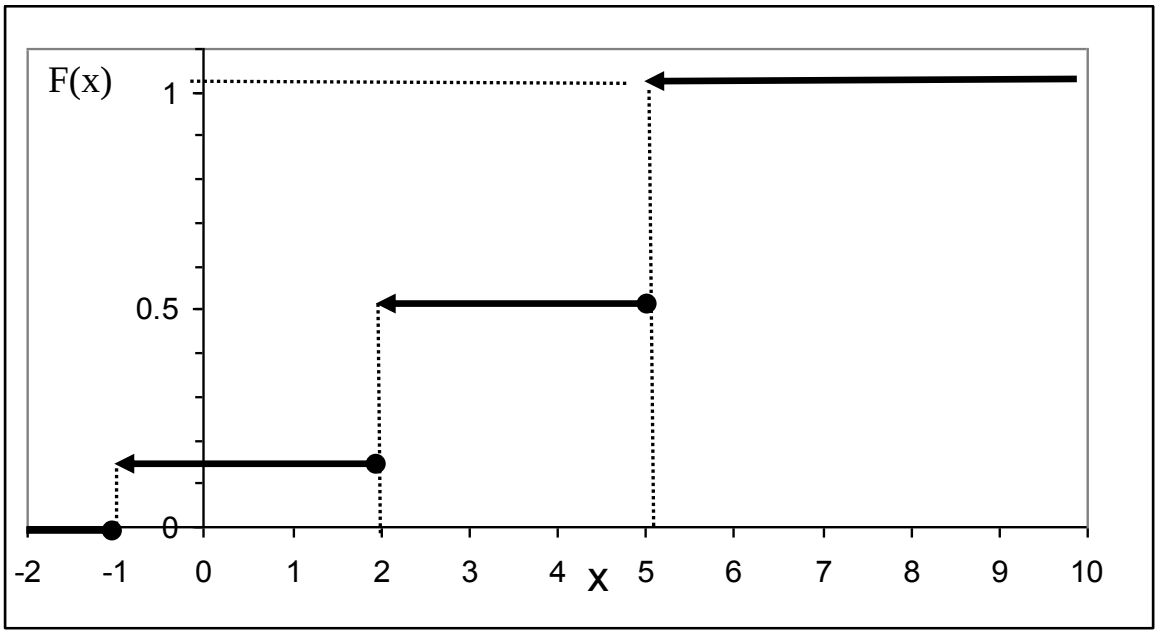


Рис.1.4

По мере увеличения числа возможных значений случайной величины и уменьшения интервалов между ними число скачков становится больше, а сами скачки – меньше; ступенчатая кривая становится более плавной (рис.1.5.); случайная величина постепенно приближается к непрерывной величине, а ее функция распределения – к непрерывной функции (рис.1.3.).

На практике обычно функция распределения непрерывной случайной величины представляет собой функцию, непрерывную во всех точках. Однако можно построить примеры случайных величин, возможные значения которых непрерывно заполняют некоторый промежуток, но для которых функция распределения не везде является непрерывной, а в отдельных точках терпит разрывы, такие случайные величины называются ***смешанными*.**

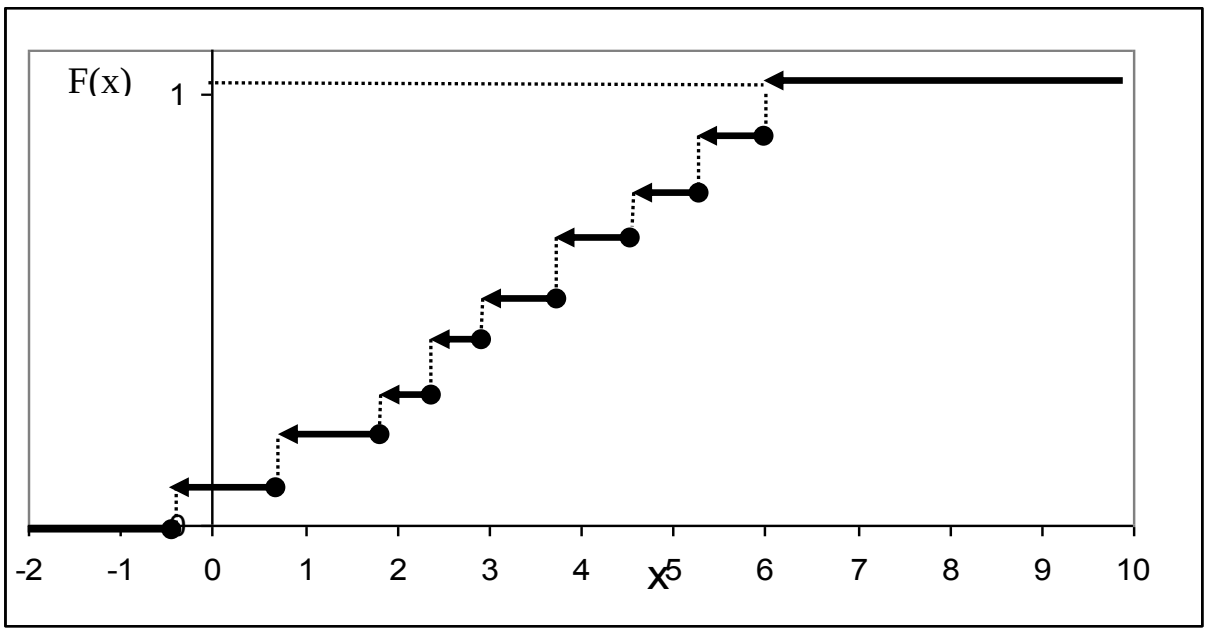


Рис.1.5

В качестве примера смешанной случайной величины можно привести площадь разрушений, наносимых цели бомбой, радиус разрушительного действия которой равен R (рис.1.6).

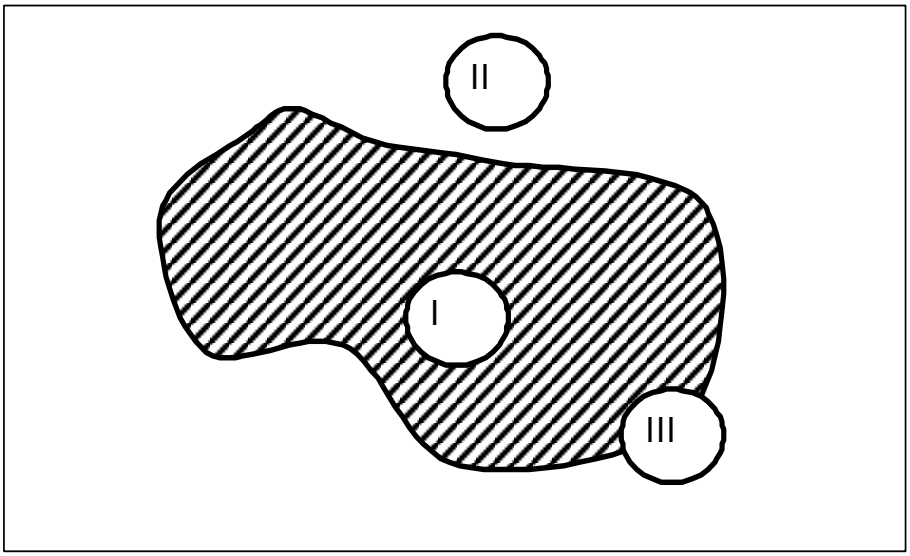


Рис.1.6

Значения этой случайной величины непрерывно заполняют промежуток $(0, \pi R^2)$, но при этом крайние значения промежутка 0 и πR^2, осуществляющиеся при положении бомбы типа I и II, обладают определенной конечной вероятностью, и этим значениям соответствуют скачки функции распределения, тогда как в промежуточных значениях (положение типа III) функция распределения непрерывна (рис.1.7).

Итак, в общем случае функция распределения случайной величины может иметь график со скачками (разрывы I рода), который на отдельных участках может быть постоянной величиной, на других – монотонно возрастать (рис.1.8).

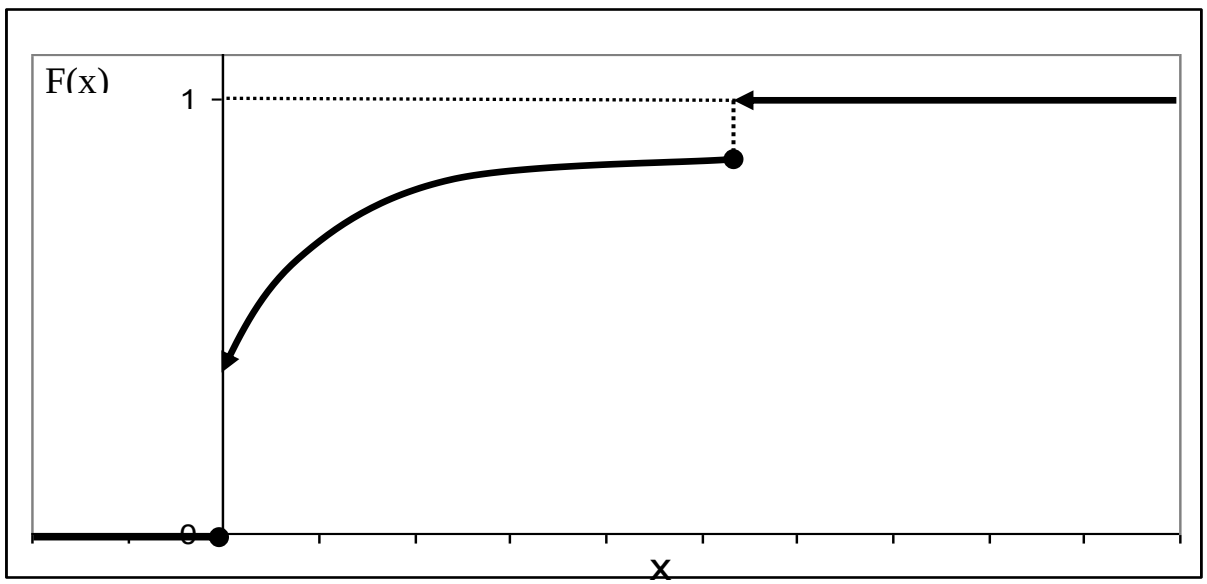


Рис.1.7

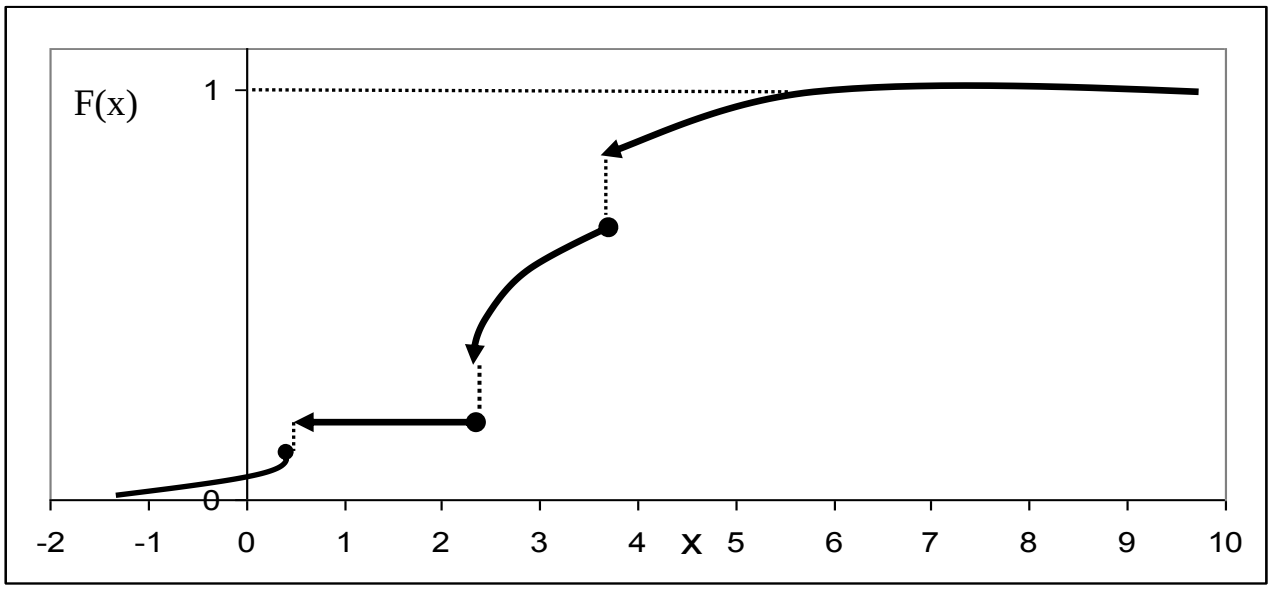


Рис.1.8

1.9. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Ранее непрерывная случайная величина задавалась с помощью функции распределения. Этот способ задания не является единственным. Непрерывную случайную величину можно также задать, используя другую функцию, которую называют плотностью распределения или плотностью вероятности (иногда ее называют дифференциальной функцией).

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины *X* называют функцию *f (x)* - первую производную от функции распределения *F(x):*

$$f(x) = F'(x).$$

Из этого определения следует, что функция распределения является первообразной для плотности распределения.

Заметим, что для описания распределения вероятностей дискретной случайной величины плотность распределения неприменима.

Зная плотность распределения, можно вычислить вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее заданному интервалу.

Теорема. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a;b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b:*

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство. Используем соотношение

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

По формуле Ньютона—Лейбница

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b f(x)dx .$$

Таким образом,

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx .$$

Геометрически полученный результат можно истолковать так: вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (a;b), равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox**,** кривой распределения f(x) и прямыми x=a и x=b (рис.1.9).

Пример 1.42 Задана плотность вероятности случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{\sin x}{2}, & \text{при } 0 < x \le \pi, \\ 0, & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Решение. Искомая вероятность

$$P\left(0 < X < \frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{2} dx = -\frac{\cos x}{2}\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

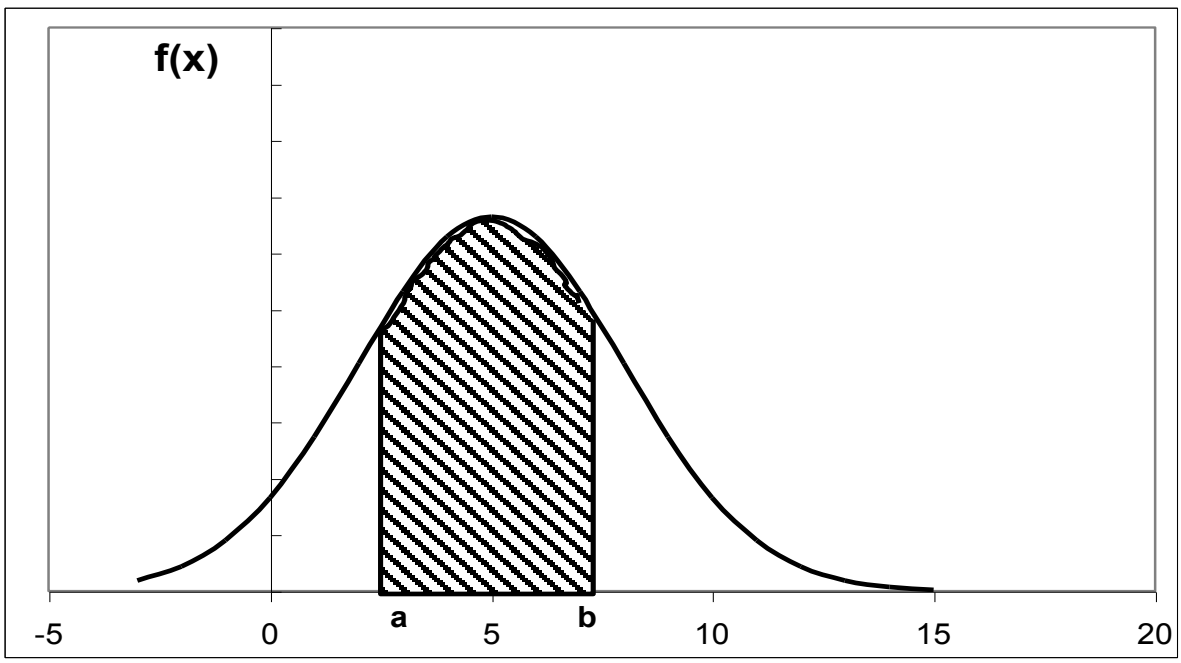


Рис.1.9

Зная плотность распределения f(x), можно найти функцию распределения F(x) по формуле

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx .$$

Действительно, если F(x) есть вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее x, т. е.

$$F(x)=P(X<x),$$

то неравенство $X<x$ можно записать в виде двойного неравенства $-\infty<X<x$, следовательно,

$$F(x)=P(-\infty<X<x)=\left| \; P(a<X<b)=\int_{a}^{b} f(x)dx \; \right|=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx .$$

Пример 1.43 Найти функцию распределения по данной плотности распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{\sin x}{2}, & \text{при } 0<x\le \pi,\\ 0, & \text{при } x>\pi. \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся формулой $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

При $x\le 0$ $\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{x} 0dx=0$.

При $0<x\le\pi$ $\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{x}\frac{\sin x}{2}dx=0-\left.\frac{\cos x}{2}\right|_{0}^{x}=\frac{1-\cos x}{2}$.

При $x>\pi$ $\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{2}dx+\int_{0}^{x} 0dx=0-\left.\frac{\cos x}{2}\right|_{0}^{\pi}+0=1$.

Итак, искомая функция распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{1-\cos x}{2}, & \text{при } 0<x\le \pi,\\ 1, & \text{при } x>\pi. \end{cases}$$

1.9.1 Свойства плотности распределения

Свойство 1. *Плотность распределения - неотрицательная функция:*

$$f(x)\ge 0.$$

Доказательство. Функция распределения - неубывающая функция, следовательно, ее производная $F'(x)=f(x)$ - функция неотрицательная.

С геометрической точки зрения это означает, что точки, принадлежащие графику плотности распределения, расположены либо над осью *Ox,* либо на

этой оси.

График плотности распределения называют *кривой распределения.*

Свойство 2. *Несобственный интервал от плотности распределения в пределах от* $-\infty$ *до* ∞ *равен единице:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Доказательство. Несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ выражает вероятность события, состоящего в том, что случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(-\infty;\infty)$. Очевидно, такое событие достоверно, следовательно, вероятность его равна единице.

Геометрически это означает, что вся площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ох и кривой распределения, равна единице.

В частности, если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу *(a;b),* то

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 1.$$

Пример 1.44 Плотность распределения случайной величины *X* задана:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le -\frac{\pi}{2}, \\ a \cdot \cos x, & \text{при } -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти постоянный параметр *a*.

Решение

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a \cdot \cos x dx = a \cdot \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2a = 1.$$

Таким образом, искомый параметр $a = 0{,}5$.

1.9.2. Вероятностный смысл плотности распределения

Пусть *F(x)* - функция распределения непрерывной случайной величины *X*. По определению плотности распределения

$$f(x) = F'(x),$$

или в иной форме

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

Как уже известно, разность $F(x + \Delta x) - F(x)$ определяет вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(x, x + \Delta x)$. Таким образом, предел отношения вероятности того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(x, x + \Delta x)$, к длине этого интервала при $\Delta x \to 0$ равен значению плотности распределения в точке *x*.

Итак, функция *f(x)* определяет плотность распределения вероятности для каждой точки *x*.

Как известно, приращение функции приближенно равно дифференциалу функции, т. е.

$$F(x + \Delta x) - F(x) \approx dF(x),$$

или

$$F(x + \Delta x) - F(x) \approx F'(x)dx.$$

Так как

$$F'(x) = f(x)$$

и

$$dx = \Delta x,$$

то

$$F(x + \Delta x) - F(x) \approx f(x)\Delta x.$$

Вероятностный смысл этого равенства следующий: вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(x, x + \Delta x)$, приближенно равна (с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно Δx) произведению плотности вероятности в точке *x* на длину интервала Δx.

Геометрически этот результат можно истолковать так: вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(x, x + \Delta x)$, приближенно равна площади прямоугольника с основанием Δx и высотой $f(x)$.

На рис.1.10 видно, что площадь заштрихованного прямоугольника, равная произведению $f(x) \cdot \Delta x$, лишь приближенно равна площади криволинейной трапеции (истинной вероятности, определяемой определенным интегралом $\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx$). Допущенная при этом погрешность равна площади криволинейного треугольника ABC.

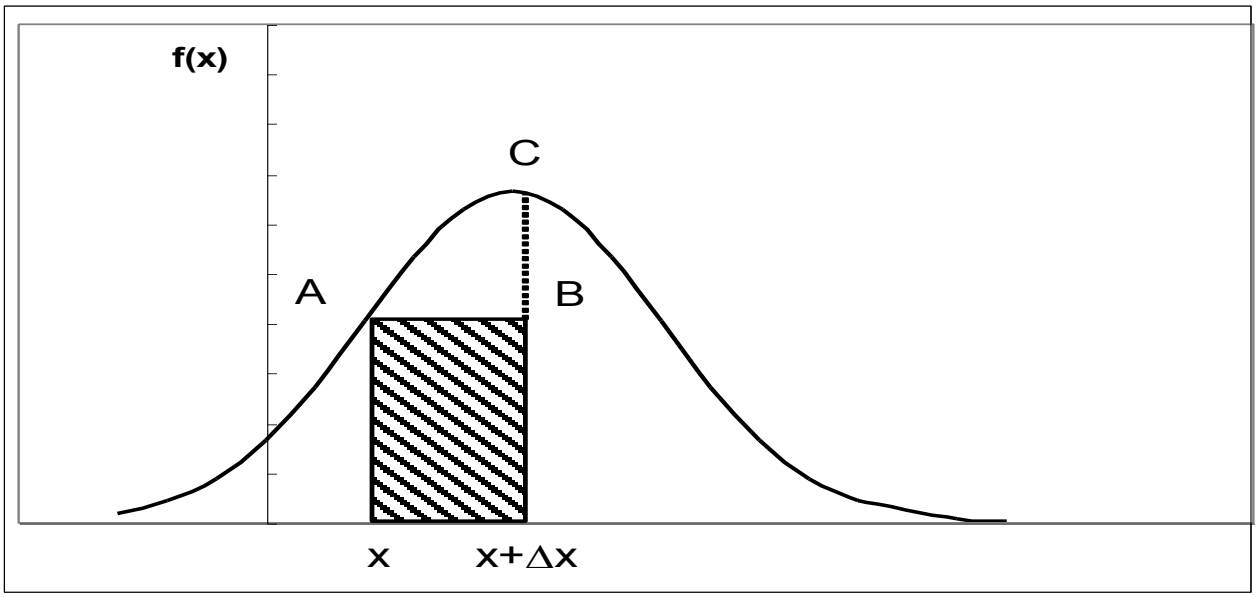


Рис.1.10

1.10. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть непрерывная случайная величина *X* задана плотностью распределения *f(x)*. Допустим, что все возможные значения *X* принадлежат отрезку *[a;b]*. Разобьем этот отрезок на *n* частичных отрезков длиной $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ и выберем в каждом из них произвольную точку x_i (i=1, 2, ..., *n)*.

Определим математическое ожидание непрерывной величины по аналогии с дискретной; составим сумму произведений возможных значений x_i, на вероятности попадания их в интервал Δx_i:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)\Delta x_i .$$

Перейдя к пределу, получим определенный интеграл

$$\lim_{\max_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b x \cdot f(x)dx$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку *[a;b]*, называют определенный интеграл

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx .$$

Если возможные значения принадлежат всей оси Ox, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx .$$

Предполагается, что несобственный интеграл сходится абсолютно, т, е.

существует интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx$. Если бы это требование не выполнялось, то значение интеграла зависело бы от скорости стремления (в отдельности) нижнего предела к $-\infty$, а верхнего - к $+\infty$.

По аналогии с дисперсией дискретной величины определяется и дисперсия непрерывной величины.

Дисперсией непрерывной случайной величины называют математическое ожидание квадрата ее отклонения.

Если возможные значения X принадлежат отрезку [a;b], то

$$D(X)=\int_{a}^{b}\left[x-M(X)\right]^2 f(x)dx,$$

если же возможные значения распределены по всей оси *Ox*, то

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x-M(X)\right]^2 f(x)dx.$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется, как и для величины дискретной, равенством

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Замечание 1. Можно доказать, что свойства математического ожидания и дисперсии дискретных величин сохраняются и для непрерывных величин.

Замечание 2. Легко получить для вычисления дисперсии более удобные формулы:

$$D(X)=\int_{a}^{b}x^2 f(x)dx-\left[M(X)\right]^2,$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-\left[M(X)\right]^2.$$

Пример 1.45 Найти математическое ожидание и дисперсию непрерывной случайной величины X**,** распределенной равномерно в интервале (a;b):

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le a\\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{при} \quad a<x\le b\\ 0, & \text{при} \quad x>b\end{cases}$$

Решение. Найдем математическое ожидание X по формуле

$$M(X)=\int_{a}^{b}x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}xdx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{a}^{b}=\frac{a+b}{2}.$$

Найдем дисперсию X по формуле

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - [M(X)]^2 = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx - \left[\frac{a+b}{2}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_a^b - \left[\frac{a+b}{2}\right]^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

1.10.1. Другие числовые характеристики случайных величин

Кроме математического ожидания и дисперсии, на практике часто применяются и другие характеристики положения случайной величины, в частности мода и медиана.

Модой M_0 ***дискретной случайной*** *величины* называется ее наиболее вероятное значение.

Для непрерывной случайной величины мода есть такое значение случайной величины, для которой

$$f(M_0) = \max f(x).$$

На рис.1.11, 1.12 показана мода для дискретной и непрерывной случайной величины.

Если многоугольник распределения (кривая распределения) имеет два или несколько максимумов, то распределение называется ***многомодальным*** (рис.1.13, 1.14).

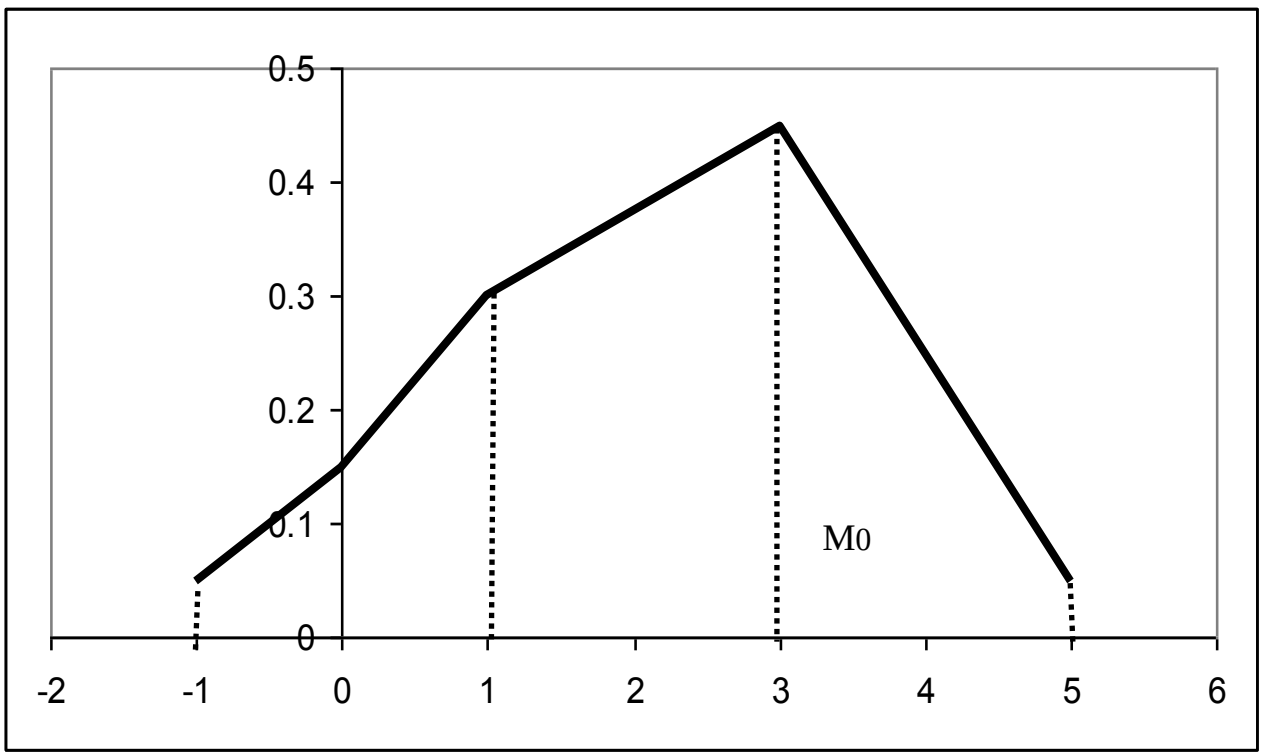


Рис.1.11

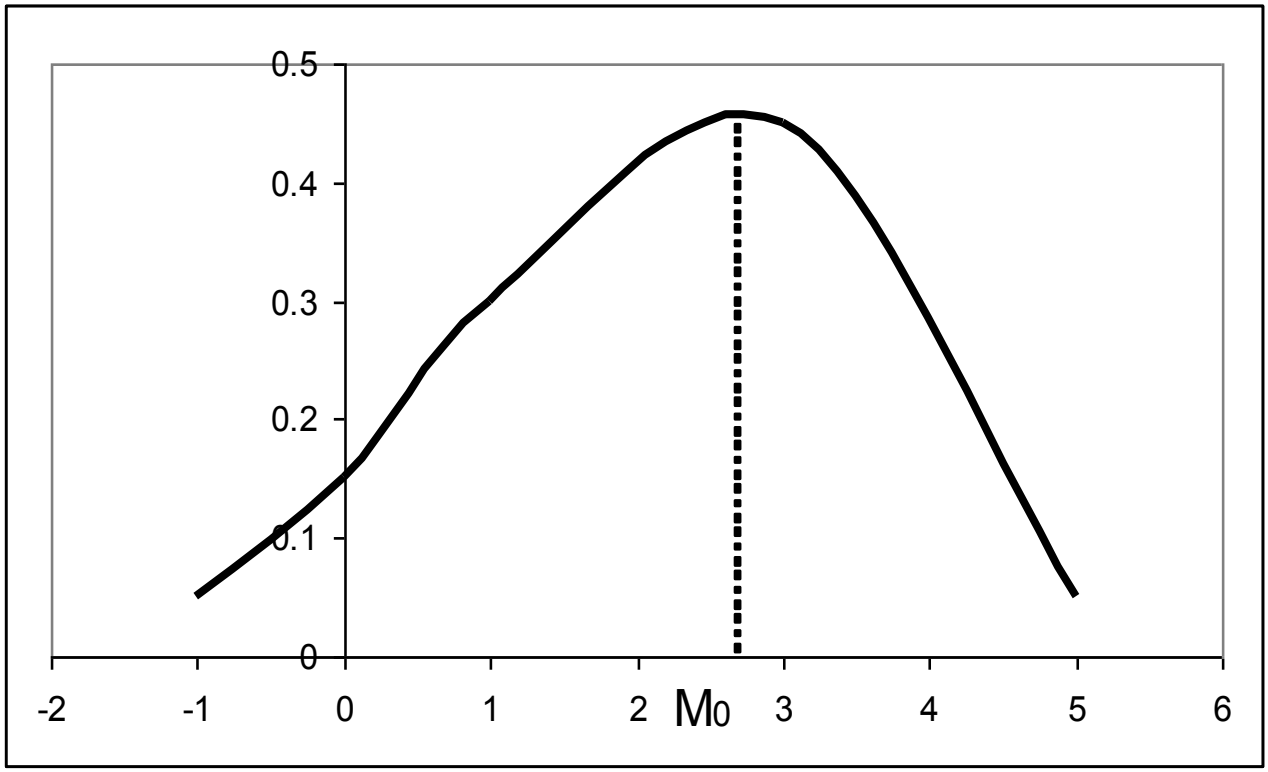


Рис.1.12

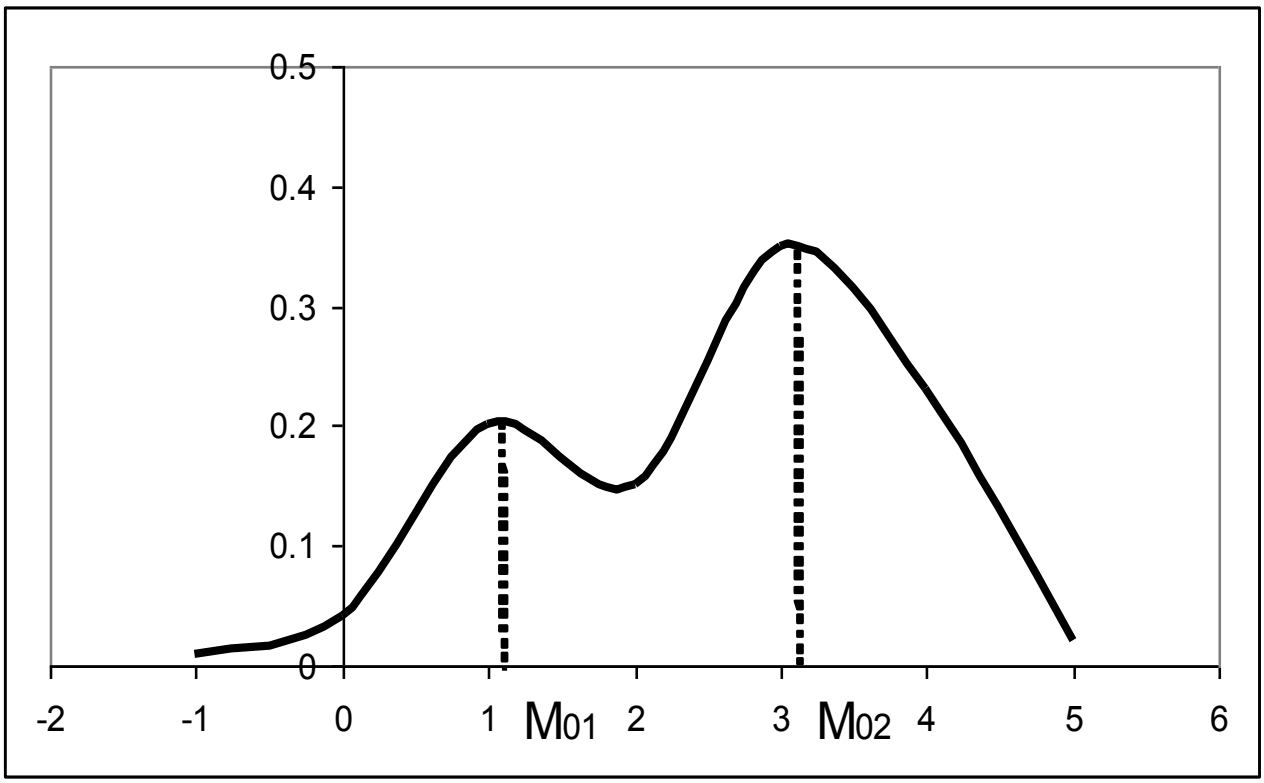


Рис.1.13

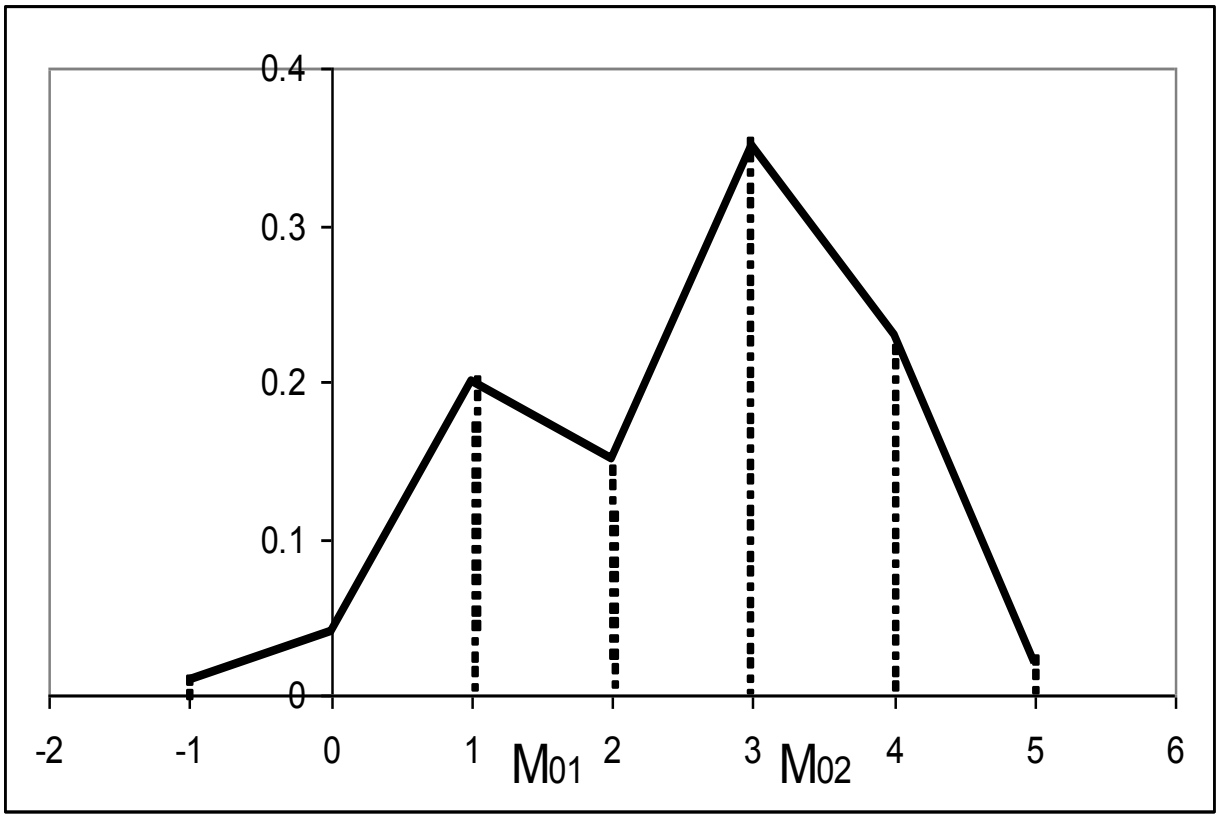


Рис.1.14

Иногда встречаются распределения, которые имеют минимум, но не имеют максимум. Такие распределения называют ***антимодальными*** (рис.1.15,1.16).

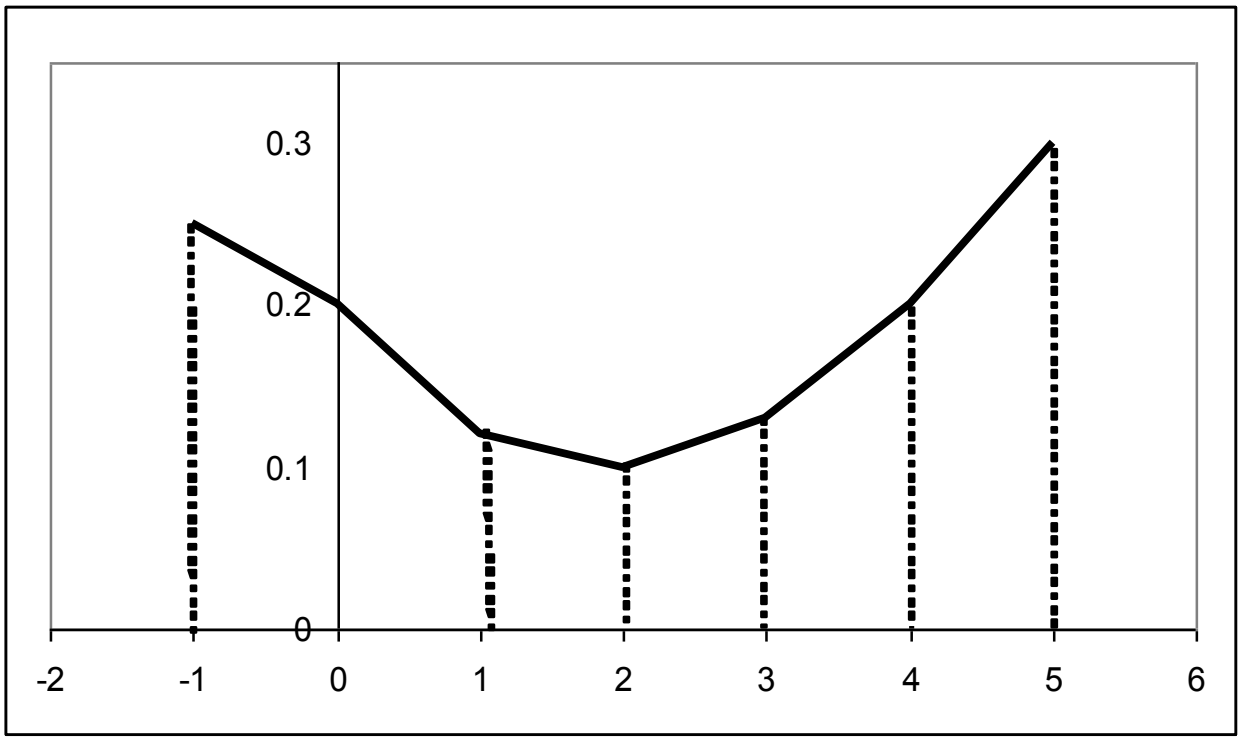


Рис.1.15

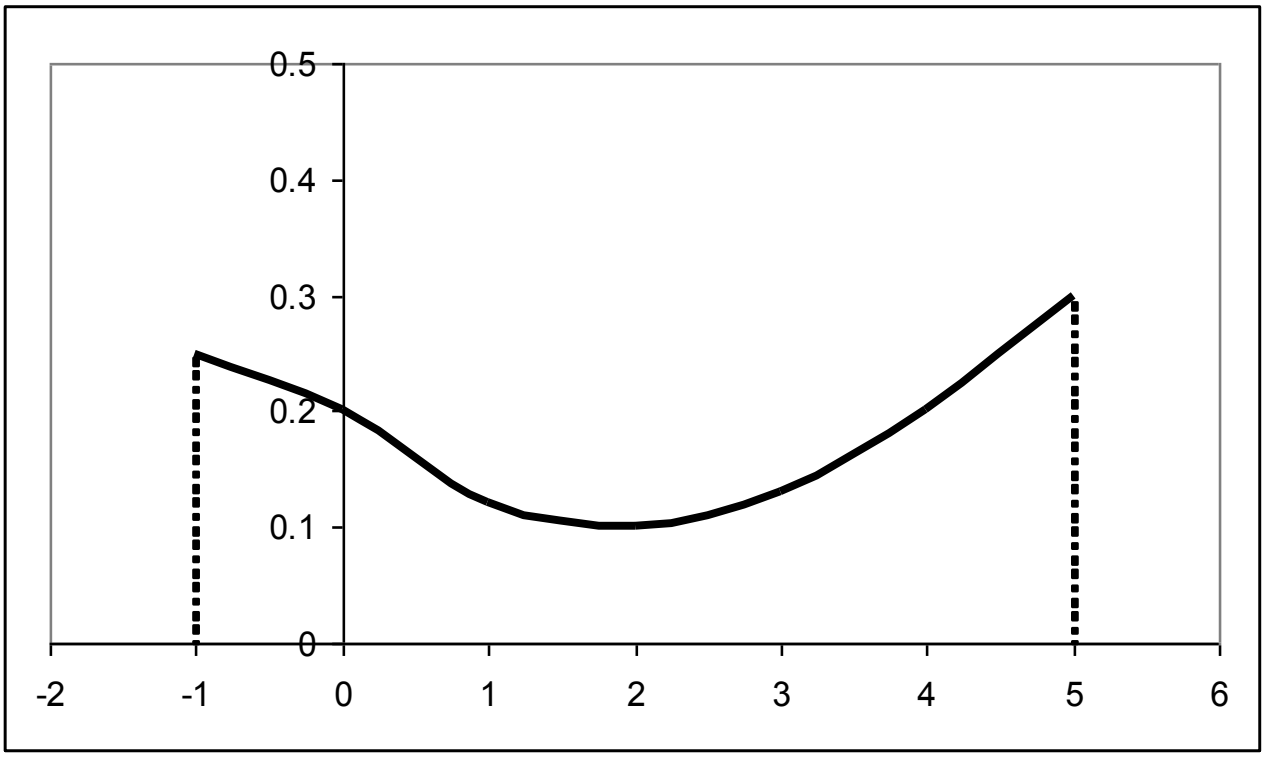


Рис.1.16

Медианой M_D случайной величины X называется такое ее значение, относительно которого равновероятно получение большего или меньшего значения случайной величины, т.е.

$$P(X < M_D) = P(X > M_D).$$

Геометрически медиана – это абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная кривой распределения, делится пополам (рис.1.17). Каждая из этих площадей равна 0,5, т.к. вся площадь, ограниченная кривой распределения, равна 1.

Поэтому

$$F(M_D) = P(X < M_D) = 0{,}5.$$

Заметим, что если распределение одномодальное и симметрическое, то все три характеристики положения случайной величины – математическое ожидание, мода и медиана – совпадают.

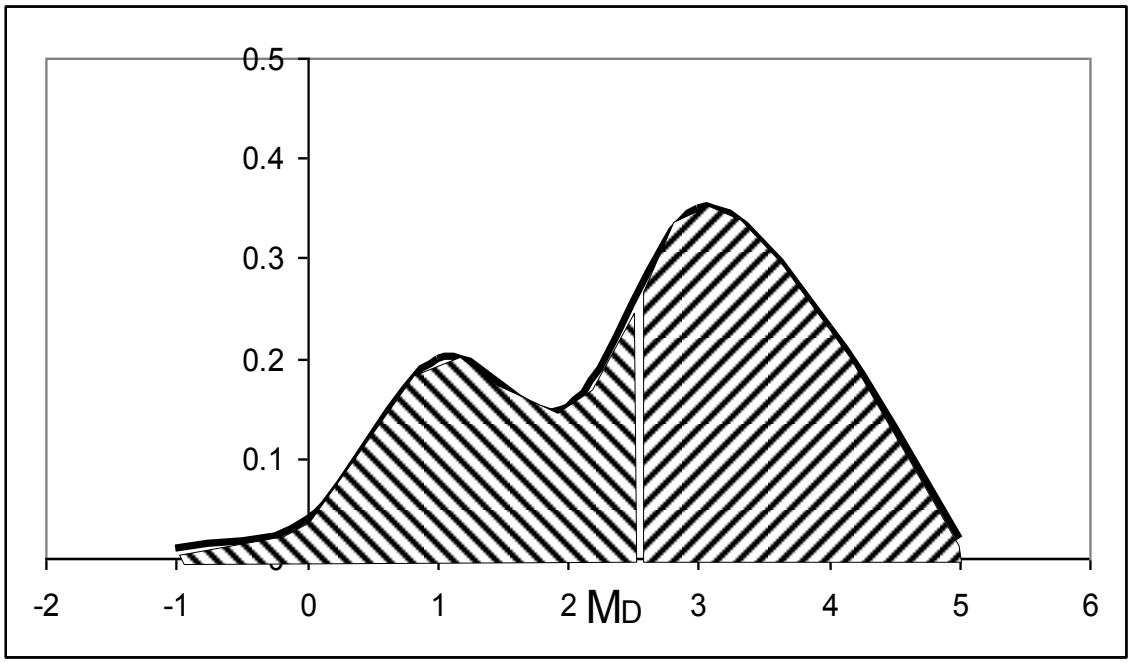


Рис.1.17

1.11. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

На практике при решении задач приходится сталкиваться с различными распределениями непрерывных случайных величин. Плотности распределений непрерывных случайных величин называют также ***законами распределений***. Часто встречаются, например, законы нормального, показательного и равномерного распределений.

Нормальный закон распределения **(*закон Гаусса*)** играет исключительно важную роль в теории вероятностей и занимает среди других законов распределения особое положение. Это наиболее часто встречающийся на практике закон распределения. Главная особенность, выделяющая нормальный закон среди других законов, состоит в том, что он является *предельным законом*, к которому приближаются другие законы распределения при достаточно часто встречающихся типичных условиях.

Примерами случайных величин, имеющих нормальное распределение, могут служить: отклонение действительных размеров деталей, обработанных на станке, от номинальных размеров, ошибки при измерении, отклонения при стрельбе и другие. Все эти примеры объединяет общая закономерность: случайная величина является результатом действия большого числа различных факторов, воздействие каждого из которых на данную величину незначительно и невозможно указать, какой именно влияет в большей степени, чем остальные.

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Очевидно, что *нормальное распределение определяется двумя параметрами: a* и σ. Достаточно знать эти параметры, чтобы задать нормальное распределение. Покажем, что вероятностный смысл этих параметров таков: *a* есть математическое ожидание, σ - среднее квадратическое отклонение нормального распределения.

а) По определению математического ожидания непрерывной случайной величины

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\left|\begin{array}{l}\text{Выполним замену } \dfrac{x-a}{\sigma}=z,\\ x=\sigma z+a,\quad dx=\sigma dz\\ \text{при } x\to\pm\infty\quad z\to\pm\infty\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma z+a)\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma dz=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} z\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} z\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz=0 \text{ как интеграл от нечетной функции}\\ \text{с симметричными пределами интегрирования}\\ \text{относительно начала координат,}\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{2\pi} \text{ - интеграл Пуассона}\end{array}\right|=0+a=a.$$

Итак, *M (X) = a,* т. е. *математическое ожидание нормального распределения равно параметру a;*

б) По определению дисперсии непрерывной случайной величины, учитывая, что *M(X)=a,* имеем

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{Выполним замену } \dfrac{x-a}{\sigma}=z,\\ x=\sigma z+a,\quad dx=\sigma dz\\ \text{при } x\to\pm\infty\quad z\to\pm\infty\end{array}\right|=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2 z^2 e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma dz=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} z^2\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$= \left| \int z^2 \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot z dz = \left| \begin{array}{l} z = u, \quad dz = du, \\ e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot z dz = dv, \\ v = -e^{-\frac{z^2}{2}} \end{array} \right| = -z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} + \int e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right| =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[\lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \left(-z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_a^b \right) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right] =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[\lim_{b \to \infty} \left(-\frac{b}{e^{\frac{b^2}{2}}} \right) + \lim_{a \to -\infty} \left(\frac{a}{e^{\frac{a^2}{2}}} \right) + \sqrt{2\pi} \right] = \sigma^2.$$

Итак,

$$D(X) = \sigma^2.$$

Следовательно,

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sigma.$$

Таким образом, *среднее квадратическое отклонение нормального распределения равно параметру* σ.

Замечание. ***Общим*** называют нормальное распределение с произвольными параметрами a и σ ($\sigma > 0$).

Нормированным называют нормальное распределение с параметрами a=0 и σ=1.

1.11.1 Нормальная кривая

График плотности нормального распределения называют ***нормальной кривой (кривой Гаусса)***. Исследуем функцию

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

методами дифференциального исчисления.

1. Очевидно, функция определена на всей оси x.

2. При всех значениях x функция принимает положительные значения, т.е. нормальная кривая расположена над осью Ox.

3 Предел функции при неограниченном возрастании x (по абсолютной величине) равен нулю:

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi} \cdot e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}} = 0,$$

т.е ось *Ox* служит горизонтальной асимптотой графика.

4. Исследуем функцию на экстремум. Найдем первую производную:

$$y' = -\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Легко видеть, что

$$y' = 0 \text{ при } x = a$$

и

$$y' > 0 \text{ при } x < a,$$
$$y' < 0 \text{ при } x > a.$$

Следовательно, при x=a функция имеет максимум, равный

$$y_{max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

5. Исследуем функцию на точки перегиба. Найдем вторую производную:

$$y'' = \frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(\frac{(x-a)^2}{\sigma^2} - 1\right).$$

Следовательно,

$$y'' = 0 \text{ при } x - a = \pm\sigma$$

или

$$x = a \pm \sigma$$

$$y'' < 0 \text{ при } x \in (a-\sigma, a+\sigma),$$
$$y'' > 0 \text{ при } x \in (-\infty, a-\sigma) \cup (a+\sigma, \infty).$$

Таким образом, точки графика с абсциссами $x = a \pm \sigma$ являются точками перегиба.

6. Разность (x-a) содержится в аналитическом выражении функции в квадрате, т. е. график функции симметричен относительно прямой x=a.

На рис.1.18 изображена нормальная кривая при a==5 и σ =3.

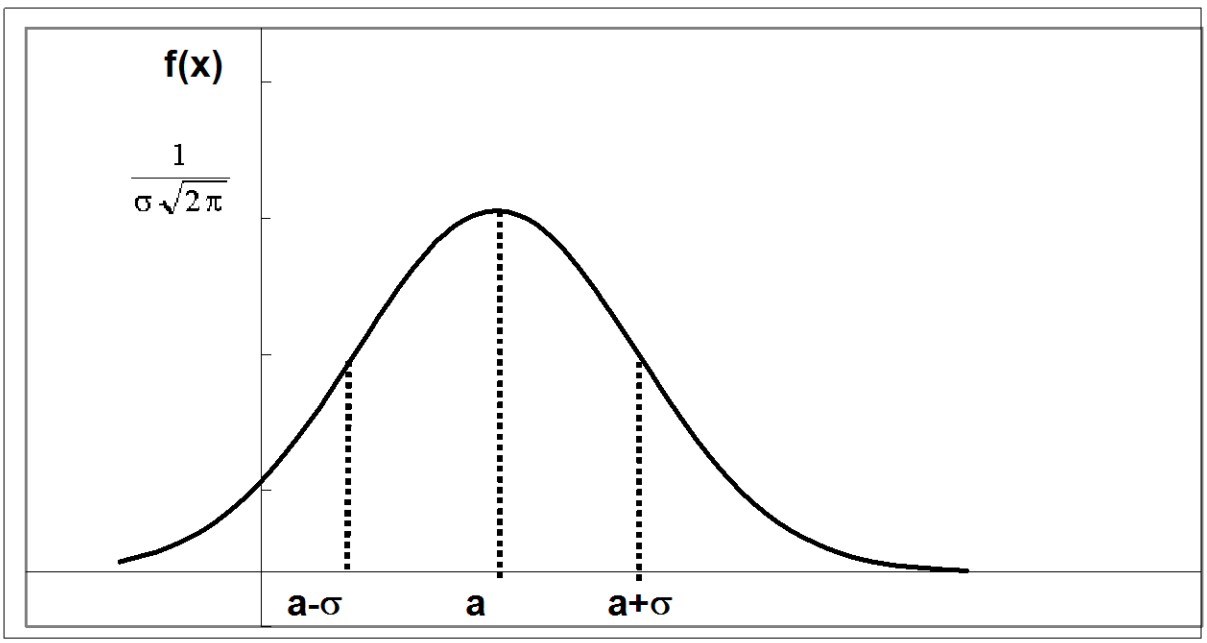


Рис.1.18

Выясним, как влияют на форму и расположение нормальной кривой значения параметров a и σ.

Известно, что графики функций f(x) и f(x-a) имеют одинаковую форму; сдвинув график f (x) в положительном направлении оси x на a единиц масштаба при a>0 или в отрицательном направлении при a<0, получим график f(x-a) (рис.1.19).

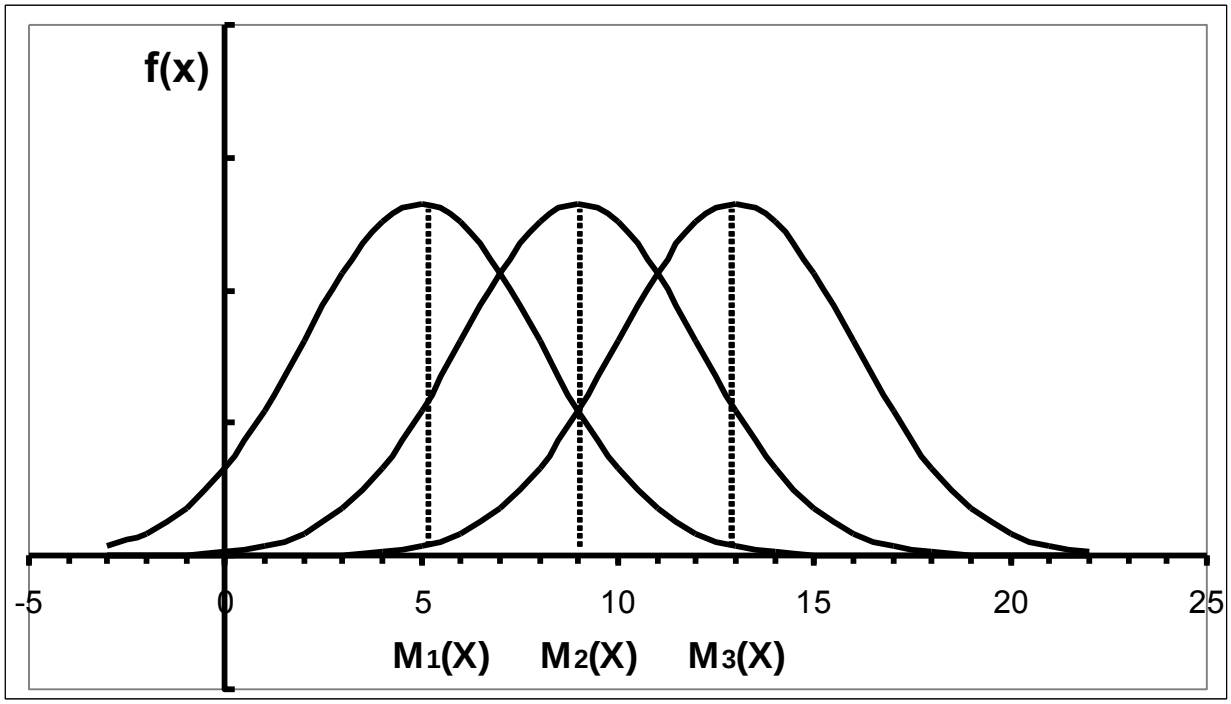


Рис.1.19

Отсюда следует, что *изменение величины математического ожидания не изменяет формы нормальной кривой, а приводит лишь к ее сдвигу вдоль оси Ox: вправо, если a возрастает, и влево, если a убывает.*

По-иному обстоит дело, если изменяется параметр σ (среднее квадратическое отклонение). Как было показано ранее, максимум дифференциальной функции нормального распределения равен $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Отсюда следует, что *с возрастанием σ максимальная ордината нормальной кривой убывает, а сама кривая становится более пологой, т. е. сжимается к оси Ox; при убывании σ нормальная кривая становится более «островершинной», и растягивается в положительном направлении оси Oy.*

На рис.1.20 изображены нормальные кривые при различных значениях σ и a=0. Рисунок наглядно иллюстрирует, как изменение параметра σ сказывается на форме нормальной кривой.

В случае, когда a=0 и σ =1, нормальную кривую называют *нормированной.* Подчеркнем, что при любых значениях параметров *a* и σ площадь, ограниченная нормальной кривой и осью *x,* остается равной единице.

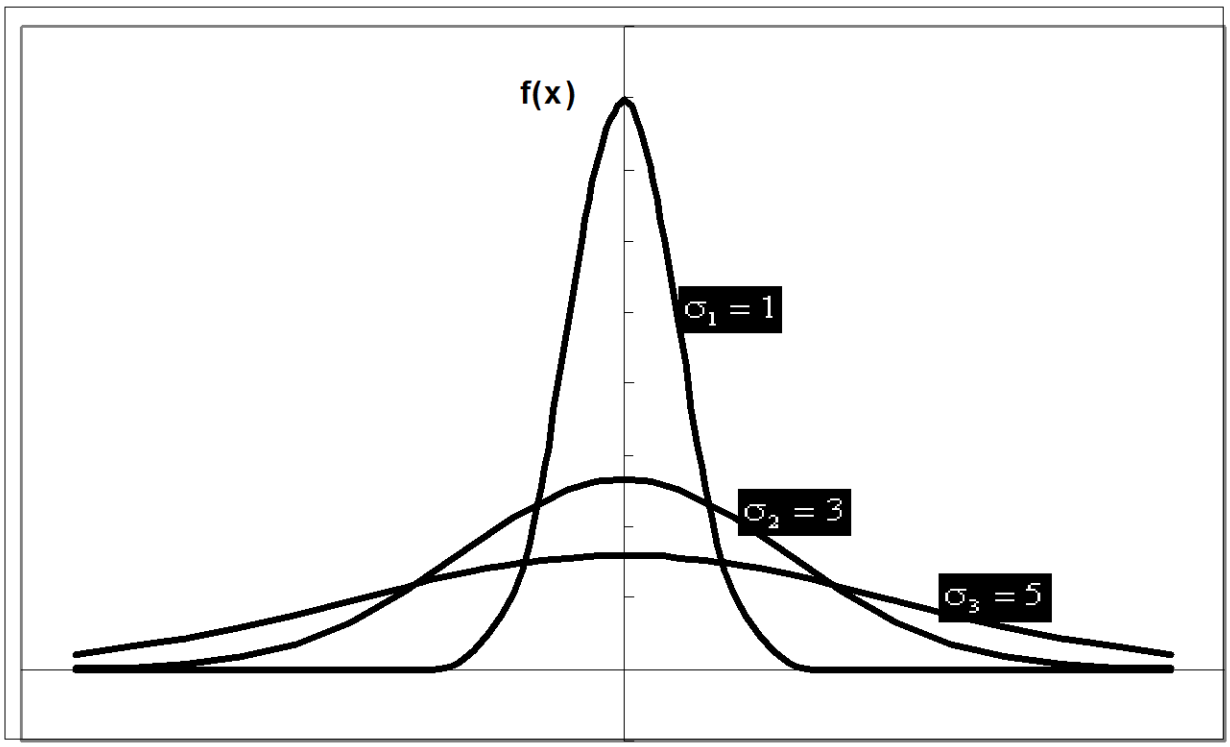


Рис.1.20

1.11.2. Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины

Уже известно, что если случайная величина *X* задана плотностью распределения *f (x),* то вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$, такова:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Пусть случайная величина *X* распределена по нормальному закону. Тогда вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$, равна

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx .$$

Преобразуем эту формулу так, чтобы можно было пользоваться готовыми таблицами.

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \begin{array}{c} \text{Выполним замену} \quad \dfrac{x-a}{\sigma} = z, \\ x = \sigma z + a, \; dx = \sigma dz \\ \text{при } x = \alpha \quad z = \dfrac{\alpha - a}{\sigma}, \\ \text{при } x = \beta \quad z = \dfrac{\beta - a}{\sigma} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz.$$

Пользуясь функцией Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

окончательно получим

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Пример 1.46 Случайная величина *X* распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 30 и 10. Найти вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу (10;50).

Решение. По условию, $\alpha=10$, $\beta=50$, $a=30$, $\sigma=10$, следовательно,

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50 - 30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 30}{10}\right) = 2\Phi(2).$$

По таблице находим $\Phi(2)=0{,}4772$. Отсюда искомая вероятность

$$P(10 < X < 50) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

1.11.3. Вычисление вероятности заданного отклонения

Часто требуется вычислить вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины *X* от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше заданного положительного числа δ, т. е. требуется найти вероятность осуществления неравенства

$$|X - a| < \delta .$$

Заменим это неравенство равносильным ему двойным неравенством

$$-\delta < X - a < \delta$$

или

$$a - \delta < X < a + \delta .$$

Далее

$$P(a - \delta < X < a + \delta) = \Phi\left(\frac{a + \delta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \delta - a}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = \left| \quad \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = -\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \quad \right| = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Итак

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

В частности, при a=0

$$P(|X| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

На рис.1.21 наглядно показано, что если две случайные величины нормально распределены и *a=0*, то вероятность принять значение, принадлежащее интервалу (-δ;δ), больше у той величины, которая имеет меньшее значение σ**.** Данное обстоятельство полностью отражает вероятностный смысл параметра σ, т.к. σ характеризует рассеяние случайной величины вокруг ее математического ожидания.

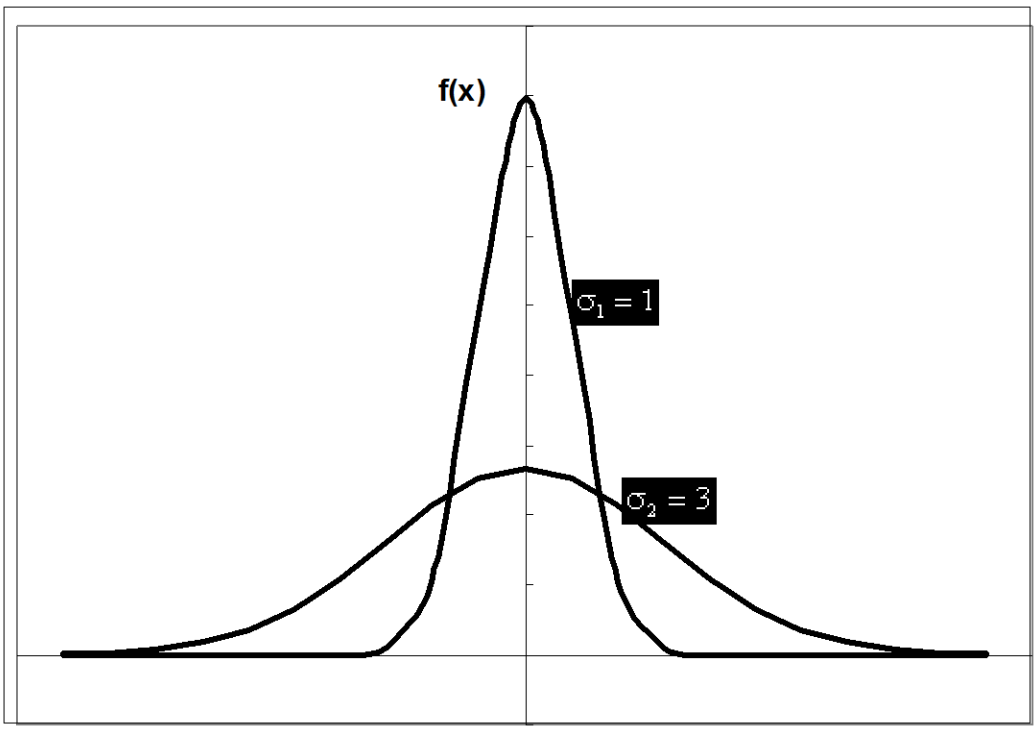


Рис.1.21

1.11.4. Правило трех сигм

Преобразуем формулу

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right),$$

положив

$$\delta=\sigma\cdot t.$$

В итоге получим

$$P(|X-a|<\sigma t)=2\Phi(t).$$

Если t=3, то

$$P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi(3)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973,$$

т. е. вероятность того, что отклонение по абсолютной величине будет меньше утроенного среднего квадратического отклонения, равна 0,9973.

Другими словами, вероятность того, что абсолютная величина отклонения превысит утроенное среднее квадратическое отклонение, очень мала, а именно равна 0,0027. Это означает, что лишь в 0,27% случаев так может произойти. Такие события, исходя из принципа невозможности маловероятных событий, можно считать практически невозможными. В этом и состоит сущность правила трех сигм: *если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.*

На практике правило трех сигм применяют так: если распределение изучаемой случайной величины неизвестно, но условие, указанное в приведенном правиле, выполняется, то есть основание предполагать, что изучаемая величина распределена нормально; в противном случае она не распределена нормально.

1.12. ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины *X*, которое описывается плотностью

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x\ge 0,\end{cases}$$

где λ - постоянная положительная величина.

Таким образом, показательное распределение определяется только одним параметром.

Найдем функцию распределения показательного закона:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda x}.$$

Следовательно,

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{при } x\ge 0\end{cases}.$$

Графики плотности и функции распределения показательного закона изображены на рис.1.22,1.23.

Найдем вероятность попадания в интервал *(a;b)* непрерывной случайной величины *X*, которая распределена по показательному закону, заданному функцией распределения *F(x)*.

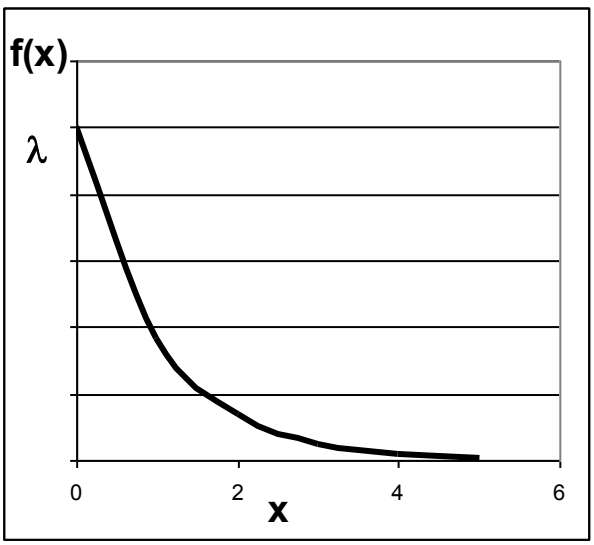


Рис.1.22

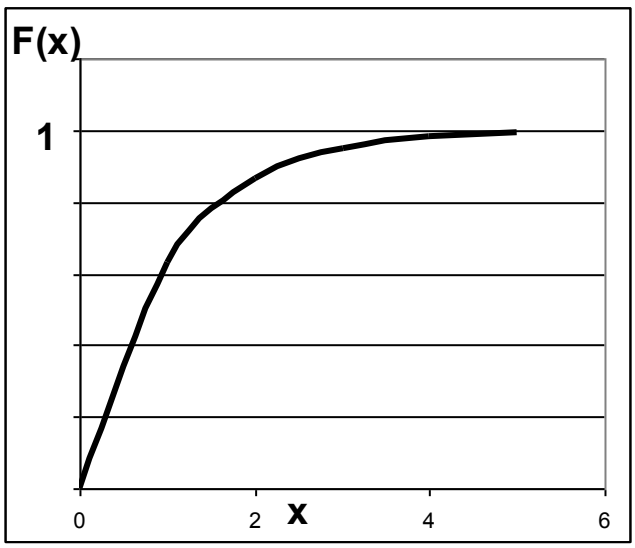


Рис.1.23

Для этого используем формулу

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a).$$

Учитывая, что

$$F(a)=1-e^{-\lambda a},$$

$$F(b)=1-e^{-\lambda b},$$

получим

$$P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

Пример 1.47 Непрерывная случайная величина *X* распределена по показательному закону

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0\\ 5e^{-5x}, & \text{при } x\ge 0\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания *X* попадет в интервал (0,6;2).

Решение. По условию, λ=5. Тогда

$$P(0,6<X<2)=e^{-5\cdot 0,6}-e^{-5\cdot 2}=e^{-3}-e^{-10}\approx 0,049787-0,000045\approx 0,049742.$$

.

1.12.1. Числовые характеристики показательного распределения

Пусть непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x\ge 0\end{cases}.$$

Найдем математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int_{0}^{\infty} x\cdot \lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\int_{0}^{\infty} x\cdot e^{-\lambda x}dx=\lambda\cdot\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} x\cdot e^{-\lambda x}dx.$$

Производя интегрирование по частям, и находя предел, получим

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

Таким образом, *математическое ожидание показательного распределения равно обратной величине параметра.*

Найдем дисперсию:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)dx-\left(M(X)\right)^2=\int_{0}^{\infty} x^2\cdot \lambda e^{-\lambda x}dx-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\lambda\cdot l\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} x^2\cdot e^{-\lambda x}dx-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2.$$

Дважды интегрируя по частям, и находя предел, получаем

$$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Найдем среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(x)}=\frac{1}{\lambda}$$

Сравнивая $M(X)$ и $\sigma(X)$, получаем

$$M(X)=\sigma(X)=\frac{1}{\lambda},$$

т. е. *математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение показательного распределения равны между собой.*

Пример 1.48 Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0\\ 5e^{-5x}, & \text{при } x\ge 0\end{cases}$$

Найти математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и дисперсию X.

Решение. По условию, $\lambda=5$. Следовательно,

$$M(X)=\sigma(X)=\frac{1}{5},\ D(X)=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{25}.$$

Показательное распределение широко применяется в приложениях, в частности, в теории надежности, теории массового обслуживания, в физике, биологии и др.

1.13. РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Распределение вероятностей называют *равномерным,* если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение.

Пример. Шкала измерительного прибора проградуирована в некоторых единицах. Ошибку при округлении отсчета до ближайшего целого деления можно рассматривать как случайную величину X, которая может принимать с постоянной плотностью вероятности любое значение между двумя соседними целыми делениями. Таким образом, X имеет равномерное распределение.

Найдем плотность равномерного распределения f(x), считая, что все возможные значения случайной величины заключены в интервале (a;b), на котором функция f (x) сохраняет постоянные значения:

По условию X не принимает значений вне интервала (a;b), поэтому

$$f(x)=0 \text{ при } x < a \text{ и } x > b.$$

Найдем постоянную C. Так как все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу *(a;b),* то должно выполняться соотношение

$$\int_a^b f(x)dx = 1$$

или

$$\int_a^b C dx = 1.$$

Отсюда

$$C = \frac{1}{\int_a^b dx} = \frac{1}{b-a}.$$

Итак, искомая плотность вероятности равномерного распределения *f(x):*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le a \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{при } a < x \le b \\ 0, & \text{при } x > b \end{cases}.$$

Далее легко получить

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x \le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{при } a < x \le b,\\ 1, & \text{при } x > b.\end{cases}$$

График функции равномерного распределения изображен на рис.1.24, а график плотности распределения - на рис.1.25.

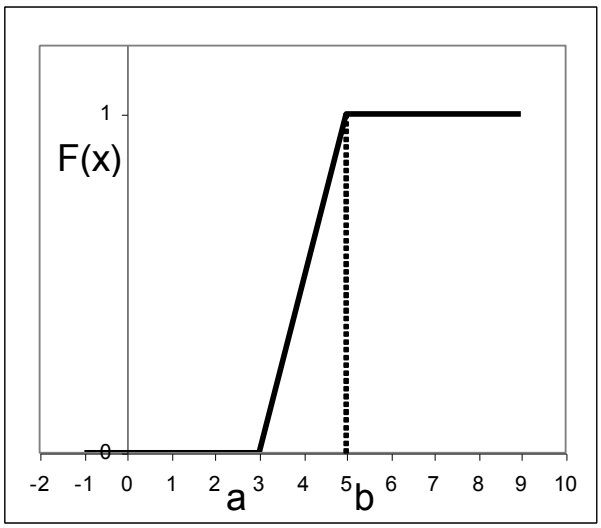


Рис.1.24

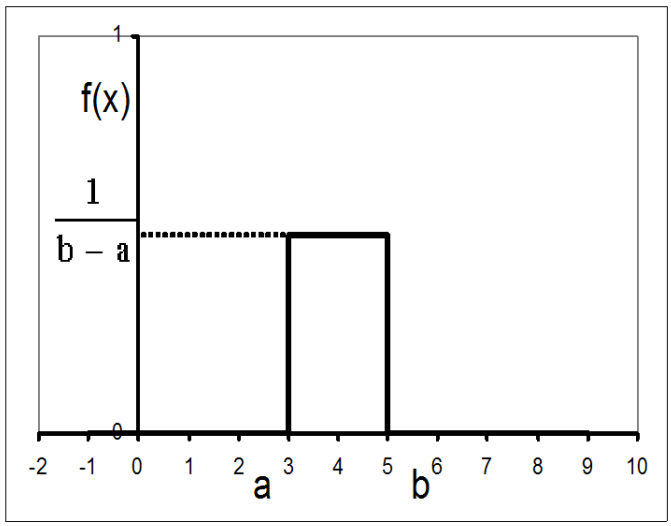


Рис.1.25

Как было показано ранее, для равномерного распределения

$$M(X)=\frac{a+b}{2},\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Пример 1.49 Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени, никак не связанный с расписанием поездов. Найти вероятность того, что ему придется ждать не более полминуты.

Решение. По условию

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x \le 0,\\ \dfrac{x}{2}, & \text{при } 0 < x \le 2,\\ 1, & \text{при } x > 2.\end{cases}$$

Тогда искомая вероятность

$$P\left(0 < X < \frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)=\frac{1}{4}.$$

1.14 ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Из определения случайной величины следует, что нельзя заранее уверенно предсказать, какое именно значение примет случайная величина в результате испытания, так как это зависит от многих случайных факторов, учесть которые невозможно. Однако суммарное поведение достаточно большого числа

случайных величин почти утрачивает случайный характер и становится закономерным.

Для практики очень важно знание условий, при выполнении которых совокупное действие очень многих случайных причин приводит к результату, почти не зависящему от случая, так как позволяет предвидеть ход явлений. Эти условия указываются в теоремах, носящих название **закона больших чисел**. К ним относятся теоремы Чебышева и Бернулли (имеются и другие теоремы, которые здесь не рассматриваются). Теорема Чебышева является наиболее общим законом больших чисел, теорема Бернулли – простейшим. Для доказательства этих теорем используется неравенство Чебышева.

1.14.1 Неравенство Чебышева

Неравенство Чебышева справедливо как для дискретных, так и непрерывных случайных величин. Для простоты докажем это неравенство для дискретных величин.

Рассмотрим дискретную случайную величину X, заданную таблицей распределения:

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Оценим вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания не превышает по абсолютной величине положительного числа ε. Если ε достаточно мало, то мы оценим, таким образом, вероятность того, что X примет значения, достаточно близкие к своему математическому ожиданию. П.Л. Чебышев доказал неравенство, позволяющее дать интересующую нас оценку.

Неравенство Чебышева. *Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше, чем* $\mathbf{1 - D(X) / \varepsilon^2}$:

$$\mathbf{P(| X - M(X) | < \varepsilon) \geq 1 - D(X) / \varepsilon^2.}$$

Доказательство. Так как события, состоящие в осуществлении неравенства $| X - M(X) | < \varepsilon$ и $| X - M(X) | \geq \varepsilon$, противоположны, то сумма их вероятностей равна единице, т.е.

$$P(| X - M(X) | < \varepsilon) + P(| X - M(X) | \geq \varepsilon) = 1.$$

Отсюда интересующая нас вероятность

$$P(| X - M(X) | < \varepsilon) = 1 - P(| X - M(X) | \geq \varepsilon) . \qquad (1.35)$$

Таким образом, задача сводится к вычислению вероятности

$$P (| X - M(X) | \geq \varepsilon).$$

Выражение для дисперсии случайной величины X:

$$D(X) = [x_1 - M(X)]^2 p_1 + [x_2 - M(X)]^2 p_2 + \ldots + [x_n - M(X)]^2 p_n.$$

Очевидно, все слагаемые этой суммы неотрицательны.

Отбросим те слагаемые, у которых $| x_i - M(X) | < \varepsilon$ (для оставшихся слагаемых $| x_j - M(X) | \geq \varepsilon$), вследствие чего сумма может только уменьшиться. Условимся считать для определенности, что отброшено k первых слагаемых

(не нарушая общности, можно считать, что в таблице распределения возможные значения занумерованы именно в таком порядке). Таким образом,

$D(X) \geq [x_{k+1} - M(X)]^2 p_{k+1} + [x_{k+2} - M(X)]^2 p_{k+2} + \ldots + [x_n - M(X)]^2 p_n$.

Заметим, что обе части неравенства $| x_j - M(X) | \geq \varepsilon$ (j=k+1,k+2,…,n) положительны, поэтому, возведя их в квадрат, получим равносильное неравенство $| x_j - M(X) |^2 \geq \varepsilon^2$. Воспользуемся этим замечанием и, заменяя в оставшейся сумме каждый из множителей $| x_j - M(X) |^2$ числом ε^2 (при этом неравенство может лишь усилиться), получим

$$D(X) \geq \varepsilon^2 (p_{k+1} + p_{k+2} + \ldots + p_n). \qquad (1.36)$$

По теореме сложения сумма вероятностей $p_{k+1} + p_{k+2} + \ldots + p_n$ есть вероятность того, что X примет одно, безразлично какое, из значений x_{k+1}, x_{k+2}, . . .,x_n , а при любом из них отклонение удовлетворяет неравенству $|x_j - M(X)| \geq \varepsilon$. Отсюда следует, что сумма $p_{k+1} + p_{k+2} + \ldots + p_n$ выражает вероятность

$$P(| X - M(X) | \geq \varepsilon).$$

Это соображение позволяет переписать неравенство (1.36) так:

$$D(X) \geq \varepsilon^2 P (| X - M(X) | \geq \varepsilon),$$

или

$$P (| X - M(X) | \geq \varepsilon) \leq D (X) / \varepsilon^2 \qquad (1.37)$$

Подставляя (1.37) в (1.35), окончательно получим

$$P(| X - M(X) | < \varepsilon) \geq 1 - D(X) / \varepsilon^2,$$

что и требовалось доказать.

1.14.2 Теорема Чебышева

Теорема Чебышева. *Если $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C), то, как бы мало ни было положительное число ε, вероятность неравенства*

$$\left| \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} - \frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Другими словами,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} - \frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

Таким образом, теорема Чебышева утверждает, что если рассматривается достаточно большое число независимых случайных величин, имеющих ограниченные дисперсии, то почти достоверным можно считать событие, состоящее в том, что отклонение среднего арифметического случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий будет по абсолютной величине сколь угодно малым.

Доказательство. Введем в рассмотрение новую случайную величину – среднее арифметическое случайных величин

$$\bar{X} = (X_1 + X_2 + ... + X_n)/n.$$

Найдем математическое ожидание $\bar{X}$. Пользуясь свойствами математического ожидания (постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания, математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых), получим

$$M\left(\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}\right) = \frac{M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)}{n}. \qquad (1.38)$$

Применяя к величине $\bar{X}$ неравенство Чебышева, имеем

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n} - M\left(\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}\right)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D\left(\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}$$

или, учитывая соотношение (1.38), получим:

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n} - \frac{M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D\left(\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} \qquad (1.39).$$

Пользуясь свойствами дисперсии (постоянный множитель можно вынести за знак дисперсии, возведя его в квадрат; дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых), получим

$$D\left(\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}\right) = \frac{D(X_1)+D(X_2)+...+D(X_n)}{n^2}.$$

По условию дисперсии всех случайных величин ограничены постоянным числом C, т. е. имеют место неравенства: $D(X_1) \leq C$; $D(X_2) \leq C$; …; $D(X_n) \leq C$, поэтому

$(D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)) / n^2 \leq (C + C + \ldots + C) / n^2 = nC / n^2 = C / n.$

Итак,

$$D\left(\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}\right) \leq \frac{C}{n}. \qquad (1.40)$$

Подставляя правую часть (1.40) в неравенство (1.39) (отчего последнее может быть лишь усилено), имеем

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n} - \frac{M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{C}{n\cdot\varepsilon^2}.$$

Отсюда, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n} - \frac{M(X_1)+M(X_2+...+M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) \geq 1.$$

Наконец, учитывая, что вероятность не может превышать единицу, окончательно можем написать

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n} - \frac{M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Теорема доказана.

При формулировке теоремы Чебышева предполагалось, что случайные величины имеют различные математические ожидания. На практике часто бывает, что случайные величины имеют одно и то же математическое ожидание. Если вновь допустить, что дисперсии этих величин ограничены, то к ним будет применима теорема Чебышева.

Пусть **а -** математическое ожидание каждой из случайных величин. В рассматриваемом случае среднее арифметическое математических ожиданий, как легко видеть, также равно **а**. Для рассматриваемого частного случая теорема Чебышева формулируется следующим образом.

Если $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *– попарно независимые случайные величины, имеющие одно и то же математическое ожидание* ***а****, и если дисперсии этих величин равномерно ограничены, то, как бы мало ни было положительное число ε, вероятность неравенства*

$$| (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) / n \; - \mathbf{a} | < \varepsilon$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Другими словами, будет иметь место равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

1.14.3 Сущность и практическое значение теоремы Чебышева

Сущность теоремы Чебышева: хотя отдельные независимые случайные величины могут принимать значения, далекие от своих математических ожиданий, среднее арифметическое достаточно большого числа случайных величин с большой вероятностью принимает значения, близкие к определенному постоянному числу $(M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)) / n$ (или к числу **а** в частном случае). Иными словами, отдельные случайные величины могут иметь значительный разброс, а их среднее арифметическое рассеяно мало.

Таким образом, нельзя уверенно предсказать, какое возможное значение примет каждая из случайных величин, но можно предвидеть, какое значение примет их среднее арифметическое.

Итак, *среднее арифметическое достаточно большого числа независимых величин* (дисперсии которых равномерно ограничены*) утрачивает характер случайной величины.* Объясняется это тем, что отклонения каждой из величин от своих математических ожиданий могут быть как положительными, так и отрицательными, а в среднем арифметическом они взаимно погашаются.

Теорема Чебышева справедлива не только для дискретных, но и для непрерывных случайных величин; она является ярким примером, подтверждающим справедливость учения диалектического материализма о связи между случайностью и необходимостью.

Приведем пример применения теоремы Чебышева к решению одной из практических задач.

Обычно для измерения некоторой физической величины производят несколько измерений и их среднее арифметическое принимают в качестве искомого размера. При каких условиях этот способ измерения можно считать правильным? Ответ на этот вопрос дает теорема Чебышева.

Рассмотрим результаты каждого измерения как случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$. К этим величинам можно применить теорему Чебышева, если:
1) они попарно независимы; 2) имеют одно и то же математическое ожидание; 3) дисперсии их равномерно ограничены.

Первое требование выполняется, если результат каждого измерения не зависит от результатов остальных. Второе требование выполняется, если измерения произведены без систематических (одного знака) ошибок. В этом случае математические ожидания всех случайных величин одинаковы и равны истинному размеру **a**. Третье требование выполняется, если прибор обеспечивает определенную точность измерений. Хотя при этом результаты отдельных измерений различны, но рассеяние их ограничено.

Если все указанные требования выполнены, мы вправе применить к результатам измерений теорему Чебышева: при достаточно большом n вероятность неравенства

$$| (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) / n - \mathbf{a} | < \varepsilon$$

как угодно близка к единице. Другими словами, при достаточно большом числе измерений почти достоверно, что их среднее арифметическое как угодно мало отличается от истинного значения измеряемой величины.

Итак, теорема Чебышева указывает условия, при которых описанный способ измерения может быть применен.

1.14.4 Теорема Бернулли

Пусть производится **n** независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p. Можно ли предвидеть, какова примерно будет относительная частота появления события? Положительный ответ на этот вопрос дает теорема, доказанная Якобом Бернулли (опубликована в 1713 году), которая получила название “закона больших чисел” и положила начало теории вероятностей как науке. Ниже приведено доказательство этой теоремы, данное П.Л. Чебышевым в 1846 году.

Теорема Бернулли

*Если в каждом из **n** независимых испытаний вероятность **p** события **A** постоянна, то как угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности **p** по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико.*

Другими словами, если ε - сколь угодно малое положительное число, то при соблюдении условий теоремы имеет место неравенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Доказательство. Обозначим через X_1 дискретную случайную величину – число появлений события в первом испытании, через X_2 - во втором, …, X_n - в

n-м испытании. Ясно, что каждая из величин может принять лишь два значения: 1 (событие **A** наступило) с вероятностью **p** и 0 (событие не появилось) с вероятностью **q = 1 – p.**

Так как случайные величины попарно независимы и дисперсии их ограничены, то к ним можно применить теорему Чебышева. Попарная независимость величин

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ следует из того, что испытания независимы. Дисперсия любой величины X_i (i=1,2,…,n) равна произведению **pq**; так как **p+q=1**, то произведение не превышает ¼ и, следовательно, дисперсии всех величин ограничены, например, число C=1/4.

Применяя теорему Чебышева (частный случай) к рассматриваемым величинам, имеем

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Приняв во внимание, что математическое ожидание **a** каждой из величин X_i (т.е. математическое ожидание числа появлений события в одном испытании) равно вероятности **p** наступления события, получим

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Остается показать, что дробь $(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) / n$ равна относительной частоте **m/n** появлений события **A** в испытаниях. Действительно, каждая из величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ при появлении события в соответствующем испытании принимает значение, равное единице; следовательно, сумма $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ равна числу **m** появлений события в **n** испытаниях, а значит,

$$(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) / n = m/n.$$

Учитывая это равенство, окончательно получим

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

1.14.5 Понятие о центральной предельной теореме

Известно, что нормально распределенные случайные величины широко распространены на практике. Например, погрешности измерения каких-либо величин распределены по нормальному закону. Чем это объясняется? Ответ на этот вопрос был дан выдающимся русским математиком А.М. Ляпуновым в **центральной предельной теореме**. В грубой формулировке она выглядит так: *если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.*

Более точная формулировка теоремы:

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - независимые случайные величины с математическими ожиданиями $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}$ и дисперсиями $\sigma^2_1, \sigma^2_2, \ldots, \sigma^2_n$, причем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\left|X_k-a_k\right|^3}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\ldots+\sigma_n^2}}=0,$$

то при $n\to\infty$ закон распределения случайной величины $Y_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$ неограниченно приближается к нормальному.

1.15 СИСТЕМА ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1.15.1 Понятие о системе нескольких случайных величин

До сих пор рассматривались случайные величины, возможные значения которых определялись одним числом. Такие величины называют одномерными. Например, число очков, которое может выпасть при бросании игральной кости, - дискретная одномерная величина; расстояние от орудия до места падения снаряда – непрерывная одномерная случайная величина.

Кроме одномерных случайных величин, изучают величины, возможные значения которых определяются двумя, тремя, …, n числами. Такие величины называются соответственно двумерными, трехмерными,…, n-мерными.

Будем обозначать через (X,Y) двумерную случайную величину. Каждую из величин X и Y называют составляющей (компонентой): обе величины X и Y, рассматриваемые одновременно, образуют систему двух случайных величин. Аналогично n-мерную величину можно рассматривать как систему n случайных величин.

Например, любую точку на координатной плоскости XOY можно рассматривать как двумерную случайную величину с компонентами (координатами) X и Y; любую точку в трехмерном пространстве – как трехмерную случайную величину с компонентами X, Y и Z.

Различают дискретные (составляющие этих величин дискретны) и непрерывные (составляющие этих величин непрерывны) многомерные случайные величины.

1.15.2 Закон распределения вероятностей дискретной двумерной случайной величины

Законом распределения дискретной двумерной случайной величины называют перечень возможных значений этой величины, т. е. пар чисел (x_i,y_j) и их вероятностей $p(x_i, y_j)$ $(i=1,2, \ldots ,n; j=1,2, \ldots ,m)$. Обычно закон распределения задают в виде таблицы с двойным входом (см. табл.1), называемой *матрицей распределения*.

Первая строка таблицы содержит все возможные значения составляющей X, а первый столбец – все возможные значения составляющей Y. В клетке, стоящей на пересечении столбца и строки, указана вероятность $p(x_i, y_j)$ того, что двумерная случайная величина примет значение (x_i, y_j) .

Так как события ($X=x_i$, $Y=y_j$) (i=1,2, … ,n; j=1,2, … ,m) образуют полную группу, то сумма вероятностей, помещенных во всех клетках таблицы, равна единице.

Таблица 1

Y	X					
	x_1	x_2	. . .	x_i	. . .	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	. . .	$p(x_i, y_1)$	. . .	$p(x_n, y_1)$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
y_j	$p(x_1, y_j)$	$p(x_2, y_j)$	. . .	$p(x_i, y_j)$	. . .	$p(x_n, y_j)$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	. . .	$p(x_i, y_m)$	. . .	$p(x_n, y_m)$

Зная закон распределения двумерной дискретной случайной величины, можно найти законы распределения каждой из составляющих. Действительно, например, события ($X=x_1, Y=y_1$), ($X=x_1, Y=y_2$), …,($X=x_1, Y=y_m$) несовместны, поэтому вероятность $P(x_1)$ того, что X примет значение x_1, по теореме сложения такова:

$$P(x_1) = p(x_1, y_1) + p(x_1, y_2) + \ldots + p(x_1, y_m) .$$

Таким образом, вероятность того, что X примет значение x_1, равна сумме вероятностей "столбца x_1". В общем случае для того, чтобы найти вероятность $P(X=x_i)$, надо просуммировать вероятности столбца x_i. Аналогично сложив вероятности "строки y_j", получим вероятность $P(Y=y_j)$.

Пример 1.50 Найти законы распределения составляющих двумерной случайной величины, заданной законом распределения (табл.2).

Таблица 2

Y	X		
	x_1	x_2	x_3
y_1	0,10	0,15	0,25
y_2	0,12	0,20	0,18

Решение. Сложив вероятности по столбцам, получим вероятности возможных значений X: $P(x_1)$ =0.22; $P(x_2)$ =0.35; $P(x_3)$ =0.43.

Напишем закон распределения составляющей X:

X	x_1	x_2	x_3
P	0,22	0,35	0,43

Контроль: 0,22+0,35+0,43=1.

Сложив вероятности по строкам, получим вероятности возможных значений Y: $P(y_1)$ =0.50; $P(y_2)$ =0.50.

Напишем закон распределения составляющей Y:

Y	y_1	y_2
P	0,50	0,50

Контроль: 0,50+0,50=1.

1.15.3 Функция распределения двумерной случайной величины

Рассмотрим двумерную случайную величину (X, Y) (безразлично, дискретную или непрерывную). Пусть (x,y) – пара действительных чисел. Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение, меньшее x, и при этом Y примет значение, меньшее y, обозначим через F(x,y). Если x и y будут изменяться, то, вообще говоря, будет изменяться и F(x,y), т. е. F(x,y) есть функция от x и y.

Функцией распределения двумерной случайной величины (X,Y) называют функцию F(x,y), определяющую для каждой пары чисел x, y вероятность того, что X примет значение, меньшее x, и при этом Y примет значение, меньшее y:

$$F(x,y) = P(X<x, Y<y).$$

Геометрически это равенство можно истолковать так: F(x,y) есть вероятность того, что случайная точка (X,Y) попадет в бесконечный квадрант с вершиной (x, y), расположенной левее и ниже этой вершины.

Пример 1.51 Найти вероятность того, что в результате испытания составляющая X двумерной случайной величины (X,Y) примет значение X<2 и при этом составляющая Y примет значение Y < 3, если известна функция распределения системы

$$F(x, y) = (\tfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{2}) \cdot (\tfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\tfrac{y}{3} + \tfrac{1}{2}) \cdot$$

Решение. По определению функции распределения двумерной случайной величины,

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y) \cdot$$

Положив x=2, y=3, получим искомую вероятность

$$P(X < 2, Y < 3) = F(2,3) = (\tfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\tfrac{2}{2} + \tfrac{1}{2}) \cdot (\tfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\tfrac{3}{3} + \tfrac{1}{2}) =$$

$$= (\tfrac{1}{\pi}\,\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}) \cdot (\tfrac{1}{\pi}\,\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}) = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{3}{4} = \tfrac{9}{16} \cdot$$

1.15.4 Свойства функции распределения двумерной случайной величины

Свойство 1. *Значения функции распределения удовлетворяют двойному неравенству*

$$0 \le F(x, y) \le 1.$$

Доказательство. Свойство вытекает из определения функции распределения как вероятности: вероятность – всегда неотрицательное число, не превышающее единицу.

Свойство 2. *F(x,y) есть неубывающая функция по каждому аргументу, т.е.*

$$F(x_2, y) \ge F(x_1, y), \text{ если } x_2 > x_1;$$

$$F(x, y_2) \ge F(x, y_1), \text{ если } y_2 > y_1.$$

Доказательство. Докажем, что F(x,y) – неубывающая функция по аргументу x. Событие, состоящее в том, что составляющая X примет значение, меньшее x_2, и при этом составляющая Y < y, можно подразделить на следующие два несовместных события:

1) X примет значение, меньшее x_1 , и при этом Y < y с вероятностью $P(X< x_1, Y<y)$;

2) X примет значение, удовлетворяющее неравенству $x_1 \le X < x_2$, и при этом Y<y с вероятностью $P(x_1 \le X< x_2, Y<y)$.

По теореме сложения,

$$P(X< x_2, Y<y) = P(X< x_1, Y<y) + P(x_1 \le X< x_2, Y<y).$$

Отсюда

$$P(X< x_2, Y<y) - P(X< x_1, Y<y) = P(x_1 \le X< x_2, Y<y),$$

или

$$F(x_2 ,y) - F(x_1 ,y) = P(x_1 \le X< x_2, Y<y).$$

Любая вероятность есть число неотрицательное, поэтому

$$F(x_2 ,y) - F(x_1 ,y) \ge 0, \text{ или } F(x_2 ,y) \ge F(x_1 ,y),$$

что и требовалось доказать.

Свойство становится наглядно ясным, если воспользоваться геометрическим истолкованием функции распределения как вероятности попадания случайной точки в бесконечный квадрант с вершиной (x;y). При возрастании x правая граница этого квадранта сдвигается вправо; при этом вероятность попадания случайной точки в новый квадрант, очевидно, не может уменьшиться.

Аналогично доказывается, что F(x,y) есть неубывающая функция по аргументу y.

Свойство 3. Имеют место предельные соотношения:

$$1)\ F(-\infty , y) = 0, \qquad 2)\ F(x, -\infty) = 0,$$
$$3)\ F(-\infty , -\infty) = 0, \qquad 4)\ F(\infty , \infty) = 1.$$

Доказательство

1) $F(-\infty , y)$ есть вероятность события $X < -\infty$ и $Y < y$; но такое событие невозможно (поскольку невозможно событие $X < -\infty$), следовательно, вероятность этого события равна нулю.

Свойство становится наглядно ясным, если прибегнуть к геометрической интерпретации: при $x \to -\infty$ правая граница бесконечного квадранта неограниченно сдвигается влево и при этом вероятность попадания случайной точки в квадрант стремится к нулю.

2) Событие $Y < -\infty$ невозможно, поэтому $F(x, -\infty) = 0$.

3) Событие $X < -\infty$ невозможно, поэтому $F(-\infty , -\infty) = 0$.

4) Событие $X < \infty$ и $Y < \infty$ достоверно, следовательно, вероятность этого события $F(\infty , \infty) = 1$.

Свойство становится наглядно ясным, если принять во внимание, что при $x \to \infty$ и $y \to \infty$ бесконечный квадрант превращается во всю плоскость xOy и, следовательно, попадание случайной точки (X;Y) в эту плоскость есть достоверное событие.

Свойство 4

а) При $y = \infty$ функция распределения системы становится функцией распределения составляющей X:

$$F(x, \infty) = F_1(x).$$

б) При x = ∞ функция распределения системы становится функцией распределения составляющей Y:

$F(\infty, y) = F_2(y)$.

Доказательство.

а) Так как событие $Y < \infty$ достоверно, то $F(x, \infty)$ определяет вероятность события $X < x$, т.е. представляет собой функцию распределения составляющей X.

б) Доказывается аналогично.

1.15.5 Вероятность попадания случайной точки в полуполосу

Используя функцию распределения системы случайных величин X и Y, легко найти вероятность того, что в результате испытания случайная точка попадет в полуполосу $x_1 < X < x_2$, $Y < y$ или в полуполосу $X < x$ и $y_1 < Y < y_2$.

Вычитая из вероятности попадания случайной точки в квадрант с вершиной (x_2, y) вероятность попадания точки в квадрант с вершиной (x_1, y) , получим

$$P(x_1 \le X < x_2, Y < y) = F(x_2, y) - F(x_1, y).$$

Аналогично имеем

$$P(X< x, \ y_1 \le Y < y_2) = F(x, y_2) - F(x, y_1).$$

Таким образом, вероятность попадания случайной величины в полуполосу равна приращению функции распределения по одному из аргументов.

1.15.6 Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник

Рассмотрим прямоугольник ABCD ($A(x_1,y_2)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_1,y_1)$, $D(x_2,y_1)$) со сторонами, параллельными координатным осям. Пусть уравнения сторон:

$$X = x_1, \ X = x_2, \ Y = y_1 \text{ и } Y = y_2 .$$

Найдем вероятность попадания случайной точки (X;Y) в этот прямоугольник. Искомую вероятность можно найти, например, так: из вероятности попадания случайной точки в полуполосу AB (эта вероятность равна $F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)$) вычесть вероятность попадания точки в полуполосу CD (эта вероятность равна $F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)$):

$$P(x_1 \le X < x_2 , y_1 \le Y < y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] – [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)].$$

1.15.7 Плотность совместного распределения вероятностей непрерывной двумерной случайной величины (двумерная плотность вероятности)

Двумерная случайная величина задавалась с помощью функции распределения. Непрерывную двумерную величину можно также задать, пользуясь плотностью распределения. Здесь и далее будем предполагать, что функция распределения F (x,y) всюду непрерывна и имеет всюду (за исключением, быть может, конечного числа кривых) непрерывную частную производную второго порядка.

Плотностью совместного распределения вероятностей f (x, y) двумерной непрерывной случайной величины (X,Y) называют вторую смешанную частную производную от функции распределения:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

Геометрически эту функцию можно истолковать как поверхность, которую называют *поверхностью распределения*.

Пример 1.52 Найти плотность совместного распределения f(x,y) системы случайных величин (X, Y) по известной функции распределения,

$$F(x,y)=\sin x\cdot\sin y(0\le x\le \pi/2, 0\le y\le \pi/2)\cdot$$

Решение. По определению плотности совместного распределения,

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

Найдем частную производную по x от функции распределения:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\cos x\cdot\sin y\cdot$$

Найдем от полученного результата частную производную по y, в итоге получим искомую плотность совместного распределения:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\cos x\cdot\cos y(0\le x\le \pi/2, 0\le y\le \pi/2)\cdot$$

1.15.8 Нахождение функции распределения системы по известной плотности распределения

Зная плотность совместного распределения f (x, y), можно найти функцию распределения F (x, y) по формуле

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy,$$

что непосредственно следует из определения плотности распределения двумерной непрерывной случайной величины (X, Y).

Пример 1.53 Найти функцию распределения двумерной случайной величины по данной плотности совместного распределения

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Решение. Воспользуемся формулой

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy.$$

Положив $f(x,y)=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$, получим

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{y}\left(\frac{1}{1+y^2}\int_{-\infty}^{x}\frac{dx}{1+x^2}\right)dy=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{1+y^2}(\operatorname{arctg}x+\tfrac{\pi}{2})dy=$$

$$=\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}y+\frac{1}{2}\right).$$

1.15.9 Свойства двумерной плотности вероятности

Свойство 1. *Двумерная плотность вероятности неотрицательна:*

$$f(x, y) \geq 0.$$

Доказательство. Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник со сторонами Δx и Δy есть неотрицательное число; площадь этого прямоугольника – положительное число. Следовательно, отношение этих двух чисел, а значит, и их предел (при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$), который равен $f(x, y)$, есть неотрицательное число, т. е. $f(x, y) \geq 0$.

Заметим, что свойство непосредственно следует из того, что $F(x, y)$ - неубывающая функция своих аргументов.

Свойство 2. *Двойной несобственный интеграл с бесконечными пределами от двумерной плотности равен единице*:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1.$$

Доказательство. Бесконечные пределы интегрирования указывают, что областью интегрирования служит вся плоскость xOy; поскольку событие, состоящее в том, что случайная точка попадает при испытании на плоскость xOy, достоверно, то вероятность этого события (она и определяется двойным несобственным интегралом от двумерной плотности) равна единице, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1.$$

Пример 1.54 Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y): **$f(x, y)=C\cos x \cos y$** в квадрате $0 \leq x \leq \pi/2$, $0 \leq y \leq \pi/2$; вне этого квадрата $f(x,y)=0$. Найти постоянный параметр C.

Решение. Воспользуемся свойством 2, учитывая, что x и y изменяются от 0 до $\pi/2$:

$$C\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \cos y dxdy = 1.$$

Отсюда

$$C = 1/\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \cos y dxdy\right).$$

Выполняя интегрирование, получим искомое значение параметра C=1.

1.15.10 Отыскание плотностей вероятности составляющих двумерной случайной величины

Пусть известна плотность совместного распределения вероятностей системы двух случайных величин. Найдем плотности распределения каждой из составляющих.

Найдем сначала плотность распределения составляющей X. Обозначим через $F_1(x)$ функцию распределения составляющей X. По определению плотности распределения одномерной случайной величины,

$$f_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx}.$$

Приняв во внимание соотношения

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy,$$

$$F_1(x) = F(x,\infty),$$

найдем

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy.$$

Продифференцировав обе части этого равенства по x, получим

$$\frac{dF_1}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

или

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy. \qquad (1.41)$$

Аналогично находится плотность распределения составляющей Y:

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx. \qquad (1.42)$$

Итак, *плотность распределения одной из составляющих равна несобственному интегралу с бесконечными пределами от плотности совместного распределения системы, причем переменная интегрирования соответствует другой составляющей.*

Пример 1.55 Двумерная случайная величина (X,Y) задана плотностью совместного распределения

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/(6\pi), & \text{при } x^2/9 + y^2/4 < 1, \\ 0, & \text{при } x^2/9 + y^2/4 > 1. \end{cases}$$

Найти плотности распределения составляющих X и Y.

Решение. Найдем плотность распределения составляющей X по формуле (1.41):

$$f_1(x) = \frac{1}{6\pi}\int_{-2\sqrt{1-x^2/9}}^{2\sqrt{1-x^2/9}} dy = \frac{2}{6\pi}\int_{0}^{2\sqrt{1-x^2/9}} dy = \frac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}.$$

Итак,

$$f_1(x) = \begin{cases} 2\sqrt{9 - x^2}\,/(9\pi), & \text{при } |x| < 3, \\ 0, & \text{при } |x| \geq 3. \end{cases}$$

Аналогично, используя формулу (1.42), найдем плотность распределения составляющей Y:

$$f_2(y) = \begin{cases} \sqrt{4 - y^2}\,/(2\pi), & \text{при } |y| < 2, \\ 0, & \text{при } |y| \geq 2. \end{cases}$$

Рекомендуется для контроля самостоятельно убедиться в том, что найденные формулы удовлетворяют соотношениям

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)dx = 1 \qquad \text{и} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)dy = 1.$$

1.15.11 Условные законы распределения составляющих системы дискретных случайных величин

Известно, что если события A и B зависимы, то условная вероятность события B отличается от его безусловной вероятности. В этом случае

$$P_A(B) = P(AB) / P(A). \qquad (1.43)$$

Аналогичное положение имеет место и для случайных величин. Для того, чтобы охарактеризовать зависимость между составляющими двумерной случайной величины, введем понятие условного распределения.

Рассмотрим дискретную двумерную случайную величину (X,Y). Пусть возможные значения составляющих таковы: $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_{12}, \ldots, y_m$.

Допустим, что в результате испытания величина Y приняла значение $Y=y_1$; при этом X примет одно из своих возможных значений: x_1, или x_2, … , или x_n. Обозначим условную вероятность того, что X примет, например, значение x_1 при условии, что $Y= y_1$, через $p(x_1 \mid y_1)$. Эта вероятность, вообще говоря, не будет равна безусловной вероятности $p(x_1)$.

В общем случае условные вероятности составляющей будем обозначать так:

$$p(x_i \mid y_j) \quad (I=1, 2, \ldots, n;\ j=1, 2, \ldots, m).$$

Условным распределением составляющей X при $Y=y_j$ называют совокупность условных вероятностей $p(x_1 \mid y_j)$, $p(x_2 \mid y_j)$, $p(x_n \mid y_j)$, вычисленных в предположении, что событие $Y= y_j$ (j имеет одно и то же значение при всех значениях X) уже наступило. Аналогично определяется условное распределение составляющей Y.

Зная закон распределения двумерной дискретной случайной величины, можно, пользуясь формулой (1.43), вычислить условные законы распределения составляющих. Например, условный закон распределения X в предположении, что событие $Y= y_1$ уже произошло, может быть найден по формуле

$$p(x_i \mid y_1) = \frac{p(x_i, y_1)}{p(y_1)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

В общем случае условные законы распределения составляющей X определяются соотношением

$$p(x_i|y_j) = p(x_i, y_j) / p(y_j). \quad (1.44)$$

Аналогично находят условные законы распределения составляющей Y:

$$p(y_j|x_i) = p(x_i, y_j) / p(x_i). \quad (1.45)$$

Замечание. Сумма вероятностей условного распределения равна единице. Действительно, так как при фиксированном y_j имеем $\sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j) = p(y_j)$,

то $\sum_{i=1}^{n} p(x_i|y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j) / p(y_j) = p(y_j) / p(y_j) = 1.$

Аналогично доказывается, что при фиксированном x_i

$$\sum_{j=1}^{m} p(y_j|x_i) = 1.$$

Это свойство условных распределений используют для контроля вычислений.

Пример 1.56 Дискретная двумерная случайная величина задана таблицей

Y	X		
	x_1	x_2	x_3
y_j	0,10	0,15	0,25
y_i	0,12	0,20	0,18

Найти условный закон распределения составляющей X при условии, что составляющая Y приняла значение y_1.

Решение. Искомый закон определяется совокупностью следующих условных вероятностей: $p(x_1|y_1),\ p(x_2|y_1),\ p(x_3|y_1).$

Воспользовавшись формулой (1.44) и приняв во внимание, что $p(y_1)=0.50$, имеем:

$$p(x_1|y_1) = p(x_1, y_1) / p(y_1) = 0.10 / 0.50 = 1/5;$$

$$p(x_2|y_1) = p(x_2, y_1) / p(y_1) = 0.15 / 0.50 = 3/10;$$

$$p(x_3|y_1) = p(x_3, y_1) / p(y_1) = 0.25 / 0.50 = 1/2.$$

Сложив для контроля найденные условные вероятности, убедимся, что их сумма равна единице, как и должно быть, в соответствии с замечанием, помещенным выше: 1/5+3/10+1/2=1.

1.15.12 Условные законы распределения составляющих системы непрерывных случайных величин

Пусть (X,Y) – непрерывная двумерная случайная величина.

Условной плотностью $\varphi(x \mid y)$ распределения составляющих X при данном значении Y = y называют отношение плотности совместного распределения f(x,y) системы (X,Y) к плотности распределения $f_2(y)$ составляющей Y:

$$\varphi(x \mid y) = f(x, y) / f_2(y). \qquad (1.46)$$

Подчеркнем, что отличие условной плотности $\varphi(x \mid y)$ от безусловной плотности $f_1(x)$ состоит в том, что функция $\varphi(x \mid y)$ дает распределение X при условии, что составляющая Y приняла значение $Y = y$; функция же $f_1(x)$ дает распределение X независимо от того, какие из возможных значений приняла составляющая Y.

Аналогично определяется условная плотность составляющей Y при заданном значении $X = x$:

$$\psi(y \mid x) = f(x, y) / f_1(x). \qquad (1.47)$$

Если известна плотность совместного распределения $f(x, y)$, то условные плотности составляющих могут быть найдены в силу (1.46) и (1.47) по формулам

$$\varphi(x \mid y) = f(x, y) / \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx, \qquad (1.48)$$

$$\psi(y \mid x) = f(x, y) / \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy. \qquad (1.49)$$

Запишем формулы (1.46) и (1.47) в виде

$$f(x, y) = f_2(y)\,\varphi(x \mid y), \quad f(x, y) = f_1(x)\,\psi(y \mid x).$$

Отсюда заключаем: умножая закон распределения одной из составляющих на условный закон распределения другой составляющей, найдем закон распределения системы случайных величин.

Как и любая плотность распределения, условные плотности обладают следующими свойствами:

$$\varphi(x \mid y) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x|y)dx = 1;$$

$$\psi(y \mid x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y|x)dy = 1.$$

Пример 1.57 Двумерная случайная величина (X,Y) задана плотностью совместного распределения

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/(\pi r^2), & \text{при } x^2 + y^2 < r^2, \\ 0, & \text{при } x^2 + y^2 > r^2. \end{cases}$$

Найти условные законы распределения вероятностей составляющих.

Решение. Найдем условную плотность составляющей X при $|x| < \sqrt{r^2 - y^2}$ по формуле (1.48):

$$\varphi(x \mid y) = \frac{1/(\pi r^2)}{\frac{1}{\pi r^2} \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} dx} = \frac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}}.$$

Так как f(x, y) = 0 при $x^2+y^2 > r^2$, то $\varphi(x|y) = 0$ при $|x| > \sqrt{r^2 - y^2}$.

Пользуясь формулой (1.49), аналогично найдем условную плотность составляющей Y:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/(2\sqrt{r^2 - x^2}), & \text{при } |y| < \sqrt{r^2 - x^2}, \\ 0, & \text{при } |y| > \sqrt{r^2 - x^2}. \end{cases}$$

1.15.13 Условное математическое ожидание

Важной характеристикой условного распределения вероятностей является условное математическое ожидание.

Условным математическим ожиданием дискретной случайной величины Y при X = x (x – определенное возможное значение X) называют произведение возможных значений Y на их условные вероятности:

$$M(Y \mid X=x) = \sum_{j=1}^{m} y_j p(y_j|x). \qquad (1.50)$$

Для непрерывных величин

$$M(Y \mid X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\psi(y|x)dy,$$

где $\psi(y \mid x)$ - условная плотность случайной величины Y при X = x.

Условное математическое ожидание M (Y | x) есть функция от x:

$$M(Y \mid x) = f(x),$$

которую называют *функцией регрессии* Y на X.

Аналогично определяются условное математическое ожидание случайной величины X и *функция регрессии* X на Y: $M(X \mid y) = \varphi(y)$.

Пример 1.58 Дискретная двумерная случайная величина задана таблицей

Y	X			
	x_1	x_2	x_3	x_4
$y_1=3$	0,15	0,06	0,25	0,04
$y_2=6$	0,30	0,10	0,03	0,07

Найти условное математическое ожидание составляющей Y при $X= x_1=1$.

Решение. Найдем $p(x_1)$, для чего сложим вероятности, помещенные в первом столбце таблицы:

$$p(x_1) = 0,15 + 0,30 = 0,45.$$

Найдем условное распределение вероятностей величины Y при $X= x_1=1$:

$$p(y_1 \mid x_1) = p(x_1,y_1) / p(x_1) = 0.15/0.45=1/3;$$
$$p(y_2 \mid x_1) = p(x_2,y_2) / p(x_1) = 0.30/0.45=2/3.$$

Найдем искомое условное математическое ожидание по формуле (1.50):

$$M(Y \mid X=x_1) = \sum_{j=1}^{2} y_j\, p(y_j|x_1) = y_1\, p(y_1 \mid x_1) + y_2\, p(y_2 \mid x_1) = 3\,(1/3) + 6\,(2/3) = 5.$$

1.15.14 Зависимые и независимые случайные величины

Мы называли две величины независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина. Из этого определения следует, что условные распределения независимых величин равны их безусловным распределениям.

Выведем необходимые и достаточные условия независимости случайных величин.

Теорема. Для того, чтобы случайные величины X и Y были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения системы (X,Y) была равна произведению функций распределения составляющих:

$$F(x, y) = F_1(x)\, F_2(y).$$

Доказательство. а) Необходимость. Пусть X и Y независимы. Тогда события $X < x$ и $Y < y$ независимы, следовательно, вероятность совмещения этих событий равна произведению их вероятностей:

$$P(X < x, Y < y) = P(X < x)\, P(Y < y),$$

или

$$F(x, y) = F_1(x)\, F_2(y).$$

б) Достаточность. Пусть $F(x, y) = F_1(x)\, F_2(y)$. Отсюда

$$P(X < x, Y < y) = P(X < x)\, P(Y < y),$$

т. е. вероятность совмещения событий $X < x$ и $Y < y$ равна произведению вероятностей этих событий. Следовательно, случайные величины X и Y независимы.

Следствие. *Для того, чтобы непрерывные случайные величины X и Y были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы плотность совместного распределения системы (X, Y) была равна произведению плотностей распределения составляющих:*

$$f(x, y) = f_1(x)\, f_2(y).$$

Доказательство. а) Необходимость. Пусть X и Y – независимые непрерывные случайные величины. Тогда (на основании предыдущей теоремы)

$$F(x, y) = F_1(x)\, F_2(y).$$

Дифференцируя это равенство по x, затем по y, имеем

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y},$$

или (по определению плотностей распределения двумерной и одномерной величин)

$$f(x, y) = f_1(x)\, f_2(y).$$

б) Достаточность. Пусть

$$f(x, y) = f_1(x)\, f_2(y).$$

Интегрируя это равенство по x и по y, получим

$$\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdx = \int_{-\infty}^{x} f_1(x)dx \int_{-\infty}^{y} f_2(y)dy,$$

или $F(x, y) = F_1(x)\, F_2(y)$.

Отсюда (на основании предыдущей теоремы) заключаем, что X и Y независимы.

Замечание. Так как приведенные выше условия являются необходимыми и достаточными, можно дать новые определения независимых случайных величин:

1) две случайные величины называют независимыми, если функция распределения системы этих величин равна произведению функций распределения составляющих;
2) две непрерывные случайные величины называют независимыми, если плотность совместного распределения системы этих величин равна произведению плотностей распределения составляющих.

Пример 1.59 Двумерная непрерывная случайная величина (X,Y) задана плотностью совместного распределения

$$f(x, y) = (\sin(x)\sin(y)) / 4$$

в квадрате $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$; вне этого квадрата $f(x, y)=0$. Доказать, что составляющие X и Y независимы.

Решение. Используя предыдущие формулы, легко найдем плотности распределения составляющих: $f_1(x)=(\sin x)/2$; $f_2(y)=(\sin y)/2$. Плотность совместного распределения рассматриваемой системы равна произведению плотностей распределения составляющих, поэтому X и Y независимы.

Разумеется, можно было доказать, что условные законы распределения составляющих равны их безусловным законам, откуда также следует независимость X и Y.

1.15.15. Числовые характеристики системы двух случайных величин. Корреляционный момент. Коэффициент корреляции

Для описания системы двух случайных величин, кроме математических ожиданий и дисперсий составляющих, используют и другие характеристики; к их числу относятся корреляционный момент и коэффициент корреляции.

Корреляционным моментом μ_{xy} случайных величин X и Y называют математическое ожидание произведения отклонений этих величин:

$$\mu_{xy} = M\{[X - M(X)]\ [Y - M(Y)]\}.$$

Для вычисления корреляционного момента дискретных величин используют формулу

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} [x_i - M(X)]\,[y_i - M(Y)]\,p(x_i,y_i),$$

а для непрерывных величин – формулу

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]\,[y - M(Y)]\,f(x,y)\,dx\,dy.$$

Корреляционный момент служит для характеристики связи между величинами X и Y . Как будет показано ниже, корреляционный момент равен нулю, если X и Y независимы; следовательно, если корреляционный момент не равен нулю, то X и Y – зависимые случайные величины.

Корреляционный момент можно записать в виде

$$\mu_{xy} = M(XY) - M(X)\,M(Y).$$

Теорема 1. *Корреляционный момент двух независимых случайных величин X и Y равен нулю.*

Доказательство. Так как X и Y – независимые случайные величины, то их отклонения $X - M(X)$ и $Y - M(Y)$ также независимы. Пользуясь свойствами математического ожидания (математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей) и отклонения (математическое ожидание отклонения равно нулю), получим

$$\mu_{xy} = M\{[X - M(X)]\ [Y - M(Y)]\} = M[X - M(X)]\ M[Y - M(Y)] = 0.$$

Из определения корреляционного момента следует, что он имеет размерность, равную произведению размерностей величин X и Y. Другими словами, величина корреляционного момента зависит от единиц измерения случайных величин. По этой причине для одних и тех же двух величин величина корреляционного момента имеет различные значения в зависимости от того, в каких единицах были измерены величины.

Пусть, например, X и Y были измерены в сантиметрах и $\mu_{xy}=2$ см^2; если измерить X и Y в миллиметрах, то и $\mu_{xy}=200$ мм^2. Такая особенность корреляционного момента является недостатком этой числовой характеристики, поскольку сравнение корреляционных моментов различных систем случайных величин становится затруднительным. Для того, чтобы устранить этот недостаток, вводят новую числовую характеристику – коэффициент корреляции.

Коэффициентом корреляции r_{xy} случайных величин X и Y называют отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин:

$$r_{xy} = \mu_{xy} / (\sigma_x\ \sigma_y).$$

Так как размерность μ_{xy} равна произведению размерностей величин X и Y, σ_x имеет размерность величины X, σ_y имеет размерность величины Y, то r_{xy} - безразмерная величина. Таким образом, величина коэффициента корреляции не зависит от выбора единиц измерения случайных величин. В этом состоит преимущество коэффициента корреляции перед корреляционным моментом.

Очевидно, коэффициент корреляции независимых случайных величин равен нулю (так как $\mu_{xy} = 0$).

Теорема 2. *Абсолютная величина корреляционного момента двух случайных величин X и Y не превышает среднего геометрического их дисперсий*:

$$|\mu_{xy}| \le \sqrt{D_x D_y}\ .$$

Доказательство. Введем в рассмотрение случайную величину

$Z_1 = \sigma_y X - \sigma_x Y$ и найдем ее дисперсию $D(Z_1) = M[Z_1 - m_{z1}]^2$. Выполнив выкладки, получим

$$D(Z_1) = 2\sigma_x^2\sigma_y^2 - 2\sigma_x\sigma_y\mu_{xy} .$$

Любая дисперсия неотрицательна, поэтому $2\sigma_x^2\sigma_y^2 - 2\sigma_x\sigma_y\mu_{xy} \geq 0$.
Отсюда

$$\mu_{xy} \leq \sigma_x\sigma_y . \qquad (1.51)$$

Введя случайную величину $Z_2 = \sigma_y X + \sigma_x Y$, аналогично найдем

$$\mu_{xy} \geq -\sigma_x\sigma_y. \qquad (1.52)$$

Объединим (1.51) и (1.52):

$$-\sigma_x\sigma_y \leq \mu_{xy} \leq \sigma_x\sigma_y , \qquad (1.53)$$

или

$$|\mu_{xy}| \leq \sigma_x\sigma_y.$$

Итак,

$$|\mu_{xy}| \leq \sqrt{D_x D_y} .$$

Теорема 3. Абсолютная величина коэффициента корреляции не превышает единицы:

$$|r_{xy}| \leq 1.$$

Доказательство. Разделим обе части двойного неравенства (1.53) на произведение положительных чисел $\sigma_x\sigma_y$:

$$-1 \leq r_{xy} \leq 1.$$

Итак,

$$|r_{xy}| \leq 1.$$

1.15.16. Коррелированность и зависимость случайных величин

Две случайные величины X и Y называют *коррелированными*, если их корреляционный момент (коэффициент корреляции) отличен от нуля; X и Y называют *некоррелированными* величинами, если их корреляционный момент равен нулю.

Две коррелированные величины также и зависимы. Действительно, допустив противное, мы должны заключить, что $\mu_{xy} = 0$, а это противоречит условию, так как для коррелированных величин $\mu_{xy} \neq 0$.

Обратное предположение не всегда имеет место, т. е. если две величины зависимы, то они могут быть как коррелированными, так и некоррелированными. Другими словами, корреляционный момент двух зависимых величин может быть не равен нулю, но может и равняться нулю.

Убедимся на примере, что две зависимые величины могут быть некоррелированными.

Пример 1.60 Двумерная случайная величина (X, Y) задана плотностью распределения:

$f(x, y) = 1 / 6\pi$ - внутри эллипса $x^2 / 9 + y^2 / 4 = 1$;
$f(x, y) = 0$ - вне этого эллипса.

Доказать, что X и Y - зависимые некоррелированные величины.

Решение. Воспользуемся ранее вычисленными плотностями распределения составляющих X и Y (см. пример прим.1.55):

$f_1(x) = \frac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}, f_2(y) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-y^2}$ внутри заданного эллипса и $f_1(x) = 0, f_2(y) = 0$ вне его.

Так как $f(x,y) \neq f_1(x) \cdot f_2(y),$ то X и Y - зависимые величины.

Для того, чтобы доказать некоррелированность X и Y , достаточно убедиться в том, что $\mu_{xy} = 0$. Найдем корреляционный момент

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x - M(X)][y - M(Y)]f(x,y)dxdy.$$

Поскольку функция $f_1(x)$ симметрична относительно оси Oy, то M(X)=0; аналогично M(Y)=0 в силу симметрии $f_2(y)$ относительно оси Ox. Следовательно,

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy.$$

Вынося постоянный множитель f(x,y) за знак интеграла, получим

$$\mu_{xy} = f(x,y)\int_{-\infty}^{\infty} y\left(\int_{-\infty}^{\infty}xdx\right)dy.$$

Внутренний интеграл равен нулю (подынтегральная функция нечетна, пределы интегрирования симметричны относительно начала координат), следовательно, $\mu_{xy}=0$, т.е. зависимые случайные величины X и Y некоррелированы.

Итак, из коррелированности двух случайных величин следует их зависимость, но из зависимости еще не вытекает коррелированность. Из независимости двух величин следует их коррелированность, но из некоррелированности еще нельзя заключить о независимости этих величин.

Заметим, однако, что из некоррелированности нормально распределенных величин вытекает их независимость. Это утверждение доказывается в следующем разделе.

1.15.17. Нормальный закон распределения на плоскости

На практике часто встречаются двумерные случайные величины, распределение которых нормально.

Нормальным законом распределения на плоскости называют распределение вероятностей двумерной случайной величины, если

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2_{xy}}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-r^2_{xy})}\cdot\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma^2_x}+\frac{(y-a_2)^2}{\sigma^2_y}-2r_{xy}\cdot\frac{x-a_1}{\sigma_x}\cdot\frac{y-a_2}{\sigma_y}\right]}.$$

Мы видим, что нормальный закон на плоскости определяется пятью параметрами: a_1, a_2, σ_x, σ_y и r_{xy}. Можно доказать, что эти параметры имеют следующий вероятностный смысл: a_1, a_2 - математические ожидания, σ_x,

σ_y - средние квадратические отклонения, r_{xy} - коэффициент корреляции величин X и Y.

Убедимся в том, что если составляющие двумерной нормально распределенной случайной величины некоррелированны, то они и независимы. Действительно, пусть X и Y некоррелированны. Тогда, полагая в предыдущей формуле $r_{xy} = 0$, получим

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma^2_x}+\frac{(y-a_2)^2}{\sigma^2_y}\right]} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma^2_x}} \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\sigma^2_y}} = f_1(x)\cdot f_2(y).$$

Таким образом, если составляющие нормально распределенной случайной величины некоррелированны, то плотность совместного распределения системы равна произведению плотностей распределения составляющих, а отсюда и следует независимость составляющих. Справедливо и обратное утверждение.

Итак, для нормально распределенных составляющих двумерной случайной величины понятия независимости и некоррелированности равносильны.

1.15.18 Линейная регрессия. Прямые линии среднеквадратической регрессии

Рассмотрим двумерную случайную величину (X,Y), где X и Y - зависимые случайные величины. Представим одну из величин как функцию другой. Ограничимся приближенным представлением (точное приближение, вообще говоря, невозможно) величины Y в виде *линейной функции* величины X:

$$Y \cong g(x) = \alpha X + \beta,$$

где α и β - параметры, подлежащие определению. Это можно сделать различными способами, наиболее обоснованный из которых – метод наименьших квадратов.

Функцию $g(X) = \alpha X + \beta$ называют “наилучшим приближением” Y в смысле метода наименьших квадратов, если математическое ожидание $M[Y - g(X)]^2$ принимает наименьшее возможное значение; функцию g(x) называют *среднеквадратической регрессией* Y на X.

Теорема. Линейная средняя квадратическая регрессия Y на X имеет вид

$$g(X) = m_y + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x),$$

где $m_x = M(X), m_y = M(Y), \sigma_x = \sqrt{D(X)}, \sigma_y = \sqrt{D(Y)},$

$r = \mu_{xy}/(\sigma_x\sigma_y)$ - коэффициент корреляции величин X и Y.

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию двух независимых аргументов α и β:

$$F(\alpha,\beta) = M[Y - \alpha - \beta X]^2. \qquad (1.54)$$

Учитывая, что

$$M(X - m_x) = M(Y - m_y) = 0, M[(X - m_x)\cdot(Y - m_y)] = \mu_{xy} = r\sigma_x\sigma_y,$$

и выполнив выкладки, получим

$$F(\alpha,\beta) = \sigma_y{}^2 + \beta^2\sigma_x{}^2 - 2r\sigma_x\sigma_y\beta + (m_y - \alpha - \beta m_x)^2.$$

Исследуем функцию $F(\alpha, \beta)$ на экстремум, для чего приравняем нулю частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -2(m_y - \alpha - \beta m_x) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = 2\beta\sigma^2{}_x - 2r\sigma_x\sigma_y = 0.$$

Отсюда

$$\beta = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \alpha = m_y - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}m_x.$$

Легко убедиться, что при этих значениях α и β рассматриваемая функция принимает наименьшее значение.

Итак, линейная средняя квадратическая регрессия Y на X имеет вид

$$g(X) = \alpha + \beta X = m_y - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}m_x + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}X,$$

или

$$g(X) = m_y + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x).$$

Коэффициент $\beta = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ называют коэффициентом регрессии Y на X, а прямую

$$y - m_y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x) \qquad (1.55)$$

называют *прямой среднеквадратической регрессии* Y на X.

Подставив найденные значения α и β в соотношение (1.54), получим минимальное значение функции $F(\alpha, \beta)$, равное $\sigma_y{}^2(1-r^2)$. Величину $\sigma_y{}^2(1-r^2)$ называют *остаточной дисперсией* случайной величины Y относительно случайной величины X; она характеризует величину ошибки, которую допускают при замене Y линейной функцией $g(X) = \alpha X + \beta$. При $r = \pm 1$ остаточная дисперсия равна нулю; другими словами, при этих крайних значениях коэффициента корреляции не возникает ошибки при представлении Y в виде линейной функции от X.

Итак, если коэффициент корреляции $r = \pm 1$, то Y и X связаны *линейной* функциональной зависимостью.

Аналогично можно получить прямую среднеквадратической регрессии X на Y:

$$x - m_x = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - m_y) \qquad (1.56)$$

($r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ - коэффициент регрессии X на Y) и остаточную дисперсию $\sigma_x{}^2(1-r^2)$ величины X относительно Y.

Если $r = \pm 1$, то обе прямые регрессии, как видно из (1.55) и (1.56), совпадают.

Из уравнений (1.55) и (1.56) следует, что обе прямые регрессии проходят через точку $(m_x;m_y)$, которую называют *центром совместного распределения величин* X и Y.

1.15.19 Линейная корреляция. Нормальная корреляция

Рассмотрим двумерную случайную величину (X,Y). Если обе функции регрессии Y на X и X на Y линейны, то говорят, что X и Y связаны *линейной корреляционной зависимостью.* Очевидно, графики линейных функций регрессии – прямые линии, причем можно доказать, что они совпадают с прямыми среднеквадратической регрессии. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Если двумерная случайная величина (X,Y) распределена нормально, то X и Y связаны линейной корреляционной зависимостью.

Доказательство. Двумерная плотность вероятности

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} \cdot e^{-(u^2+v^2-2ruv)/(2(1-r^2))}, \qquad (1.57)$$

где $u = (x-a_1)/\sigma_x, v = (y-a_2)/\sigma_y.$ (1.58)

Плотность вероятности составляющей X

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-u^2/2}. \qquad (1.59)$$

Найдем функцию регрессии M(Y | x), для чего найдем сначала условный закон распределения величины Y при X = x:

$$\psi(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}.$$

Подставив (1.57) и (1.58) в правую часть этой формулы и выполнив выкладки, имеем

$$\psi(y|x) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi(1-r^2)}} \cdot e^{-(v-ru)^2/(2(1-r^2))}.$$

Заменив u и v по формулам (1.58), окончательно получим

$$\psi(y|x) = \frac{1}{(\sigma_y\sqrt{1-r^2})\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\left\{y-\left[a_2+r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-a_1)\right]\right\}^2}{2\left[\sigma_y^2(1-r^2)\right]}}.$$

Полученное условное распределение нормально с математическим ожиданием (функцией регрессии Y на X)

$$M(Y|x) = a_2 + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - a_1)$$

и дисперсией $\sigma_y^2(1-r^2)$.

Аналогично можно получить функцию регрессии X на Y:

$$M(X|y) = a_1 + r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - a_2).$$

Так как обе функции регрессии линейны, то корреляция между величинами X и Y линейная, что и требовалось доказать.

Принимая во внимание вероятностный смысл параметров двумерного нормального распределения, заключаем, что уравнения прямых регрессии

$$y - a_2 = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - a_1), \qquad x - a_1 = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - a_2)$$

совпадают с уравнениями прямых среднеквадратической регрессии.

УЧЕБНО - МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

РАЗДЕЛ 13 «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»

2. Методические указания для студентов

2.1. КОМБИНАТОРИКА

Рассмотрим множество, состоящее из n различных элементов. Требуется выбрать из них какие-нибудь k элементов и расположить эти k элементов в каком-либо порядке. Такие упорядоченные последовательности называются ***размещениями*** из n элементов по k элементов (упорядоченные – следовательно, последовательности $\{1;2\}$ и $\{2;1\}$ - различные размещения).

Если в последовательности нет одинаковых элементов, то говорят о размещении без повторений. Их количество

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Если в последовательности допускается наличие одинаковых элементов, то говорят о размещении с повторениями. Их количество

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

Любое подмножество (неупорядоченное), состоящее из k элементов, называется ***сочетанием*** из n элементов по k элементов. Различные сочетания отличаются друг от друга только самими входящими в них элементами, порядок их следования безразличен, т.е. по условию задачи подмножества $\{1;2\}$ и $\{2;1\}$ – не различны (***со***единены).

Число сочетаний без повторений

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Число сочетаний с повторениями

$$\overline{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}.$$

Количество способов переставить n элементов в заданном множестве ***(количество перестановок)*** вычисляется по формуле

$$P_n = n!$$

При решении простейших комбинаторных задач можно использовать следующую таблицу

Число множеств, состоящих из **k** элементов,
отбираемых из множества, содержащего **n** элементов

Выбор	Неупорядоченный	Упорядоченный
Без повтора	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
С повтором	$\overline{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$	$\overline{A}_n^k = n^k$

Рассмотрим разницу между сочетаниями, размещениями с повторениями, без повторений на следующих примерах.

Примеры решения задач

Пример 2.1 В коробке 6 шаров, пронумерованных от 1 до 6. Из коробки вынимаются друг за другом 3 шара и в этом же порядке записывают полученные цифры. Сколько трехзначных чисел можно таким образом записать?

Решение: По условию задачи подмножества {1;2;3} и {3;2;1} – различные. Повторов в подмножестве быть не может, так как шары не возвращаются в коробку. $n = 6;\ k = 3.$

$$A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{3!} = 120.$$

Пример 2.2. В коробке 6 шаров пронумерованных от 1 до 6. Из коробки вынимаются 3 шара и записывают число в порядке возрастания цифр. Сколько трехзначных чисел можно таким образом записать?

Решение: По условию задачи подмножества {1;2;3} и {3;2;1} дают число 123, т.е. не являются различными.

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{3!\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 20.$$

Пример 2.3. Условие задачи 2.1 (шары возвращаются в коробку)

Решение: $\overline{A}_6^3 = 6^3 = 216.$

Пример 2.4. Условие задачи 2.2 (шары возвращаются в коробку)

Решение: $\overline{C}_6^3 = \frac{(6+3-1)!}{(6-1)!3!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{5!\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 7\cdot 8 = 56.$

Пример 2.5. Сколько различных перестановок можно составить из букв слова «комар»?

Решение: $P_5 = 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120.$

Пример 2.6. Сколько различных перестановок можно составить из букв слова «задача»?

Решение: Если бы все шесть букв слова были различны, то число перестановок было бы 6! Но буква «а» встречается в данном слове три раза, и перестановки только этих трех букв «а» не дают новых способов расположения букв. Поэтому число перестановок букв слова «задача» будет не 6!, а в 3! раза меньше, то есть $\frac{6!}{3!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{3!} = 120.$

Пример 2.7. В мастерской имеется материал 5 цветов. Поступил заказ на пошив флагов, состоящих из трех горизонтальных полос разного цвета каждый. Сколько таких различных флагов может сшить мастерская?

Решение: Флаги отличаются друг от друга как цветом полос, так и их порядком, поэтому разных флагов можно сделать $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$ штук.

Пример 2.8. Сколькими способами можно распределить 5 учеников по 3 параллельным классам?

Решение: Составим вспомогательную таблицу

Номер ученика	1	2	3	4	5
Вариант класса	1	1	…	…	1
	2	2	…	…	2
	3	3	…	…	3

Таким образом, видно, что если для одного ученика существует 3 варианта выбора класса, то для всех 5 учеников существует $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 3^5$ способов распределения по классам.

Пример 2.9. На книжной полке помещается 30 томов. Сколькими способами их можно расставить, чтобы при этом первый и второй том не стояли рядом?

Решение: Произведем рассуждения "от обратного". Тридцать томов на одной полке можно разместить 30! способами.

$$\underbrace{1;2;3;...;29;30}_{30\,\text{элементов}}.$$

Если 1 и 2 тома должны стоять рядом, то число вариантов расстановки сокращается до $(29!)\cdot 2$, т.к. комбинацию из 1 и 2 тома можно считать за один том, но при этом они могут стоять как (1;2) или (2;1), т.е.

$$\underbrace{(1;2);3;...;29;30}_{29\,\text{элементов}},\ \underbrace{(2;1);3;...;29;30}_{29\,\text{элементов}}.$$

Тогда искомое число способов расстановки есть

$$30!-2\cdot 29! = (30-2)\cdot 29! = 28\cdot 29!$$

Пример 2.10. Чемпионат, в котором участвуют 16 команд, проводится в два круга, т.е. каждая команда дважды встречается с любой другой. Определить, какое количество встреч следует провести.

Решение: По условию задачи из 16 команд для каждой встречи требуется отобрать 2 команды. В данном случае отбор производится без повтора и порядок отбора не важен, т.е. число вариантов - C_{16}^2. Так как команды должны играть дважды число вариантов удваивается, т.е. $2\cdot C_{16}^2$.

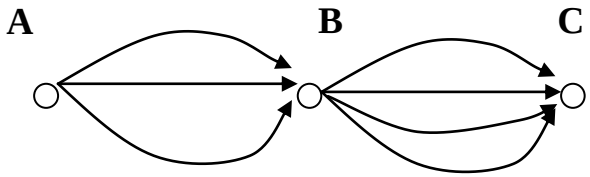
Пример 2.11. Автомобильная мастерская имеет для окраски 10 основных цветов. Сколькими способами можно окрасить автомобиль, если смешивать от 3 до 7 основных цветов?

Решение: По условию задачи отбор цветов для окраски производится без повтора и порядок отбора не важен, т.е. число вариантов зависит лишь от числа отбираемых для окраски цветов - $C_{10}^N, N\in\{3;4;5;6;7\}$. Поэтому общее число вариантов есть

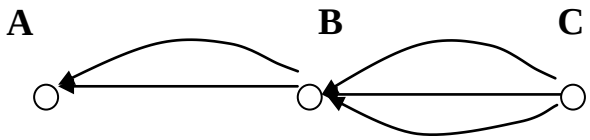
$$C_{10}^3 + C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6 + C_{10}^7 = \sum_{N=3}^{7} C_{10}^N.$$

Пример 2.12. Турист прошел маршрут из пункта А в пункт В, из В в С и вернулся обратно. Сколько вариантов маршрута существует, если из пункта А в пункт В ведут 3 дороги, а из В в С - 4 и нельзя возвращаться той дорогой, по которой уже прошел?

Решение: Составим схему



Из рисунка видно, что вариантов маршрута из А в В существует 3, и из В в С – 4, т.е. всего маршрутов $3 \cdot 4 = 12$.



На обратном пути вариантов маршрута из С в В существует 3 (один уже пройден), и из В в А – 2, т.е. всего возможных обратных маршрутов осталось $3 \cdot 2 = 6$. Тогда всего вариантов маршрута $12 \cdot 6 = 72$.

Пример 2.13. Двенадцати ученикам выданы два варианта контрольной работы. Сколькими способами можно посадить учеников в два ряда по 6 человек, чтобы у сидящих рядом не было одинаковых вариантов, а у сидящих друг за другом был один и тот же вариант?

Решение: Рассуждения произведем несколькими способами

I способ) Первоначально 12 учеников разбивают на 2 группы по 6 человек. Это можно сделать C_{12}^{6} способами.

Затем они могут распределиться по своим рядам согласно схеме

$$\text{I вариант} \quad \underbrace{1;2;3;4;5;6}_{6!\ \text{вариантов размещений}} \qquad \text{II вариант} \quad \underbrace{1;2;3;4;5;6}_{6!\ \text{вариантов размещений}}$$

$$\text{II вариант} \quad \underbrace{1;2;3;4;5;6}_{6!\ \text{вариантов размещений}} \quad \text{или} \quad \text{I вариант} \quad \underbrace{1;2;3;4;5;6}_{6!\ \text{вариантов размещений}}.$$

Поэтому всего способов распределения учеников будет

$$C_{12}^{6} \cdot 2 \cdot (6!)^2 = \frac{12!}{6! \cdot 6!} \cdot 2 \cdot (6!)^2 = 2 \cdot 12!.$$

II способ) Первоначально 12 учеников запускают в класс, указывая место, где каждый должен сидеть, например “второй ряд, третье место”. Так как посадочных мест также 12, то всего вариантов распределения 12!

Варианты контрольной работы могут распределиться

“I вариант – I ряд, II вариант – II ряд”

или

“II вариант – I ряд, I вариант – II ряд”,

т.е. 2 способами.

Таким образом, всего способов распределения учеников будет $2 \cdot 12!$

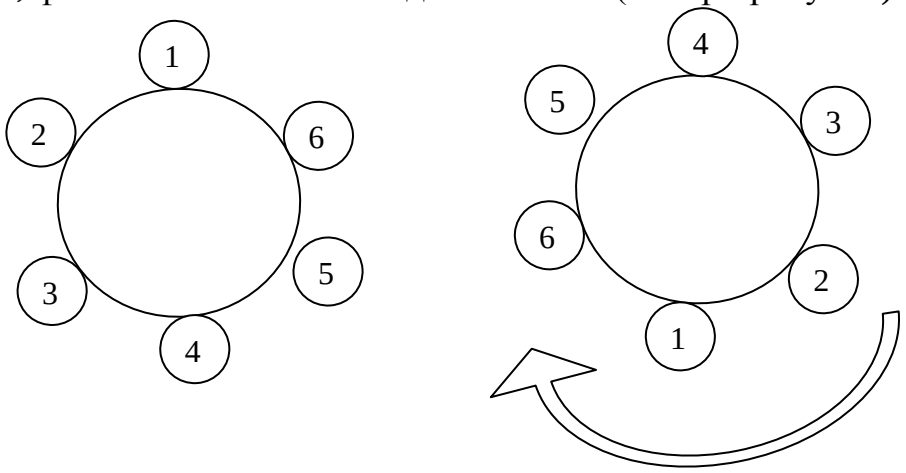
По приведенным решениям видно, что результаты решений совпадают.

Пример 2.14. Сколько существует вариантов расположения шести гостей за круглым шестиместным столом?

Решение: Эта задача имеет разные решения и, соответственно разные ответы – в зависимости от того, что понимать под **различным** расположением гостей за столом. Поэтому исследуем возможные варианты.

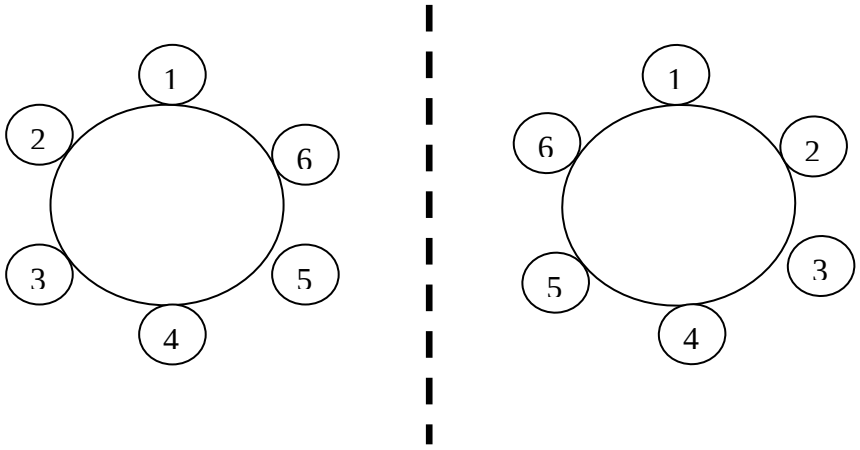
Если считать, что нам важно, кто сидит на каком стуле, то это простая задача на перестановки и, следовательно, всего вариантов $6! = 720$.

Если же важно не то, кто какой стул занял, а то, кто рядом с кем сидит, то требуется рассмотреть варианты взаимного расположения гостей. В таком случае, расположения гостей, получаемые одно из другого при повороте гостей вокруг стола, фактически являются одинаковыми (смотри рисунок).



Очевидно, что для любого расположения гостей таких одинаковых вариантов, получаемых друг из друга поворотом, - шесть. Тогда общее число вариантов уменьшается в шесть раз и их остается $5! = 120$.

В случае же, когда нас интересует только взаимное расположение гостей, то одинаковыми можно считать и такие симметричные расположения, при которых у каждого гостя остаются те же соседи за столом, только левый и правый меняются местами (смотри рисунок).



В такой постановке вопроса общее число различных вариантов расположений гостей уменьшается вдвое и составляет 60.

Отметим, что каждое решение будет считаться правильным при соответствующей постановке задачи.

Пример 2.15. Семнадцать студентов сдали экзамены по 4 предметам только на “хорошо” и “отлично”. Верно ли утверждение, что хотя бы у двух из них оценки по экзаменационным предметам совпадают?

Решение: Очевидно, что в данном случае речь идет о возможных вариантах вида

Предмет	1	2	3	4
Студент 1	4	5	4	5
Студент 2	5	5	4	5
Студент 3	5	5	4	4
…	…	…	…	…
Студент 17	4	5	4	4

Данный пример можно решить способом, изложенным в примере 1.8., и получить количество вариантов $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=16$. Приведем другой наглядный способ решения, использующий так называемое “дерево решений”, который представляет все варианты (16 штук) получения экзаменационных оценок.

Оценка

Первая					4								5			
Вторая			4				5				4				5	
Третья	4		5		4		5		4		5		4		5	
Четвертая	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5

По “дереву решений” видно, что 16 студентов могут сдать экзамены только на “хорошо” и “отлично” так, что их результаты будут отличаться, но если студентов 17, хотя бы одно повторение обязательно будет.

При решении задач комбинаторики используются следующие правила.

Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то:

Правило суммы: выбрать либо A, либо B можно $m+n$ способами.

Правило произведения. Пара объектов (A,B) в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot n$ способами.

2.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ПО КЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЕ

Вероятность события A определяется формулой

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих событию A;

n – число всех возможных элементарных исходов испытания.

Предполагается, что элементарные исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу.

Примеры решения задач

Пример 2.16. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет четное число очков.

Решение: Введем события: E_1 – одно очко; E_2 - два очка; E_3 – три очка; E_4 – четыре очка; E_5 – пять очков; E_6 – шесть очков. Итак, $n=6$.

Рассмотрим событие A – выпадение четного числа очков. Данному событию благоприятствуют элементарные исходы E_2, E_4, E_6. Следовательно, $m=3$. Тогда $P(A)=\frac{3}{6}=0{,}5$.

Пример 2.17. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и помнит лишь то, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение: Событие A – набраны нужные цифры.

n – общее число элементарных исходов опыта равно

$$n=A_{10}^{3}==10\cdot 9\cdot 8=720.$$

$m=1$, так как единственная комбинация цифр благоприятствует событию A. Тогда $P(A)=\frac{1}{720}$.

Пример 2.18. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов окажутся 6 отличников.

Решение: Событие A – среди отобранных студентов окажутся 6 отличников. Число n равно числу способов, которыми можно отобрать 9 студентов из 12

$$n=C_{12}^{9}=\frac{12!}{9!3!}=\frac{10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3}=220.$$

Подсчитаем число исходов, благоприятствующих появлению события A. Из 8 отличников 6 можно отобрать C_8^6 способами. Отобрать нужно 9 человек, остальных 3 отбираем среди неотличников. Их всего 12-8=4. Троих студентов-

неотличников из четырех можно отобрать C_4^3 способами. По теореме умножения комбинаторики $m = C_8^6 \cdot C_4^3$. Тогда,

$$P(A) = \frac{C_8^6 \cdot C_4^3}{C_{12}^9} = \frac{28 \cdot 4}{220} = \frac{28}{55}.$$

2.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ И СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

Если опыт сводится к несчетному числу равновозможных случаев, то применяется геометрическое определение вероятности

$$P(A) = \frac{\text{mes}\, g}{\text{mes}\, G},$$

где $\text{mes}\, g$ равно длине отрезка, если точки множества g расположены на прямой; $\text{mes}\, g$ равно площади фигуры, если точки множества g расположены на плоскости; $\text{mes}\, g$ равно объему тела, если точки множества g расположены в пространстве.

Примеры решения задач

Пример 2.19. Территория нефтебазы имеет форму прямоугольника со сторонами $a = 50$ м, $b = 30$ м. На территории имеется емкость диаметром 10 м. (рис. 2.1). Какова вероятность поражения емкости бомбой, попавшей на территорию нефтебазы, если попадание бомбы в любую точку равновероятно?

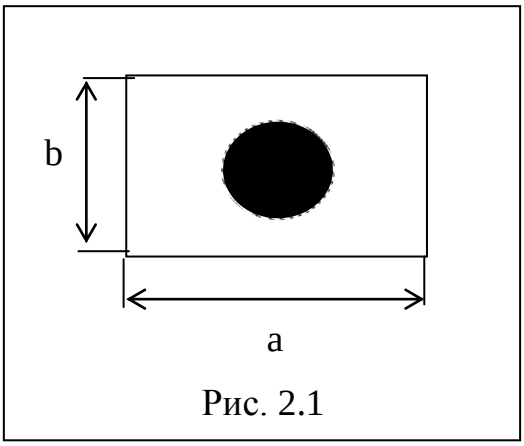


Рис. 2.1

Решение: Событие A - поражение емкости бомбой, попавшей на территорию нефтебазы $P(A) = \frac{\text{mes}\, g}{\text{mes}\, G}$, где

$\text{mes}\, g$ – площадь заштрихованного круга;

$\text{mes}\, G$ – площадь прямоугольника

$$P(A) = \frac{5^2 \cdot \pi}{50 \cdot 30} = \frac{\pi}{60}.$$

Пример 2.20. Дети бросают мяч диаметром 0,2м в щит с круглым отверстием диаметром 1м. Какова вероятность попадания в это отверстие?

Решение: Ход решения ясен из рисунка 2.2, на котором “благоприятная” зона заштрихована и имеет диаметр $2R - 2r$, где R=0,5м, r=0,1м.

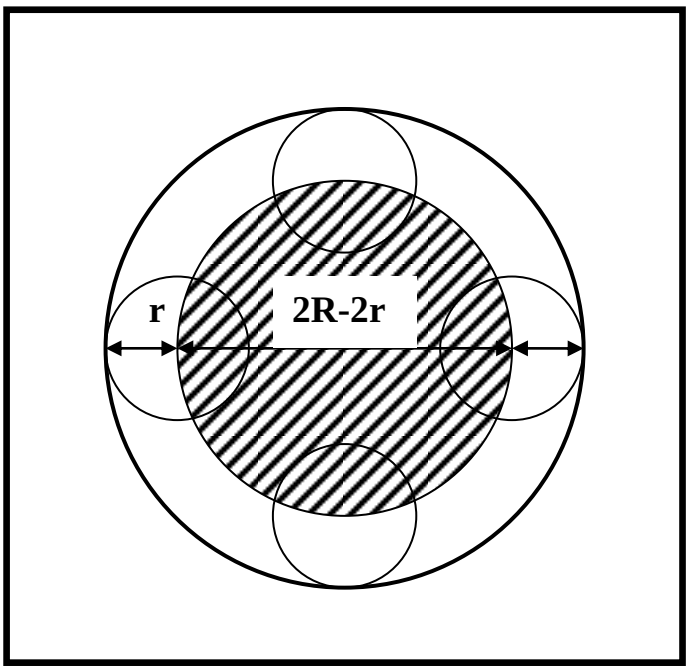


Рис.2.2

Тогда искомая вероятность есть $P = \frac{S_{благ}}{S_{общ}} = \frac{\pi(R-r)^2}{\pi R^2} = \frac{0{,}4^2}{0{,}5^2} = 0{,}64$.

Пример 2.21. Внутри круга с центром в точке (0,0) и радиусом R наудачу выбирается точка N(x,y). Найти вероятность события "$|x| \le |y|$".

Решение: В плоскости XOY построим круг и прямые $y = x$, $y = -x$, которые разделят его на четыре области. На рисунке 2.3 "благоприятная" область показана штриховкой.

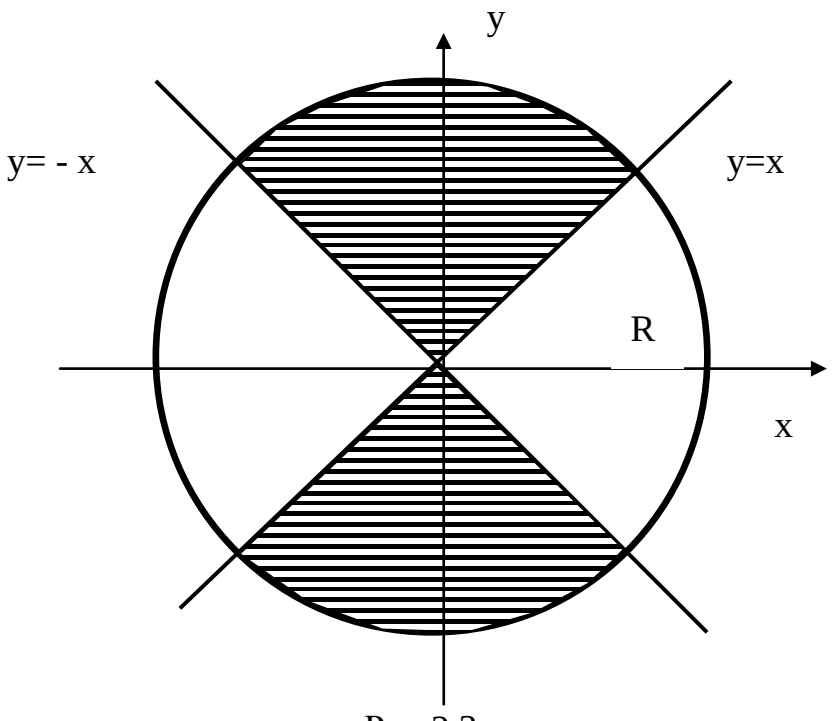


Рис.2.3

Непосредственно из рисунка ясно, что

$$P = \frac{S_{благ}}{S_{общ}} = \frac{2}{4} = 0{,}5.$$

Пример 2.22. Внутри квадрата с вершинами (0,0),(0,1),(1,0),(1,1) наудачу выбирается точка A(x,y). Найти вероятность события “$\min(x, y) < 0{,}9$”.

Решение: В плоскости XOY построим заданный квадрат и прямые $x = 0{,}9,\ y = 0{,}9$, которые разделят его на четыре области. На рисунке 2.4 “благоприятные” области показаны штриховкой.

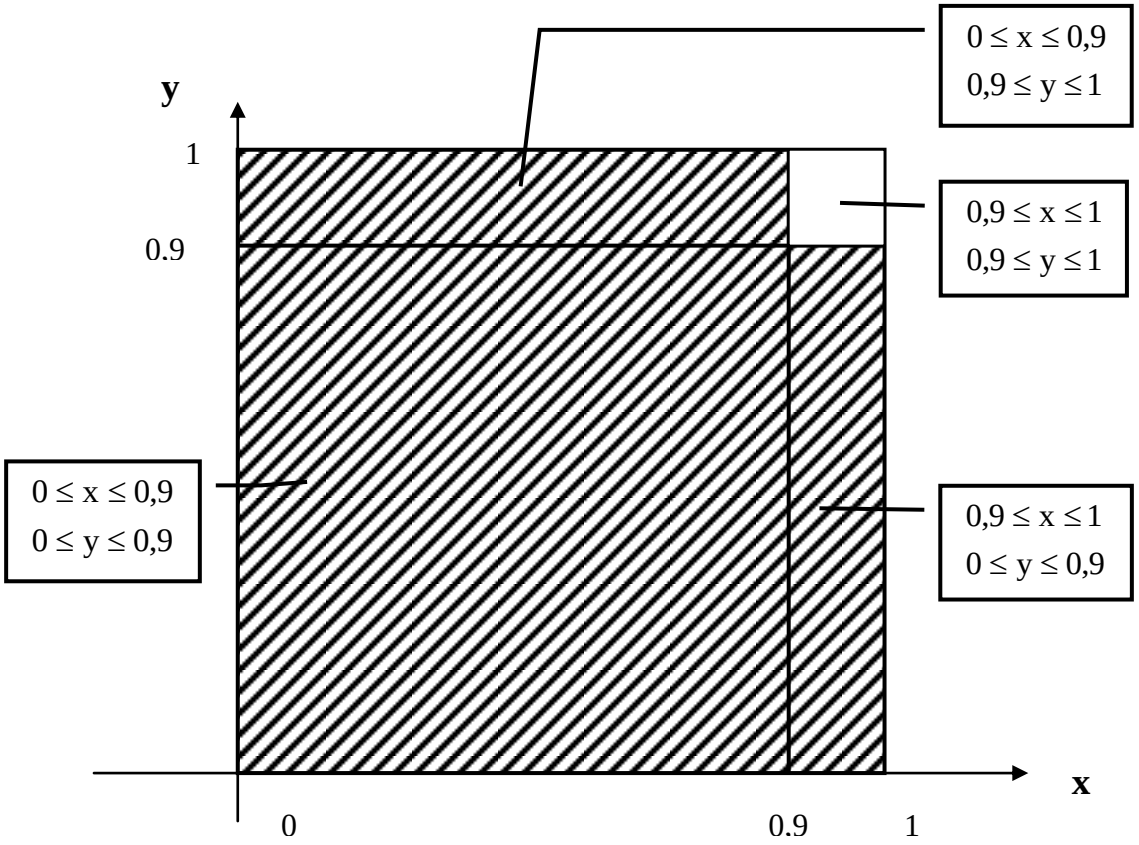
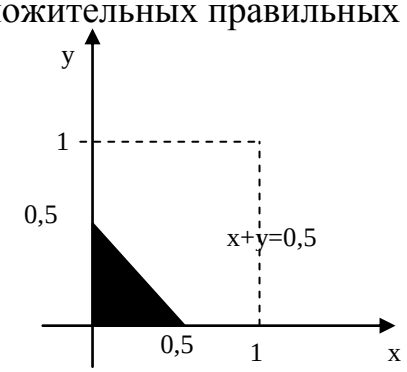


Рис.2.4

Непосредственно из рисунка ясно, что

$$P = \frac{S_{благ}}{S_{общ}} = \frac{1^2 - 0{,}1^2}{1^2} = 0{,}99.$$

Пример 2.23. Найти вероятность того, что сумма двух наудачу взятых положительных правильных дробей не больше 0,5.

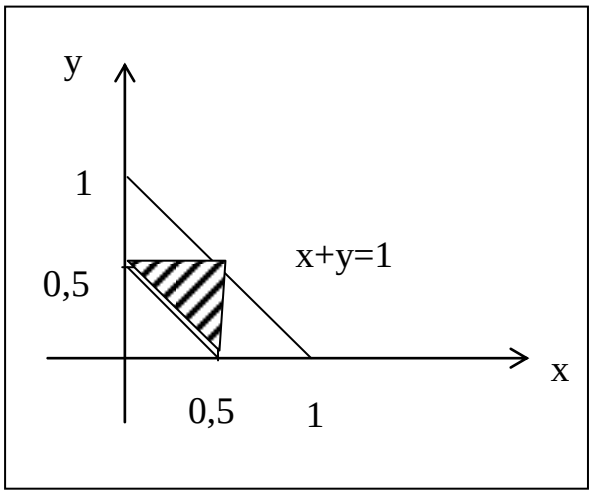


Решение: Обозначим через x и y данные дроби. По условию задачи $x<1,\ y<1$. Рассмотрим событие A – сумма дробей не больше 0,5, то есть $x+y\le 0{,}5$.

Будем рассматривать x, y как декартовы координаты точки на плоскости. Пусть g – площадь заштрихованного треугольника, G – площадь квадрата

$$P(A)=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1\cdot 1}=\frac{1}{8}.$$

Пример 2.24. Стержень единичной длины произвольным образом разламывается на три части x, y и z. Найти вероятность того, что из этих частей можно составить треугольник.



Решение: Элементарное событие характеризуется двумя параметрами x и y, ибо $z=1-(x+y)$. На них наложены ограничения $x>0,\ y>0,\ x+y<1$.

Пусть $mes\,G$ – площадь полученного треугольника. Тогда $mes\,G=\frac{1}{2}$.

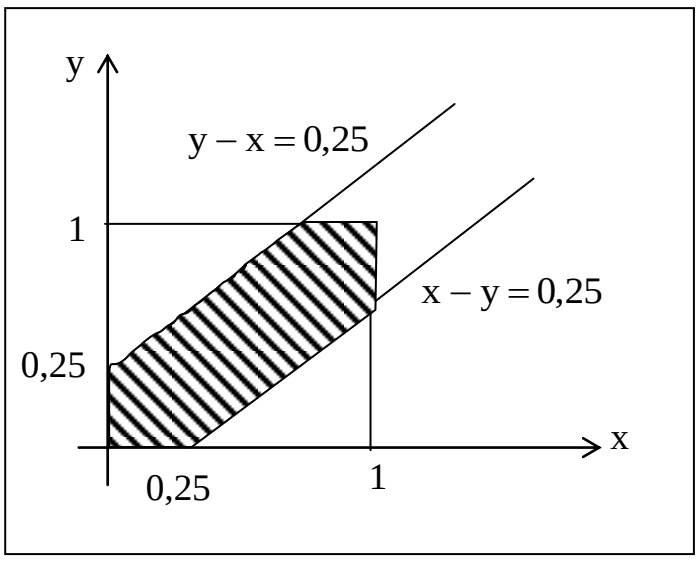
Чтобы можно было составить треугольник, необходимо, чтобы сумма двух любых сторон была больше третьей

$$\begin{cases} x+y\ge 1-(x+y), \\ x+1-(x+y)\ge y, \\ y+1-(x+y)\ge x; \end{cases} \quad \text{тогда} \quad \begin{cases} x+y\ge 0{,}5; \\ y\le 0{,}5; \\ x\le 0{,}5. \end{cases};$$

Этим условиям соответствует заштрихованная область

$$mes\,g=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8};\quad P(A)=\frac{mes\,g}{mes\,G}=\frac{1}{8}:\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Пример 2.25. Два студента условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение 15 минут, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода (в промежутке от 12 до 13 часов).



Решение: Пусть x и y – моменты прихода соответственно первого и второго студентов. Будем изображать это событие точкой с координатами (x, y) на

плоскости $x0y$. Выберем за начало отсчета 12 часов, а за единицу измерения – 1 час. Построим на плоскости $x0y$ пространство элементарных событий G. Это есть квадрат со стороной 1.

Рассмотрим событие A – студенты встретятся. Это событие произойдет, если разность между x и y по абсолютной величине не превзойдет 0,25 часа (15 минут), то есть $|x-y| \le 0{,}25;\ -0{,}25 \le x-y \le 0{,}25$. Область, «благоприятная» этому событию, заштрихована. Ее площадь равна площади всего квадрата без суммы площадей двух угловых треугольников.

$$P(A) = \frac{1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}}{1 \cdot 1} = \frac{7}{16}.$$

Если элементарные исходы испытания неравновозможны, то нельзя применять классическое определение вероятности. Вводится статистическое определение вероятности (относительная частота события).

$$P^*(A) = \frac{M}{N},$$

где N – общее число произведенных испытаний,

M – число испытаний, в которых событие A наступило.

2.4. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Суммой двух событий A и B называется событие $C = A + B$, состоящее в появлении или события A, или события B, или обоих вместе. Ключевое слово «или» («либо»).

Произведением двух событий A и B называется событие $C = A \cdot B$, состоящее в совместном выполнении события A и события B. Ключевое слово «и».

Два события называются **несовместными,** если они не могут появиться одновременно.

Теорема сложения.

$P(A+B) = P(A) + P(B)$ – для несовместных событий;

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$ – для совместных событий.

Два события называются **независимыми,** если вероятность одного из них не зависит от появления или непоявления другого.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Теорема умножения.

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ – для независимых событий;

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)$ – для зависимых событий.

Примеры решения задач

Пример 2.26. В урне 3 красных и 4 белых шара, 5 красных, 2 белых и 6 черных кубов. Из урны наудачу вынимается одно изделие. Найти вероятность

того, что выбранное изделие а) либо белое, либо черное; б) либо красное, либо куб.

Решение: а) Рассмотрим события:

$A-$ изделие белое; $P(A)=\frac{6}{20}$, так как всего изделий 20, а белых шесть.

$B-$ изделие черное, $P(B)=\frac{6}{20}$.

Событие $C-$ изделие либо белое, либо черное можно представить как сумму событий A и B. Следовательно, $P(C)=P(A+B)$.

События A и B несовместны, так как вынутое изделие не может быть одновременно и белым и черным. Тогда $P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)=$ $=\frac{6}{20}+\frac{6}{20}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$.

б) Введем события

$D-$ изделие красное; $P(D)=\frac{8}{20}$; $E-$ изделие куб; $P(E)=\frac{13}{20}$;

$F-$ изделие либо красное, либо куб; $P(F)=P(D+E)$.

События D и E совместны, так как вынутое изделие может оказаться красным кубом $P(D\cdot E)=\frac{5}{20}$. Тогда

$$P(F)=P(D+E)=P(D)+P(E)-P(D\cdot E)=\frac{8}{20}+\frac{13}{20}-\frac{5}{20}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}.$$

Пример 2.27. В ящике 10 деталей, 3 из которых бракованные. Наудачу вынимают два изделия. Найти вероятность того, что оба изделия бракованные, если первое изделие: а) возвращается в ящик; б) в ящик не возвращается.

Решение. Введем события

$A-$ первое изделие бракованное, $P(A)=\frac{3}{10}$;

$B-$ второе изделие бракованное,

$C-$ оба изделия бракованные.

Событие C представляет собой произведение событий A и B; $C=A\cdot B$.

а) Если первое изделие возвращается в ящик, то $P(B)=\frac{3}{10}$ вне зависимости от того, какое изделие было первое, то есть A и B независимые события. Тогда $P(C)=P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{9}{100}$.

б) Если изделие не возвращается, то вероятность события B будет меняться в зависимости от того, какое изделие было вынуто первым (бракованное или небракованное). Найдем вероятность события B в предположении, что первое изделие оказалось бракованным. $P_A(B)=\frac{2}{9}$, так как всего осталось 9 изделий, два из которых бракованные. Тогда

$$P(C) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}.$$

Пример 2.28. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет: а) только один из стрелков; б) хотя бы один стрелок.

Решение. Рассмотрим события

A_1 – первый стрелок попал; $P(A_1) = 0{,}7$;

$\overline{A}_1$ – первый стрелок промахнулся; $P(\overline{A}_1) = 0{,}3$;

A_2 – второй стрелок попал; $P(A_2) = 0{,}8$;

$\overline{A}_2$ – второй стрелок промахнулся; $P(\overline{A}_2) = 0{,}2$.

а) Событие B – попал только один стрелок, используя алгебру событий, можно представить в виде

$$B = A_1 \cdot \overline{A}_2 + \overline{A}_1 \cdot A_2.$$

Тогда по теореме сложения вероятностей несовместных и умножения независимых событий имеем:

$$P(B) = P(A_1 \cdot \overline{A}_2 + \overline{A}_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) =$$
$$= 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}14 + 0{,}24 = 0{,}38.$$

б) Событие C – попал хотя бы один стрелок можно представить как сумму двух несовместных событий: B – попал только один стрелок и D – попали оба стрелка $P(C) = P(B + D) = P(B) + P(D) = 0{,}38 + P(A_1) \cdot P(A_2) =$
$$= 0{,}38 + 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}38 + 0{,}56 = 0{,}94.$$

Однако вероятность события C можно найти другим способом. Рассмотрим событие $\overline{C}$ – оба промахнулись,

$$P(\overline{C}) = P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$$

Тогда $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$.

Пример 2.29. Вероятность выхода из строя хотя бы одного их трех станков в течение смены равна 0,488. Найти вероятность выхода из строя одного станка за смену, если вероятности выхода из строя каждого станка одинаковы.

Решение. Пусть A – выход из строя хотя бы одного станка. Тогда $\overline{A}$ – нормальная работа всех трех станков; $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}488 = 0{,}512$. Обозначим через p – вероятность нормальной работы каждого станка, тогда $p \cdot p \cdot p = 0{,}512$ или $p = 0{,}8$. Вероятность выхода из строя каждого станка вычисляется $q = 1 - p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

2.5. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Следствием теорем сложения и умножения является формула полной вероятности.

Допустим, что предполагается провести опыт, об условиях которого можно сделать n исключающих друг друга предположений (гипотез) H_1, H_2, …, H_n, причем $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1.$

Вероятность некоторого события A, которое может появиться только вместе с одной из гипотез, вычисляется по формуле

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A)$$

Эта формула носит название ***формулы полной вероятности.***

Если же событие A совершилось и необходимо найти вероятность того, что оно произошло совместно с некоторой гипотезой H_i, то необходимо воспользоваться ***формулой Байеса***

$$P_A(H_i) = \frac{P_{H_i}(A) \cdot P(H_i)}{P(A)}$$

Примеры решения задач

Пример 2.30. Имеются три одинаковые на вид урны; в первой 2 белых и 3 черных шара, во второй – 4 белых и 1 черный шар, в третьей – 3 белых шара. Наугад выбирается одна из урн и из нее вынимается один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

Решение. Опыт предполагает 3 гипотезы:

H_1 – выбор первой урны; $P(H_1) = \frac{1}{3}$;

H_2 – выбор второй урны; $P(H_2) = \frac{1}{3}$;

H_3 – выбор третьей урны; $P(H_3) = \frac{1}{3}$.

Рассмотрим интересующее нас событие.

A – вынутый шар белый. Данное событие может произойти только с одной из гипотез $P_{H_1}(A) = \frac{2}{5}$; $P_{H_2}(A) = \frac{4}{5}$; $P_{H_3}(A) = 1.$

Тогда $P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{4}{5} + 1 \right) = \frac{11}{15}$.

Пример 2.31. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем

60% деталей отличного качества, а второй – 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

Решение. Можно сделать два предположения (гипотезы): H_1 – деталь произведена первым автоматом, причем (поскольку первый автомат производит вдвое больше деталей, чем второй) $P(H_1)=\frac{2}{3}$; H_2 – деталь произведена вторым автоматом, причем $P(H_2)=\frac{1}{3}$.

Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена первым автоматом $P_{H_1}(A)=0{,}6$, если произведена вторым автоматом $P_{H_2}(A)=0{,}84$.

Вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется отличного качества, по формуле полной вероятности равна

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)=\frac{2}{3}\cdot 0{,}6+\frac{1}{3}\cdot 0{,}84=0{,}68.$$

Искомая вероятность того, что взятая отличная деталь произведена первым автоматом, по формуле Байеса равна

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 0{,}6}{0{,}68}=\frac{10}{17}.$$

Пример 2.32. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной и той же мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что эта пробоина принадлежит первому стрелку (исход «обе пробоины совпали» отбрасываем, как ничтожно маловероятный).

Решение. До опыта возможны следующие гипотезы:

H_1 – ни первый, ни второй стрелки не попадут;

H_2 – оба стрелка попадут;

H_3 – первый стрелок попадет, а второй – нет;

H_4 – первый стрелок не попадет, а второй попадает.

Доопытные (априорные) вероятности гипотез:

$P(H_1)=0{,}2\cdot 0{,}6=0{,}12;$ $P(H_2)=0{,}8\cdot 0{,}4=0{,}32;$

$P(H_3)=0{,}8\cdot 0{,}6=0{,}48;$ $P(H_4)=0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}08.$

Условные вероятности осуществленного события A – в мишени одна пробоина, при этих гипотезах равны:

$P_{H_1}(A)=0;\ P_{H_2}(A)=0;\ P_{H_3}(A)=1;\ P_{H_4}(A)=1.$

После опыта гипотезы H_1 и H_2 становятся невозможными, а послеопытные (апостериорные) вероятности гипотез H_3 и H_4 по формуле Байеса будут

$$P_A(H_3)=\frac{0{,}48\cdot 1}{0{,}48\cdot 1+0{,}08\cdot 1}=\frac{6}{7};\ P_A(H_4)=1-P_{H_3}(A)=1-\frac{6}{7}=\frac{1}{7}.$$

2.6. ПОВТОРНЫЕ ИСПЫТАНИЯ

Пусть проводится n испытаний, причем выполняются следующие условия:

испытания независимые, то есть начальные условия перед каждым испытанием абсолютно одинаковы;

в каждом испытании интересующее нас событие A может произойти с вероятностью p.

Тогда вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), вычисляется по ***формуле Бернулли***

$$P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k},\ \text{где}\ \ q=1-p$$

В случае, если n велико, то есть $npq>>1$ (значительно больше 1), то данную вероятность можно найти по асимптотической формуле ***(локальная теорема Лапласа):***

$$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x),\ \text{где}\ x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Функция $\varphi(x)$ определяется формулой $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-x^2/2}$.

Таблица значений функции $\varphi(x)$ для положительных значений x приведена в приложении 1; для отрицательных значений x надо помнить, что $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

В тех случаях, когда число испытаний n велико, а вероятность p мала пользуются ***формулой Пуассона***:

$$P_n(k)=\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!},$$

где $\lambda=n\cdot p-$ среднее число появлений события в различных сериях испытаний.

Вероятность того, что в n независимых испытаниях (n велико) событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно равна

$$P_n(k_1;k_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$

где $x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}};\quad x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$.

Функция $\Phi(x)$ определяется формулой $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}\,dz$.

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x)$ для положительных значений x $(0\le x\le 5)$ приведена в приложении 2; для значений $x>5$ полагают

$\Phi(x) = 0{,}5$. Для отрицательных значений x используют ту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечетная, то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Последняя формула носит название ***интегральной теоремы Лапласа.*** Она тем точнее, чем больше значение n.

Примеры решения задач

Пример 2.33. Бросаются 3 игральные кости. Какова вероятность того, что выпадет одна шестерка?

Решение. Из условия задачи $n = 3;\ k = 1$. Рассматривается событие A – выпадение шестерки при одном подбросе кости. Тогда $p = \frac{1}{6};\ q = 1 - p = \frac{5}{6}$.

$$P_3(1) = C_3^1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{3-1} = \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{25}{216} = \frac{25}{72} = 0{,}347.$$

Пример 2.34. В лаборатории проводится серия из 400 опытов по обнаружению микроба в растворе. Вероятность появления микроба в каждом отдельном опыте равно 0,2. Найти вероятность того, что микроб будет обнаружен в 80 опытах.

Решение. Очевидно, что при $n = 400$ пользоваться формулой Бернулли практически невозможно из-за необходимости вычислять факториалы больших чисел. Воспользуемся локальной теоремой Лапласа. Итак, $n = 400;\ k = 80;$ $p = 0{,}2;\ q = 0{,}8;\ x = \frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = \frac{0}{8} = 0$.

Найдем значение функции $\varphi(0)$ по таблице: $\varphi(0) = 0{,}3989$.

$$P_{400}(80) = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \cdot 0{,}3989 = 0{,}0498.$$

Пример 2.33. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равно 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут 3 негодных изделия.

Решение. По условию $n = 5000,\ p = 0{,}0002,\ k = 3$ n – велико; p – мало. Найдем $\lambda = n \cdot p = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1$. По формуле Пуассона искомая вероятность приближенно равна $P_{5000}(3) = \frac{1^3 \cdot e^{-1}}{3!} = \frac{1}{6e} \approx 0{,}06$.

Пример 2.34. Монета бросается 5 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет не менее четырех раз?

Решение. $P_5(4;5) = P_5(4) + P_5(5)$.

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{32};\ P_5(5) = C_5^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}.$$

Тогда требуемая вероятность $P_5(4;5) = \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$.

Пример 2.35. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК равно 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей непроверенными окажутся от 70 до 100 деталей.

Решение. Требуется найти вероятность $P_{400}(70;100)$. Однако решить задачу как в предыдущем случае невозможно, поэтому воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$x_1 = \frac{k_1 - n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}} = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -1{,}25;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}} = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 2{,}5.$$

По таблице находим $\Phi(2{,}5) = 0{,}4938$ и $\Phi(1{,}25) = 0{,}3944$.

Искомая вероятность $P_{400}(70;100) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25) =$
$= 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882$.

2.7. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА И ЕЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Для теории вероятностей характерно то, что результаты рассматриваемых экспериментов можно представить числом, причем случайный характер исхода влечет и случайность этого числа.

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять какое-либо числовое значение, заранее нам не известное.

По типу множества возможных значений случайные величины бывают дискретные, непрерывные и кусочно-непрерывные.

Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого промежутка.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями; его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

Существует универсальный способ задания закона распределения, который годится для случайных величин любого типа.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, равная вероятности того, что X примет значение меньше, чем число x, то есть $F(x) = P(X < x)$. Иногда ее называют ***интегральной функцией распределения***.

Из определения следует: $0 \le F(x) \le 1$ и $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

Непрерывную случайную величину можно также задать, используя другую функцию $f(x) = F'(x)$, которую называют ***плотностью распределения вероятностей*** (иногда ее называют ***дифференциальной функцией***).

Из определения следует:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1; \quad P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Одна из числовых характеристик, фиксирующая положение случайной величины на числовой оси, то есть некоторое среднее, ориентировочное значение случайной величины, около которого группируются ее возможные значения – ***математическое ожидание*** $M(X)$.

Математическое ожидание вычисляется:

$M(X) = \sum_i x_i \cdot p_i$ – для дискретной случайной величины;

$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$ – для непрерывной случайной величины.

Дисперсия $D(X)$ – есть характеристика рассеяния, разбросанности случайной величины около ее математического ожидания.

Дисперсия вычисляется:

$D(X) = \sum_i [x_i - M(X)]^2 \cdot p_i$ – для дискретной случайной величины;

$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 \cdot f(x)dx$ – для непрерывной случайной величины.

Иногда дисперсию удобно вычислять по следующей формуле:

$$D(X) = M(X^2) - \{M(X)\}^2$$

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины, что не всегда удобно. Поэтому вводится еще одна характеристика рассеяния – ***среднее квадратическое отклонение***

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1. $M(C) = C$, где $C = \text{const}$;
2. $M(CX) = C \cdot M(X)$, где $C = \text{const}$;
3. $M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)$;
4. $M(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \ldots \cdot M(X_n)$, если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – взаимно независимые случайные величины.

Дисперсия обладает следующими свойствами:

1. $D(C) = 0$, где $C = \text{const}$;
2. $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$, где $C = \text{const}$;
3. $D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)$, если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины.

Примеры решения задач

Пример 2.36. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 руб. и десять выигрышей по 10 рублей. Написать закон

распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Решение. Напишем возможные значения X: $x_1 = 50; x_2 = 10; x_3 = 0$. Вероятности этих возможных значений таковы: $p_1 = \frac{1}{100} = 0{,}01$; $p_2 = \frac{10}{100} = 0{,}1$; $p_3 = \frac{100-10-1}{100} = 0{,}89$.

Напишем искомый закон распределения

X	50	10	0
p	0,01	0,1	0,89

Контроль: 0,01+0,1+0,89=1.

Пример 2.37. Функция распределения непрерывной случайной величины X задана выражением: $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ a x^2, & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{при } x > 1. \end{cases}$

Найти: а) коэффициент a; б) найти плотность распределения $f(x)$; в) найти вероятность того, что случайная величина X в результате опыта примет значение между 0,25 и 0,5.

Решение. а) Для непрерывной случайной величины функция $F(x)$ непрерывна, следовательно, $F(1) = 1$, то есть $a x^2 \big|_{x=1} = 1$, откуда $a = 1$.

б) Плотность распределения $f(x) = F'(x)$ выражается формулой:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ 2x, & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 0, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

в) Воспользуемся формулой $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$. Тогда,

$P(0{,}25 < x < 0{,}25) = F(0{,}5) - F(0{,}25) = 0{,}5^2 - 0{,}25^2 = 0{,}1875$.

Пример 2.38. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	4	6	x_3
p	0,5	0,3	p_3

Найти: а) x_3 и p_3, зная, что $M(X) = 8$; б) дисперсию $D(X)$.

Решение. а) Известно, что $0{,}5 + 0{,}3 + p_3 = 1$. Тогда $p_3 = 0{,}2$. По определению математического ожидания $M(X) = 4 \cdot 0{,}5 + 6 \cdot 0{,}3 + x_3 \cdot 0{,}2$; $8 = 3{,}8 + 0{,}2 \cdot x_3$; $0{,}2 \cdot x_3 = 4{,}2$; $x_3 = 21$.

Закон распределения будет иметь вид:

X	4	6	21
p	0,5	0,3	0,2

б) Дисперсию можно вычислить двумя способами:

$$D(x)=(4-8)^2\cdot 0{,}5+(6-8)^2\cdot 0{,}3+(21-8)^2\cdot 0{,}2=8+1{,}2+33{,}8=43.$$

Для второго способа напишем закон распределения случайной величины X^2:

X^2	16	36	441
p	0,5	0,3	0,2

$$M(X^2)=16\cdot 0{,}5+36\cdot 0{,}3+441\cdot 0{,}2=8+10{,}8+88{,}2=107$$

$$D(X)=M(X^2)-\{M(X)\}^2=107-8^2=107-64=43.$$

2.8. НЕКОТОРЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Биномиальным называют закон распределения дискретной случайной величины X – числа появлений события в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p. Возможные значения случайной величины: $0,1,\ldots,n$, а соответствующие вероятности вычисляются по формуле Бернулли:

$$P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}.$$

Случайная величина X, распределенная по биномиальному закону, имеет $M(X)=n\cdot p;\ D(X)=n\cdot p\cdot q$.

Предельным для биномиального, когда число n неограниченно увеличивается (n – велико) и одновременно вероятность p неограниченно уменьшается (p – мало) является ***закон Пуассона***. Возможные значения случайной величины, подчиненной закону Пуассона: $0,1,\ldots,n$, а соответствующие вероятности вычисляются по формуле:

$$P_n(k)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!},\quad \text{где}\quad \lambda=n\cdot p$$

Для данного закона распределения $M(X)=\lambda;\ D(X)=\lambda$.

Геометрическим называется закон распределения дискретной случайной величины X – числа испытаний, проводимых до тех пор, пока не наступит некоторое событие, причем вероятность появления этого события в каждом испытании остается постоянной и равна p $(0<p<1)$. Ее возможные значения $1,2,\ldots,$ а соответствующие вероятности

$$P(x=k)=q^{k-1}\cdot p.$$

Для геометрического распределения

$$M(X)=\frac{1}{p};\quad D(X)=\frac{q}{p^2}.$$

Случайная величина X имеет ***гипергеометрическое распределение*** с параметрами a,b,n, если ее возможные значения $0,1,\ldots,$ а имеют вероятности:

$$P(x=k)=\frac{C_a^k\cdot C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n},\qquad .$$

Гипергеометрическое распределение возникает при следующих условиях: имеется урна, в которой a белых и b черных шаров, из нее вынимается n шаров. СВ $X-$ число белых шаров среди вынутых.

Числовые характеристики случайной величины X, имеющей гипергеометрическое распределение, равны

$$M(X)=\frac{n\cdot a}{a+b};$$

$$D(X)=\frac{n\,a\,b}{(a+b)^2}+n\cdot(n-1)\cdot\left[\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1}-\left(\frac{a}{a+b}\right)^2\right].$$

Однако, для гипергеометрического распределения числовые характеристики удобнее вычислять по определению.

Примеры решения задач

Пример 2.39. Брошены 2 игральные кости. Написать в виде таблицы закон распределения случайной величины $X-$ числа выпадений «шестерки».

Решение: Возможные значения СВ $X-0,1,2$, причем соответствующие вероятности вычисляются по формуле Бернулли при $n=2$ и $p=\frac{1}{6}$.

$$P(X=0)=C_2^0\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{36};$$

$$P(X=1)=C_2^1\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{10}{36};$$

$$P(X=2)=C_2^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^0=\frac{1}{36}.$$

Итак,

X	0	1	2
P	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Пример 2.40. На автоматическую телефонную станцию поступает простейший поток вызовов с интенсивностью 0,8 вызов/мин (простейший – определяется законом Пуассона). Найти вероятность того, что за две минуты: а)не придет ни одного вызова; б)придет ровно один вызов; в)придет хотя бы один вызов.

Решение. Случайная величина $X-$ число вызовов за 2 минуты – распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda=0{,}8\cdot 2=1{,}6$. Имеем:

а) $P(0)=\dfrac{e^{-1,6}\cdot(1,6)^0}{0!}\approx 0,202$;

б) $P(1)=\dfrac{e^{-1,6}\cdot 1,6}{1!}\approx 1,6\cdot 0,202\approx 0,323$;

в) $P(X\geq 1)=1-P(0)\approx 1-0,202=0,798$.

2.9. НЕКОТОРЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Говорят, что СВ X имеет ***равномерное распределение*** на участке от a до b, если ее плотность $f(x)$ на этом участке постоянна, то есть

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leq a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x\leq b,\\ 0, & x>b\end{cases}$$

Например, производится измерение какой-то величины с помощью прибора с грубыми делениями; в качестве приближенного значения измеряемой величины берется ближайшее целое. СВ X – ошибка измерения распределена равномерно на участке $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, так как ни одно из значений случайной величины ничем не предпочтительнее других.

Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0,\end{cases}$$

где λ – постоянная положительная величина.

Примером непрерывной случайной величины, распределенной по показательному закону, может служить время между появлениями двух последовательных событий простейшего потока.

Часто длительность времени безотказной работы элементы T имеет показательное распределение, функция распределения которого

$$F(t)=P(T<t)=1-e^{-\lambda t},\quad (\lambda>0)$$

определяет вероятность отказа элемента за время длительностью t.

λ – интенсивность отказов (среднее число отказов в единицу времени).

Нормальный закон распределения (иногда называемый ***законом Гаусса***) играет исключительно важную роль в теории вероятностей и занимает среди других законов распределения особое положение. Плотность распределения нормального закона имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

где $m-$ математическое ожидание,

$\sigma-$ среднее квадратическое отклонение X.

Вероятность того, что нормально распределенная СВ X примет значение, принадлежащее интервалу (α,β), вычисляется по формуле:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)-$ функция Лапласа. Ее значения определяются из таблицы приложения учебника по теории вероятностей.

Вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины X от математического ожидания по абсолютной величине меньше заданного положительного числа δ, вычисляется по формуле

$$P(|X-m|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Примеры решения задач

Пример 2.41. Цена одного деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания округляются до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02 А.

Решение. Ошибку округления можно рассматривать как СВ X, которая распределена равномерно в интервале между двумя соседними делениями. Плотность равномерного распределения $f(x)=\frac{1}{b-a}$, где $(b-a)-$ длина интервала, в котором заключены возможные значения X. В рассматриваемой задаче эта длина равна 0,1. Поэтому $\frac{1}{b-a}=\frac{1}{0,1}=10$. Итак,

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 10, & 0<x\le 0,1;\\ 0, & x>0,1.\end{cases}$$

Ошибка отсчета превысит 0,02, если она будет заключена в интервале (0,02; 0,08). По формуле $P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx$ имеем

$$P(0,02<X<0,08)=\int_{0,02}^{0,08}10\,dx=0,6$$

Пример 2.42. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение $F(t)=1-e^{-0,01t}$ $(t>0)$. Найти вероятность того,

что за время длительностью $t=50$ часов: а) элемент откажет; б) элемент не откажет.

Решение. а) Функция $F(t)$ определяет вероятность отказа элемента за время длительностью t, поэтому, подставив $t=50$, получим вероятность отказа: $F(50)=1-e^{-0,01\cdot 50}=1-0,606=0,394$.

б) События «элемент откажет» и «элемент не откажет» - противоположные, поэтому вероятность того, что элемент не откажет $P=1-0,394=0,606$.

Пример 2.43. Случайная величина X распределена нормально с параметрами m,σ. Найти вероятность того, что СВ X отклонится от своего математического ожидания m больше, чем на 3σ.

Решение. $P(|X-m|>3\sigma)=1-P(|X-m|<3\sigma)=1-2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=1-2\cdot\Phi(3)=$

$=1-2\cdot 0,49865\approx 0,0027$. Эта вероятность очень мала, то есть такое событие можно считать практически невозможным (можно ошибиться $\approx$ в трех случаях из 1000). Это и есть правило трех сигм: если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

Пример 2.44. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (12, 14).

Решение. Для нормально распределенной величины

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right).$$

Подставив $\alpha=12;\ \beta=14;\ m=10;\ \sigma=2$, получим

$$P(12<X<14)=\Phi\left(\frac{14-10}{2}\right)-\Phi\left(\frac{12-10}{2}\right)=\Phi(2)-\Phi(1).$$

По таблице находим $\Phi(2)=0,4772;\ \Phi(1)=0,3413$.

Искомая вероятность $P(12<X<14)=0,4772-0,3413=0,1359$.

2.10. ФУНКЦИЯ ОДНОГО СЛУЧАЙНОГО АРГУМЕНТА

Если каждому возможному значению случайной величины X соответствует одно возможное значение случайной величины Y, то Y называют ***функцией случайного аргумента*** X и записывают $Y=\varphi(X)$.

Рассмотрим правила для нахождения закона распределения СВ Y по известному закону распределения СВ X.

Пусть аргумент X - дискретная случайная величина, с законом распределения:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Если различным значениям СВ X соответствуют различные значения СВ Y, то вероятности соответствующих значений равны; если же различным значениям СВ X соответствуют значения СВ Y, среди которых есть равные между собой, то следует складывать вероятности повторяющихся значений Y.

Математическое ожидание функции

$$M(Y)=M(\varphi(X))=\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)p_i\ .$$

Пусть аргумент X - непрерывная случайная величина, заданная плотностью распределения $f(x)$.

Если функция $y=\varphi(x)-$ дифференцируемая строго монотонная, обратная функция которой $x=\psi(y)$, то плотность распределения $g(y)$ случайной величины Y находится по формуле

$$g(y)=f[\psi(y)]\cdot|\psi'(y)|.$$

Если функция $y=\varphi(x)$ в интервале возможных значений X не монотонна, то следует разбить этот интервал на такие интервалы, в которых функция $\varphi(x)$ монотонна, и найти плотности распределений $g_i(y)$ для каждого из интервалов монотонности, а затем представить $g(y)$ в виде суммы $g(y)=\sum g_i(y)$.

Например, если функция $\varphi(x)$ монотонна в двух интервалах, в которых соответствующие обратные функции равны $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$, то

$$g(y)=f[\psi_1(y)]\cdot|\psi_1'(y)|+f[\psi_2(y)]\cdot|\psi_2'(y)|$$

Математическое ожидание и дисперсия функции непрерывного случайного аргумента $y=\varphi(x)$

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot g(y)dy$$

или

$$M(Y)=M(\varphi(x))=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\cdot f(x)dx$$

$$D(Y)=D(\varphi(x))=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^2(x)\cdot f(x)dx-[M(\varphi(x))]^2\ .$$

Примеры решения задач

Пример 2.45. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	- 1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,4	0,3

Найти закон распределения случайной величины $Y = X^2 + 3$ и ее математическое ожидание.

Решение. Найдем возможные значения Y:

$(-1)^2 + 3 = 4;\ 0^2 + 3 = 3;\ 1^2 + 3 = 4;\ 2^2 + 3 = 7.$

Возможному значению $Y = 4$, соответствуют возможные значения $X = -1$ и $X = 1$, поэтому $P(Y = 4) = P(X = -1) + P(X = 1) =$
$= 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5$. Вероятности возможных значений
$P(Y = 3) = P(X = 0) = 0{,}2;\ P(Y = 7) = P(X = 2) = 0{,}3.$

Итак, искомый закон распределения функции

Y	3	4	7
P	0,2	0,5	0,3

$M(Y) = ((-1)^2 + 3)\cdot 0{,}1 + (0^2 + 3)\cdot 0{,}2 + (1^2 + 3)\cdot 0{,}4 + (2^2 + 3)\cdot 0{,}3 =$
$= 3\cdot 0{,}2 + 4\cdot 0{,}5 + 7\cdot 0{,}3 = 0{,}4 + 0{,}6 + 1{,}6 + 2{,}1 = 4{,}7.$

Пример 2.46. Дана нормально распределенная случайная величина X с $m = 0$ и $\sigma = 1$. Найти закон распределения СВ $Y = -X + 2$.

Решение. По условию задачи $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Так как $Y = -X + 2$, то $\varphi(x) = -x + 2$. Найдем для $\varphi(x)$обратную функцию $\psi(y) = x = 2 - y;\ \psi'(y) = -1$. Тогда плотность распределения случайной величины Y будет иметь вид

$$g(y) = f(2 - y)\cdot|-1|; \qquad g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(2-y)^2}{2}}.$$

Пример 2.47. Нормально распределенная случайная величина X имеет плотность $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $(-\infty < x < \infty)$.

Найти плотность распределения $g(y)$ случайной величины $y = x^2$.

Решение. Функция $y = x^2$ на $(-\infty;+\infty)$ не монотонна. Интервалы монотонности $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$.

На интервале $(-\infty;0)$ обратная функция $\psi_1(y) = -\sqrt{y}$;

на $(0;+\infty)$ $\psi_2(y) = \sqrt{y}$;

$\psi_1(y) = -\frac{1}{2\sqrt{y}};\ \psi_2(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$

$f(\psi_1(y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}};\ f(\psi_2(y)) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y}{2}}$. Тогда

$$g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}\cdot\left|\frac{-1}{2\sqrt{y}}\right|+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}\cdot\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| \text{ или } g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}.$$

Так как $y=x^2$, причем $-\infty<x<\infty$, то $0<y<\infty$. Таким образом

$$g(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0.\end{cases}$$

Пример 2.48. Случайная величина X задана плотностью

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{3}, & 0<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины $Y=3X+5$.

Решение. I способ: Найдем $M(X)=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{3+0}{2}=\dfrac{3}{2}$.

По свойствам математического ожидания

$$M(Y)=M(3X+5)=3M(X)+5=\ =3\cdot\frac{3}{2}+5=\frac{19}{2}.$$

II способ: Воспользуемся формулой $M(Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\cdot f(x)dx$. Тогда,

$$M(Y)=\int\limits_0^3(3x+5)\cdot\frac{1}{3}dx=\frac{1}{3}\left(\frac{3x^2}{2}+5x\right)\Bigg|_0^3=\frac{1}{3}\left(\frac{27}{2}+15\right)=\frac{19}{2}.$$

2.11. СИСТЕМА ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Двумерной называют случайную величину (X,Y), возможные значения которой есть пары чисел (x,y). Составляющие X и Y, рассматриваемые одновременно, образуют ***систему двух случайных величин.***

Законом распределения дискретной двумерной случайной величины называют перечень возможных значений этой величины, то есть пар чисел (x_i,y_j) и их вероятностей $p(x_i,y_j)\,(i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,m)$. Обычно закон распределения задают в виде таблицы, называемой ***матрицей распределения***.

X \ Y	y_1	y_2	…	y_j	…	y_m
x_1	$p(x_1,y_1)$	$p(x_1,y_2)$	…	$p(x_1,y_j)$	…	$p(x_1,y_m)$

x_2	$p(x_2, y_1)$	$p(x_2, y_2)$	…	$p(x_2, y_j)$	…	$p(x_2, y_m)$
…	…	…	…	…	…	…
x_i	$p(x_i, y_1)$	$p(x_i, y_2)$	…	$p(x_i, y_j)$	…	$p(x_i, y_m)$
…	…	…	…	…	…	…
x_n	$p(x_n, y_1)$	$p(x_n, y_2)$	…	$p(x_n, y_j)$	…	$p(x_n, y_m)$

Сумма вероятностей, помещенных во всех клетках таблицы, равна единице.

Из данной таблицы ***закон распределения составляющей СВ*** X.

x	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
p	$p(x_1)$	$p(x_2)$	…	$p(x_i)$	…	$p(x_n)$

где $p(x_i) = p(x_i, y_1) + p(x_i, y_2) + \ldots + p(x_i, y_m), \quad i = 1,2,\ldots,n$.

Аналогично можно найти закон распределения составляющей СВ Y.

Двумерную случайную величину (X, Y) (безразлично, дискретную или непрерывную) можно задать с помощью ***функции распределения*** $F(x, y)$, которая определяет вероятность того, что X примет значение, меньшее x, Y – меньшее y.

$$F(x, y) = P(X < x;\ Y < y).$$

Свойства функции распределения:

1) $0 \le F(x; y) \le 1$;

2) $F(-\infty; y) = F(-\infty; \infty) = F(x; -\infty) = 0$; $\quad F(\infty; \infty) = 1$.

3) $F(x, \infty) = F_1(x)$, где $F_1(x)$ – функция распределения составляющей X;
$F(\infty; y) = F_2(y)$, где $F_2(y)$ – функция распределения составляющей Y.

При помощи функции распределения может быть найдена вероятность

$$P(x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)].$$

Непрерывную двумерную величину можно также задать, пользуясь плотностью распределения. ***Плотностью совместного распределения вероятностей*** $f(x, y)$ двумерной непрерывной случайной величины (X, Y) называют вторую смешанную частную производную от функции распределения: $\quad f(x, y) = \dfrac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y}$.

Свойства плотности распределения:

1) $f(x, y) \ge 0$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy = 1$.

Плотности распределения

составляющей X – $\quad f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy$;

составляющей Y – $f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$.

Вероятность попадания случайной точки (X,Y) в область D определяется по формуле $P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_{(D)} f(x,y)dx\,dy$.

Примеры решения задач

Пример 2.49. Два стрелка, независимо друг от друга, делают по одному выстрелу каждый. Случайная величина X – число попаданий первого стрелка, Y – число попаданий второго стрелка. Вероятность попадания при выстреле для первого стрелка 0,7; для второго стрелка 0,4. Построить матрицу распределения системы случайных величин (X,Y) и законы распределения составляющих X и Y. Найти функцию распределения $F(x,y)$.

Решение. Занесем возможные значения случайных величин X и Y в таблицу

X \ Y	0	1
0	p_{11}	p_{12}
1	p_{21}	p_{22}

$$p_{11}=P(X=0;Y=0)=P\left\{\begin{matrix}\text{I стрелок промахнулся}\\ \text{II стрелок промахнулся}\end{matrix}\right\}=(1-0,7)\cdot(1-0,4)=0,18$$

$$p_{21}=P(X=1;Y=0)=P\left\{\begin{matrix}\text{I стрелок попал}\\ \text{II стрелок промахнулся}\end{matrix}\right\}=0,7\cdot(1-0,4)=0,42.$$

$p_{12}=P(X=0;\ Y=1)=(1-0,7)\cdot 0,4=0,12$;

$p_{22}=P(X=1;\ Y=1)=0,7\cdot 0,4=0,28$.

Итак,

X \ Y	0	1
0	0,18	0,12
1	0,42	0,28

Напишем закон распределения составляющей Y

Y	0	1
P	p_1	p_2

$p_1=P(Y=0)=P(X=0;Y=0)+P(X=1;Y=0)=0,18+0,42=0,6$;

$p_2=P(Y=1)=P(X=0;Y=1)+P(X=1;Y=1)=0,12+0,28=0,4$.

Тогда

Y	0	1
P	0,6	0,4

Аналогично находится закон распределения составляющей X (складываются вероятности по столбцам).

X	0	1
P	0,3	0,7

Значения функции распределения $F(x,y)$ находим на основании матрицы распределения

X \ Y	$y \le 0$	$0 < y \le 1$	$y > 1$
$x \le 0$	0	0	0
$0 < x \le 1$	0	0,18	0,18+0,12
$x \ge 1$	0	0,18+0,42	0,18+0,12+0,42+0,28

Окончательно,

X \ Y	$y \le 0$	$0 < y \le 1$	$y > 1$
$x \le 0$	0	0	0
$0 < x \le 1$	0	0,18	0,3
$x \ge 1$	0	0,6	1

Пример 2.50. Задана двумерная плотность вероятности $f(x,y)=\dfrac{C}{(9+x^2)(16+y^2)}$ системы (X,Y) двух случайных величин. Найти постоянную C и плотности распределения составляющих системы.

Решение. Воспользуемся свойством $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1.$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{C}{(9+x^2)(16+y^2)}\,dx\,dy = C\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{9+x^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{16+y^2} =$$

$$= C\cdot\left[\lim_{\substack{R_1\to\infty\\R_2\to-\infty}}\int\limits_{R_2}^{R_1}\frac{dx}{9+x^2}\right]\cdot\left[\lim_{\substack{R_3\to\infty\\R_4\to-\infty}}\int\limits_{R_4}^{R_3}\frac{dx}{16+y^2}\right] = C\cdot\left(\lim_{\substack{R_1\to\infty\\R_2\to-\infty}}\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\Bigg|_{R_2}^{R_1}\right)\times$$

$$\times\left(\lim_{\substack{R_3\to\infty\\R_4\to-\infty}}\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{y}{4}\Bigg|_{R_4}^{R_3}\right) = \frac{C}{12}\cdot\left[\lim_{\substack{R_1\to\infty\\R_2\to-\infty}}\left(\operatorname{arctg}\frac{R_1}{3}-\operatorname{arctg}\frac{R_2}{3}\right)\right]\times$$

$$\times\left[\lim_{\substack{R_3\to\infty\\R_4\to-\infty}}\left(\operatorname{arctg}\frac{R_3}{4}-\operatorname{arctg}\frac{R_4}{4}\right)\right] = \frac{C}{12}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{C\pi^2}{12}.$$

Тогда, $\frac{C\pi^2}{12}=1;\ C=\frac{12}{\pi^2}$.

Найдем плотность распределения $f_1(x)$ составляющей X

$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\frac{12}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(9+x^2)(16+y^2)}=\frac{12}{\pi^2}\cdot\frac{1}{9+x^2}\lim\limits_{\substack{R_1\to\infty\\R_2\to-\infty}}\int\limits_{R_2}^{R_1}\frac{dy}{16+y^2}=$$

$$=\frac{12}{\pi^2(9+x^2)}\cdot\left[\lim\limits_{\substack{R_1\to\infty\\R_2\to-\infty}}\left(\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{y}{4}\right)\Bigg|_{R_2}^{R_1}\right]=\frac{3}{\pi^2(9+x^2)}\lim\limits_{\substack{R_1\to\infty\\R_2\to-\infty}}\left(\operatorname{arctg}\frac{R_1}{4}-\operatorname{arctg}\frac{R_2}{4}\right)=$$

$$=\frac{3}{\pi^2(9+x^2)}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{3\pi}{\pi^2(9+x^2)}=\frac{3}{\pi(9+x^2)}.$$

Аналогично можно найти плотность распределения $f_2(y)$ составляющей Y.

$$f_2(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\frac{12}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(9+x^2)(16+y^2)}=\frac{12}{\pi^2}\cdot\frac{1}{16+y^2}\lim\limits_{\substack{R_1\to\infty\\R_2\to-\infty}}\int\limits_{R_2}^{R_1}\frac{dx}{9+x^2}=$$

$$=\frac{12}{\pi^2(16+y^2)}\cdot\left[\lim\limits_{\substack{R_1\to\infty\\R_2\to-\infty}}\left(\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)\Bigg|_{R_2}^{R_1}\right]=\frac{4}{\pi^2(16+y^2)}\lim\limits_{\substack{R_1\to\infty\\R_2\to-\infty}}\left(\operatorname{arctg}\frac{R_1}{3}-\operatorname{arctg}\frac{R_2}{3}\right)=$$

$$=\frac{4}{\pi^2(16+y^2)}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{4\pi}{\pi^2(16+y^2)}=\frac{4}{\pi(16+y^2)}.$$

Пример 2.51. Найти вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=\frac{\pi}{6};x=\frac{\pi}{2},\quad y=\frac{\pi}{4};y=\frac{\pi}{3}$, если известна функция распределения

$$F(x,y)=\sin x\cdot\sin y\left(0\le x\le\frac{\pi}{2};0\le y\le\frac{\pi}{2}\right).$$

Решение. Положив $x_1=\frac{\pi}{6};x_2=\frac{\pi}{2};y_1=\frac{\pi}{4};y_2=\frac{\pi}{3}$ в формуле

$$P(x_1\le X<x_2,y_1\le Y<y_2)=[F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)]-[F(x_2,y_1)-F(x_1,y_1)],$$

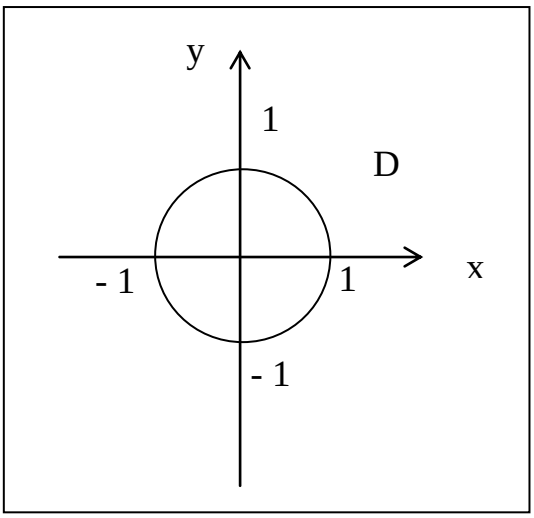
получим

$$P\left(\frac{\pi}{6}\le X<\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\le Y<\frac{\pi}{3}\right)=\left[F\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3}\right)-F\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)\right]-\left[F\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right)-F\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right)\right]=$$

$$=\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt3}{2}-\frac{\sqrt3}{4}-\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{4}=$$

$$=\frac{\sqrt3-\sqrt2}{4}\approx0{,}08.$$

Пример 2.52 В круге $x^2 + y^2 \le 4$ двумерная плотность вероятности $f(x, y) = \frac{3}{8\pi} \cdot \left(2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; вне круга $f(x, y) = 0$. Найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в круг радиуса $r = 1$ с центром в начале координат.



Решение: Пусть область D_1 – круг радиуса $r = 1$ с центром в начале координат, тогда

$$P\{(X, Y) \in D_1\} = \frac{3}{8\pi} \iint\limits_{(D_1)} \left(2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx\, dy.$$

Перейдем к полярным координатам:

$x = \rho \cdot \cos\varphi;\ \ y = \rho \cdot \sin\varphi\ \ (0 \le \rho \le 1; 0 \le \varphi \le 2\pi)$

$I = \rho$

$$P\{(X, Y) \in D_1\} = \frac{3}{8\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (2 - \rho) \cdot \rho\, d\rho =$$

$$= \frac{3}{8\pi} \cdot 2\pi \left(\rho^2 - \frac{\rho^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

2.12. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть дана система двух дискретных случайных величин (X, Y), возможные значения СВ $X - x_1, x_2, \ldots, x_n$, СВ $Y - y_1, y_2, \ldots, y_m$, соответствующие вероятности $p_{ij} (i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,m)$. Тогда математические ожидания и дисперсии составляющих случайных величин

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i\, p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left[x_i - M(X)\right]^2 p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M(X)\right)^2 \sum_{j=1}^{m} p_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i^2\, p_{ij} - \left[M(X)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{j=1}^{m} p_{ij} - \left[M(X)\right]^2.$$

$$M(Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_j\, p_{ij} = \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij}.$$

$$D(Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left[y_j - M(Y)\right]^2 p_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \left(y_i - M(Y)\right)^2 \sum_{i=1}^{n} p_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_j^2\, p_{ij} - \left[M(Y)\right]^2 = \sum_{j=1}^{m} y_j^2 \sum_{i=1}^{n} p_{ij} - \left[M(Y)\right]^2.$$

Если система двух непрерывных случайных величин задана плотностью вероятностей $f(x,y)$, то

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x,y)dx\,dy,\ \ M(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y\,f(x,y)dx\,dy;$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^2\,f(x,y)dx\,dy,=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^2\,f(x,y)dx\,dy-[M(X)]^2$$

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[y-M(Y)]^2\,f(x,y)dx\,dy,=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y^2\,f(x,y)dx\,dy-[M(Y)]^2.$$

Для описания системы двух случайных величин кроме математических ожиданий и дисперсий составляющих используют и другие характеристики; к их числу относятся корреляционный момент (ковариация) и коэффициент корреляции.

Корреляционным моментом μ_{xy} случайных величин X и Y называют математическое ожидание произведения отклонений этих величин

$$\mu_{xy}=M\{[X-M(X)]\cdot[Y-M(Y)]\}=M(X\cdot Y)-M(X)\cdot M(Y).$$

Для вычисления корреляционного момента дискретных величин используют формулу

$$\mu_{xy}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[x_i-M(X)]\cdot[y_j-M(Y)]\cdot p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i\,y_j\,p_{ij}-M(X)\cdot M(Y),$$

а для непрерывных величин – формулу

$$\mu_{xy}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]\cdot[y-M(Y)]\cdot f(x,y)dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x\,y\,f(x,y)dxdy-M(X)\cdot M(Y).$$

Коэффициентом корреляции r_{xy} величин X и Y называют отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин:

$$r_{xy}=\frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\cdot\sigma_y};\qquad |r_{xy}|\le 1.$$

Две случайные величины называются **независимыми**, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина.

Для независимых случайных величин выполняются следующие свойства:

1. $F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y).$
2. $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y).$

Корреляционный момент μ_{xy} и коэффициент корреляции r_{xy} служат для характеристики связи между величинами X и Y.

Если X и Y независимы, то корреляционный момент равен нулю. Обратное не всегда верно: если $\mu_{xy}=0$, то не всегда X и Y независимые случайные величины.

Коэффициент корреляции служит для оценки тесноты линейной связи между X и Y. Если между случайными величинами существует строгая функциональная линейная зависимость: $Y=aX+b$, то $r_{xy}=+1$ при $a>0$ и $r_{xy}=-1$ при $a<0$, причем, чем ближе абсолютная величина r_{xy} к единице, тем линейная связь сильнее. Если $r_{xy}=0$, это означает только отсутствие линейной связи между случайными величинами; любой другой вид связи может при этом присутствовать.

Примеры решения задач

Пример 2.53. Матрица распределения системы двух дискретных случайных величин (X,Y) задана таблицей

X \ Y	0	2	5
1	0,1	0,1	0,2
2	0,2	0,3	0,1

Найти числовые характеристики системы (X,Y).

Решение. $M(X)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}x_i\,p_{ij}=\sum_{i=1}^{2}x_i\sum_{j=1}^{3}p_{ij}=x_1(p_{11}+p_{12}+p_{13})+$

$+x_2(p_{21}+p_{22}+p_{23})=1\cdot(0{,}1+0{,}1+0{,}2)+2(0{,}2+0{,}3+0{,}1)=1{,}6.$

$M(Y)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}y_j\,p_{ij}=\sum_{j=1}^{3}y_j\sum_{i=1}^{2}p_{ij}=y_1(p_{11}+p_{21})+$

$+y_2(p_{12}+p_{22})+y_3(p_{13}+p_{23})=$

$=0\cdot(0{,}1+0{,}2)+2(0{,}1+0{,}3)+5(0{,}2+0{,}1)=2{,}3.$

$D(X)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}x_i^2\,p_{ij}-[M(X)]^2=x_1^2(p_{11}+p_{12}+p_{13})+$

$+x_2^2(p_{21}+p_{22}+p_{23})-[M(X)]^2=$

$=1^2(0{,}1+0{,}1+0{,}2)+2^2(0{,}2+0{,}3+0{,}1)-(1{,}6)^2=0{,}24$

$D(Y)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}y_j^2\,p_{ij}-[M(Y)]^2=y_1^2(p_{11}+p_{21})+$

$+y_2^2(p_{12}+p_{22})+y_3^2(p_{13}+p_{23})-[M(Y)]^2=$

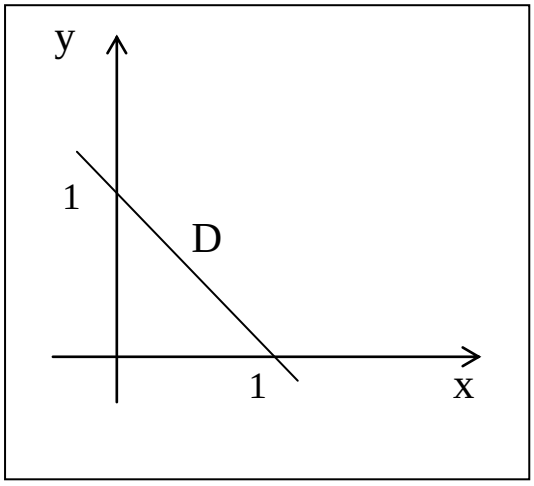
$=0^2(0{,}1+0{,}2)+2^2(0{,}1+0{,}3)+5^2(0{,}2+0{,}1)-(2{,}3)^2=3{,}81.$

$\mu_{xy}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}x_i\,y_j\,p_{ij}-M(X)\cdot M(Y)=x_1y_1p_{11}+x_1y_2p_{12}+x_1y_3p_{13}+$

$$+ x_2 y_1 p_{21} + x_2 y_1 p_{22} + x_2 y_3 p_{23} - M(X)\cdot M(Y) =$$
$$= 1\cdot 0\cdot 0{,}1 + 1\cdot 2\cdot 0{,}1 + 1\cdot 5\cdot 0{,}2 + 2\cdot 0\cdot 0{,}2 + 2\cdot 2\cdot 0{,}3 + 2\cdot 5\cdot 0{,}1 - 1{,}6\cdot 2{,}3 =$$
$$= 3{,}4 - 3{,}68 = -0{,}28.$$
$$r_{xy} = \frac{-0{,}28}{\sqrt{0{,}24\cdot 3{,}81}} \approx -0{,}29.$$

Пример 2.54. Пусть область D возможных значений двумерной случайной величины – треугольник с границами $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1$. Плотность распределения имеет вид $f(x, y) = 4\left(x + y^2\right)$. Найдем числовые характеристики системы.

Решение. $M(X) = \iint\limits_D x\cdot f(x, y)\,dx\,dy =$



$$= 4\int_0^1 x\cdot dx \int_0^{1-x} \left(x + y^2\right)dy =$$
$$= 4\int_0^1 x\cdot dx\left(xy + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1-x} =$$
$$= 4\int_0^1 x\left(x(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3}\right)dx =$$
$$\frac{4}{3}\int_0^1 \left(x - x^4\right)dx = \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}.$$

$$M(Y) = \iint\limits_D y\cdot f(x, y)\,dx\,dy = 4\int_0^1 y\,dy \int_0^{1-y} \left(x + y^2\right)dx =$$
$$= 4\int_0^1 y\,dy\left(\frac{x^2}{2} + y^2\cdot x\right)\Bigg|_0^{1-y} = 2\int_0^1 \left(y - 2y^2 + 3y^3 - 2y^4\right)dy =$$
$$= 2\cdot\left(\frac{y^2}{2} - \frac{2y^3}{3} + \frac{3y^4}{4} - \frac{2y^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{2}{5}\right) = \frac{11}{30}.$$

$$D(X) = \iint\limits_D x^2\cdot f(x, y)\,dx\,dy - [M(X)]^2 =$$
$$= 4\int_0^1 x^2\,dx \int_0^{1-x} \left(x + y^2\right)dy - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \ldots = \frac{14}{225}.$$

$$D(Y) = \iint\limits_D y^2\cdot f(x, y)\,dx\,dy - [M(Y)]^2 =$$
$$= 4\int_0^1 y^2\,dy \int_0^{1-y} \left(x + y^2\right)dx - \left(\frac{11}{30}\right)^2 = \ldots = \frac{59}{900}.$$

$$\mu_{xy} = \iint\limits_D x\,y\,f(x,y)\,dx\,dy - M(X)\cdot M(Y) =$$

$$= \iint\limits_D x\,y\left(x + y^2\right)dx\,dy - M(X)\cdot M(Y) =$$

$$= 4\int\limits_0^1 x\,dx \int\limits_0^{1-x} y\left(x + y^2\right)dy - \frac{2}{5}\cdot\frac{11}{30} = \int\limits_0^1 x\left[2x(1-x)^2 + (1-x)^4\right]dx - \frac{2}{5}\cdot\frac{11}{30} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x\right)dx - \frac{22}{150} = -\frac{7}{150}.$$

$$r_{xy} = -\frac{7}{50} : \sqrt{\frac{14}{225}\cdot\frac{59}{900}} \approx -0{,}73,$$

что показывает, что между случайными величинами X и Y существует отрицательная линейная зависимость, то есть при увеличении одной из них другая имеет некоторую тенденцию уменьшаться.

2.13. УСЛОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И УСЛОВНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СОСТАВЛЯЮЩИХ ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. РЕГРЕССИЯ

Пусть составляющие X и Y дискретны и их возможные значения: $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Условным распределением составляющей X при $Y = y_j$ называют совокупность условных вероятностей $p(x_1/y_j), p(x_2/y_j), \ldots, p(x_n/y_j)$, вычисленных в предположении, что событие $Y = y_j$ (j имеет одно и то же значение при всех значениях X) уже наступило. Аналогично определяется условное распределение составляющей Y.

Условные вероятности вычисляются по формулам

$$p(x_i/y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}; \quad p(y_j/x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}.$$

Пусть (X, Y) – непрерывная двумерная случайная величина с плотностью распределения $f(x, y)$.

Условной плотностью $\varphi(x/y)$ распределения составляющей X при заданном значении $Y = y$ называют

$$\varphi(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}.$$

Аналогично определяется условная плотность распределения составляющей Y при заданном значении $X = x$

$$\psi(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy}.$$

Запишем последние формулы в виде

$f(x,y)=\varphi(x/y)\cdot f_2(y);\ f(x,y)=f_1(x)\cdot\psi(y/x)$

Если X и $Y-$ независимые случайные величины, то $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$, то есть для независимых случайных величин условные плотности распределения равны их безусловным плотностям $f_1(x)=\varphi(x/y);$ $f_2(y)=\psi(y/x).$

Условным математическим ожиданием одной из случайных величин, входящих в систему (X,Y), называется ее математическое ожидание, вычисленное в предположении, что другая случайная величина приняла определенное значение, то есть найденное на основе условного закона распределения.

Для дискретных величин

$$M(Y/X=x_i)=\sum_{j=1}^{m}y_j\cdot p(y_j/x_i),$$

$$M(X/Y=y_j)=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot p(x_i/y_j)$$

Для непрерывных величин

$$M(Y/X=x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}y\cdot\psi(y/x)dy,$$

$$M(X/Y=y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\cdot\varphi(x/y)dx.$$

Условное математическое ожидание $M(Y/X=x)$ есть функция от x: $M(Y/X=x)=f(x)$, которую называют **функцией регрессии** Y на X. Аналогично функция регрессии Y на X - это функция $M(X/Y=y)=\varphi(y)$. Графики этих функций называются линиями регрессии или «кривыми регрессии».

Примеры решения задач

Пример 2.55. Задана дискретная двумерная случайная величина (X,Y).

Y \ X	2	5	8
0,4	0,15	0,3	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

Найти: а) условный закон распределения составляющей X при условии $Y=0{,}4;$

б) условный закон распределения Y при условии $X=5.$

Решение. Найдем условные вероятности

а) $\{P(X=2/Y=0{,}4)=\dfrac{0{,}15}{0{,}15+0{,}3+0{,}35}=\dfrac{3}{16}$;

$P(X=5/Y=0{,}4)=\dfrac{0{,}3}{0{,}15+0{,}3+0{,}35}=\dfrac{3}{8}$;

$P(X=8/Y=0{,}4)=\dfrac{0{,}35}{0{,}15+0{,}3+0{,}35}=\dfrac{7}{16}$.

Тогда искомый условный закон распределения X:

X	2	5	8
$P(X/Y=0{,}4)$	3/16	3/8	7/16

б) $P(Y=0{,}4/X=5)=\dfrac{0{,}3}{0{,}3+0{,}12}=\dfrac{5}{7}$;

$P(Y=0{,}8/X=5)=\dfrac{0{,}12}{0{,}3+0{,}12}=\dfrac{2}{7}$.

Y	0,4	0,8
$P(Y/X=5)$	5/7	2/7

Пример 2.56.

X \ Y	0	3	5
1	0	0,05	0,1
5	0,1	0,1	0,15
12	0,1	0,15	0,25

Построить линии регрессии Y на X.

Решение. Найдем условные законы Y при $X=1$, $X=5$ и $X=12$.

$P(Y=0/X=1)=\dfrac{0}{0+0{,}05+0{,}1}=0$;

$P(Y=3/X=1)=\dfrac{0{,}05}{0{,}15}=\dfrac{1}{3}$; $P(Y=5/X=1)=\dfrac{0{,}1}{0{,}15}=\dfrac{2}{3}$;

Y	0	3	5
$P(Y/X=1)$	0	1/3	2/3

$M(Y/X=1)=3\cdot\dfrac{1}{3}+5\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{13}{3}$.

$P(Y=0/X=5)=\dfrac{0{,}1}{0{,}1+0{,}1+0{,}15}=\dfrac{2}{7}$;

$P(Y=3/X=5)=\dfrac{0{,}1}{0{,}35}=\dfrac{2}{7}$; $P(Y=5/X=5)=\dfrac{0{,}15}{0{,}35}=\dfrac{3}{7}$.

Y	0	3	5
$P(Y/X=5)$	2/7	2/7	3/7

$$M(Y/X=5)=3\cdot\frac{2}{7}+5\cdot\frac{3}{7}=3.$$

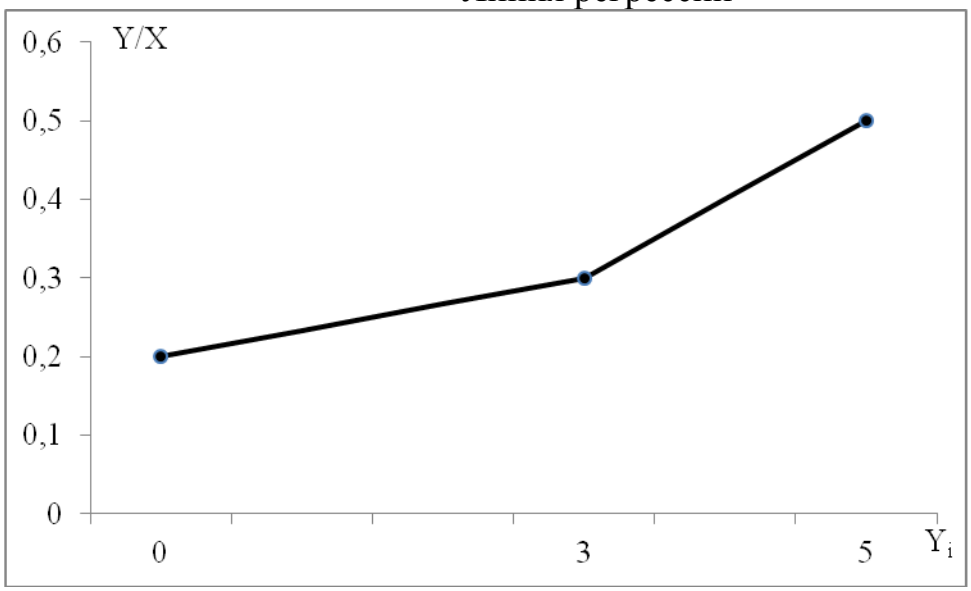
$$P(Y=0/X=12)=\frac{0{,}1}{0{,}1+0{,}15+0{,}25}=\frac{1}{5};$$

$$P(Y=3/X=5)=\frac{0{,}15}{0{,}5}=\frac{3}{10};\qquad P(Y=5/X=12)=\frac{0{,}25}{0{,}5}=\frac{1}{2}.$$

Y	0	3	5
$P(Y/X=12)$	1/5	3/10	1/2

$$M(Y/X=12)=3\cdot\frac{3}{10}+5\cdot\frac{1}{2}=\frac{34}{10}.$$

Линия регрессии



Пример 2.57. Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y).

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{x^2+2xy+5y^2}{2}}.$$

Найти: а) плотности распределения составляющих; б) условные плотности распределения составляющих.

Решение. а) Найдем плотность распределения составляющей X:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2+2xy+5y^2}{2}}dy.$$ Вынесем за знак интеграла множитель $e^{\frac{-x^2}{2}}$, не зависящий от переменной интегрирования y, и дополним оставшийся показатель степени до полного квадрата, тогда

$$f_1(x)=\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}\,e^{\frac{x^2}{10}}}{\pi}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\sqrt{\frac{5}{2}}y+\sqrt{\frac{1}{10}}x\right)^2}\cdot d\left(\sqrt{\frac{5}{2}}y+\sqrt{\frac{1}{10}}x\right).$$

Учитывая, что интеграл Пуассона $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}\,du=\sqrt{\pi}$, получаем

$$f_1(x)=\sqrt{\frac{2}{5\pi}}\;e^{-0,4x^2}.$$

Аналогично найдем плотность распределения составляющей Y:

$$f_2(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\;e^{-2y^2}.$$

б) Найдем условные плотности распределения составляющих.

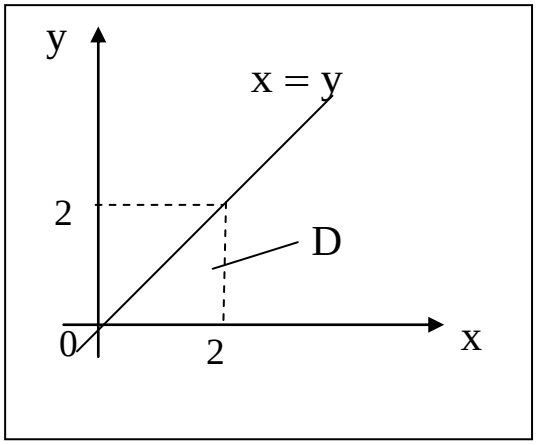
$$\varphi(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{e^{-\frac{x^2+2xy+5y^2}{2}}}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\,e^{-2y^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2+2xy+y^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+y)^2}{2}};$$

$$\psi(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{e^{-\frac{x^2+2xy+5y^2}{2}}}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{5\pi}}{\sqrt{2}\,e^{-0,4x^2}}=\sqrt{\frac{5}{2\pi}}\,e^{-0,1(x+5y)^2}.$$

Пример 2.58. Задана плотность распределения двумерной случайной величины

$$(X,Y):f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{при } (x,y)\in D,\\ 0, & \text{при } (x,y)\notin D,\end{cases}$$

где $D=\{(x,y):x\ge y;\ y\ge 0;\ x\le 2\}$.



Найти линию регрессии СВ X на СВ Y.

Решение. Найдем условную плотность распределения X на Y.

Из области D видно, что $y\le x\le 2$

$$\varphi(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{1}{2}:\left[\int_y^2\frac{1}{2}\,dx\right]=\;=\frac{1}{2}:\left[\left(\frac{1}{2}x\right)\Big|_y^2\right]=\frac{1}{2-y}.$$

$$M(X/Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot\varphi(x/y)dx=\int_y^2\frac{x\,dx}{2-y}=\frac{1}{2-y}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_y^2=$$

$$=\frac{1}{2(2-y)}\cdot(4-y^2)=\frac{2+y}{2}$$

.2.14. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Неравенство Чебышева. Для любой случайной величины X, имеющей математическое ожидание m и дисперсию σ^2, справедливы неравенства:

$$P\{|X-m|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \text{ или } P\{|X-m|\leq\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Теорема Чебышева. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n -$ попарно независимые случайные величины с конечными математическими ожиданиями, дисперсии которых ограничены одним и тем же числом C, то есть

$D(X_1)\leq C,\ D(X_2)\leq C, \ldots, D(X_n)\leq C, \ldots,$ то

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right\}=1.$$

Если математическое ожидание всех случайных величин равны, то есть

$M(X_1)=M(X_2)=\ldots=M(X_n)=\ldots=m,$ то

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-m\right\}=1.$$

Замечание. Для случайных величин с равными математическими ожиданиями теорему Чебышева можно записать в виде

$$P\left\{\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-m\right|<\varepsilon\right\}>1-\frac{C}{n\varepsilon^2}$$

с равными дисперсиями σ^2

$$P\left\{\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-m\right|<\varepsilon\right\}>1-\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Теорема Бернулли. Пусть $X-$ число «успехов» в схеме Бернулли с n испытаниями, $p-$ вероятность «успеха» в одном испытании. Тогда для любого $\varepsilon>0,$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{X}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

Замечание 1. Учитывая замечание к теореме Чебышева теорему Бернулли можно записать

$$P\left\{\left|\frac{X}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}>1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Замечание 2. Так как величина $pq=p(1-p)$ достигает максимума 0,25 при $p=q=0{,}5$, то

$$p\left\{\left|\frac{X}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}>1-\frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Центральная предельная теорема в грубой формулировке выглядит так: если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.

Сформулируем более точно.

Теорема. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n -$ независимые случайные величины с математическими ожиданиями $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и дисперсиями $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$, причем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\left|X_k-m_k\right|^3}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\ldots+\sigma_n^2}}=0,$$

то при $n\to\infty$ закон распределения случайной величины $Y_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$ неограниченно приближается к нормальному.

Примеры решения задач

Пример 2.59. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,05. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время T окажется: а) меньшее двух; б) не меньше двух.

Решение. а) Пусть $X-$ дискретная случайная величина, характеризующая число отказавших элементов за время T. Тогда

$$M(X)=np=10\cdot 0{,}05=0{,}5;\ D(X)=npq=10\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95=0{,}475.$$

Воспользуемся неравенством Чебышева

$$P\{|X-M(X)|<\varepsilon\}=1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2};\ P\{|X-0{,}05|<2\}\ge 1-\frac{0{,}475}{4}=0{,}88.$$

б) События $|X-0{,}5|<2$ и $|X-0{,}5|\ge 2$ противоположны, поэтому $P\{|X-0{,}5|<2\}\le 1-0{,}88=0{,}12$.

Пример 2.60. Гнутая монета подбрасывается 100 раз. Герб выпал 70 раз. Оценим вероятность выпадения герба для этой монеты.

Решение. Возьмем $\varepsilon=0{,}1$. Тогда получим

$P\left\{\left|\frac{70}{100}-p\right|<0{,}1\right\}>1-\frac{1}{4\cdot 100\cdot(0{,}1)^2}=0{,}75$, то есть с вероятностью 0,75 оцениваемое значение p принадлежит интервалу $|0{,}7-p|<0{,}1;$

$-0{,}1 < 0{,}7 - p < 0{,}1;\ 0{,}6 < p < 0{,}8.$

Для $\varepsilon = 0{,}2$ получим $0{,}5 < p < 0{,}9$ с вероятностью не менее 0,9375.

В качестве оценки p берем относительную частоту $\frac{70}{100} = 0{,}7$.

При увеличении числа испытаний n мы будем получать с вероятностью, близкой к единице, все более маленькие интервалы для оценки теоретической вероятности p.

Пример 2.61. По полосе укреплений противника сбрасывается 100 серий бомб. При сбрасывании одной такой серии математическое ожидание числа попаданий равно 2, а среднее квадратическое отклонение числа попаданий равно 1,5.

Найти приближенно вероятность того, что при сбрасывании 100 серий в полосу попадает от 180 до 220 бомб.

Решение. Представим общее число попаданий как сумму чисел попаданий бомб в отдельных сериях:

$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i$, где $X_i -$ число попаданий $i-$ой серии.

Будем считать число $n = 100$ достаточным для того, чтобы можно было применить предельную теорему. Имеем: $M(X) = \sum_{i=1}^{100} m_i = \sum_{i=1}^{100} 2 = 200$;

$D(X) = \sum_{i=1}^{100} D_i = \sum_{i=1}^{100} 1{,}5^2 = 225$. СВ X подчинена нормальному закону распределения.

$$P(180 < X < 220) = \Phi\left(\frac{220-200}{\sqrt{225}}\right) - \Phi\left(\frac{180-200}{\sqrt{225}}\right) =$$

$$= 2\Phi(1{,}33) = 2 \cdot 0{,}4082 \approx 0{,}82.$$

Пример 2.62. Последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ задана законом распределения

X_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
p	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

Применима ли к заданной последовательности теорема Чебышева?

Решение. Проверим конечность математических ожиданий и равномерную ограниченность дисперсий.

$$M(X_n) = -n\alpha \cdot \frac{1}{2n^2} + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + n\alpha \cdot \frac{1}{2n^2} = 0.$$

Таким образом, каждая из случайных величин X_n имеет конечное математическое ожидание.

$$D(X_n) = M(X_n^2) - \{M(X_n)\}^2.$$

X_n^2	$n^2\alpha^2$	0	$n^2\alpha^2$
P	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

$$M(X_n^2) = n^2\alpha^2 \cdot \frac{1}{2n^2} + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + n^2\alpha^2 \cdot \frac{1}{2n^2} = \alpha^2;$$

$$D(X_n) = \alpha^2 - 0^2 = \alpha^2.$$

Так как все дисперсии равны, то они равномерно ограничены числом α^2. Итак, поскольку все требования выполняются, к рассматриваемой последовательности случайных величин теорема Чебышева применима.

Пример 2.63. В кассе учреждения имеется сумма $d = 3500$ (руб.). В очереди стоит $n = 20$ лиц. Сумма X, которую надо выплатить отдельному лицу – случайная величина с математическим ожиданием $m = 150$ (руб.) и средним квадратическим отклонением $\sigma_x = 60$ (руб.).

Найти вероятность того, что суммы d не хватит для выплаты денег всем людям, стоящим в очереди.

Решение. На основании центральной предельной теоремы для одинаково распределенных слагаемых при большом $n (n = 20$ практически можно считать «большим»), случайная величина

$Y = \sum_{i=1}^{20} X_i$, где $X_i -$ сумма, которую надо выплатить $i-$ому лицу, имеет приближенно нормальное распределение с параметрами

$$m_y = 20 \cdot m_x = 3000;\ D_y = \sum_{i=1}^{20} \sigma_x^2 = 20 \cdot 3600;$$

$$\sigma_y = \sqrt{20 \cdot 3600} \approx 268.$$

Суммы Y не хватит, следовательно, $Y > 3500$.

$$P\{Y > 3500\} = \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{3500 - 3000}{268}\right) \approx 0{,}032 \cdot$$

Итак, с вероятностью около 3% имеющейся в кассе суммы не хватит для выплаты всем, стоящим в очереди.

УЧЕБНО - МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

РАЗДЕЛ 13 «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»

3. Материалы для самостоятельной работы студентов

3.1. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Элементы комбинаторики.
2. Предмет теории вероятностей. Случайные события и их виды. Различные подходы к определению вероятности: классический, статистический, геометрический.
3. Алгебра событий.
4. Теорема сложения и умножения вероятностей.
5. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
6. Повторные испытания. Формула Бернулли.
7. Теоремы Лапласа.
8. Формула Пуассона.
9. Понятие случайной величины. Виды случайных величин.
10. Дискретные случайные величины: ряд распределения; функция распределения, числовые характеристики и их свойства.
11. Геометрическое распределение.
12. Гипергеометрическое распределение.
13. Распределение Пуассона.
14. Непрерывные случайные величины. Функция распределения, плотность распределения, их взаимосвязь и свойства.
15. Математическое ожидание и дисперсия.
16. Равномерное распределение.
17. Показательное распределение.
18. Нормальный закон распределения.
19. Вероятность попадания СВ X, распределенной по нормальному закону в интервал (α, β). Правило «3- х σ».
20. Распределения, связанные с нормальным и их основные характеристики.
21. Двумерные случайные величины.
22. Понятие о различных формах закона больших чисел. Центральная предельная теорема Ляпунова.

3.2 ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

3.2.1. Решить комбинаторную задачу.

1. В группе 25 студентов. Сколькими способами можно выбрать старосту, заместителя старосты и профорга?

2. В группе 25 студентов. Сколькими способами можно выбрать актив группы, состоящий из старосты, заместителя старосты и профорга?

3. Сколькими способами можно составить список из 10 человек?

4. Сколькими способами из 15 рабочих можно создать бригады по 5 человек в каждой?

5. Буквы азбуки Морзе образуются как последовательности точек и тире. Сколько букв можно составить, используя для кодировки каждой из букв: а) ровно 5 символов? б) не более пяти символов?

6. Кости для игры в домино метятся двумя цифрами. Кости симметричны, и поэтому порядок чисел не существенен. Сколько различных костей можно образовать, используя числа 0,1,2,3,4,5,6?

7. Сколько различных звукосочетаний можно взять на десяти выбранных клавишах рояля, если каждое звукосочетание может содержать от трех до десяти различных звуков?

8. В вазе стоят 10 красных и 5 розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из вазы пять гвоздик одного цвета?

9. В некоторых странах номера трамвайных маршрутов обозначаются двумя цветными фонарями. Какое количество различных маршрутов можно обозначить, если использовать фонари восьми цветов?

10. Команда компьютера записывается в виде набора из восьми цифровых знаков – нулей и единиц. Каково максимальное количество различных команд?

11. Десять групп занимаются в десяти расположенных подряд аудиториях. Сколько существует вариантов расписания, при которых группы 1 и 2 находились бы в соседних аудиториях?

12. Два почтальона должны разнести 10 писем по 10 адресам. Сколькими способами они могут распределить работу?

13. Замок открывается только в том случае, если набран определенный трехзначный номер. Попытка состоит в том, что набирают наугад три цифры из заданных пяти. Угадать номер удалось только на последней из всех возможных попыток. Сколько попыток предшествовало удачной?

14. Номер автомобильного прицепа состоит из двух букв и четырех цифр. Сколько различных номеров можно составить, используя 30 букв и 10 цифр?

15. У одного студента есть 7 DVD дисков, а у другого – 9 дисков. Сколькими способами они могут обменять 3 диска одного на 3 диска другого?

16. На вершину горы ведут 7 дорог. Сколькими способами турист может два раза подняться на гору и спуститься с нее, если по одной и той же дороге нельзя проходить дважды?

17. У ювелира было 9 разных драгоценных камней: сапфир, рубин, топаз и т.д. Ювелир планировал изготовить браслет для часов из всех имеющихся камней, однако три камня было украдено. Насколько меньше вариантов браслета он может изготовить по сравнению с первоначальными планами?

18. В поезд метро на начальной станции вошли 10 пассажиров. Сколькими способами могут выйти все пассажиры на последующих 6 станциях?

19. За одним столом надо рассадить 5 мальчиков и 5 девочек так, чтобы не было двух рядом сидящих мальчиков и двух рядом сидящих девочек. Сколькими способами это можно сделать?

20. В классе 25 учеников. Верно ли утверждение, что, по крайней мере, у трех из них день рождения в один и тот же месяц?

21. На участке железной дороги расположено 25 станций с билетной кассой в каждой. Касса каждой станции продает билеты до любой другой станции, притом в обоих направлениях. Сколько различных вариантов билетов можно выдать на этом участке?

22. На официальном приеме 50 человек обменялись рукопожатиями. Сколько было сделано рукопожатий?

23. Сколько диагоналей у выпуклого двадцатиугольника?

3.2.2 Решить задачу, используя формулу классической вероятности

1. В урне a белых, b черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар – белый.

2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков четная, причем на грани хотя бы одной из костей появится шестерка.

3. В ящике 50 одинаковых деталей, из них 5 окрашенных. Наудачу вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется окрашенной.

4. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три.

5. Из тщательно перемешанного полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую наудачу извлеченную кость можно приставить к первой, если первая кость: а) оказалась дублем; б) не есть дубль.

6. Задумано двузначное число. Найти вероятность того, что задуманным числом окажется: а) случайно названное число; б) случайно названное число, цифры которого различны.

7. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «ягуар». Ребенок не умеющий читать, рассыпал карточки с буквами и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получится слово «ягуар».

8. В условиях предыдущей задачи найти вероятность, если ребенок играл со словами: а) молоко; б) шалаш.

9. В замке на общей оси пять дисков. Каждый диск разделен на шесть секторов, на которых написаны различные буквы. Замок открывается только в том случае, если каждый диск занимает одно определенное положение относительно корпуса замка. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок можно будет открыть.

10. В мастерскую для ремонта поступили 10 часов. Известно, что 6 штук из них нуждаются в общей чистке механизма. Мастер берет первые попавшиеся 5 часов. Определить вероятность того, что двое из этих часов нуждаются в общей чистке механизма.

11. Из партии, в которой 31 деталь без дефектов и 6 с дефектами, берут наудачу 3 детали. Чему равна вероятность в следующих случаях: а) все три детали без дефектов; б) по крайней мере, одна деталь без дефектов?

12. Восемь различных книг расставляются наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.

13. Библиотечка состоит из десяти различных книг, причем пять книг стоят по 4 рубля каждая, три книги – по одному рублю и две книги – по 3 рубля. Найти вероятность того, что взятые наудачу две книги стоят 5 рублей.

14. Найти вероятность выигрышных комбинаций в популярной спортивной лотерее «5 из 36».

15. Найти вероятность того, что наудачу выбранное двузначное число делится на 8.

3.2.3. Решить задачи, используя формулы расчета геометрической вероятности

1. На отрезок OA длины L числовой оси 0x наудачу поставлена точка $B(x)$. Найти вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA имеет длину меньшую чем $L/3$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

2. После бури на участке между 40-м и 55-м километрами телефонной линии произошел обрыв провода. Какова вероятность того, что разрыв произошел между 50-м и 55-м километрами линии?

3. В круг вписан квадрат. Найти вероятность того, что:

а) точка, брошенная наудачу внутрь круга, окажется и внутри квадрата;

б) из пяти точек, брошенных наудачу внутрь круга, одна окажется внутри квадрата и по одной точке попадет на каждый сегмент.

Предполагается, что вероятность попадания точки на какую-либо часть круга зависит только от площади этой части и пропорциональна ей.

4. Считается равновероятным попадание реактивного снаряда в любую точку площади в 10000 $м^2$. Определить вероятность попадания снаряда в мост, находящийся на этой площади, если его длина 200 м и ширина 10 м.

5. В круге радиуса R проводятся хорды параллельно заданному направлению. Какова вероятность того, что длина наугад взятой хорды не более

R, если равновозможны любые положения точек пересечения хорды с диаметром, перпендикулярным выбранному направлению?

6. Какова вероятность того, что из трех взятых наудачу отрезков длиной не более ℓ можно построить треугольник?

7. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение $x \cdot y$ будет не больше единицы, а частное y/x не больше двух.

8. Внутри квадрата с вершинами (-1,-1),(-1,0),(0,0),(0,-1) наудачу выбирается точка A(x,y). Найти вероятность события "$-0,7 \le \min(x, y) \le -0,3$".

9. Внутри прямоугольника с вершинами (-1,-1),(-1,1),(1,1), (1,-1) наудачу выбирается точка M(x,y). Найти вероятность события "$\max(x, y) \le 0,8$".

10. Внутри квадрата с вершинами (0,0),(0,1),(1,0),(1,1) наудачу выбирается точка R(x,y). Найти вероятность события "$xy \le 0,6$".

11. Внутри круга с центром в точке (0;0) и радиусом 1 наудачу выбирается точка P(x,y). Найти вероятность события "$|x + y| \le 1$".

12. Внутри квадрата с вершинами (0,0),(0,1),(1,0),(1,1) наудачу выбирается точка N(x,y). Найти вероятность события "$x^2 + y^2 \le 0,25$".

13. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма $x + y$ не превышает единицы, а произведение $x \cdot y$ не меньше 0,09.

14. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r < a$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых.

15. На плоскость с нанесенной сеткой квадратов со стороной a наудачу брошена монета радиуса $r < \frac{a}{2}$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из сторон квадрата. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади фигуры и не зависит от ее расположения.

16. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 5 и 10 см соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет также и в кольцо, образованное построенными окружностями. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения.

17. (Задача Бюффона) Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу бросают иглу длины $2\ell\,(\ell < a)$. Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.

18. В партии из 100 деталей отдел технического контроля обнаружил 5 нестандартных деталей. Чему равна относительная частота появления нестандартных деталей?

19. При стрельбе из винтовки относительная частота попадания в цель оказалась равной 0,85. Найти число попаданий, если всего было произведено 120 выстрелов.

3.2.4. Решить задачи, используя теоремы сложения и умножения вероятностей

1. В читальном зале имеется шесть учебников по теории вероятностей, из которых три в переплете. Библиотекарь наудачу взял два учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в переплете.

2. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара будут белыми, если выемку производить: а) с возвращением; б) без возвращения.

3. В мешке смешаны нити, среди которых 30% белых, а остальные – красные. Определить вероятности того, что вынутые наудачу две нити будут а) одного цвета; б) разных цветов.

4. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы за определенный промежуток времени первого, второго и третьего элемента соответственно равны 0,6;0,7;0,8. Найти вероятности того, что за это время безотказно будут работать: а) только один элемент; б) только два элемента; в) все три элемента; г) хотя бы два элемента.

5. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0,4. Произведены три независимых измерения. Найти вероятность того, что только в одном из них допущенная ошибка превысит заданную точность.

6. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равно 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

7. Брошены три игральные кости. Найти вероятности следующих событий: а) на каждой из выпавших граней появится пять очков; б) на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков; в) на двух выпавших гранях появится число очков, равное единице, а на третьей грани – другое число очков; г) на всех выпавших гранях появится разное число очков.

8. Вероятность попадания в мишень стрелком при одном выстреле равна 0,8. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью меньшей 0,4, можно было ожидать, что не будет ни одного промаха?

9. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, хотя бы один раз выпала «шестерка»?

10. Монета бросается до тех пор, пока 2 раза подряд она не выпадет одной и той же стороной. Найти вероятности следующих событий: а)опыт окончится до шестого бросания; б) потребуется четное число бросаний.

11. Числитель и знаменатель рациональной дроби написаны наудачу. Какова вероятность того, что эта дробь несократима на 5?

12. Из цифр 1,2,3,4,5 сначала выбирается одна, а затем из оставшихся четырех – вторая цифра. Предполагается, что все 20 возможных исходов

равновероятны. Найти вероятность того, что будет выбрана нечетная цифра а) в первый раз; б) во второй раз; в) в оба раза.

13. Найти вероятность того, что наудачу взятое натуральное число, не превосходящее 100, будет делиться а) на 2 или на 5; б) и на 2, и на 5.

14. Три команды A_1, A_2, A_3 спортивного общества А состязаются соответственно с тремя командами общества В. Вероятности того, что команды общества А выиграют матчи у команд общества В таковы: при встрече A_1 с B_1 – 0,8; A_2 с B_2 – 0,4; A_3 с B_3 – 0,4. Для победы необходимо выиграть не менее двух матчей из трех (ничьи во внимание не принимаются). Победа какого из обществ вероятнее?

15. Возле остановки останавливаются трамваи маршрутов 2,4,5,9. Для рабочего попутными являются маршруты 5 и 9. Вычислить вероятность того, что к остановке первым подойдет трамвай маршрута попутного для него номера, если по линиям маршрутов №2,4,5,9 курсируют соответственно 15,12,10,13 поездов. Протяженности маршрутов считаются одинаковыми.

16. Вероятность того, что в мужской обувной секции магазина очередной будет продана пара обуви 46-го размера равна 0,01. Сколько должно быть продано пар обуви в магазине, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9 можно было ожидать, что будет продана хотя бы одна пара обуви 46-го размера.

17. В урне имеется пять шаров с номерами от 1 до 5. Наудачу по одному извлекают три шара без возвращения. Найти вероятность следующих событий: а) последовательно появятся шары с номерами 1,4,5; б) извлеченные шары будут иметь номера 1,4,5 независимо от того, в какой последовательности они появились.

18. В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Внутрь круга наудачу брошены четыре точки. Найти вероятности следующих событий: а) все четыре точки попадут внутрь треугольника; б) одна точка попадет внутрь треугольника и по одной точке попадает на каждый «малый» сегмент. Предполагается, что вероятность попадания точки в фигуру пропорциональна площади фигуры и не зависит от ее расположения.

19. Отрезок разделен на три равные части. На этот отрезок наудачу брошены три точки. Найти вероятность того, что на каждую из трех частей отрезка попадет по одной точке. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

20. Три самолета независимо друг от друга производят одиночное бомбометание по некоторой цели. Первый самолет сбрасывает 4 бомбы по 250 кг, второй – 2 бомбы по 500 кг, третий – 1 бомбу в 1000 кг. Вероятность попадания для первого самолета равна 0,2, для второго – 0,3, для третьего – 0,4. Для разрушения цели достаточно попадания одной бомбы весом не менее 500 кг или двух – весом по 250 кг. Найти вероятность разрушения цели.

21. При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, объект обнаруживается с вероятностью p. Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других

циклов сканирования. Найти вероятность того, что при n циклах объект будет обнаружен.

22. Имеется коробка с девятью новыми теннисными мячами. Для игры берут три мяча и после игры их кладут обратно. При выборе мячей новые от использованных не отличают. Какова вероятность того, что после трех игр не останется новых мячей?

23. Слово «лотос», составленное из букв – карточек, рассыпано на отдельные буквы, которые тщательно перемешаны. Из них выбираются последовательно три карточки. Какова вероятность того, что при этом появится слово «сто»?

24. Подбрасываются две игральные кости. Найти вероятность того, что произведение числа очков на первой и второй кости будет четным числом.

25. Вероятность попадания в первую мишень для данного стрелка равна 2/3. Если при первом выстреле зафиксировано попадание, то стрелок получает право на второй выстрел по другой мишени. Вероятность поражения обеих мишеней при двух выстрелах равна 0,5. Определить вероятность поражения второй мишени.

26. На пяти карточках написаны цифры от 1 до 5. Друг за другом вытаскивают три карточки и в порядке поступления записывают число. Вероятность какого события выше: “число меньше 450” или ”число больше 200”?

3.2.5. Решить задачи, используя формулу полной вероятности и формулу Бейеса

1. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму такова: для лыжника – 0,9, для велосипедиста – 0,8 и для бегуна – 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит норму.

2. Из урны, содержащей 5 белых и 3 черных шара, извлекается наудачу один шар и перекладывается в другую урну, которая до этого содержала 2 белых и 7 черных шаров. Цвет перекладываемого шара не фиксируется. Из второй урны наудачу извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар окажется белым?

3. В урну, содержащую n шаров, опущен белый шар, после чего наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).

4. В условиях предыдущей задачи из урны был извлечен белый шар. Найти вероятность того, что в урне было m белых шаров.

5. В пирамиде 5 винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом равна 0,95; для винтовки с обычным прицелом эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень

будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

6. В условиях предыдущей задачи стрелок попал в мишень. Определить вероятность того, что он стрелял а) из винтовки с оптическим прицелом; б) из винтовки с обычным прицелом.

7. Для участия в студенческих отборочных спортивных соревнованиях выделено из первой группы курса 4, из второй – 6, из третьей группы – 5 студентов. Вероятности того, что студент первой, второй и третьей группы попадает в сборную института, соответственно равны 0,9; 0,7 и 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге соревнования попал в сборную. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот студент?

8. Из полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую извлеченную наудачу кость можно приставить к первой.

9. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

10. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. Найти вероятность того, что наудачу выбранная машина потребует заправки.

11. В условиях предыдущей задачи к бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

12. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовлены на отлично, 4 – хорошо, 2 – посредственно, 1 – плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент знает все 20 вопросов, хорошо подготовленный – 16 вопросов, посредственно подготовленный – 10 вопросов и двоечник – 5 вопросов. Вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент подготовлен а) отлично; б) плохо.

13. При отклонении от нормального режима работы автомата срабатывает сигнализатор С-1 с вероятностью 0,8, а сигнализатор С-11 срабатывает с вероятностью 1. Вероятности того, что автомат снабжен сигнализатором С-1 или С-11 соответственно равны 0,6 и 0,4. Получен сигнал о разделке автомата. Что вероятнее: автомат снабжен сигнализатором С-1 или С-11?

14. В каждой из трех урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.

15. Имеется n урн, в каждой из которых a белых и b черных шаров. Из первой урны во вторую перекладывается наудачу один шар, затем из второй в

третью и так далее. Затем из последней урны извлекается один шар. Найти вероятность того, что он белый.

16. По объекту производится три одиночных независимых выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,4; при втором – 0,5; при третьем – 0,7. Для вывода объекта из строя заведомо достаточно трех попаданий, при двух попаданиях он выходит из строя с вероятностью 0,6; при одном – с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов объект будет выведен из строя.

17. Имеются три партии деталей по 20 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 20, 15, 10. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Найти вероятность того, что деталь была извлечена из третьей партии.

18. Три стрелка произвели залп, причем две пули поразили мишень. Найти вероятность того, что третий стрелок поразил мишень, если вероятности попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками соответственно равны 0,6; 0,5 и 0,4.

19. Ребенок, не умеющий читать, рассыпал разрезанное на буквы слово “каракатица”. Какова вероятность того, что, потеряв одну из гласных букв, неизвестно какую именно, и взяв затем, друг за другом 5 букв он составит слово “карат”?

20. В урне 3 белых и 2 черных шара. Два игрока поочередно вынимают из урны по шару, не вкладывая их обратно. Выигрывает тот, кто раньше получит белый шар. Найти вероятность того, что выиграет первый игрок.

21. Для передачи сообщения путем подачи сигналов ”точка” и ”тире” используется телеграфная система. Статистические свойства помех таковы, что искажается в среднем 2/5 сообщений ”точка” и 1/5 сообщений ”тире”. Известно, что среди передаваемых сигналов ”точка” и ”тире” встречаются в отношении 5:3. Определить вероятности того, что при приеме сигналов ”точка” и ”тире” в действительности были переданы эти сигналы.

3.2.6. Решить задачи, используя формулы расчета вероятности при повторных испытаниях

1. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее: а) выиграть одну партию из двух или две партии из четырех? б) выиграть не менее двух партии из четырех или не менее трех партий из пяти? Ничьи во внимание не принимаются.

2. В семье 5 детей. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятности того, что среди этих детей а) два мальчика; б) не более двух мальчиков; в) более двух мальчиков; г) не менее двух и не более трех мальчиков.

3. Произведено 8 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,1. Найти вероятность того, что событие A появится хотя бы 2 раза.

4. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре бывает в среднем 12 дождливых дней. Какова вероятность того, что в следующем году из 8 первых дней сентября 3 окажутся дождливыми?

5. Для прядения поровну смешаны белый и окрашенный хлопок. Какова вероятность среди пяти случайно выбранных волокон смеси обнаружить менее двух окрашенных?

6. Вероятность получения удачного результата при производстве сложного химического опыта равна 2/3. Найти вероятность того, что пять опытов пройдут удачно, если их общее число а) шесть; б) 120.

7. Отрезок AB разделен точкой C в отношении 2:1. На этот отрезок наудачу брошены четыре точки. Найти вероятность того, что две из них окажутся левее точки C и две – правее. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

8. На отрезок AB длины ℓ наудачу брошено пять точек. Найти вероятность того, что две точки будут находиться от точки A на расстоянии, меньшем x, а три – на расстоянии, большем x. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

9. Отрезок разделен на четыре равные части. На отрезок наудачу брошено восемь точек. Найти вероятность того, что на каждую из четырех частей отрезка попадет по две точки. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

10. Монета подбрасывается 10 раз. Определить погрешность локальной теоремы Лапласа при определении вероятностей следующих событий: а) «герб» выпадет 2 раза; б) «герб» выпадет 5 раз.

11. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена: а) ровно 75 раз; б) не менее 75 и не более 90 раз; в) не более 74 раз; г) не менее 75 раз.

12. Из колоды кар (36 листов) наудачу достается одна карта, запоминается и возвращается в колоду, после чего колода перемешивается. Какова вероятность того, что при 10 повторениях опыта «пика» появится 2 раза. Сравнить результаты, полученные по локальной теореме Лапласа и формуле Бернулли.

13. Вероятность появления события в каждом из 21 независимых испытания равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится в большинстве испытаний.

14. Монета брошена $2N$ раз (N велико!). Найти вероятность того, что число выпадений «герба» будет заключено между числами $N-\frac{\sqrt{2N}}{2}$ и $N+\frac{\sqrt{2N}}{2}$.

15. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равно 0,8. Сколько необходимо произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что событие появится не менее 75 раз?

16. Вероятность появления положительного результата в каждом из опытов равна 0,9. Сколько нужно провести опытов, чтобы с вероятностью 0,98 можно было ожидать, что не менее 150 опытов дадут положительный результат?

17. Прядильщица обслуживает 100 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты 0,004. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет на пяти веретенах.

18. Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение одной минуты абонент позвонит на коммутатор равно 0,02. Какое из двух событий вероятнее: в течение одной минуты позвонят 3 абонента или позвонят 4 абонента?

19. Найти среднее число опечаток на странице рукописи, если вероятность того, что страница рукописи содержит хотя бы одну опечатку равна 0,95. Предполагается, что число опечаток распределено по закону Пуассона.

Указание. Задача сводится к отысканию параметра λ из уравнения $e^{-\lambda} = 0{,}05$.

20. Средняя плотность болезнетворных микробов в одном кубическом метре воздуха равна 100. Берется на пробу 2 $дм^3$ воздуха. Найти вероятность того, что в нем будет обнаружен хотя бы один микроб.

21. Тигр-альбинос появляется в природе в среднем один на десять тысяч особей. В год рождается около 500 особей. Какова вероятность появиться в текущем году двум тиграм-альбиносам?

22. В книге, состоящей из 500 страниц, обнаружено 15 опечаток. Какова вероятность обнаружить на странице, открытой наудачу 2 опечатки, если на каждой странице в среднем 1400 знаков?

23. При тестировании 100 дискет Sony обнаружено 30 сбойных кластеров. Какова вероятность купить дискету с 3 сбойными кластерами, если она содержит 2847 кластеров?

24. Морская луна-рыба откладывает $3 \cdot 10^8$ икринок, однако лишь около 10 из них становятся рыбами, остальные погибают от различных причин. Определить вероятность того, что из 10^6 икринок вырастут 2 рыбы.

25. Коккер-спаниель при обследовании багажа на наличие наркотиков ошибается в среднем один раз на 1200 проверок. Какова вероятность двух ошибок собаки в течение дня, если за день проверяется до 800 единиц багажа?

26. Имеется общество из 500 человек. Найти вероятность того, что вероятность рождения у двух человек придется на Новый год. Считать, что вероятность рождения в фиксированный день у каждого члена общества равна 1/365.

27. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету $p = 0{,}01$. Сколько нужно купить билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с вероятностью, не меньшей, чем 0,95?

3.2.7. Решить задачи, используя формулы расчета вероятности для случайных величин

1. В урне 5 белых и 25 черных шаров. Вынули наугад 1 шар. Случайная величина X – число вынутых белых шаров. Требуется:

а) построить ряд распределения СВ X;

б) построить функцию распределения СВ X;

в) найти M(X) и D(X).

2. В партии из шести деталей имеется четыре стандартных. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных. Найти M(X), D(X).

3. Испытывается устройство, состоящее из четырех независимо работающих приборов. Вероятности отказа приборов таковы: $p_1 = 0{,}3;\ p_2 = 0{,}4;\ p_3 = 0{,}5;\ p_4 = 0{,}6$. Найти M(X), D(X) и среднее квадратическое отклонение СВ X – числа отказавших приборов.

4. Случайная величина X может принимать два возможных значения: x_1 с вероятностью 0,3 и x_2 с вероятностью 0,7; причем $x_2 > x_1$. Найти x_1 и x_2, зная, что $M(X) = 2{,}7$ и $D(X) = 0{,}21$.

5. Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины X: $x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 3$, а также известно, что $M(X) = 2{,}3;\ M(X^2) = 5{,}9$. Найти вероятности, соответствующие возможным значениям X.

6. Даны независимые случайные величины X и Y.

X	- 1	0	1
p	0,2	0,5	0,3

Y	2	4
p	0,3	0,7

Найти математическое ожидание и дисперсию следующих случайных величин: а) $X + Y$; б) $2X - 3Y$; в) $X - Y + 5$.

7. Брошены n игральных костей. Случайная величина X – сумма числа очков, которые выпадут на всех гранях. Найти: а) M(X); б) D(X).

8. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равно 0,9. Найти M(X) дискретной случайной величины X – числа партий, в каждой из которых из пяти вынутых на проверку изделия окажется ровно четыре стандартных, если проверке подлежит 50 партий.

9. Вероятность того, что в обувном магазине есть обувь, подходящей для покупателя модели, равна 0,6, а вероятность наличия обуви подходящего размера равна 0,8. Построить функцию распределения случайной величины X –

числа обувных магазинов, которые посетит покупатель, если в городе три магазина.

10. Имеется 6 ключей, из которых только один подходит к замку. Найти закон распределения случайной величины X - числа попыток при открывании замка, если испробованный ключ в последующих попытках не участвует. Найти M(X) и σ(X).

11. Два баскетболиста независимо друг от друга делают по одному броску в одну корзину. Вероятность попадания при одном броске равна 0,6 и 0,9 соответственно. Найти закон распределения случайной величины X – числа попаданий в корзину. Найти M(X) и D(X).

12. Вероятность того, что на АЗС есть в наличии бензин марки Аи-95, необходимый автомобилисту, равна 0,9. Построить функцию распределения случайной величины X – числа АЗС, которые посетит автомобилист, если в городе пять АЗС. Найти M(X), D(X).

13. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ C\cdot x+D, & 2<x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

Найти: а) параметры C и D; б) плотность распределения $f(x)$; в) $P(X<0{,}2)$; г) $P(X<3)$; д) $P(X\ge 3)$; е) $M(X)$; ж) $D(X)$.

14. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний величина X ровно три раза примет значение, принадлежащее интервалу (1/4; 3/4).

15. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана на всей оси $0x$ функцией

$$f(x)=\frac{4C}{e^{x}+e^{-x}}.$$

Найти постоянный параметр C.

16. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}}, & x\in(-3;3)\\ 0, & x\notin(-3;3)\end{cases}.$$

Найти: а) математическое ожидание и дисперсию СВ X; б) установить, что вероятнее: в результате испытания окажется $X<1$ или $X>1$.

17. Функция распределения случайной величины X задана формулой $F(x)=\alpha+\beta\cdot \operatorname{arctg} x$. Найти: а) постоянные α и β; б) плотность распределения; в) вероятность того, что СВ X попадет на отрезок $[-1;1]$; г)математическое ожидание и дисперсию СВ X.

18. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{2}\sin x, & 0<x\le \pi,\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$

а) Построить функцию распределения $F(x)$.

б) Найти вероятность того, что в результате испытания $x\in\left(0;\pi/4\right)$.

19. Среднее квадратическое отклонение каждой из 16 одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин равно 10. Найти среднее квадратическое отклонение среднего арифметического этих величин.

3.2.8. Решить задачи, используя формулы расчета вероятности для дискретных случайных величин и их характеристик

1. Производится бросание игральной кости до первого выпадения шести очков. а) Написать закон распределения случайной величины X – число подбросов; б) Найти вероятность того, что первое выпадение «шестерки» произойдет не позднее второго броска игральной кости.

2. Доказать, что для геометрического распределения $M(X)=\dfrac{1}{p}$; $D(X)=\dfrac{q}{p^2}$.

Указание. $1+2q+3q^2+\ldots+k\,q^{k-1}+\ldots=\dfrac{1}{(1-q)^2}$.

Действительно, $1+q+q^2+\ldots+q^k+\ldots=\dfrac{1}{1-q}$. Продифференцировав обе части, получим требуемое равенство.

3. В шкафу находятся 9 приборов, из них 5 новых и 4 бывших в употреблении. Из шкафа наугад вынимаются 4 прибора. СВ X – число новых приборов среди вынутых. Построить ряд распределения СВ X. Вычислить $M(X), D(X), \sigma(X)$ двумя способами: непосредственно по ряду распределения и по формулам.

4. Поток грузовых железнодорожных составов, прибывающих на сортировочную горку, можно считать простейшим с интенсивностью 4

состав/ч. Найти вероятности того, что за полчаса на горку прибудет: а) ровно один состав; б) хотя бы один состав; в) не менее трех составов.

5. Доказать, что сумма вероятностей числа появлений события в независимых испытаниях, вычисленных по закону Пуассона, равна единице. Предполагается, что испытания производятся бесчисленное количество раз.

Указание. Использовать разложение функции e^x в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

6. Доказать, что для закона Пуассона $M(X) = \lambda;\ D(X) = \lambda$.

3.2.9. Решить задачи, используя формулы расчета вероятности для непрерывных случайных величин и их характеристик

1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной равномерно в интервале (a, b).

2. Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Найти плотность распределения СВ $T-$ времени, в течение которого ему придется ждать поезда; $M(T); D(T); \sigma(T)$. Найти вероятность того, что ждать придется не больше полуминуты.

3. Случайная величина X распределена равномерно на участке (a, b). Найти вероятность того, что в результате опыта она отклонится от своего математического ожидания больше, чем на 3σ.

4. Случайные величины X и Y независимы и распределены равномерно: X - в интервале (a, b), $Y-$ в интервале (c, d). Найти математическое ожидание произведения $X \cdot Y$.

5. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательно распределенной случайной величины.

6. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 8$.

7. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 2$. Найти $P(1 < X < 2)$.

8. Время безотказной работы элемента распределено по показательному закону $f(t) = 0{,}01e^{-0{,}01t}\ (t > 0)$, где $t-$ время, ч. Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно 100 ч.

9. Испытывают три элемента, которые работают независимо один от другого. Длительность времени безотказной работы элементов распределена по показательному закону: для первого элемента $F_1(t) = 1 - e^{-0{,}1t}$; для второго $F_2(t) = 1 - e^{-0{,}2t}$; для третьего элемента $F_3(t) = 1 - e^{-0{,}3t}$. Найти вероятность того, что в интервале времени (0; 5) ч. откажут: а) только один элемент;
б) только два элемента; в) все три элемента.

10. Доказать, что если непрерывная случайная величина распределена по показательному закону, то вероятность того, что X примет значение меньшее математического ожидания $M(X)$, не зависит от величины параметра λ; б) найти вероятность того, что $X > M(X)$.

11. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (15; 25).

12. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 20$ г. Найти вероятность того, что

а) взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10г;

б) из трех независимых взвешиваний ошибка хотя бы одного не превзойдет по абсолютной величине 4г.

13. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $m = 10$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 5$. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадет величина X в результате испытания.

14. Завод изготовляет шарики для подшипников, номинальный диаметр которых равен 10 мм, а фактический диаметр случаен и распределен по нормальному закону с $m = 10$ мм и $\sigma = 0{,}4$ мм. При контроле бракуются все шарики, не проходящие через круглое отверстие с диаметром 10,7 мм и все, проходящие через круглое отверстие с диаметром 9,3 мм. Найти процент шариков, которые будут браковаться.

15. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена нормально с проектной длиной (математическим ожиданием), равным 50 мм. Фактически длина изготовленных деталей не менее 32 и не более 68 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали: а) больше 55 мм; б) меньше 40 мм.

Указание: Из равенства $P(32 < x < 68) = 0{,}9973$ предварительно найти σ.

16. Коробки с шоколадом упаковываются автоматически; их средняя масса равна 1,06 кг. Найти дисперсию, если 5% коробок имеют массу меньше 1 кг. Предполагается, что масса коробок распределена по нормальному закону.

17. Бомбардировщик, пролетевший вдоль моста, длина которого 30 м и ширина 8 м, сбросил бомбы. Случайные величины X и Y (расстояние от вертикальной и горизонтальной осей симметрии моста до места падения бомбы) независимы и распределены нормально со средними квадратическими отклонениями, соответственно равными 6 и 4 м, и математическими ожиданиями, равными нулю. Найти: а) вероятность попадания в мост одной брошенной бомбы; б) вероятность разрушения моста, если сброшены две бомбы, причем известно, что для разрушения моста достаточно одного попадания.

18. В нормально распределенной совокупности 11% значений X меньше 0,5 и 8% значений X больше 5,8. Найти параметры m и σ данного распределения.

19. В нормально распределенной совокупности 25% значений X меньше (-5,38) и 10% значений X больше 4,44. Найти параметры m и σ данного распределения.

20. Масса арбуза некоторого сорта – нормально распределенная случайная величина с m=5 кг и σ=0,5 кг. Какова вероятность того, что в партии весом в 10 т находится не менее 1900 и не более 2100 арбузов?

21. Найти математическое ожидание случайной величины X, которая подчиняется закону распределения Рэлея:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ x\cdot\sigma^{-2}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & \text{при } x > 0 \end{cases},$$

где σ > 0 – параметр.

22. В некоторых странах действует закон о налогообложении, который распространяется на тех частных предпринимателей, годовой доход которых превосходит некоторый установленный законом уровень x_0. Считая, что годовой доход наудачу выбранного лица, облагаемого налогом, является случайной величиной X, распределенной по закону Парето

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x \le x_0 \\ 1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^a, & \text{при } x > x_0 \end{cases},$$

с параметрами a=4, x_0=1000, найти D(X) и сравнить вероятности $P(2000 < X \le 3000)$ и $P(1500 < X \le 2500)$.

23. Найти M(X) случайной величины X, которая подчиняется закону распределения Парето, если ее функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 2 \\ 1-\left(\frac{2}{x}\right)^3, & \text{при } x > 2 \end{cases},$$

и выяснить, вероятность какого события выше P(X<M(X)) или P(X>M(X)).

3.2.10. Решить задачи, используя формулы расчета вероятности для функции одного случайного аргумента

1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
P	0,2	0,7	0,1

Найти закон распределения случайной величины $Y = \sin X$ и ее математическое ожидание.

2. Случайная величина X равномерно распределена в интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Найти плотность распределения $g(y)$ случайной величины $Y = \sin X$.

3. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X: $f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = X^3 + 2$.

4. Ребро куба x измерено приближенно, причем $a \le x \le b$. Рассматривая ребро куба как случайную величину X, распределенную равномерно в интервале (a, b), найти математическое ожидание и дисперсию объема куба Y.

5. Диаметр круга x измерен приближенно, причем $a \le x \le b$. Рассматривая диаметр как случайную величину X, распределенную равномерно в интервале (a, b), найти математическое ожидание и дисперсию площади круга.

6. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Найти плотность распределения $g(y)$ случайной величины $Y = \cos X$.

7. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X, возможные значения которой заключены в интервале $(0; \infty)$. Найти плотность распределения $g(y)$ случайной величины Y, если: а) $Y = e^{-X}$; б) $Y = \ln X$; в) $Y = X^3$; г) $Y = \sqrt{X}$.

3.2.11. Решить задачи, используя формулы расчета вероятности для системы двух случайных величин

1. Два игрока, независимо друг от друга, по два раза выбрасывают игральный кубик. Случайная величина X – число выпадений «шестерки» у первого игрока; Y – число выпадений «шестерки» у второго игрока. Построить матрицу распределения системы случайных величин (X, Y) и законы распределения составляющих. Найти функцию распределения $F(x, y)$.

2. Найти вероятность того, что составляющая X двумерной случайной величины примет значение $X < \frac{1}{2}$ и при этом составляющая Y примет значение

$Y < \frac{1}{3}$, если известна функция распределения системы $F(x,y) = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} 2x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} 3y + \frac{1}{2}\right)$.

3. Найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 1, x = 2, y = 3, y = 5$, если известна функция распределения

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}, & \text{при } x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 0, & \text{при } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

4. Найти плотность распределения системы двух случайных величин по известной функции распределения

$$F(x,y) = \left(1 - e^{-2x}\right) \cdot \left(1 - e^{-3y}\right), \quad x \geq 0, \ y \geq 0.$$

5. Внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x = 0, x = \frac{\pi}{2}; y = 0; \ y = \frac{\pi}{2}$, плотность распределения системы двух случайных величин $f(x,y) = C \cdot \sin(x+y)$; вне прямоугольника $f(x,y) = 0$. Найти: а) величину C; б) функцию распределения системы $F(x,y)$.

6. Задана двумерная плотность вероятности $f(x,y) = \frac{C}{\left(x^2 + y^2 + 1\right)^3}$ системы случайных величин (X, Y). Найти постоянную C.

Указание: Перейти к полярным координатам.

7. В первом квадранте задана функция распределения системы двух случайных величин: $F(x,y) = 1 + 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}$. Найти: а)двумерную плотность распределения системы; б)вероятность попадания случайной точки (X, Y) в треугольник с вершинами $A(1;3); \ B(3;3); \ C(2;8)$.

8. Непрерывная двумерная случайная величина $(X; Y)$ распределена равномерно внутри прямоугольника R, ограниченного абсциссами $(\alpha; \beta)$ и ординатами $(\gamma; \delta)$. Найти: а)двумерную плотность вероятности системы; б)плотности распределения составляющих. Определить, зависимы или независимы случайные величины X и Y.

9. Точка (X, Y), изображающая объект на круглом экране радиолокатора, распределена с постоянной плотностью в пределах круга K радиуса r с центром в начале координат. Записать выражение совместной плотности $f(x,y)$. Найти плотности $f_1(x), f_2(y)$ отдельных величин, входящих в систему (X, Y). Найти вероятность того, что расстояние от точки (X, Y) до центра экрана будет меньше r_1.

3.2.12. Решить задачи, используя формулы расчета числовых характеристик системы двух случайных величин

1. Закон распределения двумерной случайной величины:

X \ Y	0	2
0	0,15	0,25
1	0,2	0,15
2	0,05	0,2

а) Определить закон распределения случайной компоненты X. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

б) Проделать то же самое для случайной компоненты Y.

в) Найти коэффициент корреляции.

2. Бросаются две неразличимые игральные кости. Пусть $X-$ сумма выпавших очков, а $Y-$ разность между большим и меньшим числом очков на костях.

а) Построить двумерный ряд распределения.

б) Определить математическое ожидание и дисперсию компонент.

в) Найти коэффициент корреляции системы (X, Y).

3. Решить предыдущую задачу в предположении, что кости помеченные, а СВ $Y-$ разность очков на костях.

4. Непрерывная двумерная случайная величина (X, Y) распределена равномерно внутри прямоугольника с центром симметрии в начале координат и сторонами $2a$ и $2b$, параллельными координатным осям.

Найти: а) двумерную плотность вероятности системы; б) плотности распределения составляющих; в) показать, что СВ X и $Y-$ независимы и $r_{xy}=0$.

5. Двумерная случайная величина (X, Y) задана плотностью распределения $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{6\pi}, & \text{внутри эллипса } \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\\ 0, & \text{вне этого эллипса.}\end{cases}$

а) Найти плотности распределения составляющих и показать, что X и $Y-$ зависимые.

б) Найти корреляционный момент μ_{xy}.

Указание. Воспользоваться свойством определенного интеграла: если подынтегральная функция нечетна и пределы интегрирования симметричны относительно начала координат, то определенный интеграл равен нулю.

6. Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y): $f(x,y)=\dfrac{1}{2}\cdot\sin(x+y)$ в квадрате

$0 \le x \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2};$ вне квадрата $f(x,y)=0$. Найти математические ожидания и дисперсии составляющих.

7. Плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины $f(x,y)=\begin{cases} k(x+y), & \text{при } (x,y)\in D \\ 0, & \text{при } (x,y)\notin D, \end{cases}$

где $D-$ треугольная область плоскости, координаты точек которых положительны, но лежат ниже прямой $x+y=1$. Определить:

а) нормировочный множитель k;

б) математические ожидания и дисперсии составляющих X и Y;

в) коэффициент корреляции между X и Y;

г) вероятность события $X+Y<\frac{1}{2}$;

д) плотность распределения СВ X.

8. Плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины $f(x,y)=\begin{cases} k\cdot x\cdot y, & \text{при } (x,y)\in D, \\ 0, & \text{при } (x,y)\notin D, \end{cases}$

где $D=\{(x,y):\ 0<x<a \cap 0<y<b\}$. Определить:

а) нормировочный множитель k;

б) математические ожидания и дисперсии X и Y;

в) коэффициент корреляции между X и Y;

г) вероятность $P\left(X<\frac{a}{2}\right)$;

д) функцию распределения случайной величины Y.

9. Независимые случайные величины x_1 и x_2 имеют математические ожидания m_1 и m_2 и дисперсии σ_1^2, σ_2^2 соответственно. Рассмотрим новые случайные величины $Y_1=X_1+X_2$ и $Y_2=X_1-X$. Найти коэффициент корреляции между случайными величинами Y_1 и Y_2.

3.2.13. Решить задачи на условные законы распределения составляющих двумерной случайной величины

1. Задана дискретная двумерная случайная величина (X,Y)

Y \ X	3	6
10	0,25	0,10
14	0,15	0,05
18	0,32	0,13

Найти: а) условный закон распределения Y при условии, что $X=6$; б)построить линию регрессии X на Y.

2. Непрерывная двумерная случайная величина (X, Y) равномерно распределена внутри прямоугольного треугольника с вершинами $O(0;0);\ A(0;8);\ B(8;0)$. Найти: а)двумерную плотность вероятности системы; б) плотности и условные плотности распределения составляющих.

3. Плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) $f(x, y) = Ce^{-x^2-2xy-4y^2}$.

Найти: а) постоянный множитель C; б) плотность распределения составляющих; в) условные плотности распределения составляющих.

4. Двумерная случайная величина (X, Y) задана плотностью распределения $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi r^2} & \text{при } x^2 + y^2 < r^2, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > r^2. \end{cases}$

Найти условные законы распределения вероятностей составляющих.

5. Плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины $f(x, y) = \cos x \cdot \cos y$ в квадрате $0 \le x \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$; вне квадрата $f(x, y) = 0$. Доказать, что X и Y независимые случайные величины. Найти линию регрессии Y на X.

6. Плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины $f(x, y) = \begin{cases} 3(x + y) & \text{при } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{при } (x, y) \notin D, \end{cases}$

где $D = \{(x, y): x \ge 0;\ y \ge 0;\ x + y \le 1\}$.

Найти функцию регрессии X на Y.

3.2.14. Решить задачи на предельные теоремы теории вероятностей

1. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что любая случайная величина X отклонится от своего математического ожидания: а)менее чем на три среднеквадратических отклонения; б)не менее, чем на $3\sigma_x$, в)не менее, чем на $2\sigma_x$.

2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	0,1	0,4	0,6
p	0,2	0,3	0,5

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| < \sqrt{0,4}$.

3. Вероятность появления события в каждом испытании равна $\frac{1}{4}$. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число X появлений события заключено в пределах от 150 до 250, если будет

произведено 800 испытаний. Сравнить с результатом вычисления по интегральной теореме Лапласа.

4. Дано $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 0{,}9$ и $D(X) = 0{,}009$. Используя неравенство Чебышева, найти ε.

5. В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что за время T лампа будет включена, равна 0,8. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и средним числом (математическим ожиданием) включенных ламп за время T окажется: а)меньше трех; б)не меньше трех.

6. Сколько раз необходимо подбросить монету, чтобы вероятность отклонения относительной частоты выпадения «герба» от $\frac{1}{2}$ на величину, не превосходящую 0.1, была бы не менее 0.9?

7. Последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ задана законом распределения

X_n	$-\sqrt{n}$	0	$\sqrt{n}$
P	$\frac{1}{n}$	$1-\frac{2}{n}$	$\frac{1}{n}$

Применимо ли к заданной последовательности теоремы Чебышева?

8. Ответить на вопрос задачи 14.7 для последовательности случайных величин

X_n	$-a$	a
P	$\frac{n}{2n+1}$	$\frac{n+1}{2n+1}$

9. В условиях примера 14.5 определить: какую сумму a нужно иметь в кассе для того, чтобы вероятность того, что ее не хватит для выплаты всем стоящим, стала равна 0,005?

10. Железнодорожный состав состоит из n вагонов; вес каждого вагона в тоннах – случайная величина X с математическим ожиданием m_x и средним квадратическим отклонением σ_x. Число вагонов n - большое (несколько десятков). Локомотив может везти вес не больше q (тонн); если вес состава больше q (тонн), приходится прицеплять второй локомотив. Найти вероятность того, что одного локомотива не хватит для перевозки состава.

ОТВЕТЫ

3.2.1.

1.1. 13800; **1.2.** 2300; **1.3.** 3628800; **1.4.** 126126; **1.5.** а)32; б) 62; **1.6.** 28; **1.7.** 9864000; **1.8.** 253; **1.9.** 64; **1.10.** 256; **1.11.** 725760; **1.12.** 1024; **1.13.** 124; **1.14.** 9000000; **1.15.** 2940 **1.16.** 840; **1.17.** 362160; **1.18.** 60466176; **1.19.** 28800 или14400 или 7200 **1.20.** Да; **1.21** 600 **1.22** 1225; **1.23** 170.

3.2.2.

2.1. $a/(a+b)$; **2.2.** 5/36; **2.3.** 0,1; **2.4.** а)0,384; б)0,096; в)0,008; **2.5.** 2/9; 4/9; **2.6.** 1/90; 1/81; **2.7.** 1/120; **2.8.** 1/120;1/30; **2.9.** $1/6^5$; **2.10.** 5/21; **2.11.** 0,579; 0,9973; **2.12.** $1/4$; **2.13.** $1/3$; **2.14.** $\frac{1}{376992}$; $\frac{155}{376992}$; $\frac{775}{62832}$; **2.15.** 11/90.

3.2.3.

3.1. 2/3; **3.2.** 1/3; **3.3.** а)0,63; **3.4.** 0,2; **3.5.** 0,058 **3.6.** ½; **3.7.** $(1+3\cdot\ln 2)/8\approx 0{,}38$; **3.8.** 0,4 **3.9.** 0,81; **3.10.** $0{,}6\cdot(1-\ln 0{,}6)$; **3.11.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$; **3.12.** $\frac{\pi}{16}$; **3.13.** $\approx 0{,}2$; **3.14.** $\frac{a-r}{a}$; **3.15.** $\frac{(a-2r)^2}{a^2}$; **3.16.** $0{,}75$; **3.17.** $\frac{2\ell}{\pi a}$; **3.18.** 0,05; **3.19.** 102.

3.2.4.

4.1. 0,2; **4.2** $\left(\frac{a}{a+b}\right)^2$; $\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$ **4.3.** 0,58; 0,42; **4.4** 0,188; 0,452; 0,336; 0,788; **4.5.** 0,432; **4.6.** 0,7; **4.7.** $\frac{1}{6^3}; \frac{6\cdot 1}{6^3}=\frac{1}{36}; C_3^2\cdot\left(\frac{1}{6^2}\cdot\frac{5}{6}\right)=\frac{5}{72}; \frac{5}{9}$ **4.8.** $n\ge 5$ **4.9.** 13 раз; **4.10.** 15/16; 2/3; **4.11.** 0,96; **4.12**. 3/5; 3/5; 3/10; **4.14.** Общества A, $P_A=0{,}544>1/2$ **4.15.** 0,46; **4.16** не менее 230 пар; **4.17**.1/60; 0,1; **4.18.** $\left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^4; 4!\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\left(\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{12\pi}\right)^3$; **4.19.** $3!\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3$ **4.20.** $\approx 0{,}759$ **4.21.** $1-(1-p)^n$ **4.22.**5/1764; **4.23.** 1/30**;** **4.24.** 0,75; **4.25.** 0,75; **4.26.** 0,75<0,8.

3.2.5.

5.1. 0,86; **5.2.** (21/80); **5.3.** $\frac{n+2}{2(n+1)}$; **5.4.** $\frac{2(m+1)}{(n+1)(n+2)}$; **5.5.** 0,85; **5.6.** 57/85; 28/85; **5.7.** 18/59;21/59;20/59; **5.8.** 7/18; **5.9.** 0,5; **5.10.** 0,14; **5.11.** 3/7; **5.12.**114/197; 1/591; **5.13.** P(C-1)= 6/11, P(C-11)= 5/11; **5.14.** 0,4; **5.15.** $\frac{a}{a+b}$; **5.16.** 0,458; **5.17.** 2/9; **5.18.** 10/19; **5.19.** 1/1050; **5.20.** 0,7; **5.21.**5/6;6/11.

3.2.6.

6.1. $\frac{1}{2}>\frac{3}{8}; \frac{11}{16}>\frac{1}{2}$; **6.2.** 0,31; 0,48; 0,52; 0,62; **6.3.** 0,19; **6.4**. $\approx 0{,}279$; **6.5.** 3/16; **6.6.** 0,26; 0; **6.7.** $\frac{8}{27}=C_4^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$; **6.8.** $C_5^2\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\left(\frac{\ell-x}{\ell}\right)^3$; **6.9.** $C_8^2\cdot C_6^2\cdot C_4^2\cdot C_2^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^8$; **6.10.** По локальной теореме Лапласа: а) ≈0,0415;

б) ≈0,2523; по формуле Бернулли: а) ≈0,04395; б) ≈0,246; **6.11**. ≈0,04565; ≈0,8882; ≈0,1056; ≈0,8944; **6.12.** ≈0,272 и ≈0,2816; **6.13.** ≈0,95945; **6.14.** ≈0,6826; **6.15.** 100; **6.16.** 177; **6.17.** ≈0,0000572; **6.18.** 0,18; 0,09; **6.19.** 3; **6.20.** ≈0,1813; **6.21.** ≈0,00119; **6.22.** ≈0,00044; **6.23.**≈0,00333; **6.24**.≈0,00054; 6.**25.** ≈0,11409; **6.26.** ≈0,2385.

3.2.7.

7.1.

X	0	1
P	5/6	1/6

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 5/6, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1\end{cases}\quad M(X)=\frac{1}{6};\quad D(X)=0{,}1389.$$

7.2. $M(X)=2;\ D(X)=\frac{2}{5}$; **7.3.** 1,8; 0,94; 0,97; **7.4.** $x_1=2,\ x_2=3$;

7.6. $\begin{pmatrix} M(X+Y)=3{,}5 & M(2X-3Y)=-10 & M(X-Y+5)=1{,}7\\ D(X+Y)=1{,}33 & D(2X-3Y)=9{,}52 & D(X-Y+5)=1{,}33\end{pmatrix}$;

7.7. $\frac{7}{2}n;\ \frac{35}{12}n$; **7.8.** $50\cdot C_5^4\cdot 0{,}9^4\cdot 0{,}1\approx 16$;

7.9.

X	1	2	3
P	0,48	$0{,}52\cdot 0{,}48$	$(0{,}52)^2\cdot 0{,}48+(0{,}52)^3$

7.10.

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

M(X)=3,5; $\sigma(X)=\sqrt{\frac{35}{12}}$;

7.11.

X	0	1	2
P	$0{,}4\cdot 0{,}1$	$0{,}6\cdot 0{,}1+0{,}4\cdot 0{,}9$	$0{,}6\cdot 0{,}9$

M(X)=1,5; D(X)=0,33;

7.12.

X	1	2	3	4	5
P	0,9	0,09	0,009	0,0009	0,0001

M(X)=1,1111; D(X)=0,123;

7.13. $C=0{,}5;\ D=-1;\quad f(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ 0{,}5, & 2<x\le 4;\\ 0, & x>4\end{cases}\quad 0;\ 0{,}5;\ 0{,}5;\ 3;\ \frac{1}{3}$; **7.14.** 0,25; **7.15.** $\frac{1}{2\pi}$;

7.16. 0; 4,5; $P(-3<X<1)=0{,}5+\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{1}{3}\right);\ P(1<X<3)=0{,}5-\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$;

7.17. а)$\alpha=\frac{1}{2};\quad \beta=\frac{1}{\pi};\quad f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)};\quad \frac{1}{2};$ математическое ожидание не существует, а дисперсия бесконечна;

7.18. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sin^2\dfrac{x}{2}, & 0<x\le\pi,\\ 1, & x>\pi\end{cases}$ $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\approx 0{,}146$; **7.19.** 2,5.

3.2.8.

8.3.

X	0	1	2	3	4
P	0,008	0,159	0,476	0,317	0,04

$M(X)=2{,}222$

$D(X)=0{,}619$

8.4. 0,27; 0,865; 0,325.

3.2.9.

9.1. $\dfrac{a+b}{2};\dfrac{(b-a)^2}{12};\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$; **9.2.** $M(T)=1;\quad D(T)=\dfrac{1}{3};\ \dfrac{1}{4};$

9.3. 0; **9.4.** $\dfrac{(a+b)\cdot(c+d)}{4}$; **9.5.** $M(X)=\dfrac{1}{\lambda};\ D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2};\ \sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda};$

9.6. $f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 8e^{-8x}, & x\ge 0;\end{cases}\quad F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-e^{-8x}, & x\ge 0\end{cases}$; **9.7.** 0,117; **9.8.** 0,37;

9.9. 0,292; 0,466; 0,19; **9.10.** $P(X<M(X))=P\left(0<X<\dfrac{1}{\lambda}\right)=\dfrac{e-1}{e};\ \dfrac{1}{e};$

9.11. 0,6826; **9.12.** 0,383; $\approx 0{,}22$; **9.13.** (- 5; 25); **9.14.** 8,02%; **9.15.** 0,0823; 0,0027; **9.16.** 0,00133 кг^2; **9.17.** $P(|X|<15)\cdot P(|Y|<4)=2\Phi(2{,}5)\cdot 2\Phi(1)=0{,}6741;$ $P=1-(1-0{,}6741)^2=0{,}8938;$ **9.18.** m=3, σ=2**;** **9.19.** m= -2, σ=5; **9.20.** ≈0,3863;

9.21. $\sigma\cdot\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$; **9.22.** $D(X)=\dfrac{2}{9}\cdot 10^6$; ≈0,05; ≈0,17; **9.23.** $M(X)=3;$

P(X<M(X))=$1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$; P(X>M(X))= $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$;

3.2.10.

10.1. **10.2**

y	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
p	0,3	0,7

$g(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1,\\ 0, & y\notin(0,1)\end{cases}$

10.3. $g(y)=\dfrac{1}{3\pi\left[(y-2)^{\frac{2}{3}}+(y-2)^{\frac{4}{3}}\right]}$

10.4. $M(Y)=\dfrac{(b+a)(b^2+a^2)}{4}$; $D(Y)=\dfrac{b^7-a^7}{7(b-a)}-\left[\dfrac{(b+a)(b^2+a^2)}{4}\right]^2$

10.5. $M\left(\dfrac{\pi X^2}{4}\right)=\dfrac{\pi(b^2+ab+a^2)}{12}$; $D\left(\dfrac{\pi X^2}{4}\right)=\dfrac{\pi^2}{720}(b-a)^2\cdot(4b^2+7ab+4a^2)$

10.7. а) $g(y)=\dfrac{1}{y}\cdot f\left[\ln\left(\dfrac{1}{y}\right)\right]$; б) $g(y)=e^y f(e^y),\ (-\infty<y<\infty)$;

в) $g(y)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}\cdot f(\sqrt[3]{y}),\ 0<y<\infty$; г) $g(y)=2y\cdot f(y^2),\ 0<y<\infty$

3.2.11.

11.2. $P\left(X<\dfrac{1}{2};Y<\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{9}{16}$; **11.3.** $\dfrac{3}{128}$; **11.4.** $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}=6e^{(-2x-3y)}$;

11.5. $C=0{,}5;\ F(x,y)=0{,}5[\sin x+\sin y-\sin(x+y)]\ \left(0\le x\le\dfrac{\pi}{2};0\le y\le\dfrac{\pi}{2}\right)$;

11.6. $2/\pi$; 11.7. $f(x,y)=\begin{cases}\ln^2 2\cdot 2^{-x-y}, & x\ge 0;\ y\ge 0\\ 0, & x<0 \text{ или } y<0\end{cases}$; $P=\dfrac{135}{2^{12}}$;

11.8. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(\beta-a)(\delta-\gamma)}, & \text{при } (x,y)\in R,\\ 0, & \text{при } (x,y)\notin R,\end{cases}$ $f_1=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-a}, & \text{при } x\in(\alpha,\beta)\\ 0, & \text{при } x\notin(\alpha,\beta)\end{cases}$

$f_2=\begin{cases}\dfrac{1}{\delta-\gamma}, & \text{при } y\in(\gamma,\delta),\\ 0, & \text{при } y\notin(\gamma,\delta),\end{cases}$ $X, Y-$ независимы, так как $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2}, & \text{при } x^2+y^2\le r^2\\ 0, & \text{при } x^2+y^2>r^2\end{cases}$$

11.9.

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}, & \text{при } |x|<r,\\ 0, & \text{при } |x|\ge r,\end{cases}\qquad f_2(y)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}, & \text{при } |y|<r,\\ 0, & \text{при } |y|\ge r,\end{cases}$$

$$P\left\{\left(x^2+y^2\right)<r_1^2\right\}=\frac{r_1^2}{r^2}$$

3.2.12.

12.1.

X	0	1	2
P	0,4	0,35	0,25

M(X)=0,85; D(X)=0,6275

Y	0	2
P	0,4	0,6

M(Y)=1,2; D(Y)=0,96

$r_{xy}=0{,}103$

12.2.

Y \ X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1/36	0	1/36	0	1/36	0	1/36	0	1/36	0	1/36
1	0	2/36	0	2/36	0	2/36	0	2/36	0	2/36	0
2	0	0	2/36	0	2/36	0	2/36	0	2/36	0	0
3	0	0	0	2/36	0	2/36	0	2/36	0	0	0
4	0	0	0	0	2/36	0	2/36	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	2/36	0	0	0	0	0

$$M(X)=7;\ M(Y)=\frac{35}{18};\ D(X)=\frac{35}{6};\ D(Y)=\frac{665}{324};\ r_{xy}=0.$$

12.3.

Y \ X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
- 5	0	0	0	0	0	1/36	0	0	0	0	0
- 4	0	0	0	0	1/36	0	1/36	0	0	0	0
- 3	0	0	0	1/36	0	1/36	0	1/36	0	0	0
- 2	0	0	1/36	0	1/36	0	1/36	0	1/36	0	0
-1	0	1/36	0	1/36	0	1/36	0	1/36	0	1/36	0

0	1/36	0	1/36	0	1/36	0	1/36	0	1/36	0	1/36
1	0	1/36	0	1/36	0	1/36	0	1/36	0	1/36	0
2	0	0	1/36	0	1/36	0	1/36	0	1/36	0	0
3	0	0	0	1/36	0	1/36	0	1/36	0	0	0
4	0	0	0	0	1/36	0	1/36	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1/36	0	0	0	0	0

$M(X)=7;\ M(Y)=0;\ D(X)=D(Y)=\frac{35}{6};\quad r_{xy}=0.$

12.4.

$$а)\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4ab}; & -a\le x\le a;\ -b\le y\le b,\\ 0, & |x|>a \text{ или } |y|>b\end{cases}$$

$$б)\ f_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{2a}, & \text{при } |x|\le a,\\ 0, & \text{при } |x|>a.\end{cases}\qquad в)\ f_2(y)=\begin{cases}\frac{1}{2b}, & \text{при } |y|\le b,\\ 0, & \text{при } |y|>b.\end{cases}$$

12.5. $f_1(x)=\frac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}$, $f_2(y)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-y^2}$ внутри эллипса и $f_1(x)=0,\ f_2(y)=0$ вне его;

$f(x,y)\ne f_1(x)f_2(y)\Rightarrow X,Y-$зависимые СВ; $\mu_{x,y}=0$

12.6. $M(X)=M(Y)=\frac{\pi}{4};\ D(X)=D(Y)=\frac{\pi^2+8\pi-32}{16}.$

12.7.

$k=3;\ M(X)=M(Y)=\frac{3}{8};D(X)=D(Y)=\frac{19}{320};$

$$r_{xy}=-\frac{13}{19};\ \frac{1}{8};\ f_1(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0\\ 3\cdot\frac{1-x^2}{2} & \text{при } 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{при } x>1\end{cases}$$

12.8. $k=\frac{4}{a^2b^2};\ M(X)=\frac{2a}{3};\ M(Y)=\frac{2b}{3};\ D(X)=\frac{a^2}{18};\ D(Y)=\frac{b^2}{18};$

$$r_{xy}=0;\ \frac{1}{4};\ f_2(y)=\begin{cases}\frac{y^2}{b^2} & \text{при } 0\le y\le b\\ 0 & \text{при } y<0 \text{ или } y>b\end{cases}$$

3.2.13.

13.3 $C=\frac{\sqrt{3}}{\pi};\ f_1(x)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}e^{-0,75x^2};\ f_2(y)=\sqrt{\frac{3}{\pi}}\ e^{-3y^2};$

$$\varphi(x/y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x+y)^2};\quad \psi(y/x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-0,25(x+4y)^2}.$$

13.4. $\varphi(x/y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}} & \text{при } |x|<\sqrt{r^2-y^2},\\ 0 & \text{при } |x|>\sqrt{r^2-y^2}.\end{cases}$ $\psi(y/x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}} & \text{при } |y|<\sqrt{r^2-x^2},\\ 0 & \text{при } |y|>\sqrt{r^2-x^2}.\end{cases}$

13.6. $M(X/Y=y)=\dfrac{(1-y)(y+2)}{3(y+1)},\qquad (0\le y\le 1)$

3.2.14.

14.1. $\frac{8}{9};\frac{1}{9};\frac{1}{4}$; **14.2.** $\ge 0{,}909$; **14.3.** $\ge 0{,}94;\ 0{,}999936$; **14.4.** 0,3 **14.5.** $\ge 0{,}64;\le 0{,}36$ **14.6.** 250 и более раз; **14.7.** Применима; **14.9.** 3691; **14.10.** $P\{Q>q\}=0{,}5-\Phi\left(\dfrac{q-n\cdot m_x}{\sqrt{n}\,\sigma_x}\right)$

3.3 РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание № 1

1.1 – 1.10

Среди n лотерейных билетов k выигрышных. Наудачу взяли m билетов. Определить вероятность того, что среди них ℓ выигрышных

N п/п	n	k	m	ℓ
1	12	4	5	2
2	12	3	8	2
3	12	5	8	3
4	11	7	5	3
5	11	8	4	3
6	11	7	5	2
7	10	6	5	3
8	10	7	5	3
9	10	6	3	2
10	10	6	4	2

1.11 – 1.20

В группе из n студентов, среди которых k девушек, выбирается делегация из m человек. Найти вероятность того, что в делегации окажется не более одной девушки.

N п/п	n	k	m
11	10	5	3
12	10	3	5
13	10	7	3
14	10	4	4
15	12	7	4
16	11	5	4
17	11	4	3
18	11	7	3
19	12	6	3
20	12	5	4

1.21 – 1.30

В коробке n шаров, из них k белых. Наугад один за другим вынимают m шаров. Найти вероятность того, что среди них как минимум ℓ белых.

N п/п	n	k	m	ℓ
21	11	8	6	5
22	11	5	5	4
23	12	7	6	5
24	10	6	6	5

25	10	5	4	3
26	12	6	4	3
27	12	8	5	4
28	11	6	4	3
29	10	7	5	4
30	12	5	5	4

Задание № 2

2.1. Среди кандидатов в студенческий совет факультета 3 первокурсника, 5 второкурсников и 7 третьекурсников. Из этого состава наудачу выбирают 5 человек. Найти вероятность следующих событий: $A=\{$будут выбраны одни третьекурсники$\}$; $B=\{$все первокурсники попадут в эту группу$\}$; $C=\{$не будет выбрано ни одного второкурсника$\}$.

2.2. В кармане имеется 12 монет достоинством 10 и 50 коп. (на ощупь неразличимых). Известно, что десятикопеечных втрое больше, чем пятидесятикопеечных. Какова вероятность того, что среди трех вынутых монет пятидесятикопеечных окажется не меньше десятикопеечных монет.

2.3. Наудачу взятый телефонный номер состоит из 5 цифр. Как велика вероятность, что в нем: 1) все цифры различные; 2) все цифры нечетные?

2.4. В лифт семиэтажного дома сели 3 пассажира. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что все вышли на разных этажах.

2.5. Пять мячей, пронумерованных цифрами от 1 до 5, положены в ящик, после чего они вынимаются один за другим случайным образом. Какова вероятность того, что их будут вынимать в порядке возрастания номеров?

2.6. Наудачу выбирается пятизначное число. Найти вероятность того, что число состоит из нечетных цифр.

2.7. В партии из 100 бурильных труб содержится 5% бракованных. Определить вероятность того, что среди выбранных 5 труб большинство окажется небракованных.

2.8. В классе из 30 учеников на контрольной работе 6 учеников получили оценку «отлично», 10 учеников – «хорошо», 9 учеников – «удовлетворительно». Какова вероятность того, что все три ученика, вызванные к доске, имеют неудовлетворительные оценки по контрольной работе?

2.9. 25 экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Экзаменующийся студент может ответить только на 45 вопросов. Определить вероятность того, что вытянутый им билет состоит из подготовленных вопросов.

2.10. Четырехтомное сочинение расположено на полке в случайном порядке. Найти вероятность того, что тома стоят в должном порядке справа налево или слева направо.

2.11. В урне четыре белых и пять красных шаров. Из урны наугад один за другим вынимают все находящиеся в ней шары и, не глядя, откладывают в сторону. Найти вероятность того, что последний вынутый шар белый.

2.12. В группе 6 человек владеют английским языком, двое – немецким, 3 – французским и четыре не знают иностранных языков. Для поездки выбираются 3 человека. Найти вероятность того, что только один из выбранных не владеет иностранным языком.

2.13. Из партии, содержащей 10 изделий, среди которых 3 бракованных, наудачу извлекают три изделия для контроля. Найти вероятность того, что в полученной выборке ровно два изделия бракованные.

2.14. Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что произведение числа очков 1)не превосходит 6; 2)делится на 6.

2.15. Какова вероятность того, что трехзначное число содержит хотя бы одну нечетную цифру.

2.16. Общество из 10 человек садится на скамейку. Найти вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом.

2.17. В классе 5 парт. Найти вероятность того, что из 10 учеников, рассаживаемых учителем, два друга Олег и Коля не окажутся за одной партой.

2.18. На тренировке детской спортивной школы по футболу роли игроков распределяются случайным образом среди одиннадцати участников. Нужно отобрать одного вратаря, четырех защитников, трех полузащитников и трех нападающих. Какова вероятность того, что Петров и Сидоров 1)будут играть в нападении; 2) получат разные роли, причем один из них будет играть в нападении.

2.19. У сборщика 10 деталей, мало отличающихся друг от друга. Из них 5 – первого вида, 3 – второго и 2 – третьего. Какова вероятность того, что среди шести взятых одновременно деталей три окажутся первого вида, две – второго и одна третьего?

2.20. Пять студентов, среди которых Иванов и Мишин случайным образом занимают очередь за учебниками в библиотеку. Какова вероятность того, что они встанут друг за другом?

2.21. Десять вариантов контрольной работы, написанные каждый на отдельной карточке, распределяются случайным образом среди восьми студентов. Найти вероятность того, что варианты с номерами 1 и 2 останутся неиспользованными.

2.22. На пяти карточках написаны цифры от 1 до 5. Опыт состоит в случайном выборе трех карточек и раскладывании их в порядке поступления в ряд слева направо. Найти вероятность события: появится число 123.

2.23. Театральный кружок из 12 человек посещают три друга: Олег, Игорь и Николай. Для участия в спектакле распределяются роли волка, зайца и лешего. Какова вероятность того, что 1) роль волка достанется Олегу, роль зайца – Игорю, роль лешего – Николаю; 2) все они будут выбраны для игры в спектакле.

2.24. Группа состоит из 3 мужчин и шести женщин. Найти вероятность того, что при случайной группировке по три человека в каждой группе будет мужчина.

2.25. В коробке лежат кубики с номерами 1,2,3,4. Из коробки вынимают один за другим все находящиеся в ней кубики. Определить вероятность того, что кубик с номером 1 появится раньше кубика с номером 4.

2.26. В универсаме 10 отделов, среди которых 2 отдела промышленных товаров. Покупатель намерен посетить три отдела. Найти вероятность того, что он посетит хотя бы один отдел промышленных товаров.

2.27. В одном шкафу 4 чашки белого, 1 чашка синего и 2 чашки красного цвета, в другом – 3 блюдца белого, 2 синего и 1 блюдце красного цвета. Наудачу выбирается 1 блюдце и 1 чашка. Какова вероятность того, что они окажутся одинакового цвета.

2.28. Кодовый замок домофона состоит из 6 кнопок. Известно, что замок открывается при одновременном нажатии трех определенных кнопок. Найти вероятность того, что человек, не знающий кода, откроет дверь.

2.29. В тренировках по парным соревнованиям в беге участвуют 6 учащихся из школы №1, 7 – из школы №2 и 8 – из школы №3. Найти вероятность того, что при жеребьевке в первую пару бегунов войдут два учащихся только из школы №1 или только из школы №2.

2.30. Пусть вероятность того, что покупателю женской обуви потребуется обувь 37 размера равна 0,25. Найти вероятность того, что из трех первых покупателей обувь этого размера 1)ни одному не потребуется, 2)потребуется хотя бы одному.

Задание № 3

3.1-3.5. Найти вероятность того, что сумма двух наудачу взятых положительных правильных дробей не больше a, а модуль их разности – не меньше b.

№ п/п	a	b
1	0,8	0,2
2	0,9	0,1
3	1	1/3
4	0,6	0,2
5	1	1/5

3.6-3.10. Найти вероятность того, что сумма двух наудачу взятых положительных правильных дробей не больше a, а их произведение не меньше b.

№ п/п	a	b
6	0,75	1/8
7	0,95	3/20
8	0,8	3/25
9	1	3/16
10	0,9	9/50

3.11-3.15. Найти вероятность того, что сумма двух наудачу взятых положительных правильных дробей не больше a, а их произведение не больше b.

№ п/п	a	b
11	1	3/16
12	0,9	9/50
13	0,75	1/8
14	0,8	3/25
15	0,95	3/20

3.16-3.20. Найти вероятность того, что сумма двух наудачу взятых положительных правильных дробей не больше a, а модуль их разности не больше b.

№ п/п	a	b
16	1	1/5
17	0,9	0,1
18	0,6	0,2
19	0,8	0,2
20	1	1/3

3.21-3.25. Найти вероятность того, что сумма двух наудачу взятых положительных правильных дробей не меньше a, а их произведение не больше b.

№ п/п	a	b
21	0,95	3/20
22	0,8	3/25
23	0,75	1/8
24	0,9	9/50
25	1	3/16

3.26-3.30. Найти вероятность того, что сумма двух наудачу взятых положительных правильных дробей не меньше a, а их произведение не меньше b.

№ п/п	a	b
26	0,8	3/25
27	0,75	1/8
28	1	3/16
29	0,95	3/20
30	0,9	9/50

Задание № 4

4.1-4.10. Вероятность того, что стрелок поразит мишень равна p. Для выстрела он выбирает одну из винтовок. Первая винтовка заряжена с вероятностью p_1, для второй эта вероятность равна p_2. Найти вероятность того, что мишень будет поражена.

№ п/п	p	p_1	p_2
1	0,9	0,9	0,85
2	0,7	0,7	0,8
3	0,75	0,8	0,7
4	0,8	0,75	0,8
5	0,6	0,85	0,7
6	0,85	0,8	0,9
7	0,95	0,7	0,6
8	0,7	0,9	0,5
9	0,8	0,8	0,6
10	0,9	0,4	0,7

4.11-4.20. В первой урне N1 белых и M1 черных шаров, во второй - N2 белых и M2 черных. Из первой урны во вторую переложили 1 шар, затем из второй урны вынули один шар. Определить вероятность того, что выбранный из второй урны шар – белый.

№ п/п	N1	M1	N2	M2
11	2	3	5	4
12	5	5	4	10
13	4	1	2	5
14	3	2	4	4
15	7	3	5	1
16	6	4	1	7
17	3	7	5	2
18	5	8	2	3
19	1	9	3	3
20	4	6	3	2

4.21 – 4.30. Два автомата производят детали, причем производительность первого в k раз больше производительности второго автомата. Вероятность производства брака для первого автомата равна ℓ_1 %; для второго ℓ_2 %. Наудачу выбирается одна деталь. Определить вероятность того, что деталь небракованная.

№ п/п	k	ℓ_1	ℓ_2
21	3	2	3
22	4	4	1
23	7	1	3
24	9	3	2
25	1	1	4
26	4	2	4
27	7	3	3
28	3	4	2

29	9	2	1
30	1	1	2

Задание № 5

5.1. Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8; 7 – с вероятностью 0,7; 4 – с вероятностью 0,6 и 2 – с вероятностью 0,5.

а) Найти вероятностью того, что наудачу выбранный стрелок не попадет в мишень.

б) Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, но в мишень не попал. К какой группе вероятнее всего принадлежал этот стрелок?

5.2. Вся продукция цеха проверяется двумя контролерами, причем первый контролер проверяет 60% изделий, а второй – остальные. Вероятность того, что первый контролер пропустит нестандартное изделие равна 0,01; второй – 0,02.

а) Определить вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется нестандартным.

б) Взятое наудачу изделие, маркированное как стандартное, оказалось нестандартным. Какой контролер вероятнее всего проверял данное изделие?

5.3. Вероятность того, что утечка газа происходит на подземном участке газопровода равна 0,4; на подводном участке – 0,6. Вероятность обнаружения утечки за время T на подземном участке равна 0,7; на подводном – 0,8.

а) Какова вероятность того, что за время T утечка газа будет обнаружена?

б) За время T утечка газа была обнаружена. Где вероятнее это произошло: на подземном или на подводном участке?

5.4. На спартакиаду прибыло 20 лыжников, 10 гимнастов и 5 шахматистов. Вероятность выполнить квалификационную норму такова: для лыжников – 0,8; для гимнаста – 0,6; для шахматиста – 0,9.

а) Случайно вызывается один спортсмен. Какова вероятность того, что он выполнит норму?

б) Случайно вызванный студент выполнил норму. К какой группе спортсменов он вероятнее всего принадлежал?

5.5. Два охотника одновременно увидели лису и одновременно выстрелили в нее. Каждый из этих охотников на таком расстоянии обычно в одном случае из трех попадает в лису и убивает ее. Определить вероятность того, что лиса не будет убита.

5.6. 90% всходов были признаны здоровыми. Вероятность того, что здоровое растение дает семена, равна 0,8. Вероятность, что больное растение даст семена равно 0,2.

а) Найти вероятность того, что растение, выбранное наугад, даст семена.

б) Выбранное наугад растение не дало семян. Что вероятнее: растение было здоровым или больным?

5.7. Счетчик регистрирует частицы трех типов: A, B и C. Вероятность появления этих частиц соответственно 0,2; 0,3 и 0,5. Частицы каждого из этих типов счетчик улавливает с вероятностями $p_1 = 0{,}8;\ p_2 = 0{,}2;\ p_3 = 0{,}4$.

а) Найти вероятность того, что счетчик зарегистрирует появившуюся частицу.

б) Счетчик отметил частицу. Какого типа вероятнее всего была частица?

5.8. В первой урне три белых и два черных шара, во второй – пять белых и три черных. Из первой и второй урн, не глядя, берут по одному шару и кладут их в третью урну. Шары в третьей урне перемешивают и берут из нее наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

5.9. Программа экзамена содержит 20 различных вопросов, из которых студент знает 15 вопросов. Для успешной сдачи экзамена достаточно ответить на два предложенных вопроса или на 1 из них и дополнительный вопрос. Какова вероятность того, что студент успешно сдаст экзамен?

5.10. Рабочий обслуживает 3 станка, на которых обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для перового станка равна 0,02; для второго – 0,03; для третьего – 0,04. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительность первого станка в 3 раза больше, чем второго, а третьего в 2 раза меньше, чем второго.

а) Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь будет бракованной.

б) Взятая деталь оказалась небракованной. Определить вероятность, что деталь была обработана на третьем станке.

5.11. Имеется 30 ящиков с помидорами. В среднем в каждом ящике 60 томатов. Известно, что в 5, 10, 6 и 9 ящиках содержится соответственно 3, 6, 4 и 5 испорченных помидоров . Из наудачу выбранного ящика вынули 1 помидор.

а) Определить вероятность того, что помидор испорчен.

б) Вынутый помидор оказался испорченным. Что вероятнее: он вынут из ящика с тремя испорченными помидорами или с четырьмя?

5.12. В ящике находится 15 теннисных мячей, из которых 9 новых. Для первой игры наугад берутся два мяча, которые после игры возвращаются в ящик. Для второй игры берут наугад 1 мяч. Найти вероятность того, что мяч для второй игры – новый.

5.13. В правом кармане имеются 3 монеты по 10 копеек и 4 монеты по 50 копеек, а в левом – 6 по 10 копеек и 3 по 50 копеек. Из правого кармана в левый наудачу перекладывают пять монет. После перекладывания из левого кармана извлекается одна монета.

а) Определить вероятность того, что монета достоинством 10 коп..

б) Извлеченная монета оказалась десятикопеечной. Найти вероятность того, что из правого кармана были переложены 2 монеты по 10 коп. и 3 монеты по 50 коп.

5.14. В магазине три вида стиральных машин. Их количества относятся как $5:3:2$. Покупатель может купить стиральную машину I вида с вероятностью 0,1; II-го вида – с вероятностью 0,2; III-го вида – с 0,15.

а) Найти вероятность того, что наудачу выбранный покупатель приобретет стиральную машину.

б) Покупатель приобрел стиральную машину. Какого вида вероятнее всего она оказалась?

5.15. В зоопарке 9 самок утконосов и 7 самок ехидны, относящиеся к отряду сумчатых. Вероятность появления потомства в условиях зоопарка для утконосов равна 0,3; для ехидны – 0,5.

а) Определить вероятность того, что численность сумчатых увеличится.

б) В течение года численность утконосов и ехидн увеличилась на одно потомство. Какая из разновидностей сумчатых, вероятнее всего, дала потомство?

5.16. У рыбака имеется три места для ловли рыбы, которые он посещает с равной вероятностью каждое. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюет с вероятностью 0,5; на втором месте – с вероятностью 0,7; на третьем месте – с вероятностью 0,8. Известно, что рыбак, выйдя на ловлю рыбы три раза закинул удочку, и рыба клюнула только один раз. Найти вероятность того, что он удил рыбу на первом месте.

5.17. Два мальчика одновременно и независимо друг от друга бросали снежки в снежную бабу. Первый мальчик бросил 5 снежков средним весом 0,2 кг .; второй - 3 снежка по 0,3 кг. Вероятность попадания снежка, брошенного первым мальчиком равна 0,8; а для второго – 0,6. Для разрушения снежной бабы достаточно попадания трех снежков по 0,2 кг. или двух – весом по 0,3 кг. Найти вероятность того, что в итоге снежная баба не была разрушена.

5.18. В первой урне 6 белых и 4 черных шара, во второй 3 белых и 2 черных. Из первой урны наудачу извлекают сразу 3 шара и шары того цвета, которые окажутся в большинстве, опускают во вторую урну и тщательно перемешивают. После этого из второй урны наудачу извлекают один шар.

а) Какова вероятность того, что этот шар черный?

б) Был вынут черный шар. Какой набор шаров был вероятнее всего переложен?

5.19. Чтобы получить приз игроку необходимо открыть две двери, каждая из которых закрыта с вероятностью 0,8. Для открывания каждой двери дается по одной попытке.

а) Определить вероятность того, что игрок получит приз, если для первой двери дана связка из шести ключей, для второй – из четырех.

б) Игрок не получил приз. Найти вероятность того, что обе двери были закрыты.

5.20. Ребенок, не умеющий читать, рассыпал разрезанные на буквы слово «биссектриса». Какова вероятность того, что, потеряв одну из гласных букв, неизвестно какую именно, и, взяв затем друг за другом 6 букв, он составит слово «секира»?

5.21. В детской копилке 9 руб. монетами по 1 руб. и 2 руб. Чтобы купить игрушку ребенок разбивает копилку и при этом теряет одну монету. Определить вероятность того, что он сможет купить игрушку стоимостью 8

руб., если считать, что все возможные комбинации монет в копилке равновероятны.

5.22. Первый стрелок делает один выстрел по мишени из винтовки, которая заряжена с вероятностью 0,9; второй стрелок, независимо от первого, делает выстрел по той же мишени из винтовки, которая заряжена с вероятностью 0,7. Вероятность поразить цель при одном выстреле для первого стрелка 0,8; для второго – 0,9. Какова вероятность того, что мишень не будет поражена.

5.23. В первой группе 13 девушек и 12 парней, во второй – 10 девушек и 15 парней. Из первой во вторую и из второй в первую перевели по одному человеку. Определить вероятность того, что наудачу выбранный человек из первой группы окажется парнем.

5.24. Диспетчер с равной вероятностью передает вызов одному из трех таксистов. Вероятность, что первый таксист свободен, равна 0,2; для второго и третьего – эти вероятности соответственно равны 0,4 и 0,7.

а) Какова вероятность того, что вызов будет принят?

б) Вызов был принят. Найти вероятность того, что принял вызов второй таксист.

5.25. В первой коробке лежат карточки, на каждой из которых написаны двузначные числа, кратные трем, во второй – карточки с двузначными числами, которые делятся на 5, а в третьей – которые делятся на 10 . Наудачу выбирают любую коробку и вынимают карточку. Найти вероятность того, что число, написанное на карточке, делится на 15.

5.26. В спичечной коробке 4 неиспользованные и 3 использованные спички. Вынимают сразу 3 спички и из них выбрасывают использованные. Остальные возвращают в коробку. Затем из коробки вынимают 1 спичку.

а) Определить вероятность того, что спичка окажется неиспользованной?

б) Спичка оказалась неиспользованной. Какова вероятность того, что были выброшены 2 использованные спички?

5.27. В автобусе едут 10 пассажиров. На следующей остановке каждый из них выходит с вероятностью 0,1. Кроме того, в автобус с вероятностью 0,2 не входит ни один новый пассажир, с вероятностью 0,8 – входит один новый пассажир. Найти вероятность того, что когда автобус снова тронется в путь после следующей остановки, в нем будет по-прежнему 10 пассажиров.

5.28. Три орудия производят стрельбу по 3 целям. Каждое орудие выбирает себе цель случайным образом и независимо от других. Цель, обстрелянная одним орудием, поражается с вероятностью 0,7. Найти вероятность того, что из 3 целей две будут поражены, а третья – нет.

5.29. Из чисел $1,2,\ldots,100$ одно за другим выбирают наудачу 2 числа. Какова вероятность того, что разность между первым выбранным числом и вторым будет не меньше 25.

5.30. Имеются две партии одинаковых изделий по 15 и 20 штук, причем в первой партии два, а во второй – три бракованных изделия. Наудачу взятое изделие из первой партии переложено во вторую, после чего выбирается

наудачу одно изделие из второй партии. Определить вероятность того, что выбранное изделие является бракованным.

Задание № 6

6.1-6.5.

В коробке n деталей, из них ℓ деталей бракованных. Из коробки вынимается m деталей (без возвращения). Составить ряд распределения СВ X – числа вынутых бракованных деталей. Определить вероятность того, что будет вынуто

а) k бракованных деталей;

б) не более k бракованных деталей;

в) ни одной бракованной детали;

г) хотя бы одна бракованная деталь.

Найти $F(x);\ M(X);\ D(X)$

№ п/п	n	ℓ	m	k
1	12	4	6	3
2	11	5	6	4
3	10	3	6	2
4	11	4	7	3
5	12	5	7	4

6.6-6.10.

Вероятность попадания в мишень стрелка при одном выстреле равна p. Он производит n выстрелов в мишень. За каждый удачный выстрел ему добавляют одно очко, за каждый промах – отнимают одно очко. Составить ряд распределения для случайной величины – числа выбитых очков. Определить вероятность того, что при n выстрелах стрелок выбьет

а) ровно k очков;

б) не более k очков;

в) максимальное число очков;

г) не наберет максимальное число очков.

Найти $F(x);\ M(X);\ D(X)$.

№ п/п	n	p	k
6	6	0,9	0
7	7	0,8	1
8	8	0,8	0
9	7	0,7	3
10	8	0,7	2

6.11-6.15.

Опыт состоит в бросании монеты. Монету бросают n раз. Вероятность выпадения «герба» при одном выбросе равна p. Составить ряд распределения для СВ X – количества заработанных очков, если количество очков в s раз больше количества выпадения «герба» в серии из n бросков. Определить вероятность того, что будет набрано:

а) ровно k очков;

б) не более k очков;

в) максимальное число очков;

г) минимальное число очков.

Найти $F(x);\ M(X);\ D(X)$

№ п/п	n	p	s	k
11	8	0,2	2	6
12	7	0,4	3	9
13	6	0,5	3	6
14	7	0,5	2	8
15	6	0,7	2	8

6.16-6.20.

Вероятность того, что один автобус некоторого маршрута выбьется из графика движения равна p. В рейс вышли n автобусов. Составить ряд распределения СВ X – количества автобусов, которые ходят строго по графику. Определить вероятность того, что по графику ходят:

а) ровно k автобусов;

б) не более k автобусов;

в) все автобусы выбьются из графика;

г) хотя бы один автобус пройдет по расписанию.

Найти $F(x);\ M(X);\ D(X)$

№ п/п	n	p	k
16	7	0,1	3
17	6	0,15	3
18	8	0,1	4
19	6	0,1	2
20	7	0,2	4

6.21-6.25.

Два противника играют в шахматы. Вероятность выиграть партию первым игроком равна p. Составить ряд распределения для СВ X – количества выигранных партий первым игроком в серии из n партий. Определить вероятность того, что он выиграет

а) равно k партий;

б) не более k партий;

в) ни одну партию не выиграет;

г) выиграет хотя бы одну партию.

Найти $F(x),\ M(X),\ D(X)$.

№ п/п	n	p	k
21	7	0,1	3
22	6	0,2	3
23	8	0,3	5
24	8	0,2	4
25	7	0,4	4

6.26-6.30.

Первый стрелок делает n_1 выстрелов в мишень; второй независимо от первого $-n_2$ выстрелов в ту же мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка p_1, для второго $-p_2$. Составить ряд распределения СВ $X-$ суммарного числа попаданий в мишень в данном эксперименте. Определить вероятность того, что в мишень попало

а) ровно k выстрелов;

б) не более k выстрелов;

в) ни одного выстрела;

г) хотя бы один выстрел.

Найти $F(x),\ M(X),\ D(X)$.

№ п/п	n_1	n_2	p_1	p_2	k
26	2	3	0,8	0,7	2
27	3	2	0,9	0,8	3
28	3	1	0,8	0,8	2
29	1	3	0,7	0,9	2
30	2	2	0,9	0,7	3

Задание № 7

7.1-7.5.

По условиям соревнованиям боксер может продолжить участвовать в поединках только в случае выигрыша боя. Вероятность выигрыша боя в одном поединке постоянна и равна p. Составить ряд распределения СВ $X-$ числа поединков, в которых может участвовать боксер в соревнованиях. Найти $M(X);\ D(X)$.

№ п/п	p
1	0,85
2	0,9
3	0,8
4	0,95
5	0,75

7.6-7.10.

Производятся последовательные испытания n приборов на надежность. Надежность каждого из приборов равна p. Каждый последующий прибор испытывается только в том случае, когда предыдущий оказался надежным. Составить ряд распределения СВ X – числа испытанных приборов. Найти $M(X);\ D(X)$.

№ п/п	n	p
6	6	0,9
7	8	0,8
8	7	0,75
9	8	0,9
10	6	0,8

7.11-7.15.

Два стрелка поочередно стреляют по мишени до первого попадания Вероятность промаха для первого стрелка равна p_1, для второго $-p_2$. На обоих было выдано n патронов. Составить ряд распределения CBX – числа израсходованных патронов. Найти $M(X);\ D(X)$.

№ п/п	n	p_1	p_2
11	6	0,1	0,2
12	7	0,2	0,1
13	6	0,3	0,1
14	8	0,1	0,3
15	7	0,2	0,15

7.16-7.20.

В городе n библиотек. Студент в поисках книги обходит библиотеки, пока не найдет необходимый ему материал. Вероятность того, что данная книга не будет найдена, для всех библиотек одинакова и равна p. Составить ряд распределения CBX – количества библиотек, которые обошел студент. Найти $M(X);\ D(X)$.

№ п/п	n	p
16	6	0,1
17	8	0,2
18	9	0,3
19	7	0,15
20	6	0,25

7.21-7.25.

Преподаватель прекращает задавать вопросы студенту, как только студент обнаруживает незнание и неправильно отвечает на вопрос. Вероятность

того, что студент неправильно ответит на вопрос, равна p. Составить ряд распределения СВ X – числа вопросов, которые задает преподаватель студенту. Найти $M(X)$; $D(X)$.

№ п/п	p
21	0,1
22	0,2
23	0,15
24	0,3
25	0,25

7.26-7.30.

Охотник, имеющий n патронов, стреляет в цель до первого попадания (или пока не израсходует все патроны). Вероятность поразить цель при одном выстреле равна p. Составить ряд распределения СВ X – числа израсходованных патронов. Найти $M(X)$; $D(X)$.

№ п/п	n	p
26	7	0,9
27	6	0,8
28	8	0,75
29	7	0,8
30	6	0,7

Задание № 8

8.1-8.5.

Вероятность того, что оператор при наборе текста сделает в символе ошибку равна p. Он набрал текст из N символов. Найти вероятность того, что неправильно будут набраны:

а) ровно k символов;

б) не более k символов;

в) весь текст набран правильно;

г) хотя бы один символ набран неправильно.

Найти $M(X)$; $D(X)$, где СВ X – число неправильно набранных символов.

№ п/п	n	p	k
1	250	0,02	4
2	100	0,02	2
3	1500	0,002	3
4	250	0,004	3
5	400	0,0025	2

8.6-8.10.

Устройство состоит из n элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени T равна p. Найти вероятность того, что за время T откажут:

а) ровно k элементов;

б) не более k элементов;

в) ни один элемент не откажет;

г) хотя бы один элемент откажет.

Найти $M(X)$; $D(X)$, где СВ X – число отказавших элементов.

№ п/п	n	p	k
6	100	0,03	3
7	1000	0,001	3
8	100	0,04	2
9	1000	0,004	2
10	500	0,002	3

8.11-8.15.

Книга издана тиражом n экземпляров. Вероятность того, что книга сброшюрована неправильно, равна p. Найти вероятность того, что тираж содержит:

а) ровно k бракованных книг;

б) не более k бракованных книг;

в) ни одна книга не бракована;

г) хотя бы одна книга сброшюрована неправильно.

Найти $M(X)$; $D(X)$, где СВ X – число бракованных книг.

№ п/п	n	p	k
11	1000	0,003	2
12	2000	0,0005	3
13	1000	0,002	2
14	1000	0,005	3
15	1500	0,001	2

8.16-8.20.

Магазин получил n бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна p. Найти вероятность того, что магазин получит:

а) ровно k разбитых бутылок;

б) не более k разбитых бутылок;

в) все бутылки окажутся неразбитыми;

г) хотя бы одна бутылка разбита.

Найти $M(X)$; $D(X)$, где СВ X – число разбитых бутылок.

№ п/п	n	p	k
16	200	0,005	2
17	600	0,005	3
18	800	0,0025	4
19	1000	0,0015	2
20	1600	0,00125	3

8.21-8.25.

Вероятность того, что наудачу взятый билет окажется выигрышным, равна p. За один день продано n билетов. Найти вероятность того, что среди проданных билетов будут

а) ровно k выигрышных билетов;

б) не более k выигрышных билетов;

в) все билеты невыигрышные;

г) хотя бы один билет выигрышный.

Найти $M(X)$; $D(X)$, где СВ X – число выигранных билетов.

№ п/п	n	p	k
21	500	0,01	2
22	400	0,005	3
23	800	0,005	2
24	1250	0,016	3
25	750	0,004	4

8.26-8.30.

Завод отправил на базу n изделий. Вероятность повреждения изделия в пути p. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено:

а) ровно k изделий;

б) не более k изделий;

в) ни одного изделия не будет повреждено;

г) хотя бы одно изделие повреждено.

Найти $M(X)$; $D(X)$, где СВ X – число поврежденных изделий.

№ п/п	n	p	k
26	4000	0,0005	2
27	1000	0,0015	3
28	2000	0,0015	4
29	2000	0,0025	2
30	3000	0,0005	2

Задание № 9

Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Требуется найти:

1) плотность распределения $f(x)$;
2) математическое ожидание $M(X)$;
3) дисперсию $D(X)$;
4) вероятность попадания СВ X на заданный интервал $(\alpha;\beta)$;
5) построить графики функций $f(x); F(x)$.

9.1. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0; \\ \sin 2x & \text{при} \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{4}; \\ 1 & \text{при} \quad x > \dfrac{\pi}{4}; \end{cases} \qquad \alpha = 0;\ \beta = \dfrac{\pi}{6};$

9.2. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 2; \\ \dfrac{1}{2}(x-2)\cdot(5-x) & \text{при} \quad 2 < x \le 3; \\ 1 & \text{при} \quad x > 3; \end{cases} \qquad \alpha = 2{,}5;\ \beta = 3;$

9.3. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0; \\ \dfrac{1}{2}\cdot(1-\cos x) & \text{при} \quad 0 < x \le \pi; \\ 1 & \text{при} \quad x > \pi; \end{cases} \qquad \alpha = 0;\ \beta = \dfrac{\pi}{2};$

9.4. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0; \\ \dfrac{x^2}{4} & \text{при} \quad 0 < x \le 2; \\ 1 & \text{при} \quad x > 2; \end{cases} \qquad \alpha = 1;\ \beta = 2;$

9.5. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x \le 2;\\ \frac{1}{8}\cdot\left(x^2-2x\right) & \text{при} \quad 2<x\le 4;\\ 1 & \text{при} \quad x>4;\end{cases}$ $\alpha=2;\ \beta=3;$

9.6. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x \le -\frac{\pi}{2};\\ \cos x & \text{при} \quad -\frac{\pi}{2}<x\le 0;\\ 1 & \text{при} \quad x>0;\end{cases}$ $\alpha=-\frac{\pi}{2};\ \beta=-\frac{\pi}{4};$

9.7. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x \le 1;\\ \frac{1}{6}\cdot\left(x^3-x\right) & \text{при} \quad 1<x\le 2;\\ 1 & \text{при} \quad x>2;\end{cases}$ $\alpha=1;\ \beta=\frac{4}{3};$

9.8. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x \le 2;\\ 0{,}5x-1 & \text{при} \quad 2<x\le 4;\\ 1 & \text{при} \quad x>4;\end{cases}$ $\alpha=1;\ \beta=3;$

9.9. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x \le 0;\\ 2\sin x & \text{при} \quad 0<x\le \frac{\pi}{6};\\ 1 & \text{при} \quad x>\frac{\pi}{6};\end{cases}$ $\alpha=0;\ \beta=\frac{\pi}{12};$

9.10. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x \le 10;\\ 0{,}4x-4 & \text{при} \quad 10<x\le 12{,}5;\\ 1 & \text{при} \quad x>12{,}5;\end{cases}$ $\alpha=11;\ \beta=12;$

9.11. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x \le 2;\\ (x-2)^2 & \text{при} \quad 2 < x \le 3;\\ 1 & \text{при} \quad x > 3;\end{cases}$ $\alpha = 1{,}5;\ \beta = 3;$

9.12. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x \le 0;\\ 3x^2 + 2x & \text{при} \quad 0 < x \le \frac{1}{3};\\ 1 & \text{при} \quad x > \frac{1}{3};\end{cases}$ $\alpha = 0;\ \beta = \frac{1}{5};$

9.13. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x \le 0;\\ \frac{9}{20}x^2 - \frac{x^3}{10} & \text{при} \quad 0 < x \le 2;\\ 1 & \text{при} \quad x > 2;\end{cases}$ $\alpha = 0;\ \beta = 1;$

9.14. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x \le 0;\\ \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) & \text{при} \quad 0 < x \le 3;\\ 1 & \text{при} \quad x > 3;\end{cases}$ $\alpha = 0;\ \beta = \frac{3}{2};$

9.15. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x \le \frac{3\pi}{4};\\ \cos 2x & \text{при} \quad \frac{3\pi}{4} < x \le \pi;\\ 1 & \text{при} \quad x > \pi;\end{cases}$ $\alpha = \frac{3}{4}\pi;\ \beta = \frac{5}{6}\pi;$

9.16. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x \le 5;\\ x-5 & \text{при} \quad 5 < x \le 6;\\ 1 & \text{при} \quad x > 6;\end{cases}$ $\alpha = 5{,}2;\ \beta = 5{,}5;$

9.17. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x \le 0;\\ 27x^3 & \text{при} \quad 0 < x \le \dfrac{1}{3};\\ 1 & \text{при} \quad x > \dfrac{1}{3};\end{cases}$ $\alpha = 0;\ \beta = 0{,}5;$

9.18. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x \le -\pi;\\ 1+\cos x & \text{при} \quad -\pi < x \le -\dfrac{\pi}{2};\\ 1 & \text{при} \quad x > -\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$ $\alpha = -\pi;\ \beta = -\dfrac{2\pi}{3};$

9.19. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x \le 0;\\ \dfrac{x^2}{9} & \text{при} \quad 0 < x \le 3;\\ 1 & \text{при} \quad x > 3;\end{cases}$ $\alpha = 0;\ \beta = 1{,}5;$

9.20. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x \le 1;\\ 0{,}5\left(x^2 - x\right) & \text{при} \quad 1 < x \le 2;\\ 1 & \text{при} \quad x > 2;\end{cases}$ $\alpha = 1;\ \beta = 1{,}5;$

9.21. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x \le 1;\\ \dfrac{x-1}{2} & \text{при} \quad 1 < x \le 3;\\ 1 & \text{при} \quad x > 3;\end{cases}$ $\alpha = 1;\ \beta = 2;$

9.22. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x \le 0;\\ \dfrac{2}{\pi}\arcsin x & \text{при} \quad 0 < x \le 1;\\ 1 & \text{при} \quad x > 1;\end{cases}$ $\alpha = 0;\ \beta = \dfrac{1}{2};$

9.23. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x \le 1;\\ \dfrac{(x-1)^2}{16} & \text{при} \quad 1 < x \le 5;\\ 1 & \text{при} \quad x > 5;\end{cases}$ $\alpha = 2;\ \beta = 4;$

9.24. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x \le 1;\\ \dfrac{1}{4}(1-x)\cdot(x-5) & \text{при} \quad 1 < x \le 3;\\ 1 & \text{при} \quad x > 3;\end{cases}$ $\alpha = 2;\ \beta = 3;$

9.25. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x \le 1{,}5;\\ 2x-3 & \text{при} \quad 1{,}5 < x \le 2;\\ 1 & \text{при} \quad x > 2;\end{cases}$ $\alpha = 1;\ \beta = 1{,}8;$

9.26. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad \dfrac{1}{e} \le x \le 1;\\ \ln x & \text{при} \quad 1 < x \le e;\\ 1 & \text{при} \quad x > e;\end{cases}$ $\alpha = 1;\ \beta = 2;$

9.27. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x \le -\dfrac{\pi}{2};\\ \dfrac{1}{2}(\sin x+1) & \text{при} \quad -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2};\\ 1 & \text{при} \quad x > \dfrac{\pi}{2};\end{cases}$ $\alpha = 0;\ \beta = \dfrac{\pi}{6};$

9.28. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x < 0;\\ \operatorname{arctg} x & \text{при} \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{4};\\ 1 & \text{при} \quad x > \dfrac{\pi}{4};\end{cases}$ $\alpha = 0;\ \beta = \dfrac{\pi}{6};$

9.29. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ e^{x}-1 & \text{при } 0<x\le \ln 2;\\ 1 & \text{при } x>\ln 2;\end{cases}$ $\alpha=0;\ \beta=0{,}5;$

9.30. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 1;\\ \frac{1}{7}\left(x^{3}-1\right) & \text{при } 1<x\le 2;\\ 1 & \text{при } x>2;\end{cases}$ $\alpha=1;\ \beta=1{,}5.$

Задание № 10

Дана плотность $f(x)$ распределения вероятностей случайной величины X. Найти:

1) значение постоянного параметра этого распределения;
2) функцию распределения $F(x)$;
3) математическое ожидание $M(X)$;
4) дисперсию $D(X)$;
5) вероятность попадания СВ X на заданный интервал $(\alpha;\beta)$;
6) построить графики функций $f(x)$; $F(x)$.

10.1. $f(x)=\begin{cases}A\cdot\sin 2x & \text{при } \frac{3\pi}{4}<x\le\pi;\\ 0 & \text{при } x\le\frac{3\pi}{4} \text{ или } x>\pi;\end{cases}$

$\alpha=\frac{3\pi}{4};\ \beta=\frac{5\pi}{6}.$

10.2. $f(x)=\begin{cases}A\cdot(3x+1) & \text{при } 0<x\le\frac{1}{3};\\ 0 & \text{при } x\le 0 \text{ или } x>\frac{1}{3};\end{cases}$

$\alpha=0{,}1;\ \beta=0{,}2.$

10.3. $f(x)=\begin{cases}A\cdot x^{2} & \text{при } 0<x\le\frac{1}{3};\\ 0 & \text{при } x\le 0 \text{ или } x>\frac{1}{3};\end{cases}$

$\alpha=0;\ \beta=0{,}5.$

10.4. $f(x)=\begin{cases} A\cdot x^2 & \text{при}\quad 0<x\le 1;\\ A\cdot(2-x)^2 & \text{при}\quad 1<x\le 2;\\ 0 & \text{при}\quad x\le 0 \text{ или } x>2; \end{cases}$

$\alpha=0;\ \beta=0{,}5.$

10.5. $f(x)=\begin{cases} x+A & \text{при}\quad 1<x\le 2;\\ 0 & \text{при}\quad x\le 1 \text{ или } x>2; \end{cases}$

$\alpha=1;\ \beta=1{,}5.$

10.6. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{A}{\sqrt{9-x^2}} & \text{при}\quad -3<x\le 3;\\ 0 & \text{при}\quad x\le -3 \text{ или } x>3; \end{cases}$

$\alpha=0;\ \beta=\dfrac{\pi}{2}.$

10.7. $f(x)=\begin{cases} e^x+A & \text{при}\quad 0<x\le \ln 2;\\ 0 & \text{при}\quad x\le 0 \text{ или } x>\ln 2; \end{cases}$

$\alpha=0;\ \beta=0{,}5.$

10.8. $f(x)=\begin{cases} A\cdot(x-2) & \text{при}\quad 0<x\le 2;\\ 0 & \text{при}\quad x\le 0 \text{ или } x>2; \end{cases}$

$\alpha=0;\ \beta=0{,}5.$

10.9. $f(x)=\begin{cases} A\cdot\cos^2 x & \text{при}\quad -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0 & \text{при}\quad x\le -\dfrac{\pi}{2} \text{ или } x>\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

$\alpha=0;\ \beta=\dfrac{\pi}{4}.$

10.10. $f(x)=\begin{cases} 0{,}5x^2+A & \text{при}\quad 1<x\le 2;\\ 0 & \text{при}\quad x\le 1 \text{ или } x>2; \end{cases}$

$\alpha=1;\ \beta=\dfrac{4}{3}.$

10.11. $f(x)=\begin{cases} A\cdot(4x-x^2) & \text{при}\quad 0<x\le 2;\\ 0 & \text{при}\quad x\le 0 \text{ или } x>2; \end{cases}$

$\alpha=0;\ \beta=1.$

10.12. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{1+x^2} & \text{при} \quad 0<x\le\dfrac{\pi}{4};\\ 0 & \text{при} \quad x\le 0 \text{ или } x>\dfrac{\pi}{4};\end{cases}$

$\alpha=0;\ \beta=\dfrac{\pi}{6}.$

10.13. $f(x)=\begin{cases}A\cdot\sin x & \text{при} \quad 0<x\le\pi;\ ,\\ 0 & \text{при} \quad x\le 0 \text{ или } x>\pi;\end{cases}$

$\alpha=0;\ \beta=\dfrac{\pi}{2}.$

10.14. $f(x)=\begin{cases}Ax+2 & \text{при} \quad 0<x\le\dfrac{1}{3};\ ,\\ 0 & \text{при} \quad x\le 0 \text{ или } x>\dfrac{1}{3};\end{cases}$

$\alpha=0;\ \beta=\dfrac{1}{5}.$

10.15. $f(x)=\begin{cases}A\cdot\left(4x-x^3\right) & \text{при} \quad 0<x\le 2;\ .\\ 0 & \text{при} \quad x\le 0 \text{ или } x>2;\end{cases}$

$\alpha=1{,}5;\ \beta=2.$

10.16. $f(x)=\begin{cases}A(x-2)\cdot(4-x) & \text{при} \quad 2<x\le 4;\ .\\ 0 & \text{при} \quad x\le 2 \text{ или } x>4;\end{cases}$

$\alpha=2;\ \beta=3.$

10.17. $f(x)=\begin{cases}A\cdot\cos x & \text{при} \quad 0<x\le\dfrac{\pi}{6};\\ 0 & \text{при} \quad x\le 0 \text{ или } x>\dfrac{\pi}{6};\end{cases}$

$\alpha=0;\ \beta=\dfrac{\pi}{12}.$

10.18. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{x} & \text{при} \quad 1<x\le e;\\ 0 & \text{при} \quad \dfrac{1}{e}\le x\le 1 \text{ или } x>e;\end{cases}$

$\alpha=1;\ \beta=2.$

10.19. $f(x)=\begin{cases} A\cdot(3x-x^2) & \text{при}\quad 0<x\le 2;\\ 0 & \text{при}\quad x\le 0 \text{ или } x>2;\end{cases}$

$\alpha=0;\ \beta=1{,}5.$

10.20. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{A}{\sqrt{25-x^2}} & \text{при}\quad -5<x\le 5;\\ 0 & \text{при}\quad x\le -5 \text{ или } x>5;\end{cases}$

$\alpha=0;\ \beta=3.$

10.21. $f(x)=\begin{cases} A\cdot e^{-x} & \text{при}\quad x\ge 0;\\ 0 & \text{при}\quad x<0;\end{cases}$

$\alpha=0;\ \beta=2.$

10.22. $f(x)=\begin{cases} A\cdot x & \text{при}\quad 0<x\le 1;\\ 0 & \text{при}\quad x\le 0 \text{ или } x>1;\end{cases}$

$\alpha=1{,}5;\ \beta=2.$

10.23. $f(x)=\begin{cases} A\cdot(x^2-2x) & \text{при}\quad 0<x\le 2;\\ 0 & \text{при}\quad x\le 0 \text{ или } x>2;\end{cases}$

$\alpha=0;\ \beta=1.$

10.24. $f(x)=\begin{cases} A\cdot(x^3+3x) & \text{при}\quad 0<x\le 1;\\ 0 & \text{при}\quad x\le 0 \text{ или } x>1;\end{cases}$

$\alpha=0;\ \beta=0{,}5.$

10.25. $f(x)=\begin{cases} A\cdot(x^2-3) & \text{при}\quad 0<x\le 1;\\ 0 & \text{при}\quad x\le 0 \text{ или } x>1;\end{cases}$

$\alpha=0;\ \beta=0{,}5.$

10.26. $f(x)=\begin{cases} A & \text{при}\quad 1<x\le 5;\\ 0 & \text{при}\quad x\le 1 \text{ или } x>5;\end{cases}$

$\alpha=1;\ \beta=3.$

10.27. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{A}{\sqrt{a^2-x^2}} & \text{при}\quad |x|\le a;\\ 0 & \text{при}\quad |x|\ge a;\end{cases}$

$\alpha=0;\ \beta=0{,}5a.$

10.28. $f(x)=\begin{cases} 2\cdot(x-A) & \text{при}\quad 2<x\le 3;\\ 0 & \text{при}\quad x\le 2 \text{ или } x>3;\end{cases}$

$\alpha=1{,}5;\ \beta=3.$

10.29. $f(x)=\begin{cases}6x+A & \text{при} \quad 0<x\le\dfrac{1}{3};\\ 0 & \text{при} \quad x\le 0 \text{ или } x>\dfrac{1}{3};\end{cases}$

$\alpha=0;\ \beta=\dfrac{1}{6}.$

10.30. $f(x)=\begin{cases}e^{Ax} & \text{при} \quad x\ge 0;\\ 0 & \text{при} \quad x<0.\end{cases}$

$\alpha=0;\ \beta=1.$

Задание № 11

11.1-11.15.

Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением σ мг и математическим ожиданием 0 мг. Найти:

а) вероятность того, что взвешивание будет проведено с ошибкой, не превышающей по абсолютной величине δ мг;

б) вероятность того, что при n независимых взвешиваниях погрешность хотя бы в одном взвешивании не превосходит по абсолютной величине δ мг;

в) интервал, в котором с вероятностью 0,9973 будет заключена ошибка взвешивания.

	σ	δ	n
11.1	20	5	5
11.2	15	3	3
11.3	30	6	4
11.4	10	1	5
11.5	50	5	3
11.6	40	4	2
11.7	25	2,5	3
11.8	60	3	4
11.9	90	6	2
11.10	70	3,5	3
11.11	110	5,5	3
11.12	15	1	4
11.13	125	1,2	3
11.14	100	1	3
11.15	120	2,4	4

11.16-11.30.

Размер диаметра деталей, выпускаемых цехом, распределен по нормальному закону. Стандартная длина диаметра детали (математическое ожидание) равна a мм, среднее квадратическое отклонение σ мм. Найти:

а) вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали будет больше α мм и меньше β мм;

б) вероятность того, что диаметр детали отклонится от стандартной длины не более, чем на δ мм;

в) интервал, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных деталей.

	a	σ	δ	α	β
11.16	50	5	3	45	52
11.17	20	3	1,3	17	26
11.18	36	4	2	30	40
11.19	60	5	8	54	70
11.20	48	4	3	45	56
11.21	30	3	1,5	24	33
11.22	35	4	2	27	37
11.23	45	2	3	40	48
11.24	40	3	1,5	34	43
11.25	60	6	6	40	50
11.26	65	6	6	50	75
11.27	70	7	14	55	40
11.28	80	4	8	72	50
11.29	90	4,5	9	80	110
11.30	100	10	5	85	120

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература:

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики. М., Высшая школа, 1979.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М., Наука, 1969.

Дополнительная литература:

1. Свешников А.А. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функции. М., Наука, 1970.

Учебные пособия кафедры:

1. Основы теории вероятностей. Учебно – методическое пособие. Якубова Д.Ф., Юлдыбаев Л.Х, Байрамгулова Р.С., Фаткуллин Н.Ю., Уфа, УГНТУ, 2004.
2. Практикум по теории вероятностей. Байрамгулова Р.С., Фаткуллин Н.Ю., Хайбуллин Р.Я. Уфа, УГНТУ, 2005.
3. Расчетное задание. Основы теории вероятностей. Байрамгулова Р.С., Фаткуллин Н.Ю., Уфа, УГНТУ, 2003.
4. Практикум по теории вероятностей. Московский Б.А., Уфа, УГНТУ, 1992.