

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра математики

УЧЕБНО – МЕТОДИЧЕСКИЙ ПОСОБИЕ
дисциплины «Математика»

РАЗДЕЛ 12 «ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ»

Теоретические основы
Методические указания для студентов
Материалы для самостоятельной работы студентов

Уфа
2016

Данное пособие содержит комплект заданий в тестовой форме различной сложности по всем темам раздела 12 «Элементы дискретной математики», предназначенный для оценки знаний студентов.

Разработано для студентов, обучающихся по всем формам обучения по направлениям подготовки и специальностям, реализуемым в УГНТУ.

Первое издание пособия вышло в 2008 году.

Авторы:

Абзалимов Р.Р., Акмадиева Т.Р., Аносова Е.П., Ахтямов Н.Т., Байрамгулова Р.С., Галиуллин М.М., Галиева Л.М., Галиакбарова Э.В., Гимаев Р.Г., Гудкова Е.В., Дружинская Е.В., Егорова Р.А., Жданова Т.Г., Зарипов Э.М., Зарипов Р.М., Исламгулова Г.Ф., Ковалева Э.А., Майский Р.А., Мухаметзянов И.З., Нагаева З.М., Савлущинская Н.М., Сахарова Л.А., Степанова М.Ф., Сокова И.А., Сулейманов И.Н., Умергалина Т.В., Фаткуллин Н.Ю., Хайбуллин Р.Я., Хакимов Д.К., Хакимова З.Р., Чернятьева М.Р., Юлдыбаев Л.Х., Шамшович В.Ф., Шварева Е.Н., Якубова Д.Ф., Якупов В.М., Янчушка А.П., Янчушка З.И., Яфаров Ш.А.

Рецензенты:

Кафедра программирования и вычислительной математики Башкирского государственного педагогического университета.

Заведующий кафедрой д. ф.-м. наук, профессор Р.М. Асадуллин

Кафедра вычислительной математики Башкирского государственного университета

Заведующий кафедрой д. ф.-м. наук, профессор Н.Д. Морозкин

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1.1. Элементы теории множеств	5
1. Теоретические основы	6
1.1.1. Множества и основные символы, применяемые в теории множеств	
1.1.2. Основные операции над множествами	6
1.1.3. Отношения, отображения и функции	9
1.1.4. Мощность множества	10
1.2. Комбинаторика	10
1.3. Алгебра логики	13
1.3.1. Формулы алгебры логики.	13
1.3.2. Функции алгебры логики	16
1.4. Элементы теории графов	18
1.4.1. Виды и способы задания графов	18
1.4.2. Матрица смежности и матрица инцидентности	20
1.4.3. Операции над графами	22
1.4.4. Расстояния в графах	23
1.4.5. Остовы графов	25
2. Методические указания для студентов	
2.1. Элементы теории множеств	27
2.1.1. Множества и операции над множествами	27
2.1.2. Отношения, отображения и функции	30
2.1.3. Матрица бинарного отношения	32
2.2. Комбинаторика	35
2.3. Алгебра логики	40
2.3.1. Формулы алгебры логики	40
2.4. Элементы теории графов	44
2.4.1. Виды и способы задания графов	44
2.4.2. Операции над графами	47
2.4.3. Матрица смежности и матрица инцидентности для графов	49
3. Материалы для самостоятельной работы	
3.1. Контрольные вопросы	54
3.2. Задачи и упражнения для самостоятельной работы	55
Список литературы	57

УЧЕБНО – МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

РАЗДЕЛ 12. «ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ»

1. Теоретические основы

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в мире бурное развитие приобрело создание машин – роботов для различных производственных процессов, для горных разработок, для химических предприятий, для работы в космосе, а также для работы в быту. Основой действия этих машин является компьютерная техника. Видимо, и в дальнейшем развитие прогресса будет идти по пути всеобщей компьютеризации нашей жизни. Для инженера с техническим образованием важно не просто уметь нажимать кнопки кем-то созданного компьютерного робота, а иметь представление о том, как же находит человек общий «язык» с этой машиной. Ведь компьютер – это машина с конечной памятью, состоящей из слов конечной длины. У него «алфавит» состоит всего из двух «букв», которые называются битами – это 0 (сигнала нет) и 1 (сигнал есть). Обычно длина компьютерного слова составляет 16 или 32 бита.

Как же все бесконечное разнообразие нашей жизни перевести на две «буквы» (0 и 1)? Вот это и делают специалисты, применяя в том числе и дискретную математику.

Отдельные разделы дискретной математики разрабатывались в разных странах в разное время на протяжении последних двухсот – трехсот лет, поэтому носили разрозненный характер. Только в начале XX века сложилось понятие дискретной математики как цельной науки, в связи с ее бурным развитием. А это, в свою очередь, было обусловлено прогрессом компьютерной техники, необходимостью создания средств обработки и передачи информации, а также необходимостью представления различных моделей на компьютерах.

Дискретная (прерывная) математика представляет собой область математики, в которой изучаются свойства структур конечного характера, а также бесконечных структур, предполагающих скачкообразность происходящих в них процессов или отделимость составляющих их элементов.

В отличие от дискретной математики классическая (непрерывная) математика занимается преимущественно изучением свойств структур непрерывного характера. Деление математики на классическую и дискретную достаточно условно, поскольку, с одной стороны, происходит взаимопроникновение возникающих идей и методов, а с другой – средства дискретной математики используются для изучения непрерывных моделей и наоборот.

Данное пособие носит ознакомительный характер и не претендует на полноту излагаемого материала. Для более углубленного изучения отдельных разделов дискретной математики в конце пособия предлагается список литературы.

1. Теоретические основы

1.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1.1. Множества и основные символы, применяемые в теории множеств

Понятие *множества* относится к аксиоматическим (то есть формально не определяемым) понятиям математики, таким как, например, точка или прямая линия.

Под *множеством* понимают совокупность объектов, объединенных по какому-то признаку. Объекты, которые образуют множество, называются *элементами множества*. Принято множества обозначать большими заглавными буквами латинского алфавита: $A, B, C, \dots, X, Y, Z$, а элементы множества принято обозначать малыми буквами. Тот факт, что a_1 является элементом множества A обозначается через $a_1 \in A$ (a_1 «принадлежит» множеству A). Если a_1 не является элементом множества A , обозначается через $a_1 \notin A$ (или $a_1 \bar{\in} A$) (a_1 «не принадлежит» множеству A). Введем еще ряд символов, применяемых не только в теории множеств, но и в других разделах математики:

- квантор всеобщности $\forall$: $\forall a \in A$ – «для всех элементов a из множества A »;
- квантор существования $\exists$: $\exists b \in A$ – «существует (найдется) элемент b из множества A »;
- символ следствия $\Rightarrow$ читается как «следует» или «если..., то»;
- символ равносильности $\Leftrightarrow$ читается как «тогда и только тогда».

Множество можно задать перечислением принадлежащих ему элементов или указанием свойств, которым элементы множества удовлетворяют.

Если $a_1, a_2, \dots, a_n$ – все элементы множества A , то будем писать $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Если же есть свойство (закон) f , которому «подчиняются» все элементы множества A , то записываем это множество так: $A = \{a | f(a)\}$ или $A = \{a | \text{и обладает свойством } f\}$.

ПРИМЕР 1.1. В математике часто рассматриваются числовые множества, такие как:

- множество натуральных (целых положительных) чисел, $N = \{1, 2, 3, \dots\}$;
- множество целых чисел $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$;
- множество рациональных чисел $Q = \left\{ \frac{m}{n}, m \in Z, n \in Z, n \neq 0 \right\}$;
- множество действительных (вещественных) чисел R ;
- множество комплексных чисел C .

Множество A называется **подмножеством** множества B (обозначается $A \subseteq B$), если все элементы множества A принадлежат множеству B .

ПРИМЕР 1.2. Символическая запись:

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a (a \in A \Rightarrow a \in B)$ читается следующим образом: «множество A содержится в множестве B тогда и только тогда ($\Leftrightarrow$), когда для всех ($\forall$) a , таких что a принадлежит ($\in$) множеству A , следует ($\Rightarrow$), что a принадлежит множеству B .

Множества A и B называются **равными** или **совпадающими** (обозначается $A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов, то есть если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Запись $A \subset B$ означает, что $A \subseteq B$ и $A \neq B$ (A не равно B). В этом случае говорят, что A строго включено в B .

ПРИМЕР 1.3. Для числовых множеств, представленных в примере 1.1, можно записать следующую цепочку строгих включений: $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

Если множество A не содержит ни одного элемента, то его называют **пустым** и обозначают $A = \emptyset$ (множество A является пустым множеством). Множество, которое содержит все определяемые множества, называется **универсальным** и обозначается U .

1.1.2. Основные операции над множествами

Для наглядности излагаемого ниже материала введем так называемые диаграммы Эйлера – Венна, с помощью которых будем изображать множества.

ПРИМЕР 1.4. Соотношение между множествами $B \subseteq A \subseteq U$ можно изобразить так, как показано на рис. 1.1. Здесь множествам B и C соответствуют круги, множеству U – квадрат, который их содержит.

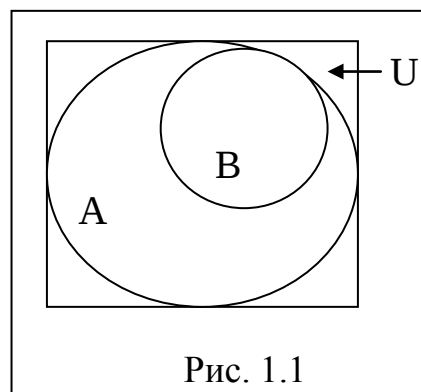
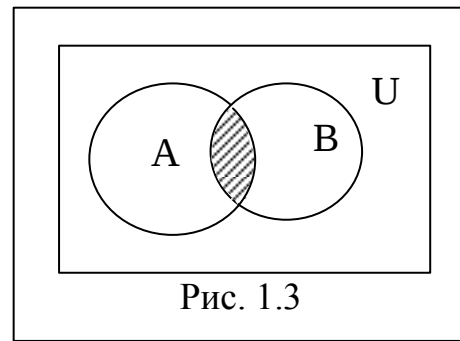
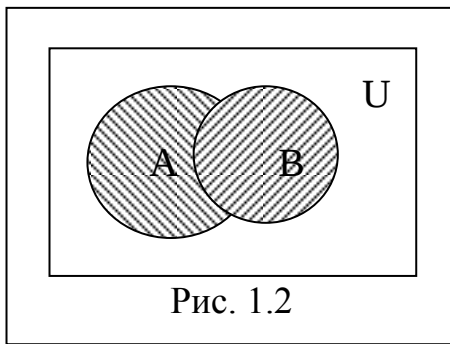


Рис. 1.1

Пусть даны два произвольных множества A и B . Рассмотрим операции над этими множествами:

1. Объединением ($\cup$) двух множеств является множество: $A \cup B = C$, элементами которого являются или элементы множества A или элементы множества B . Знак объединения $\cup$ читается с помощью союза «или»:

$$C = \{c \mid c \in A \text{ или } c \in B\} \text{ (рис. 1.2).}$$



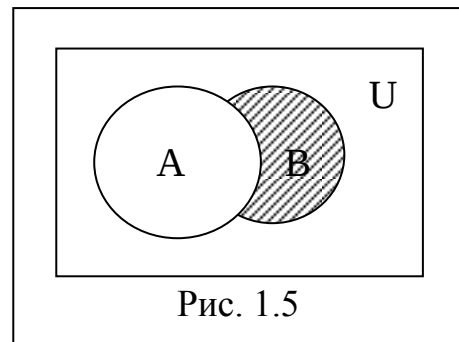
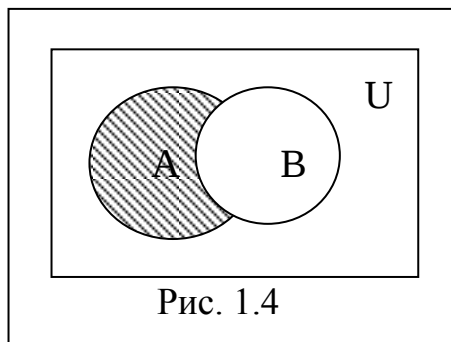
2. Пересечением ($\cap$) двух множеств A и B называется множество D , элементами которого являются общие элементы множеств A и B .

Знак пересечения $\cap$ читается с помощью союза «и»:

$$D = \{d \mid d \in A \text{ и } d \in B\} \text{ (рис. 1.3).}$$

3. Разностью множеств A и B ($A \setminus B$) являются такие элементы множества A , которые не принадлежат множеству B

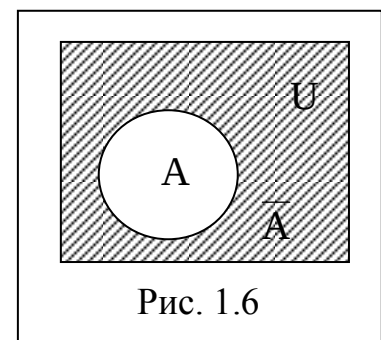
$$A \setminus B = \{a \mid a \in A \text{ и } a \notin B\}.$$



На рис. 1.4 заштриховано множество $A \setminus B$, а на рис. 1.5 заштриховано множество $B \setminus A$.

Множество $U \setminus A$ называется дополнением множества A и обозначается $\bar{A}$. На рис. 1.6 заштрихованное множество – это дополнение множества A .

Замечание. Множество $\bar{A}$ иногда называют **отрицанием** множества A .



Основные свойства операций объединения, пересечения и дополнения:

1. Ассоциативность операций $\cup$ и $\cap$:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C; \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

2. Коммутативность операций $\cup$ и $\cap$:

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A.$$

3. Законы идемпотентности:

$$A \cup A = A; \quad A \cap A = A.$$

4. Дистрибутивность операций $\cup$ и $\cap$:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

5. Законы поглощения:

$$A \cup (A \cap B) = A; \quad A \cap (A \cup B) = A.$$

6. Законы де Моргана:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

7. Закон нуля и единицы: полагаем $0 \neq \emptyset$, $1 = U$, тогда

$$A \cup 0 = A; \quad A \cap 0 = 0; \quad A \cup 1 = 1; \quad A \cap 1 = A; \quad A \cup \overline{A} = 1; \quad A \cap \overline{A} = 0.$$

8. Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{A}} = A$.

Применяя изложенные свойства операций $\cup, \cap$ и отрицания, можно легко доказать следующие утверждения:

Теорема 1

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (A \cap B = A) \Leftrightarrow (A \cup B = B) \Leftrightarrow (A \setminus B = \emptyset).$$

Теорема 2. Любая из определенных операций над множествами выражается через операции пересечения и отрицания.

Операции пересечения и объединения могут быть определены для любого множества множеств A_i , где индекс i «пробегаёт» множество индексов I (которое может быть конечным или бесконечным).

Пересечение $\bigcap_{i \in I} A_i$ и объединение $\bigcup_{i \in I} A_i$ задаются равенствами

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{a \mid a \in A_1 \text{ и } a \in A_2 \text{ и } \dots \text{ и } a \in A_i \text{ для всех } i \in I\}. \quad (1.1)$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{a \mid a \in A_1 \text{ или } a \in A_2 \text{ или } \dots \text{ или } a \in A_i \text{ для всех } i \in I\}. \quad (1.2)$$

Если I есть конечное множество натуральных чисел, то есть $I = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, то используются такие записи:

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i; \quad A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

Наконец введем понятие декартова произведения, которое понадобится в дальнейшем изложении.

Декартовым (прямым) произведением множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется множество

$$\{\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\} = \prod_{i=1}^n A_i. \quad (1.3)$$

Декартово произведение иногда обозначают $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. Если $A_1 = A_2 = \dots = A_n$, то множество $A_1 \times A_2 \times \dots = A^n$ называется ***n-й декартовой степенью множества A***.

1.1.3. Отношения, отображения и функции

Часто при решении задач необходимо выбирать элементы, связанные между собой некоторым соотношением. Примерами таких связей между элементами могут служить функциональные зависимости или отношение «меньше либо равно».

Любое подмножество P прямого произведения $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ (см. формулу (1.3)) называется ***n-местным отношением*** или ***n-местным предикатом P*** на множествах $A_1, A_2, \dots, A_n$.

При $n=1$ отношение P является подмножеством множества A_1 и называется ***унарным отношением***.

Наиболее часто встречаются двухместные отношения ($n=2$). Они называются ***бинарными отношениями***.

ПРИМЕР 1.5. Если $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, то бинарное отношение $P = \{(x; y) | x, y \in A, x \leq 3 \text{ и } x \text{ делит } y\}$ можно записать в виде

$$P = \{(2; 2); (2; 4); (2; 6); (2; 8); (3; 3); (3; 6)\}.$$

Отношение $f \subseteq X \times Y$ называется ***функцией*** или ***отображением*** из множества X в множество Y , если область определения f совпадает с множеством X , область значений f является подмножеством множества Y и из того, что $(x, y_1) \in f$, $(x, y_2) \in f$ следует $y_1 = y_2$.

Функция f из X в Y обозначается через $f : X \rightarrow Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$. Чаше записывают функцию в виде $y = f(x)$, где y – значение функции ($y \in Y$) при значении аргумента x ($x \in X$).

Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется ***инъективным (инъекцией)***, если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких что $x_1 \neq x_2$, следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Если же $f(x_1) = f(x_2)$, тогда $x_1 = x_2$.

Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется ***сюръективным (сюръекцией)***, если для любого $y \in Y$ найдется $x \in X$ такой, что $f(x) = y$.

Отображение $f : X \leftrightarrow Y$, являющееся одновременно инъекцией и сюръекцией, называется ***биективным (биекцией или взаимнооднозначным соответствием)*** и записывается такое отображение: $f : X \leftrightarrow Y$.

ПРИМЕР 1.6. Рассмотрим три функции $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

а) $f_1(x) = e^x$ – инъективна, но не сюръективна;

б) $f_2(x) = x \cdot \sin x$ – сюръективна, но не инъективна;

в) $f_3(x) = 2x - 1$ – биективна.

1.1.4. Мощность множества

Множества A и B называются *эквивалентными* ($A \approx B$), если существует биекция $f : A \leftrightarrow B$.

Утверждение. Для любых множеств A, B, C выполняются следующие свойства:

- 1) $A \approx A$;
- 2) если $A \approx B$, то $B \approx A$;
- 3) если $A \approx B$ и $B \approx C$, то $A \approx C$.

Понятие мощности множества возникает при сравнении множеств по количеству элементов. Обозначается мощность множества $|A|$.

Если множество A – конечно и количество элементов множества A равно n , тогда пишут $|A| = n$.

Эквивалентные множества A и B называются *равномощными*: $|A| = |B|$.

Если множество $A \approx \mathbb{N}$ (где $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел), то множество A называется *счетным*.

1.2. КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторика – раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого (обычно конечного) множества в соответствии с заданными правилами. Каждое такое правило определяет способ построения некоторой конструкции из элементов исходного множества, называемой *комбинаторной конфигурацией*.

Простейшими примерами комбинаторных конфигураций являются перестановки, размещения, сочетания и разбиения.

Пусть дано множество

$$M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}. \quad (1.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Перестановкой элементов множества M* называется любой набор, состоящий из n элементов множества M .

Перестановки отличаются друг от друга только порядком входящих в них элементов.

Лемма. Число $P(n)$ всех перестановок множества $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ равно

$$P(n) = n! \quad (1.5)$$

Доказательство. Действительно, на первое место в наборе можно поставить любой из n элементов, на второе место – любой из $(n-1)$ -го

оставшихся и т.д. На последнее место останется единственный элемент. Получаем всего $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ перестановок.

ПРИМЕР 1.7. Пусть имеем множество, состоящее из трех цифр $\{1,2,3\}$. Сколько трехзначных чисел можно составить из этих цифр, если цифры применять без повторения?

Решение. Итак, составляем трехзначные числа: **123; 132; 213; 231; 312; 321**. Всего получилось шесть различных чисел, то есть шесть различных перестановок из элементов данного множества: $P(3) = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

ПРИМЕР 1.8. Расставить на полке пять книг можно $P(5) = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ различными способами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Размещения* из n элементов множества (1.4) по k элементов ($k \leq n$) – это комбинаторные конфигурации, составленные из n данных элементов по k элементов в каждой.

Два размещения считаются различными, если они отличаются либо элементами, либо их порядком.

Лемма. Число A_n^k всех размещений из n элементов по k элементов равно

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (n \geq k). \quad (1.6)$$

Замечание. Число размещений и перестановок связаны формулой (для случая $k = n$)

$$A_n^n = P(n) = n! \quad (1.7)$$

ПРИМЕР 1.9. Пусть имеем пять цифр **1, 2, 3, 4, 5**. Сколько трехзначных чисел можно составить из этих цифр, если внутри числа одну и ту же цифру применять без повторений (то есть число **111** – не подходит).

Решение. Итак, составляем требуемые трехзначные числа:

123	124	125	134	135	145	234	235	345	245
132	142	152	143	153	154	243	253	354	254
213	214	215	314	315	415	324	325	435	425
231	241	251	341	351	451	343	353	454	452
312	412	512	413	513	514	423	523	534	524
321	421	521	431	531	541	432	532	543	542

Если проследить представленные числа – размещения по каждому из столбцов, то в столбцах одно число отличается от другого перестановкой цифр.

Если проследить числа – размещения по каждой из строк, то в строках одно число отличается от другого появлением одной новой цифры.

Всего получилось шестьдесят различных чисел, то есть шестьдесят размещений: $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 60$.

ПРИМЕР 1.10. Из пяти различных книг произвольным образом берутся и ставятся на полку одна за другой три книги. Сколько имеется вариантов таких расстановок?

Решение. Имеется A_5^3 вариантов расстановок, то есть $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$. Как из пяти книг выбирать по три, можно проследить на

предыдущем примере 1.9. Если книги пронумеровать **1, 2, 3, 4, 5**, то можно взять первую, вторую, третью или первую, вторую, четвертую и так далее.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Сочетания* из n элементов множества (1.4) по k элементов ($k \leq n$) – это комбинаторные конфигурации, составленные из n данных элементов по k элементов в каждой таким образом, чтобы одна от другой отличалась хотя бы одним элементом.

Лемма. Число C_n^k всех сочетаний из n элементов по k элементов равно

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P(k)} \quad (n \geq k). \quad (1.8)$$

Замечание 1. Формула (1.8) дает связь между сочетаниями, перестановками и размещениями.

Замечание 2. Если учесть формулы (1.5) и (1.6) для расчета числа перестановок и размещений, то получим формулу

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \quad (n \geq k). \quad (1.9)$$

ПРИМЕР 1.11. Пусть (как в примере 1.9) имеем пять цифр **1, 2, 3, 4, 5**. Но задачу сформулируем не так как в примере 1.9, а иначе: сколько трехзначных чисел можно составить из этих цифр, чтобы каждое число отличалось от остальных чисел хотя бы на одну цифру?

Решение. Составляем требуемые трехзначные числа:

123; 124; 125; 134; 135; 145; 234; 235; 245; 345.

Всего таких чисел – сочетаний получилось 10 штук, то есть

$$C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 2 = 10.$$

Замечание. Если вернуться к решению примера 1.9, то первая строка как раз и содержит числа, составленные в примере 1.11.

Число C_n^k обладает следующими свойствами (которые легко доказываются):

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$;
2. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$;
3. $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k}$, для любых $a, b \in \mathbb{R}$ (бином Ньютона).

В силу последнего свойства числа C_n^k называются биномиальными коэффициентами.

ПРИМЕР 1.12. Из свойства 3 следует, что

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

$$\text{Действительно, } 2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k.$$

Следует добавить, что бывают перестановки с повторениями, размещения с повторениями и сочетания с повторениями.

1.3. АЛГЕБРА ЛОГИКИ

1.3.1. Формулы алгебры логики

Дж. Буль (George Boole, 1815-1864) предложил для понятия формальной логики использовать специальные переменные (называемые сейчас *логическими* или *булевыми*), которые принимают два значения: TRUE – истина и FALSE – ложь).

Будем называть **Высказыванием** повествовательное предложение, о котором в данной ситуации можно сказать, что оно истинно или ложно, но не то и другое одновременно.

В качестве примеров высказываний приведем предложения: «УГНТУ – крупнейший вуз Уфы» и «Снег зеленый». Первое высказывание является истинным, а второе – ложным.

Если имеется несколько высказываний, то из них можно образовать различные новые высказывания. При этом исходные высказывания называются **простыми**, а вновь образованные – **сложными**.

Поставим в соответствие высказыванию P **логическую переменную** x , которая принимает значение 1, если P истинно, и 0, если P ложно. Из логических переменных можно составлять различные конструкции, которые образуют формулы алгебры логики.

Пусть $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ – некоторое множество логических переменных. Определим понятие **формулы алгебры логики** следующим образом:

1) любая логическая переменная является формулой (называемой **атомарной**);

2) если φ и ψ – формулы, то выражения $\neg\varphi$; $\varphi \wedge \psi$; $\varphi \vee \psi$; $\varphi \leftrightarrow \psi$; $\varphi \rightarrow \psi$ являются формулами;

3) других формул, кроме построенных в п.1 и п.2 – нет.

Символы $\neg$; $\wedge$; $\vee$; $\rightarrow$; $\leftrightarrow$ называются **логическими операциями** или **связками** и читаются соответственно: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквивалентность. Введенные в п. 2 формулы интерпретируются следующим образом:

$\neg\varphi$ – не φ (иногда вместо $\neg\varphi$ пишут $\overline{\varphi}$);

$\varphi \wedge \psi$ – φ и ψ ;

$\varphi \vee \psi$ – φ или ψ ;

$\varphi \rightarrow \psi$ – если φ , то ψ ;

$\varphi \leftrightarrow \psi$ – φ тогда и только тогда, когда ψ .

Если формула φ построена из логических переменных, лежащих в множестве $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, то будем писать $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Действия логических операций задаются **таблицами истинности**, в которых в каждой строке взаимно однозначно сопоставляется набор значений переменных (составляющих формулу) и соответствующее этому набору значение полученной формулы:

Таблица 1.1

φ	$\neg\varphi$
0	1
1	0

Таблица 1.2

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \rightarrow \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Исходя из таблицы истинности для логических операций, можно строить таблицы истинности для произвольных формул.

ПРИМЕР 1.13. Построить таблицу истинности для формулы $\varphi = (x \rightarrow y) \wedge ((\overline{y} \rightarrow z) \rightarrow \overline{x})$.

x	y	z	$x \rightarrow y$	$\bar{y} \rightarrow z$	$(\bar{y} \rightarrow z) \rightarrow \bar{x}$	Φ
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0

Расширим понятие формулы, введя новые логические операции:

$\Phi | \Psi$ – штрих Шеффера или антиконъюнкция, то есть $\Phi | \Psi = \neg(\Phi \wedge \Psi)$;

$\Phi \downarrow \Psi$ – стрелка Пирса или антидизъюнкция, то есть $\Phi \downarrow \Psi = \neg(\Phi \vee \Psi)$;

$\Phi \oplus \Psi$ – кольцевая сумма, логическое сложение или сложение по модулю 2, то есть $\Phi \oplus \Psi = \neg(\Phi \leftrightarrow \Psi)$.

Таблица истинности для этих трех операций имеет вид:

Φ	Ψ	$\Phi \Psi$	$\Phi \downarrow \Psi$	$\Phi \oplus \Psi$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0

В алгебре логики (так же как и в арифметике) приняты соглашения относительно расстановки скобок при написании формул, так как среди логических операций есть «более сильные» и «равносильные». В арифметике операция $(\times)$ умножения является «более сильной» по отношению к операции $(+)$.

ПРИМЕР 1.14. В арифметике вычислить выражение $(2 - (3 \cdot 4) + (8 \cdot 7))$ значит, что в первую очередь выполняем операции умножения. Так и в алгебре логики есть операции, которые надо выполнять в первую очередь. Напишем цепочку «неравносильных» операций (здесь знак $>$ означает «быть более сильным»)

$$\neg > | > \vee > \rightarrow > \leftrightarrow;$$

$$\neg > \downarrow > \vee > \oplus; \neg > \wedge > \vee$$

и «равносильных» операций (здесь применяют знак $\approx$ – эквивалентности)

$$\wedge \approx | \approx \downarrow; \leftrightarrow \approx \oplus.$$

ПРИМЕР 1.15. а) В формуле $x_1 \wedge x_2 \vee x_3$ скобки расставляются следующим образом $(x_1 \wedge x_2) \vee x_3$;

б) в формуле $x_1 \vee x_2 \leftrightarrow x_3 \rightarrow x_4$ скобки ставим так: $(x_1 \vee x_2) \leftrightarrow (x_3 \rightarrow x_4)$;

в) в формуле $x_1 \oplus x_2 \leftrightarrow \bar{x}_3 \rightarrow x_4 \vee x_5 \wedge x_6 \downarrow x_1 | x_2$ скобки ставим так: $(x_1 \oplus x_2) \leftrightarrow (\bar{x}_3 \rightarrow (x_4 \vee ((x_5 \wedge x_6) \downarrow x_1) | x_2))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Формулы $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называются эквивалентными ($\varphi \approx \psi$), если совпадают их таблицы истинности.

Основные эквивалентности между формулами:

1. Ассоциативность $\wedge$ и $\vee$:

$$((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi) \approx (\varphi \wedge (\psi \wedge \chi));$$

$$((\varphi \vee \psi) \vee \chi) \approx (\varphi \vee (\psi \vee \chi)).$$

2. Коммутативность $\wedge$ и $\vee$:

$$(\varphi \wedge \psi) \approx (\psi \wedge \varphi);$$

$$(\varphi \vee \psi) \approx (\psi \vee \varphi).$$

3. Идемпотентность $\wedge$ и $\vee$:

$$(\varphi \wedge \varphi) \approx \varphi; \quad (\varphi \vee \varphi) \approx \varphi.$$

4. Дистрибутивность $\wedge$ и $\vee$:

$$(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \approx ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi));$$

$$(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \approx ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)).$$

5. Закон поглощения:

$$(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \approx \varphi; \quad (\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) \approx \varphi.$$

6. Законы де Моргана:

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \approx \neg\varphi \vee \neg\psi; \quad \neg(\varphi \vee \psi) \approx \neg\varphi \wedge \neg\psi.$$

7. Закон двойного отрицания:

$$\neg\neg\varphi \approx \varphi.$$

$$8. (\varphi \rightarrow \psi) \approx (\neg\varphi \vee \psi).$$

$$9. (\varphi \leftrightarrow \psi) \approx ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) \approx ((\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)).$$

Формула $\varphi(x_1; x_2, \dots, x_n)$ называется **тождественно истинной**, если эта формула принимает значение 1 при всех наборах значений переменных.

Формула $\varphi(x_1; x_2, \dots, x_n)$ называется **тавтологией** (**тождественно ложной** или противоречием), если эта формула принимает значение 0 при всех наборах значений переменных.

1.3.2. Функции алгебры логики

Функцией алгебры логики от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется любая функция $f: \{0;1\}^n \rightarrow \{0;1\}$, то есть функция, которая произвольному набору $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ нулей и единиц ставит в соответствие значение $f(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \in \{0;1\}$.

Функции алгебры логики называются также **булевыми функциями**, **двоичными функциями** или **переключательными функциями**.

Булевой функцией описываются преобразования некоторым устройством входных сигналов в выходные. Предположим, что устройство, показанное на рис. 1.7 имеет n входов $x_1, x_2, \dots, x_n$, на которые может подаваться или не подаваться ток, и один выход, на который ток подается или не подается в зависимости от устройства f и от подачи тока на входе.

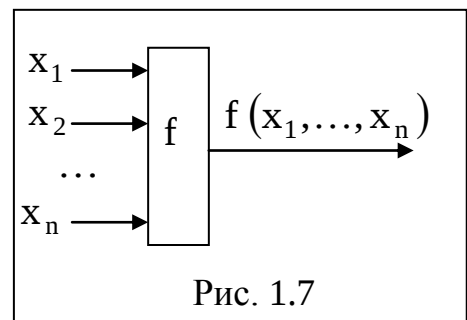


Рис. 1.7

При этом значение переменной $x_i = 1$ интерпретируется как поступление тока на i -й вход, а $x_i = 0$ – как непоступление тока. Значение $f(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ равно 1, если при $x_1 = \delta_1, x_2 = \delta_2, \dots, x_n = \delta_n$ ток на выходе проходит, и $f(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) = 0$, если ток не проходит.

ПРИМЕР 1.16. Операции конъюнкции $x_1 \wedge x_2$ соответствует устройство $f(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$ с двумя входами и одним выходом (рис. 1.8).

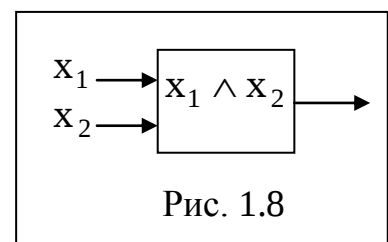


Рис. 1.8

При этом значение выхода равно 1 тогда и только тогда, когда оба значения входов равны 1 (см. таблицу истинности 1.2).

Булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ полностью определяется своей таблицей истинности:

Таблица 1.3

x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$
0	0	0	$\dots$	0	0	$f(0, 0, \dots, 0, 0)$
0	0	0	$\dots$	0	1	$f(0, 0, \dots, 0, 1)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
1	1	1	$\dots$	1	0	$f(1, 1, \dots, 1, 0)$
1	1	1	$\dots$	1	1	$f(1, 1, \dots, 1, 1)$

На каждом из наборов $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ булева функция принимает значение 0 или 1 (в зависимости от f).

ПРИМЕР 1.17. Рассмотрим устройство f , фиксирующее принятие некоторой резолюции тремя ($n = 3$) депутатами, – назовем их x_1, x_2, x_3 . В случае согласия депутат нажимает кнопку, сигнал проходит, и этому случаю будет соответствовать 1. В случае несогласия депутат не нажимает кнопку, сигнал не проходит, и этому случаю будет соответствовать 0. Если большинство депутатов дают согласие, то резолюция принимается, то есть f принимает значение 1. Возможны восемь вариантов голосований ($2^n = 2^3 = 8$). Итак, устройство реализует функцию $f(x_1, x_2, x_3)$, таблица истинности которой представлена в таблице 1.4.

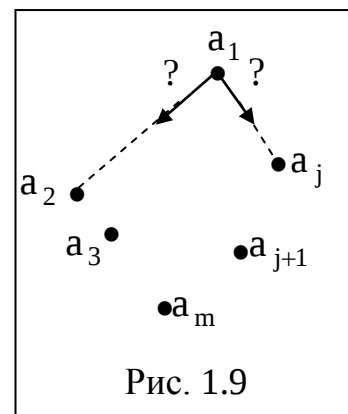
Таблица 1.4

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x_1, x_2, x_3)$	0	0	0	1	0	1	1	1

1.4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Во многих прикладных задачах изучаются системы связей между различными объектами. Рассмотрим, для примера, две такие задачи.

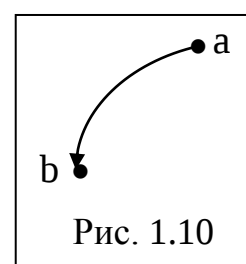
Задача коммивояжера. Коммивояжер должен посетить каждый из заданных m городов $a_1, a_2, \dots, a_m$ по одному разу, выехав из некоторого из этих городов (например, из a_1) и вернувшись в него же. В какой последовательности обходить ему города, чтобы длина суммарного пути была наименьшей (рис. 1.9)?



Квадратичная задача о назначениях. Рассмотрим множество городов $a_1, a_2, \dots, a_m$ и множество заводов $b_1, b_2, \dots, b_m$, которые можно построить (по одному в городе) в этих городах. Заданы стоимости перевозки тонны груза из любого города в любой $c(a_i, a_j) = c_{ij}$ и объемы перевозки между каждыми двумя заводами $d(b_k, b_\ell) = d_{k\ell}$. Требуется определить, как выгоднее всего разместить заводы, чтобы затраты на перевозки были наименьшими.

1.4.1. Виды и способы задания графов

Такие системы связей различных объектов и образуют графы. Граф можно изобразить рисунком (само название имеет графическое происхождение), на котором объекты (называемые **вершинами**) представляются точками. Эти точки можно пронумеровать цифрами, (см. рис. 1.11) или обозначить буквами. А связи между вершинами называются **дугами**. Причем форма дуги несущественна, важен только сам факт соединения вершин. Дуга обозначается парой вершин, которые она соединяет (a, b) – см. рис. 1.10. Дуга (a, b) называется исходящей из вершины a и заходящей в вершину b , что отмечается стрелкой.



Итак, дугами являются пары вершин. Обозначим множество дуг через R . Тогда обозначение $(a, b) \in R$ означает одну из дуг в множестве R .

Граф может изображать сеть улиц в городе: вершины графа – перекрестки, а дуги – улицы с разрешенными направлениями движения (улицы могут быть с односторонним и двусторонним движением). В виде графов можно представить блок-схемы программ (вершины – блоки, а дуги – разрешенные переходы от одного блока к другому), электрические цепи, молекулы химических соединений, связи между людьми или группами людей.

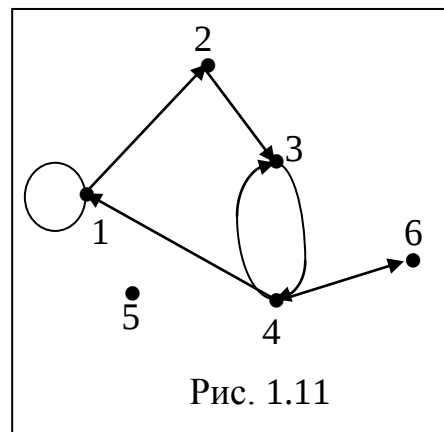


Рис. 1.11

Перейдем к определению графа. Пусть дано множество точек (вершин) $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ и множество связей (дуг) между этими точками R .

Графом G называется пара $G = (A, R)$, то есть множество вершин и дуг, их соединяющих.

Изображение графа G с множеством вершин $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ и множеством дуг $R = \{(1;1); (1;2); (2;3); (3;4); (4;3); (4;1); (4;6)\}$ представлено на рис. 1.11. Дуга $(1;1)$ называется **петлей**. На данном рисунке вершина 5 не имеет связей (дуг) с другими вершинами, поэтому она называется **изолированной**. Дуга $(4;6)$ называется **концевой**.

Граф $G = (A, R)$ называется **ориентированным (орграфом)**, если две вершины соединены дугой только в одном направлении или из того, что дуга $(a, b) \in R$, следует, что дуга $(b, a) \notin R$.

Если же из того, что дуга $(a, b) \in R$, следует, что и дуга $(b, a) \in R$, то мы имеем дело с **неориентированным графом (неорграфом)**.

Если пары дуг (a, b) и (b, a) принадлежат R (рис. 1.12а), то эти дуги на изображении графа «сливаются» в одну линию (без стрелок), которая называется **ребром** (рис. 1.12б). При этом вершины a и b называются **концами ребра** $[a, b]$. Две вершины, соединенные ребром, называются **смежными**. Два ребра называются смежными, если они имеют общую вершину.

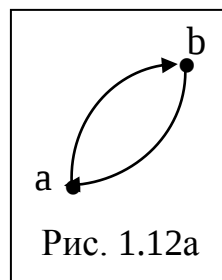


Рис. 1.12а

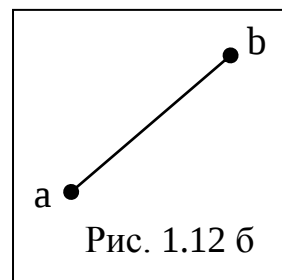


Рис. 1.12 б

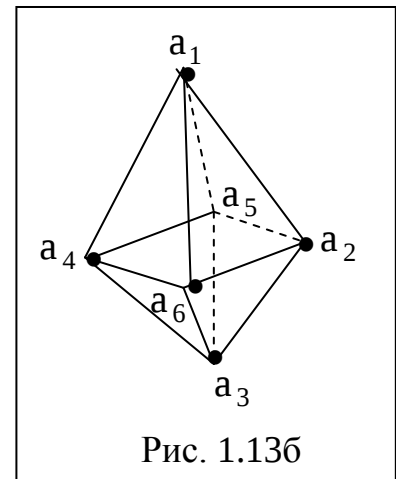
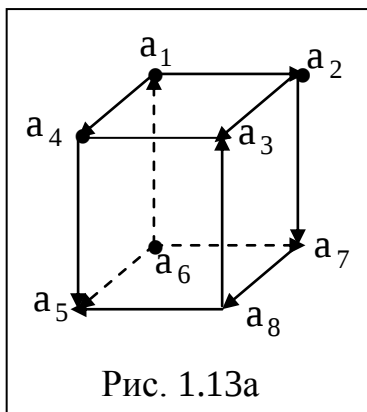
При задании графа для нас не имеет значения природа связи между вершинами a и b , важно только то, что связь существует и информация о связях содержится во множестве дуг R . Бывают ситуации, когда имеется несколько дуг, исходящих из вершины a и заходящих в вершину b ; такие дуги называются **кратными**. Тогда возникает понятие **мультиграфа**. Итак, мультиграф отличается от обыкновенного графа тем, что между его парами вершин может быть несколько одинаковых дуг.

Если в мультиграфе вместо дуг рассматриваются ребра, то такой мультиграф называется **неориентированным**. Если в ориентированном графе (орграфе) $G = (A, R)$ к каждой дуге $(a, b) \in R$ добавить пару (b, a) , то в результате образуется неорграф, который называется **соответствующим данному орграфу** G и обозначается $F(G)$.

Степенью (или **валентностью**) **вершины** называется суммарное количество входящих в эту вершину и выходящих из нее дуг. Вершина степени 0 – изолированная; вершина степени 1 – **концевая**. На рис. 1.11 степень вершины 1 равна четырем.

Если у графа все вершины имеют одинаковую степень, то такой граф называется **однородным**.

ПРИМЕР 1.18. Граф, построенный в виде куба (рис. 1.13а), является однородным, так как все его вершины имеют степень, равную трем. Граф, построенный в виде октаэдра (рис. 1.13б), также является однородным, так как из всех



его вершин исходит одинаковое количество ребер – четыре (то есть степень его вершин равна четырем).

Граф с конечным числом вершин и дуг называется **конечным**, с бесконечным числом вершин – **бесконечным**.

1.4.2. Матрица смежности и матрица инцидентности

Информация о структуре графа может быть задана матрицей бинарного отношения (то есть состоящей из нулей и единиц). Пусть $G = (A, R)$ – граф, в котором множество вершин имеет m элементов: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$.

Матрицей смежности $A_G = (A_{ij})$ графа G называется квадратная матрица порядка m , определяемая следующим образом:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } (a_i, a_j) \in R, \\ 0, & \text{если дуга } (a_i, a_j) \notin R. \end{cases}$$

ПРИМЕР 1.19. Граф G , изображенный на рис. 1.14

имеет матрицу смежности: $A_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

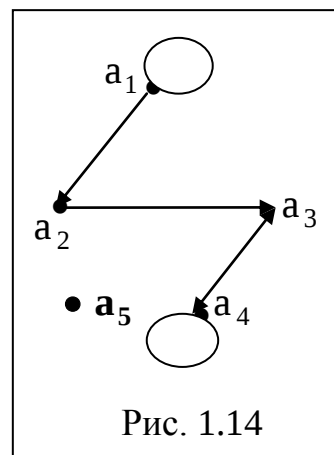


Рис. 1.14

Поясним первую строку матрицы A_G . Эта строка дает нам информацию о наличии связей точки a_1 с другими точками. На первом месте стоит единица, значит, имеем связь точки a_1 с точкой a_1 (то есть сама с собой) – это петля (a_1, a_1) . На втором месте стоит единица, значит, имеем связь точки a_1 с точкой a_2 – это дуга (a_1, a_2) . Затем на рис. 1.14 мы видим, что для точки a_1 с другими точками связей нет, поэтому в первой строке – остальные нули.

Последняя строка матрицы, состоящая из одних нулей, дает информацию об изолированной точке a_5 , которая не имеет связей с другими.

Замечание. Если G – граф без петель, то в матрице смежности A_G по главной диагонали будут стоять нули.

Если мы имеем мультиграф $G(A, R)$, то есть граф, в котором некоторые пары вершин имеют более одной дуги соединения. Тогда информация о структуре такого графа может быть задана **матрицей инцидентности** $B_G = (B_{ij})$. Это прямоугольная матрица размером $m \times n$, где m – число вершин графа, n – общее количество дуг, соединяющих вершины.

$$B_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-я дуга исходит из вершины } a_i; \\ -1, & \text{если } j\text{-я дуга входит в вершину } a_i \text{ и} \\ & \text{не является петлей} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ПРИМЕР 1.20. Мультиграф G , изображенный на рис. 1.15, имеет матрицу инцидентности:

$$B_G = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Матрица}$$

B_G имеет три строки – в соответствии с количеством точек a_1, a_2, a_3 , и шесть

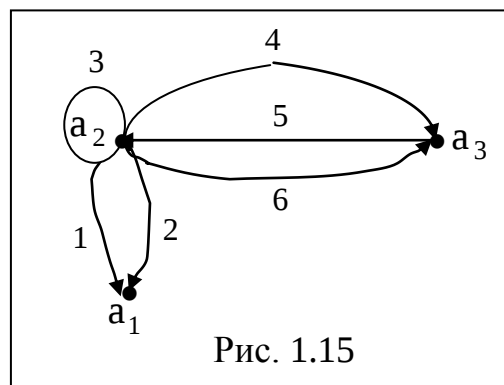


Рис. 1.15

столбцов – в соответствии с количеством дуг 1,2,3,4,5,6.

Поясним первую строку, то есть информацию о связях первой вершины a_1 с другими вершинами. Поскольку первая и вторая дуги входят в т. a_1 , то на первом и на втором местах первой строки стоят -1 , затем на остальных местах 0 , так как в т. a_1 больше не входят и не выходят другие дуги.

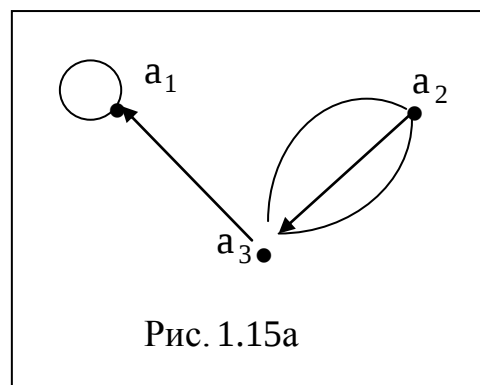
Поясним вторую строку, то есть это информация о связях второй вершины a_2 с дугами. Из точки a_2 выходят дуги 1,2,3,4,6, поэтому во второй строке на местах с соответствующими номерами стоит 1. На пятом месте стоит -1 , так как дуга 5 входит в вершину a_2 .

Третью строку предлагается проанализировать самостоятельно.

Если граф $G = (A, R)$ является разреженным, то есть число дуг достаточно мало по сравнению с числом вершин, то более эффективным (чем с помощью матрицы смежности) является представление дуг графа с помощью списка дуг.

Замечание. Иногда вместо матрицы инцидентности используют (и для мультиграфа) матрицу смежности. Тогда вместо 1 стоит цифра, указывающая количество исходящих из вершины дуг.

ПРИМЕР. 1.21. Дана матрица смежности мультиграфа



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поясним 1-ю строку: из вершины a_1 выходит только одна дуга (петля). Поясним 2-ю строку: из вершины a_2 в вершину a_1 нет дуги, поэтому 0; из вершины a_2 в a_2 - нет петли, поэтому 0; из вершины a_2 в вершину a_3 выходят две дуги, поэтому стоит 2. Поясним 3-ю строку: из вершины a_3 в вершину a_1 есть одна дуга, поэтому стоит 1; из a_3 в a_2 есть одна дуга, поэтому 1; из a_3 в a_3 нет петли, поэтому 0.

1.4.3. Операции над графами

Рассмотрим некоторые основные операции над графами.

К графам можно добавлять (удалять) вершины или дуги. Графы можно: объединять, пересекать, отождествлять (дуги или вершины), складывать и

умножать. Рассмотрим только некоторые (самые простые) операции над графами.

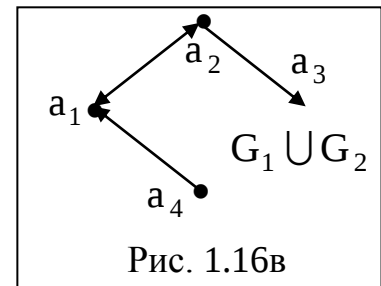
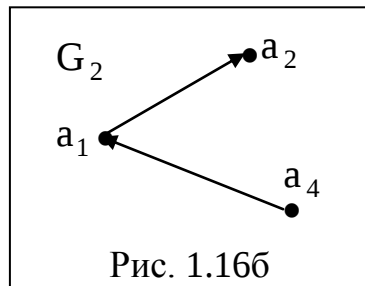
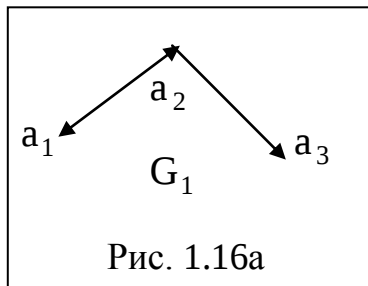
1. Операцией **добавления** к графу $G = (A, R)$ **вершины** a образуется граф $G_1 = (A \cup \{a\}, R)$.

2. Операцией **добавления дуги** (a, b) к графу G образуется граф $G_2 = (A \cup \{a\} \cup \{b\}, R \cup \{(a, b)\})$.

Пусть имеем два графа $G_1 = (A_1, R_1)$ и $G_2 = (A_2, R_2)$.

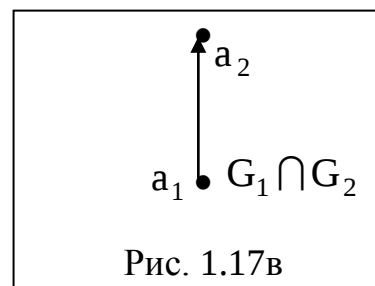
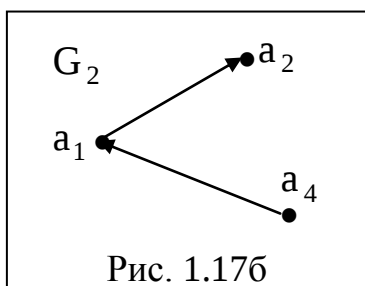
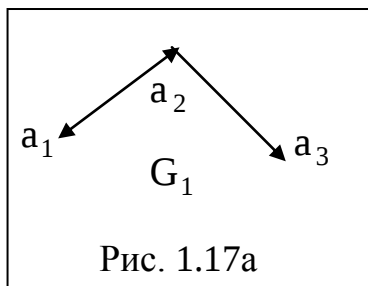
3. **Объединением** $G_1 \cup G_2$ графов G_1 и G_2 называется граф $G_3 = (A_1 \cup A_2, R_1 \cup R_2)$.

ПРИМЕР 1.22. Рассмотрим два графа, состоящих из трех вершин G_1 и G_2 , представленных на рис. 1.16а и 1.16б. Тогда граф, представленный на рис. 1.16 в, является их объединением.



4. **Пересечением** $G_1 \cap G_2$ графов G_1 и G_2 называется граф $G_3 = (A_1 \cap A_2, R_1 \cap R_2)$.

ПРИМЕР 1.23. Рассмотрим те же два графа, состоящих из трех вершин G_1 и G_2 (рис. 1.17), что в примере 1.21.



1.4.4. Расстояния в графах

Пусть $G = (M, R)$ – связный неориентированный граф. Рассмотрим две его несовпадающие вершины a и b . Длина кратчайшего (a, b) маршрута называется **расстоянием** между вершинами a и b и обозначается через $\rho(a, b)$. Введенное таким образом понятие расстояния удовлетворяет следующим аксиомам **метрики**:

- а) $\rho(a, a) = 0$;
- б) $\rho(a, b) \geq 0$; ($\rho(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$);
- в) $\rho(a, b) = \rho(b, a)$ (симметричность);
- г) $\rho(a, b) \leq \rho(a, c) + \rho(c, b)$ (неравенство треугольника).

Если $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – множество вершин в графе $G = (M, R)$, то матрица $P = (p_{ij})$, в которой $p_{ij} = \rho(a_i, a_j)$, называется **матрицей расстояний**. Причем эта матрица является симметричной, то есть равна своей транспонированной $P = P^T$.

Для каждой из вершин графа можно определить **эксцентриситет** $e(a_i)$, то есть расстояние от вершины a_i до наиболее удаленной от нее вершины. Если P – матрица расстояний, то эксцентриситет $e(a_i)$ равен наибольшему из чисел, стоящих в i – й строке.

Максимальный среди всех эксцентриситетов вершин называется **диаметром графа** G и обозначается $d(G) = \max \{e(a_i); a_i \in M; i = 1, \dots, n\}$. Вершина a называется **периферийной**, если $e(a) = d(G)$.

Минимальный из эксцентриситетов графа G называется его **радиусом** и обозначается через $r(G) = \min \{e(a_i), a_i \in M, i = 1, \dots, n\}$. Вершина a называется **центральной**, если $e(a) = r(G)$.

Множество всех центральных вершин графа называется его **центром**.

ПРИМЕР 1.24. Рассмотрим граф G , изображенный на рис. 1.18. Причем нам задана матрица расстояний P :

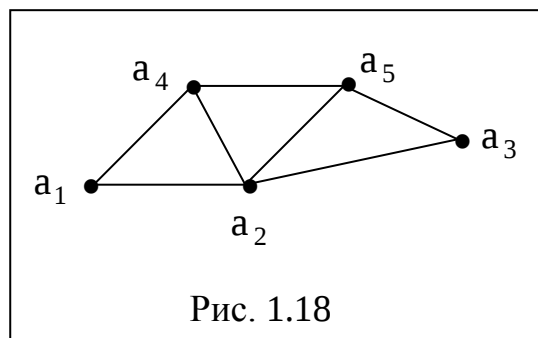


Рис. 1.18

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из данной матрицы мы видим, что эксцентриситет для первой вершины равен 3, то есть $e(a_1) = 3$ – наибольшее число в первой строке (расстояние от вершины a_1 до вершины a_3). Затем видим, что $e(a_2) = 2$; $e(a_3) = 3$; $e(a_4) = 2$; $e(a_5) = 2$. Следовательно, диаметр данного графа $d(G) = 3$ (наибольший из эксцентриситетов).

Вершины a_1 и a_3 являются периферийными.

Радиус данного графа $r(G) = 2$ (наименьший из эксцентриситетов).

Центр графа состоит из множества вершин $\{a_2, a_4, a_5\}$.

Задача нахождения центральных вершин возникает в практической деятельности людей. Пусть, например, граф представляет собой сеть дорог, соединяющих некоторые населенные пункты (вершины графа – это населенные пункты, дуги – это дороги, их соединяющие). Требуется оптимально разместить больницы, магазины и другие пункты обслуживания населения. В подобных ситуациях оптимизация заключается в минимизации расстояния от места обслуживания до наиболее удаленного населенного пункта. Следовательно, местами размещения должны быть центральные вершины графа.

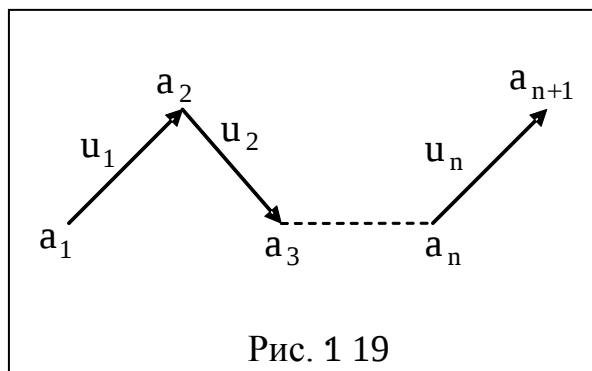
Реальные задачи отличаются от этой идеальной тем, что приходится учитывать и другие обстоятельства, кроме расстояний между населенными пунктами, например, стоимость или время проезда, вид транспорта или качество транспорта или что-то еще.

Для учета этих параметров используются взвешенные графы. Пусть $G = (M; R)$ – взвешенный граф, в котором вес каждой дуги (a_i, a_j) есть некоторое вещественное число $\mu(a_i, a_j)$. **Весом маршрута** $a_1, a_2, \dots, a_n$ называется число $\mu = \sum_{i=1}^{n-1} \mu(a_i, a_{i+1})$. И в связи с введенным понятием веса появляются понятия взвешенный эксцентриситет, взвешенная центральная вершина графа, взвешенный радиус.

1.4.5. Остовы графов

Пусть $G = (M, R)$ – граф. Последовательность

$$a_1, u_1, a_2, u_2, \dots, u_n, a_{n+1},$$

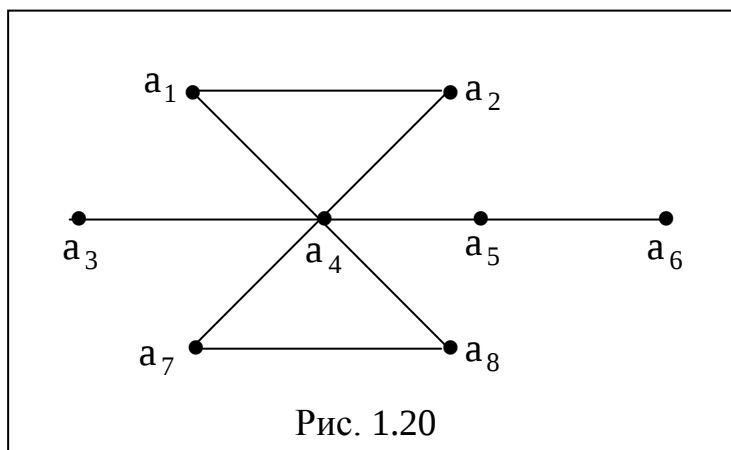


где $a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in M$ – вершины, $u_1, u_2, \dots, u_n \in R$ – дуги, их соединяющие, называется **маршрутом** (или (a_1, a_{n+1}) – маршрутом), если $u_i = (a_i, a_{i+1})$ – рис. 1.19.

Маршрут называется **цепью**, если все ребра $u_1, u_2, \dots, u_n$ различны, и **простой цепью**, если все его вершины (кроме, возможно, первой и последней) различны.

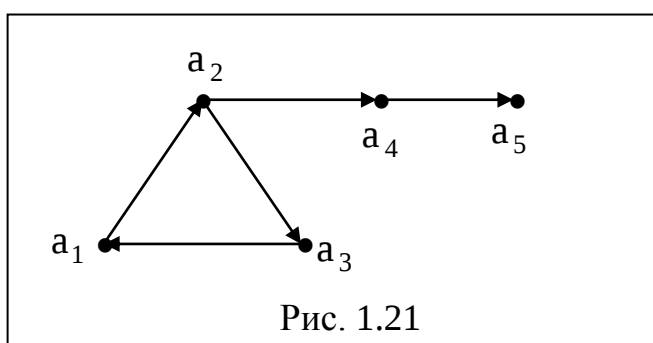
Маршрут называется **циклическим**, если $a_1 = a_{n+1}$. Циклическая цепь называется **циклом**, а циклическая простая цепь – **простым циклом**.

ПРИМЕР 1.25. Рассмотрим граф, изображенный на рис. 1.20. Здесь циклическая цепь вершин (a_1, a_2, a_4, a_1) есть простой цикл; цепь вершин $(a_1, a_2, a_4, a_7, a_8, a_4, a_1)$ – цикл, не являющийся простым. Простыми цепями являются наборы: (a_1, a_2) или (a_1, a_2, a_4, a_7) или $(a_1, a_2, a_4, a_8, a_7)$ и другие.



Маршрут $a_1, u_1, a_2, u_2, \dots, u_n, a_{n+1}$ называется **контуром**, если $a_1 = a_{n+1}$. Граф, не имеющий контуров, называется **бесконтурным**. Вершина a_j называется **достижимой** из вершины a_i , если существует путь (a_i, a_j) .

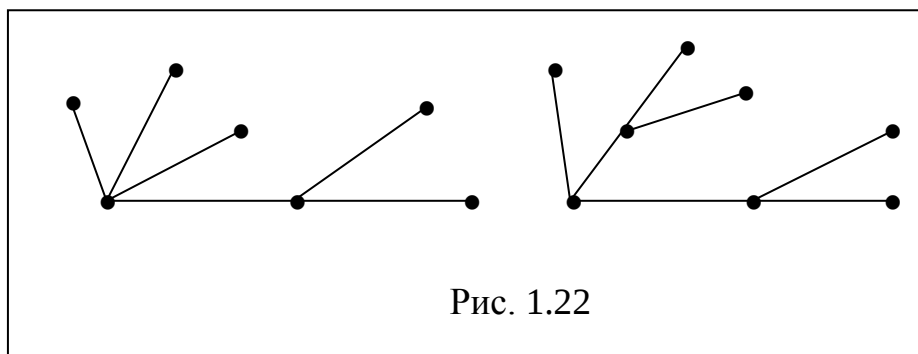
ПРИМЕР 1.26. На рис. 1.21 изображен граф, имеющий контур (a_1, a_2, a_3, a_1) . Вершина a_5 достижима из любой другой вершины. Но из вершины a_5 не достижима ни одна другая вершина.



Неориентированный граф называется **связным**, если любые две его несовпадающие вершины соединены маршрутом.

Деревом называется связный неориентированный граф, не содержащий циклов. Деревья образуют так называемый лес (компонентами связности леса являются деревья).

На рис. 1.22 изображен лес, состоящий из двух деревьев.



УЧЕБНО – МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

РАЗДЕЛ 12. «ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ»

2. Методические указания для студентов

2. Методические указания для студентов

2.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

2.1.1. Множества и операции над множествами

Понятие множества в математике является одним из основополагающих. Под множеством понимают совокупность объектов, объединенных по какому-то признаку. Объекты, которые образуют множество, будем называть *элементами множества*. Например, если рассмотреть множество студентов первого курса УГНТУ, то элементами этого множества будут являться студенты. Множества принято обозначать большими заглавными буквами латинского алфавита: $A, B, C, \dots, X, Y, Z$; элементы множества принято обозначать малыми буквами. Тот факт, что a является элементом множества A обозначается через $a \in A$ (a «принадлежит» множеству A). Если же a не принадлежит множеству A , тогда пишут $a \notin A$ или $a \in \bar{A}$.

Множество можно задать перечислением принадлежащих ему элементов или указанием свойств, которым элементы множества удовлетворяют. Если $a_1, a_2, \dots, a_n$ – все элементы множества A , то будем писать $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Если же есть свойство (закон) f , которому «подчиняются» все элементы множества A , то в этом случае множество записывают так: $A = \{a / f(a)\}$ или $A = \{a / \text{обладает свойством } f\}$.

Если множество A не содержит ни одного элемента, то его называют *пустым* и обозначают знаком $\emptyset$.

Множество A называется *подмножеством* множества B (обозначается $A \subseteq B$), если все элементы множества A принадлежат множеству B .

Множества A и B называются *равными* или совпадающими (обозначается $A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов.

Запись $A \subset B$ означает, что множество A строго включено в множество B и $A \neq B$ (A не равно B).

Пусть даны два множества A и B . Рассмотрим простейшие операции над этими множествами.

1. Объединением ($\cup$) двух множеств A и B является множество $C = \{c / c \in A \text{ или } c \in B\}$. Знак объединения читается с помощью союзного слова «или».

2. Пересечением ($\cap$) двух множеств A и B является множество $D = \{d / d \in A \text{ и } d \in B\}$. Знак пересечения читается с помощью союза «и».

3. Разностью множеств A и B ($A \setminus B$) является совокупность таких элементов множества A , которые не принадлежат множеству B : $A \setminus B = G = \{g / g \in A \text{ и } g \notin B\}$.

Декартовым (прямым) произведением множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ (с количеством элементов соответственно $k_1, k_2, \dots, k_n$) называется множество

$B = \prod_{i=1}^n A_i$, состоящее из $K = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$ элементов, каждый из которых имеет следующий вид:

$$b_j = (a_1, a_2, \dots, a_n), \text{ где } a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n. \quad (2.1)$$

Здесь $j = 1, \dots, K$.

Декартово произведение иногда обозначают $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. Если $A_1 = A_2 = \dots = A_n$, то множество

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = A \times A \times \dots \times A = A^n \quad (2.2)$$

называется ***n* – й декартовой степенью множества A**.

ПРИМЕР 2.1. Даны два множества чисел $A = \{4; 8; 12; 14\}$ и $B = \{5; 7; 9\}$. Необходимо определить, из каких элементов-чисел будет состоять множество $C = A \cup B$.

Решение. По определению операции объединения ($\cup$ – «или»): $C = A \cup B = \{4; 5; 7; 8; 9; 12; 14\}$.

ПРИМЕР 2.2. Даны два множества чисел $A = \{4; 8; 12; 14\}$ и $B = \{4; 5; 8; 9\}$. Необходимо определить, из каких элементов-чисел будет состоять множество $D = A \cap B$.

Решение. По определению операции пересечения ($\cap$ – «и»): $D = A \cap B = \{4; 8\}$, то есть множество D состоит из элементов, которые принадлежат и множеству A и множеству B .

ПРИМЕР 2.3. Для заданных множеств $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ и $B = \{3; 4; 5\}$ найти множество $D = A \cap B$.

Решение. По определению операции пересечения множеств ($\cap$ – «и»): $D = A \cap B = \emptyset$, то есть получится пустое множество, не имеющее ни одного элемента, так как у множеств A и B нет совпадающих цифр (т.е. одинаковых элементов).

ПРИМЕР 2.4. Даны три множества чисел $A = \{-3; -2; 1\}$; $B = \{-5; -4; -3\}$; $C = \{-4; -3; -2\}$. Из какого числа элементов состоит множество $D = (A \cap C) \setminus B$?

Решение. Поскольку в предложенном выражении поставлены скобки, то вначале выполняем операцию в скобке, то есть определим множество $A \cap C = \{-3; -2\}$. А теперь выполним операцию вычитания (в соответствии с определением). В результате должно получиться множество $A \cap C$, из

которого «вычтены» элементы множества B , то есть $(A \cap C) \setminus B = \{-2\}$. Мы получили множество, состоящее из одного элемента.

ПРИМЕР 2.5. Даны три множества чисел $A = \{20; 30; 40; 50\}$; $B = \{20; 25; 30; 35\}$; $C = \{30; 35; 40; 45\}$. Определить множество $D = (A \cup B) \setminus C$.

Решение. Поскольку в предложенном выражении поставлены скобки, то вначале выполняем операцию в скобках, то есть определим множество $A \cup B = \{20; 25; 30; 35; 40; 50\}$. А теперь выполним операцию вычитания, в результате которой получится множество чисел, принадлежащих $A \cup B$, но без чисел, принадлежащих C : $D = (A \cup B) \setminus C = \{20; 25; 50\}$.

ПРИМЕР 2.6. Даны три множества чисел $A = \{1; 2; 3\}$; $B = \{4; 5; 6\}$; $C = \{7; 8; 9\}$. Из какого количества элементов будет состоять множество $D = A \cup B \cup C$?

Решение. Поскольку множество D строится как объединение всех предложенных множеств, то $D = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Значит, количество элементов у множества D равно 9.

ПРИМЕР 2.7. Даны три множества чисел $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $B = \{3; 4; 5\}$; $C = \{1; 3; 5\}$. Определить множество $D = A \cap B \cap C$.

Решение. Поскольку множество D строится как пересечение трех предложенных множеств, значит, результатом будет множество таких чисел, которые принадлежат и множеству A , и множеству B , и множеству C : $D = \{3; 5\}$.

ПРИМЕР 2.8. Сколько парных элементов будет содержать декартово произведение для множеств $A_1 = \{1; 2; 3\}$ и $A_2 = \{3; 4\}$?

Решение. В соответствии с определением декартова произведения и формулой (2.1) для множеств A_1 и A_2 мы имеем: $B = A_1 \times A_2$ – это множество состоит из элементов, каждый из которых имеет вид: $b_1 = (1; 3)$; $b_2 = (1; 4)$; $b_3 = (2; 3)$; $b_4 = (2; 4)$; $b_5 = (3; 3)$; $b_6 = (3; 4)$. Или другая форма записи множества $B = \{(1; 3); (1; 4); (2; 3); (2; 4); (3; 3); (3; 4)\}$. Как видим, множество B состоит из парных элементов (именно так сформулировано условие нашего примера). Таких пар в данном случае получилось 6. Это число можно было получить сразу, исходя из формулы (2.1), то есть $K = k_1 \cdot k_2 = 3 \cdot 2 = 6$, где $k_1 = 3$ – количество элементов множества A_1 ; $k_2 = 2$ – количество элементов множества A_2 . Итак, ответ, $K = 6$.

ПРИМЕР 2.9. Из предложенных трех множеств: $B_1 = \{(a; 1); (b; 1); (c; 1)\}$; $B_2 = \{(a; 1); (a; 2); (b; 1); (c; 2)\}$; $B_3 = \{(a; 1); (a; 2); (b; 1); (b; 2); (c; 1); (c; 2)\}$ указать множество, соответствующее декартовому произведению двух множеств $A_1 \times A_2$, где $A_1 = \{a; b; c\}$ и $A_2 = \{1; 2\}$.

Решение. В соответствии с определением декартова произведения и формулой (2.1) для множеств A_1 и A_2 мы имеем: $B = A_1 \times A_2$ – это множество состоит из парных элементов, каждый из которых имеет вид: $b_1 = (a;1)$; $b_2 = (a;2)$; $b_3 = (b;1)$; $b_4 = (b;2)$; $b_5 = (c;1)$; $b_6 = (c;2)$.

Вернемся к условиям нашего примера. Нам предложили рассмотреть три множества B_1, B_2, B_3 и указать, какое из них является декартовым произведением $B = A_1 \times A_2$. Ответ – это множество B_3 . Ответ можно было определить быстрее, если исходить из количества парных элементов, составляющих предложенные множества. У множества B_1 этих пар – три, у множества B_2 – четыре, у множества B_3 этих парных элементов – шесть. По определению декартова произведения, его количество парных элементов (в данном случае) равно $K = k_1 \cdot k_2 = 3 \cdot 2 = 6$. И таким бы образом мы вышли на множество B_3 .

ПРИМЕР 2.10. Указать количество парных элементов, из которых состоит декартовое произведение $A_1 \times A_2$ для множеств $A_1 = \{a; b; c; d\}$ и $A_2 = \{-1; 2; 13; -4; 25; 16\}$.

Решение. Мы не будем составлять множество $B = A_1 \times A_2$ и формулировать его элементы (как в примерах 2.8 и 2.9). Поскольку первое множество состоит из четырех элементов, то есть $k_1 = 4$; второе множество состоит из шести элементов, то есть $k_2 = 6$, то ответ мы найдем по формуле $K = k_1 \cdot k_2 = 4 \cdot 6 = 24$. Итак, количество парных элементов, из которых состоит множество $A_1 \times A_2$, равно двадцати четырем.

2.1.2. Отношения, отображения и функции

Иногда при решении задач необходимо из некоторого множества выбрать элементы, связанные между собой некоторым отношением, и сформировать из этих элементов другое множество.

Любое подмножество P прямого произведения $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ (см. формулу (2.1)) называется ***n-местным отношением*** или ***n-местным предикатом*** P на множествах $A_1, A_2, \dots, A_n$.

При $n=1$ предикат P является подмножеством множества A_1 и называется ***унарным отношением***. При $n=2$ предикат P называется ***бинарным отношением***, так как является подмножеством множества $A_1 \times A_2$.

Обратным к P отношением называется множество

$$P^{-1} = \{(y, x) / (x, y) \in P\}. \quad (2.3)$$

Произведением бинарных отношений $P_1 \subseteq A \times B$ и $P_2 \subseteq B \times C$ или композицией P_1 и P_2 называется множество $P_1 \circ P_2 = \{(x, y) / x \in A, y \in C, \text{ и найдется элемент } z \in B \text{ такой, что}$

$$(x, z) \in P_1 \text{ и } (z, y) \in P_2\}. \quad (2.4)$$

Лемма. Для любых бинарных отношений P, Q, R выполняются следующие свойства:

- 1) $(P^{-1})^{-1} = P$;
- 2) $(P \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1}$;
- 3) $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$ (ассоциативность композиции).

Замечание. Существуют предикаты P и Q , для которых не выполняется закон коммутативности $P \circ Q = Q \circ P$.

Отношение $f \subseteq X \times Y$ называется **функцией** или отображением множества X в множество Y , если область определения f совпадает с множеством X , область значений f является подмножеством множества Y и из того, что $(x, y_1) \in f$, $(x, y_2) \in f$ следует $y_1 = y_2$.

Функция $f : X \rightarrow Y$ называется **разнозначной** или **инъективной** (инъекцией), если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких, что $x_1 \neq x_2$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Если же $f(x_1) = f(x_2)$, тогда $x_1 = x_2$.

Функция $f : X \rightarrow Y$ называется **сюръективной** (сюръекцией), если для любого $y \in Y$ найдется $x \in X$ такой, что $f(x) = y$.

Функция $f : X \leftrightarrow Y$ являющаяся одновременно инъекцией и сюръекцией называется **биективной** (биекцией или взаимно-однозначным соответствием).

ПРИМЕР 2.11. Дано множество $A = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Сколько элементов будет содержать бинарное отношение $P = \{(x, y) / x, y \in A, x \leq 3 \text{ и } x \text{ делит } y \text{ без остатка}\}$?

Решение. Так как множество A состоит из восьми элементов, то декартово произведение $A \times A$ будет содержать $K = 8 \cdot 8 = 64$ парных элементов. Предикат P является подмножеством множества $A \times A$, так как нам из этих шестидесяти четырех парных элементов надо выбрать только те, что удовлетворяют условиям нашего предиката, то есть первый элемент пары не должен быть больше трех, а второй элемент пары должен делиться на первый элемент без остатка. Итак, следуя условиям, формируем предикат $P = \{(2; 2); (2; 4); (2; 6); (2; 8); (3; 3); (3; 6); (3; 9)\}$. Ответ: Этот предикат содержит семь элементов.

ПРИМЕР 2.12. Из трех предикатов (отношений между множествами $A = \{a; b; c\}$ и $B = \{1; 2; 3\}$).

$$P_1 = \{(a;1); (b;3); (c;2)\};$$

$$P_2 = \{(a;2); (b;3); (c;1)\};$$

$P_3 = \{(a;2); (b;1); (c;2)\}$ указать тот, который графически показан на рис. 2.1.

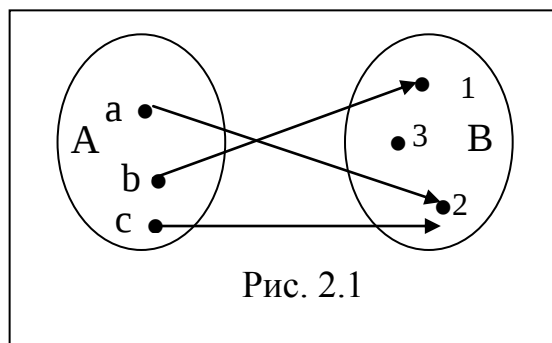


Рис. 2.1

Решение. Итак, предикат – это отношение – «связь» между элементами множества A и B (данная «связь» указана стрелками). Причем здесь важно учитывать направление стрелки, так как «связь» $(a; 2)$ есть, но связи $(2; a)$ нет. Поскольку предикат – это подмножество декартового произведения $A \times B$, то из всех возможных парных элементов множества $A \times B$ выбираем только такие пары, которые показаны на рисунке: $P = \{(a;2); (b;1); (c;2)\}$. И наш результат совпадает с третьим из предложенных предикатов.

2.1.3. Матрица бинарного отношения

Рассмотрим два конечных множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, и бинарное отношение $P \subseteq A \times B$. Определим матрицу $[P] = (p_{ij})$ размера $m \times n$ бинарного отношения P по следующему правилу

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (a_i, b_j) \in P \\ 0, & \text{если } (a_i, b_j) \notin P. \end{cases} \quad (2.5)$$

ПРИМЕР 2.13. Для предиката $P_3 = \{(a;2); (b;1); (c;2)\}$, предложенного в примере 2.12, матрица будет иметь следующей вид: $[P] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим подробнее процесс составления этой матрицы. Первая строка показывает связь первого элемента множества A (т.е. элемента a) со всеми элементами множества B : $(a;1)$ – связи нет, значит – 0; $(a;2)$ – связь есть, значит – 1; $(a;3)$ – связи нет, значит – 0. Вторая строка показывает связь второго элемента множества A (то есть элемента b) со всеми элементами множества B : $(b;1)$ – связь есть, значит – 1; $(b;2)$ – связи нет (0); $(b;3)$ – связи нет (0). Наконец, третья строка показывает связь третьего элемента матрицы A со всеми элементами матрицы B . Рассмотрите самостоятельно.

Полученная матрица содержит полную информацию о связях между элементами множеств A и B .

ПРИМЕР 2.14. Вновь обратимся к множествам A и B , рассмотренным в примере 2.12. Пусть между этими множествами задано отношение, указанное на рис. 2.1. Но вопрос поставим так: составить матрицу для предиката $Q = B \times A$.

Решение. В этом случае матрица имеет вид: $[Q] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим процесс составления этой матрицы. Первая строка показывает связь первого элемента множества B (т.е. 1) со всеми элементами множества A : $(1; a)$ – то есть из «точки» 1 в «точку» a связи нет, значит – 0; $(1; b)$ – то есть из «точки» 1 в «точку» b связи нет, значит – 0; $(1; c)$ – то есть из «точки» 1 в «точку» c связи нет, значит – 0. Аналогичные рассуждения об отсутствии связи элемента 2 множества B со всеми элементами множества A дают и вторую строку матрицы $[Q]$ из нулей. Так же получается и третья строка.

Основные свойства матриц бинарных отношений

Пусть мы имеем два конечных множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. И пусть на декартовом произведении этих множеств определены два бинарных предиката $P \subseteq A \times B$ и $Q \subseteq A \times B$. У предиката P матрица $[P] = (p_{ij})$, у предиката Q матрица $[Q] = (q_{ij})$.

$$1. [P \cup Q] = (p_{ij} + q_{ij}), \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n). \quad (2.6)$$

Замечание. Сложение осуществляется по правилам $0+0=0$; $1+1=1+0=0+1=1$;

$$2. [P \cap Q] = (p_{ij} \cdot q_{ij}), \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n) \quad (2.7)$$

3. Матрица обратного отношения P^{-1} равна транспонированной матрице отношения P .

ПРИМЕР 2.15. Пусть имеем два предиката P и $Q \subseteq A \times B$ и их матрицы:

$$[P] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad [Q] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определить матрицы для $P \cup Q$ и $P \cap Q$.

Решение. Рассмотрим подробнее данные в примере матрицы:

$$[P] = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$[Q] = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Пусть матрицы $[P \cup Q] = [F] = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \end{pmatrix}$ и

$$[P \cap Q] = [H] = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \end{pmatrix}. \text{ Итак, в соответствии с формулой (2.6)}$$

формируем матрицу $[F] = [P \cup Q]$. Вычислим элементы ее первой строки:

$$F_{11} = p_{11} + q_{11} = 1 + 0 = 1; \quad F_{12} = p_{12} + q_{12} = 0 + 1 = 1;$$

$$F_{13} = p_{13} + q_{13} = 1 + 1 = 1 \text{ (см. замечание к формуле (2.6)).}$$

Вычислим элементы ее второй строки: $F_{21} = p_{21} + q_{21} = 0 + 0 = 0;$

$$F_{22} = p_{22} + q_{22} = 1 + 0 = 1; \quad F_{23} = p_{23} + q_{23} = 1 + 1 = 1 \text{ (см. замечание к формуле (2.6)).}$$

$$\text{Итак, } [F] = [P \cup Q] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с формулой (2.7) формируем матрицу $[H] = [P \cap Q]$.

Вычислим элементы ее первой строки: $H_{11} = p_{11} \cdot q_{11} = 1 \cdot 0 = 0;$

$$H_{12} = p_{12} \cdot q_{12} = 0 \cdot 1 = 0; \quad H_{13} = p_{13} \cdot q_{13} = 1 \cdot 1 = 1.$$

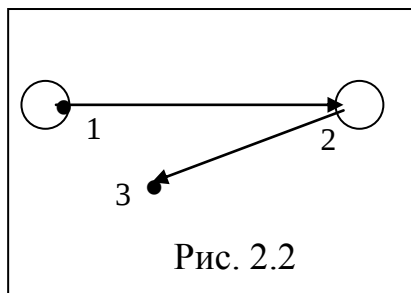
Вычислим элементы ее второй строки: $H_{21} = p_{21} \cdot q_{21} = 0 \cdot 0 = 0;$

$$H_{22} = p_{22} \cdot q_{22} = 1 \cdot 0 = 0; \quad H_{23} = p_{23} \cdot q_{23} = 1 \cdot 1 = 1.$$

$$\text{Итак, } [H] = [P \cap Q] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 2.16. Бинарное отношение (предикат) $P \subseteq A \times A$, где $A = \{1; 2; 3\}$ задан на рис. 2.2.

Из предложенных трех матриц:



$$[P_1] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad [P_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$[P_3] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

выбрать ту, которая соответствует матрице бинарного отношения $[P]$.

Решение. Итак, множество A состоит из трех ($n = 3$) элементов. Декартово произведение $A \times A$ состоит из девяти парных элементов (значит и

матрица $[P]$ будет состоять из девяти элементов). Сформируем матрицу $[P]$.

Она состоит из трех строк и трех столбцов: $[P] = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$.

Рассмотрим первую строку. Она показывает «связь» первой точки с множеством точек $\{1; 2; 3\}$: $p_{11} = 1$ – так как у точки 1 есть «связь» с точкой 1 («петля»); $p_{12} = 1$ – так как у точки 1 есть «связь» с точкой 2; $p_{13} = 0$, так как у точки 1 нет «связи» с точкой 3. Итак, полученная первая строка матрицы $[P]$: $(1 \ 1 \ 0)$ есть во всех предложенных трех матрицах. Значит продолжим формирование матрицы $[P]$. Рассмотрим вторую строку. Она показывает «связь» второй точки с множеством точек $\{1; 2; 3\}$: $p_{21} = 0$, так как из второй точки нет «связи» в точку 1; $p_{22} = 1$, так как у второй точки есть «связь» с точкой 2 («петля»); $p_{23} = 1$, так как у второй точки есть «связь» с точкой 3. Получили вторую строку матрицы $[P]$: $(0 \ 1 \ 1)$. Такая вторая строка есть только у матрицы $[P_3]$. И мы ответ уже нашли. Но желательно до конца убедиться, что ответом является матрица $[P_3]$. Для этого проверим ее третью строку. Она показывает «связь» третьей точки с множеством точек $\{1; 2; 3\}$: $p_{31} = 0$, так как у точки 3 нет «связи» с точкой 1; $p_{32} = 0$, так как от точки 3 нет «связи» к точке 2; $p_{33} = 0$, так как у точки 3 нет «связи» с точкой 3.

Ответ: $[P] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2. КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторика – раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого (обычно конечного) множества в соответствии с заданными правилами. Каждое такое правило определяет способ построения некоторой конструкции из элементов исходного множества, называемой **комбинаторной конфигурацией**.

Простейшими комбинаторными конфигурациями являются перестановки, размещения и сочетания элементов множества.

Пусть дано конечное множество

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}. \quad (2.8)$$

Перестановкой элементов множества A называется любой набор, состоящий из n элементов множества A . Перестановки отличаются друг от друга только порядком входящих в них элементов. Число $P(n)$ всех перестановок, которые можно сконструировать из элементов множества (2.8) вычисляется по формуле

$$P(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n. \quad (2.9)$$

Размещения из n элементов множества (2.8) по k элементов ($k \leq n$) – это комбинаторные конфигурации, составленные из n данных элементов по k элементов в каждой. Два размещения считаются различными, если они отличаются либо элементами, либо их порядком. Число A_n^k всех размещений из n элементов по k элементов вычисляется по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad (k \leq n) \quad (2.10)$$

(напомним, что $0! = 1$).

Замечание. Из формулы (2.10) видно, что если $k = n$, тогда $A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$, значит, по формуле (2.9): $A_n^n = P(n)$.

Сочетания из n элементов множества (2.8) по k элементов ($k \leq n$) – это комбинаторные конфигурации, составленные из n данных элементов по k элементов в каждой таким образом, чтобы одна от другой отличалась хотя бы одним элементом. Число C_n^k всех сочетаний из n элементов по k вычисляются по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}. \quad (2.11)$$

ПРИМЕР 2.17. Рассмотрим множество, состоящее из четырех четных цифр $A = \{2; 4; 6; 8\}$. Сколько четырехзначных чисел можно составить из этих цифр, если цифры применять без повторения (то есть число 2244 – не подходит к условию примера).

Решение. Итак, составляем четырехзначные числа:

2468;	2486;	2648;	2684;	2864;	2846;
4268;	4286;	4628;	4682;	4862;	4826;
6248;	6284;	6842;	6824;	6482;	6428;
8246;	8264;	8426;	8462;	8642;	8624

Всего их получилось 24. И по формуле (2.9): $P(4) = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ числа.

ПРИМЕР 2.18. Пусть требуется расставить на полке 10 книг. Подсчитать, сколько различных вариантов расставить эти книги.

Решение. Поскольку в качестве первой книги можно взять любую из десяти книг, то у нас возникает уже десять вариантов. Затем в качестве второй книги можно взять любую из девяти еще не поставленных. И здесь возникает девять вариантов. Рассуждая далее аналогичным образом, мы приходим к формуле (2.9): $P(10) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 10! = 3628800$. Значит, расставить 10 книг на полке можно 3628800 различными способами.

ПРИМЕР 2.19. Из десяти различных книг произвольным образом берутся и ставятся на полку одна за другой две книги. Сколько имеется вариантов размещения двух книг на полке из десяти?

Решение. Как из десяти книг выбирать наборы по две книги? Сколько таких наборов? Ответить на эти вопросы можно и по формуле (2.10) и делая такой же расчет, как в примере 2.17. В самом деле, из десяти книг выбрать одну мы можем десятью способами. Затем на каждую уже выбранную книгу выбрать вторую мы можем из оставшихся девяти книг, значит у нас девять возможностей. В итоге $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$, то есть девяносто вариантов.

Теперь рассчитаем A_{10}^2 по формуле (2.10)

$$A_{10}^2 = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 90.$$

ПРИМЕР 2.20. В швейной мастерской имеется ткань пяти цветов. Поступил заказ на пошив флагов, состоящих из трех горизонтальных полос разного цвета каждый. Сколько таких различных комбинаций флагов можно сшить?

Решение. Имеющиеся в мастерской пять цветов ткани пронумеруем цифрами: 1, 2, 3, 4, 5. Тогда задачу можно свести к более наглядной работе с цифрами (и доверить ее компьютеру!). Рассмотрим все возможные размещения без повторений из пяти цифр по три цифры:

123	213	312	412	512
124	214	314	413	513
125	215	315	415	514
132	231	321	421	521
134	234	324	423	523
135	235	325	425	524
142	241	341	431	531
143	243	342	432	532
145	245	345	435	534
152	251	351	451	541
153	253	352	452	542
154	254	354	453	543

Всего таких размещений получилось 60. Но из этих размещений не все подходят по условию задачи. Так, если рассмотреть флаги с набором 123 и 321, то это надо считать как один и тот же набор цветов. Значит, такие повторяющиеся варианты наборов надо исключить. В таком случае подсчет количества нужных комбинаций цветов делаем по формуле числа сочетаний

$$(2.11): C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{(1 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3)} = 10.$$

ПРИМЕР 2.21. Художнику сделали заказ на изготовление нескольких плакатов, поставив условие, чтобы каждый плакат был изображен в двухцветном варианте. И дали восемь банок красок различного цвета. Сколько вариантов цветовых комбинаций сможет сделать художник на таких условиях?

Решение. Рассуждая таким же образом, как в примере 2.19, мы приходим к выводу, что таких вариантов будет

$$C_8^2 = \frac{8!}{(8-2)! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) \cdot (1 \cdot 2)} = 28.$$

Умение вычислять перестановки, размещения и сочетания необходимо во многих разделах математики, особенно в теории вероятностей. Есть ряд задач, где используются формулы и свойства для числа сочетаний. Некоторые из них напомним:

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$;
2. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$;

$$3. (x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot x^k \cdot y^{n-k}, \text{ для любых } x, y \in \mathbf{R}. \quad (2.12)$$

Формула (2.12) называется **биномом Ньютона**, а числа C_n^k — **биномиальными коэффициентами**.

$$4. \sum_{k=0}^n C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n. \quad (2.13)$$

ПРИМЕР 2.22. Определить номер того члена разложения бинома Ньютона $\left(\frac{3}{4} \sqrt[3]{a^2} + \frac{2}{3} \sqrt{a}\right)^{12}$, который содержит a^7 .

Решение. Воспользуемся формулой (2.12) полагая $x = \frac{3}{4} \sqrt[3]{a^2}$; $y = \frac{2}{3} \sqrt{a}$.

Тогда k – е (число k нам предстоит определить) слагаемое имеет вид

$$C_{12}^k \cdot x^k \cdot y^{12-k} = C_{12}^k \cdot \left(\frac{3}{4} \sqrt[3]{a^2}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3} \sqrt{a}\right)^{12-k} = C_{12}^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot a^{\frac{2k}{3}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{12-k} \cdot a^{\frac{12-k}{2}}$$

$$= C_{12}^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{12-k} \cdot a^{\frac{2k}{3} + \frac{12-k}{2}}.$$

Поскольку показатель у а равен 7 по условию примера, то $\frac{2k}{3} + \frac{12-k}{2} = 7$. Решаем это уравнение и получаем $k = 6$.

ПРИМЕР 2.23. Найти шестой член разложения бинома Ньютона $\left(9x - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^m$, если биномиальный коэффициент третьего члена разложения равен 120.

Решение. Так как, по условию примера биномиальный коэффициент третьего члена $C_m^3 = 120$, то $\frac{m(m-1) \cdot (m-2)}{3!} = 120$. Из этого условия мы

получили уравнение третьей степени относительно неизвестного нам числа m , которое должно быть целым: $m(m-1) \cdot (m-2) = 720$. Не раскрывая скобки, мы сразу видим одно из решений этого уравнения $m = 10$. Значит, бином имеет

вид $\left(9x - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^{10}$. Тогда по формуле (2.12) находим

$$C_{10}^6 \cdot (9x)^6 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^{10-6} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot 9^6 \cdot x^6 \cdot \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot x \cdot x} =$$

$$= 70 \cdot 3^{11} \cdot x^4.$$

ПРИМЕР 2.24. Найти номер того члена разложения бинома Ньютона $(x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^n$, который содержит x^5 , если сумма всех биномиальных коэффициентов равна 128.

Решение. Поскольку по условию примера сумма $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 128$, а по формуле (2.13) $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$, то $2^n = 128$. Значит, в нашем примере $n = 7$. Теперь составим k -й член

разложения бинома: $C_7^k \cdot (x\sqrt{x})^k \cdot (\sqrt[3]{x})^{7-k} = C_7^k \cdot x^{\frac{3k}{2}} \cdot x^{\frac{k-7}{3}} =$

$$= C_7^k \cdot x^{\frac{9k+2k-14}{6}} = C_7^k \cdot x^{\frac{11k-14}{6}}.$$

Так как по условию примера, показатель у x должен быть равен 5, то $\frac{11k-14}{6} = 5$. Решая это уравнение, получим $k = 4$.

2.3. АЛГЕБРА ЛОГИКИ

2.3.1. Формулы алгебры логики

Для понятия формальной логики используются специальные переменные (называемые логическими или булевыми), которые принимают два значения: **TRUE** – истина и **FALSE** – ложь.

Высказыванием называется повествовательное предложение, о котором (в данный момент) можно сказать, что оно истинно или ложно, но не то и другое одновременно. Если имеется несколько высказываний, то из них можно образовать различные новые высказывания. При этом исходные высказывания называются *простыми*, а вновь образованные – *сложными*.

Поставим в соответствие высказыванию P логическую переменную x , которая принимает значение 1, если P истинно, и принимает значение 0, если P ложно. Из логических переменных можно составлять различные конструкции, которые образуют формулы алгебры логики.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\{x_i / i = 1, 2, \dots, n\}$ – некоторое множество логических переменных. Понятие формулы алгебры логики определяется следующим образом:

1) любая логическая переменная x_i является формулой, которую называют *атомарной*;

2) если φ и ψ – формулы алгебры логики, то выражения $\neg\varphi$; $\varphi \wedge \psi$; $\varphi \vee \psi$; $\varphi \rightarrow \psi$; $\varphi \leftrightarrow \psi$ также являются формулами.

Операции $\neg$; $\wedge$; $\vee$; $\rightarrow$; $\leftrightarrow$ называются **основными логическими операциями** или **связками** и читаются соответственно:

$\neg$ – отрицание ($\neg\varphi$ – не φ , иногда вместо знака $\neg$ пишут другой знак $\bar{}$);

$\wedge$ – конъюнкция ($\varphi \wedge \psi$ читается как: φ и ψ);

$\vee$ – дизъюнкция ($\varphi \vee \psi$ читается как: φ или ψ);

$\rightarrow$ – импликация ($\varphi \rightarrow \psi$ читается как: если φ то ψ или из φ следует ψ);

$\leftrightarrow$ – эквивалентность ($\varphi \leftrightarrow \psi$ читается как: φ тогда и только тогда, когда ψ);

Если формула φ построена из логических переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, то записывается это так: $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

К перечисленным основным логическим операциям добавим еще несколько операций:

φ/ψ – штрих Шеффера или антиконъюнкция определяется так:

$$\varphi/\psi = \neg(\varphi \wedge \psi);$$

$\varphi \downarrow \psi$ – стрелка Пирса или антидизъюнкция определяется так:
 $\varphi \downarrow \psi = \neg(\varphi \vee \psi)$;

$\varphi \oplus \psi$ – кольцевая сумма (логическое сложение или сложение по модулю 2) определяется так: $\varphi \oplus \psi = \neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Кроме того, при написании формул применяют скобки, чтобы выделить те части, которые необходимо сделать в первую очередь.

Среди логических операций есть «более сильные» (значит их надо выполнять в первую очередь) и «равносильные». Напишем цепочку «неравносильных» операций (здесь знак $>$ означает «быть более сильным»):

$$\neg > | > \vee > \rightarrow > \leftrightarrow; \quad (2.14)$$

$$\neg > \downarrow > \vee > \oplus; \quad \neg > \wedge > \vee \quad (2.15)$$

и «равносильных» операций (здесь применяют знак $\approx$ – эквивалентности):

$$\wedge \approx | \approx \downarrow; \quad \leftrightarrow \approx \oplus .. \quad (2.16)$$

Действия логических операций задаются таблицами истинности, в которых в каждой строке взаимно однозначно сопоставляется набор значений переменных и соответствующее этому набору значение полученной формулы.

ПРИМЕР 2.25. Составить таблицу истинности для основных логических операций ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$).

Решение. Пусть имеем две ($n = 2$) формулы φ и ψ . Каждая из них может принять два значения: истина (1) или ложь (0). Значит, у нас получится таблица из $2^n = 2^2 = 4$ строк. Число столбцов у таблицы определяется количеством рассматриваемых операций.

Таблица 2.1

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \rightarrow \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1

ПРИМЕР 2.26. Построить таблицу истинности для формулы $\varphi = (x_1 \rightarrow x_2) \wedge ((\bar{x}_2 \rightarrow x_3) \rightarrow \bar{x}_1)$.

Решение. Поскольку у нас три ($n = 3$) логических переменных x_1, x_2, x_3 , каждая из них может принять два значения (ноль или единицу), то таблица будет иметь $2^n = 2^3 = 8$ строк.

x_1	x_2	x_3	$x_1 \rightarrow x_2$	$\bar{x}_2 \rightarrow x_3$	$(\bar{x}_2 \rightarrow x_3) \rightarrow \bar{x}_1$	Φ
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0

Замечание. При решении подобных примеров надо пользоваться табл. 2.1.

Иногда при оформлении формул операцию конъюнкции ($\wedge$) опускают (не записывают), то есть вместо выражения $x \vee y \rightarrow ((\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}))$ пишут: $x \vee y \rightarrow (\bar{x} y \vee x \bar{y})$.

ПРИМЕР 2.27. При каких значениях переменных получится нулевой набор у формулы $\Phi = x \vee y \rightarrow (\bar{x} y \vee x \bar{y})$?

Решение. Чтобы ответить на вопрос, составим таблицу истинности для этой формулы, используя данные табл. 2.1.

x	y	$x \vee y$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} y$	$x \bar{y}$	$\bar{x} y \vee x \bar{y}$	Φ
0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0

Итак, только в последнем случае, когда переменные x и y одновременно принимают значения истины (т.е. 1;1), формула Φ принимает значение ложь (т.е. 0).

Ответ: (1 1).

ПРИМЕР 2.28. Пусть имеем три логических выражения (формулы) $\Phi_1 = x_1 \& x_2 \vee x_3$; $\Phi_2 = \neg x_2 \& x_3 \vee \neg x_1$; $\Phi_3 = \neg x_3 \& x_2 \vee x_1$. Какое из этих выражений ложно, если логические переменные принимают следующие значения: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$?

Решение. В записи предложенных трех формул видим новый знак $\&$. Так иногда обозначают конъюнкцию, то есть вместо знака $\wedge$ используется знак $\&$. Чтобы ответить на поставленный вопрос, составим таблицу истинности для всех трех формул, в которой первая строка будет соответствовать первой формуле, вторая строка – второй формуле, третья строка – третьей формуле:

x_1	x_2	x_3	$\neg x_1$	$\neg x_2$	$\neg x_3$	$x_1 \& x_2$	φ_1	$\neg x_2 \& x_3$	φ_2	$\neg x_3 \& x_2$	φ_3
0	1	1	1	0	0	0	1				
0	1	1	1	0	0			0	1		
0	1	1	1	0	0					0	0

Итак, видим, что третья формула φ_3 (при данном наборе значений x_1, x_2, x_3) принимает значение ноль (то есть ложно). Ответ: φ_3 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Формулы $\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называются **эквивалентными** ($\varphi_1 \approx \varphi_2$), если совпадают их таблицы истинности.

ПРИМЕР 2.29. Даны три логических выражения (формулы):

а) $\varphi_1 = ((A \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge B)) \wedge (\bar{A} \vee B) \rightarrow A$; б) $\varphi_2 = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$;

в) $\varphi_3 = (A \leftrightarrow B)$. Какие из них являются эквивалентными?

Замечание. Обратим внимание на то, что в этом примере (в отличие от предыдущих примеров) логические переменные обозначены не через $x_1, x_2, x_3, \dots$, а большими латинскими буквами $A, B, C, \dots$

Решение. Составим таблицу истинности для первой формулы (то есть для логического выражения φ_1).

Таблица а

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \wedge \bar{B}$	$\bar{A} \wedge B$	$(A \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge B)$	$\bar{A} \vee B$	φ_1
0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0

Для формул φ_2 и φ_3 таблицы истинности сведем в одну таблицу.

Таблицы б, в

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$\varphi_2 = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	$\varphi_3 = A \leftrightarrow B$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Сопоставляя последний столбец таблицы с последним и предпоследним столбцами таблицы б, в, видим, что формула φ_1 не эквивалентна формулам φ_2 и φ_3 , а вот формулы φ_2 и φ_3 эквивалентны.

Основные эквивалентности между формулами

1. Ассоциативность $\wedge$ и $\vee$:

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3 \approx \varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \approx \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$$
$$(\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3 \approx \varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3) \approx \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \varphi_3.$$

2. Коммутативность $\wedge$ и $\vee$:

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \approx (\varphi_2 \wedge \varphi_1); \quad (\varphi_1 \vee \varphi_2) \approx (\varphi_2 \vee \varphi_1).$$

3. Идемпотентность $\wedge$ и $\vee$:

$$(\varphi \wedge \varphi) \approx \varphi; \quad (\varphi \vee \varphi) \approx \varphi.$$

4. Дистрибутивность $\wedge$ и $\vee$:

$$(\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \approx ((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3));$$
$$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3)) \approx ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3)).$$

5. Закон двойного отрицания:

$$\neg \neg \varphi \approx \varphi.$$

Есть еще ряд эквивалентностей между формулами. Они рассмотрены в первой (теоретической) части.

2.4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

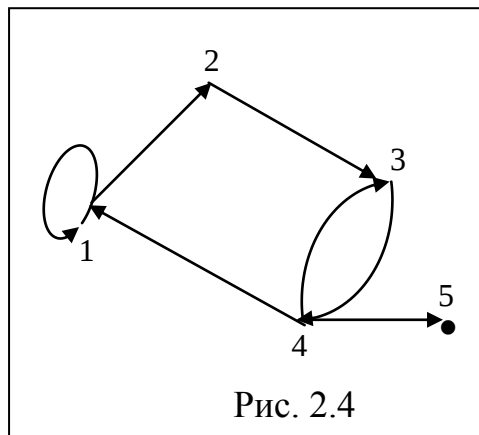
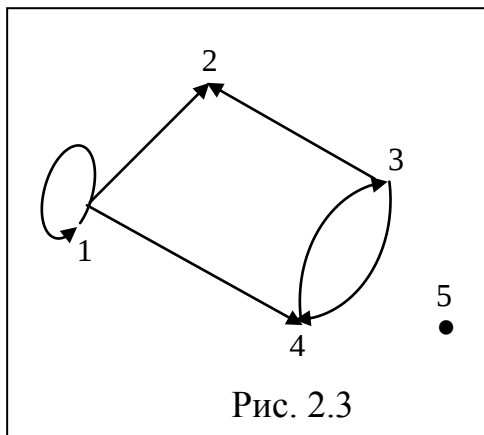
В настоящее время теория графов является одним из бурно развивающихся разделов математики. В теоретико-графовых терминах формулируется большое число задач, связанных с дискретными объектами. Такие задачи возникают при проектировании промышленных и гражданских объектов, при проектировании схем управления, при исследовании автоматов, логических цепей, блок-схем программ, в экономике и статистике, химии и биологии, в теории расписаний и дискретной оптимизации. То есть знание хотя бы отдельных элементов из теории графов становится насущной необходимостью.

2.4.1. Виды и способы задания графов

В прикладных задачах изучаются системы связей между различными объектами. Такие системы связей различных объектов и образуют графы. Граф можно изобразить рисунком (само название имеет графическое происхождение), на котором объекты, называемые **вершинами**, отмечаются точками, а связи между вершинами (называемые **дугами**) отмечаются стрелками между соответствующими точками. Точки можно пронумеровать цифрами или обозначить буквами. Форма дуги может быть различной: в виде прямой линии, в виде искривленной (дугообразной) линии, в виде окружности, исходящей из точки и входящей в эту же точку. Обозначается дуга записью $(a; b)$, где a – точка, из которой дуга «выходит», b – точка, в которую дуга «входит».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть дано множество точек $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ и множество связей (дуг) между этими точками R . **Графом** G называется пара $G = (A, R)$, то есть множество вершин и дуг, их соединяющих.

ПРИМЕР 2.30. На рисунках 2.3 и 2.4 графически изображены два графа. Указать, на каком рисунке изображен граф с множеством вершин $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и множеством дуг $R = \{(1; 1); (1; 2); (2; 3); (3; 4); (4; 3); (4; 1); (4; 5)\}$.



Решение. Дадим сразу ответ: граф, о котором говорится в примере изображен на рис. 2.4. А теперь проанализируем граф, изображенный на рис. 2.3. У него отсутствует дуга (2; 3), но зато есть дуга (3; 2), а это разные дуги. Также на рис. 2.3 дуга (4; 1) отсутствует, но есть дуга (1; 4). Наконец, на рис. 2.3 нет связи точки 5 с остальными точками.

Если граф, изображенный на рис. 2.4 рассматривать как схематичное расположение населенных пунктов 1, 2, 3, 5, то дуги – это дороги, их связывающие. Значит, на рис. 2.4 из пункта (точки) 1 можно попасть в точку 5 по дугам – дорогам (1; 2); (2; 3); (3; 4); (4; 5)). А на рис. 2.3 из пункта (точки) 1 в точку 5 попасть невозможно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дуга (1; 1), изображенная на рис. 2.3 и рис. 2.4 называется **петлей**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если точка не имеет связей – дуг с другими точками, то она называется **изолированной** (см. точку 5 на рис. 2.3).

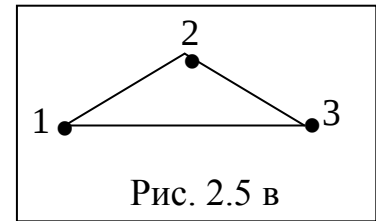
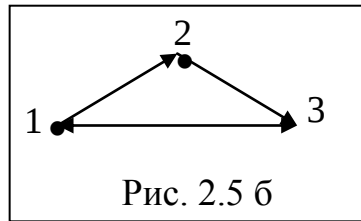
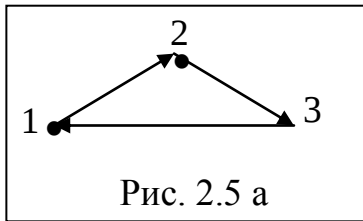
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дуга (4; 5) на рис. 2.4 называется **концевой**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если две точки соединены двумя дугами (на рис. 2.3 это точка 4 и точка 3), то эти дуги на изображении графа «сливаются» в одну линию без стрелок, которая называется **ребром** и обозначается $[a; b]$. Две вершины, соединенные ребром, называются **смежными**. Два ребра называются **смежными**, если они имеют общую вершину.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Граф $G = (A; R)$ называется **ориентированным (орграфом)**, если две вершины соединены дугой только в одном направлении, то есть, если $(a; b) \in R$, то $(b; a) \notin R$. Если две какие-то вершины или

несколько вершин соединены ребром, то такой граф называется **неориентированным (неорграфом)**.

ПРИМЕР 2.31. На рис. 2.5 а, 2.5 б, 2.5 в изображены графы. Указать тот рисунок, где изображен орграф.



Решение. Орграф изображен на рис. 2.5 а, так как в соответствии с определением орграфа его вершины соединены одной дугой (с одним направлением). Граф, изображенный на рис. 2.5 б, неориентированный, так как точка 1 и точка 3 соединены двумя дугами, направленными в разные стороны (эти дуги «слиты» в одну). То есть дуга $(1;3) \in R$ и дуга $(3;1) \in R$, что противоречит определению орграфа. На рис. 2.5 в все вершины соединены не дугами, а ребрами, значит, это неориентированный граф.

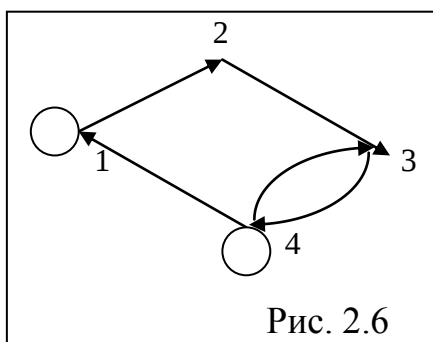
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если у графа G имеется несколько дуг, исходящих из вершины a и заходящих в вершину b , то такие дуги называются **кратными**, а сам граф называется **мультиграфом**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Степенью** (или валентностью) вершины называется суммарное количество входящих в эту вершину и выходящих из нее дуг.

Если вершина изолированная, то ее степень равна нулю. Если вершина концевая, то ее степень равна единице.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если у графа все вершины имеют одинаковую степень, то такой граф называется **однородным**.

ПРИМЕР 2.32. На рис. 2.6 изображен мультиграф. Сколько исходящих дуг имеет вершина 4?



дуг имеет вершина 4?

Решение. Запишем вначале все дуги (исходящие и входящие), связанные с точкой 4.

Это дуги: $(4; 1)$; $(4; 3)$; $(4; 4)$ и $(3; 4)$. Исходящими из точки 4 являются первые три дуги. Последняя дуга $(3; 4)$ – это входящая дуга в точку 4.

Ответ: 3.

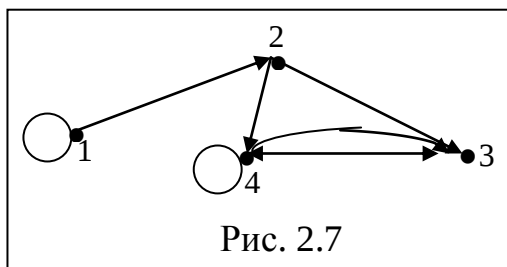
ПРИМЕР 2.33. Рассмотрим вновь граф, изображенный на рис. 2.6. Какова степень вершины 4?

Решение. В соответствии с определением, степень вершины – это суммарное количество входящих в вершину и исходящих из нее дуг. Для вершины 4 это количество равно пяти: три дуги исходящие: $(4; 1)$; $(4; 3)$; $(4; 4)$ и

две дуги входящие в точку 4: (3; 4); (4; 4). Таким образом, при подсчете степени вершины дуга (4; 4) считается дважды (и как исходящая, и как входящая).

Ответ: 5.

ПРИМЕР 2.34. На рис.2.7 изображен мультиграф. Подсчитать, какова суммарная степень всех вершины.



Решение. Степень вершины 1 равна трем (см. объяснение в примере 2.33); степень вершины 2 равна трем; степень вершины 3 равна трем, наконец, степень вершины 4 равна пяти. В итоге суммарная степень всех вершин равна четырнадцати.

Ответ: 14.

2.4.2. Операции над графами

Из множества операций, которые можно производить над графами, мы рассмотрим только самые простые. Это операции добавления вершины или дуги, объединение и пересечение графов.

Пусть имеем граф $G = (A; R)$, где $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – множество вершин графа, R – множество дуг (или ребер), соединяющих эти вершины.

1. Операцией **добавления** к графу $G = (A; R)$ **вершины** образуется граф $G_1 = (A \cup \{b\}, R)$.

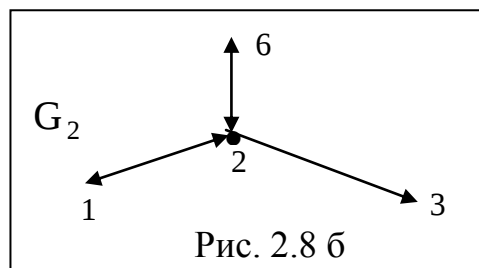
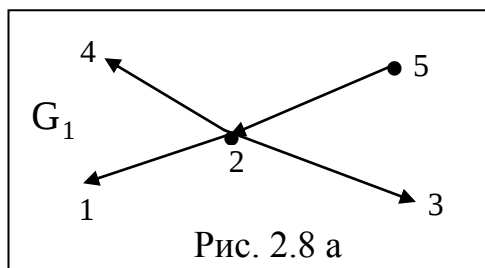
2. Операцией **добавления дуги** (a, b) к графу $G = (A; R)$ образуется граф $G_2 = (A \cup \{a\} \cup \{b\}; R \cup (a, b))$.

Замечание. Можно дать аналогичные определения для операций удаления вершины или дуги.

3. **Объединением** $G_1 \cup G_2$ графов $G_1 = (A_1; R_1)$ и $G_2 = (A_2; R_2)$ называется граф $G_3 = (A_1 \cup A_2; R_1 \cup R_2)$.

4. **Пересечением** $G_1 \cap G_2$ графов $G_1 = (A_1; R_1)$ и $G_2 = (A_2; R_2)$ называется граф $G_3 = (A_1 \cap A_2; R_1 \cap R_2)$.

ПРИМЕР 2.35. Даны графы G_1 (см. рис. 2.8 а) и G_2 (см. рис. 2.8 б). Представить графически и аналитически граф $G_3 = G_1 \cup G_2$.



Решение. Граф $G_1 = (A_1; R_1)$ состоит из пяти точек (т.е. $A_1 = \{1; 2; 3; 4; 5\}$) и четырех дуг (т.е. $R_1 = \{(2; 1); (2; 3); (2; 4); (5; 2)\}$). Граф $G_2 = (A_2; R_2)$ состоит

из четырех точек (т.е. $A_1 = \{1; 2; 3; 6\}$) и пяти дуг (т.е. $R_2 = \{(1; 2); (2; 1); (2; 3); (2; 6); (6; 2)\}$). В соответствии с определением объединения графов строим граф $G_3 = G_1 \cup G_2 = (A_3; R_3)$, где $A_3 = A_1 \cup A_2 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; $R_3 = R_1 \cup R_2 = \{(1; 2); (2; 1); (2; 3); (2; 6); (6; 2); (2; 4); (5; 2)\}$.

Аналитически граф G_3 мы построили, теперь изобразим его графически.

Итак, объединением графов, изображенных на рис. 2.8 а и рис. 2.8 б является граф, изображенный на рис. 2.9.

ПРИМЕР 2.36. Даны графы G_1 и G_2 из

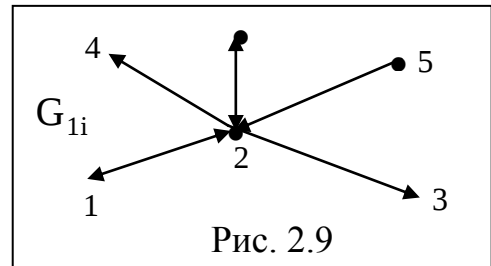


Рис. 2.9

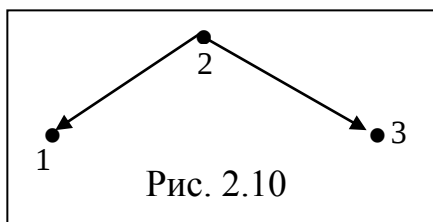


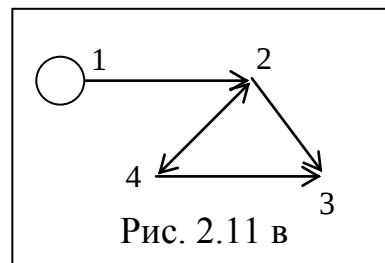
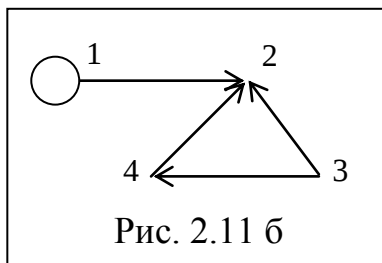
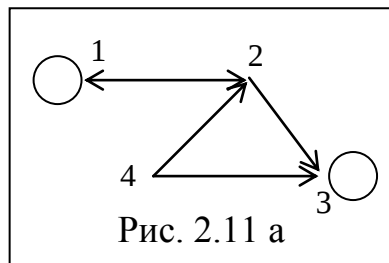
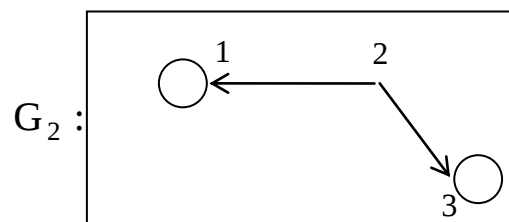
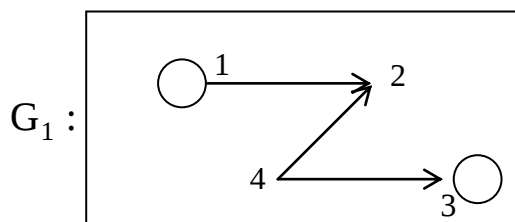
Рис. 2.10

примера 2.35. Представить графически и аналитически граф $G_4 = G_1 \cap G_2$.

Решение. Графы $G_1 = (A_1; R_1)$ и $G_2 = (A_2; R_2)$ подробно описаны в решении предыдущего примера. Этим описанием мы будем пользоваться и сейчас. В соответствии с определением пересечения графов строим граф $G_4 = G_1 \cap G_2 = \{A_4; R_4\}$, где $A_4 = A_1 \cap A_2$; $R_4 = R_1 \cap R_2$. Множество точек A_4 должно содержать только те точки-вершины, которые входят и в граф G_1 и в граф G_2 . Это точки 1, 2, 3. Значит $A_4 = \{1; 2; 3\}$. Множество дуг R_4 должно содержать только те дуги, которые входят и в граф G_1 и в граф G_2 . Это дуги: $(2; 1)$; $(2; 3)$. Значит, $R_4 = \{(2; 1); (2; 3)\}$. Аналитически граф G_4 мы построили. Изобразим его графически.

Итак, пересечением графов, изображенных на рис. 2.8 а и 2.8 б является граф, изображенный на рис. 2.10.

ПРИМЕР 2.37. На рис. 2.11 а, 2.11 б, 2.11 в изображены графы. Укажите, какой из рисунков соответствует графу $G_3 = G_1 \cup G_2$, где



Решение. Рассмотрим сначала исходные графы G_1 и G_2 : $G_1 = (A_1; R_1)$, здесь A_1 – множество вершин $= \{1; 2; 3; 4\}$; R_1 – множество дуг $= \{(1; 2); (2; 1); (4; 2); (4; 3); (3; 3)\}$; $G_2 = (A_2; R_2)$, здесь $A_2 = \{1; 2; 3\}$ и $R_2 = \{(1; 1); (2; 1); (2; 3); (3; 3)\}$. Построим аналитически граф $G_3 = G_1 \cup G_2$, где $A_3 = A_1 \cup A_2$ – объединенное множество вершин $= \{1; 2; 3; 4\}$; $R_3 = R_1 \cup R_2$ – объединенное множество дуг $= \{(1; 1); (1; 2); (2; 1); (2; 3); (3; 3); (4; 2); (4; 3)\}$. Итак, проанализируем рисунки 2.11 а, 2.11 б, 2.11 в. На всех рисунках количество вершин и названия вершин совпадает с множеством вершин построенного нами графа G_3 . Рассмотрим теперь дуги. Количество дуг на рис. 2.11 а – семь, на рис. 2.11 б – пять; на рис. 2.11 в – шесть. У построенного нами графа G_3 количество дуг – семь. Значит, графы, изображенные на рис. 2.11 б и 2.11 в, не являются графами $G_3 = G_1 \cup G_2$. Но необходимо проверить не только количество дуг, но и сами дуги. В данном случае все дуги, изображенные на рис. 2.11 а и дуги построенного нами аналитически графа G_3 , совпадают.

Ответ: рис. 2.11 а.

2.4.3. Матрица смежности и матрица инцидентности для графов

При задании графа для нас не имеет значения природа связи между вершинами а и б. Важно только существует эта связь или нет. Поэтому информация о структуре графа может быть задана матрицей бинарного отношения (то есть состоящей из нулей и единиц). Пусть имеем граф $G = (A; R)$, где A – множество вершин $= \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$; R – множество дуг, соединяющих некоторые из этих вершин.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Матрицей смежности $A_G = (A_{ij})$ графа G называется квадратная $(n \times n)$ матрица, определяемая следующим образом:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } (a_i, a_j) \in R, \\ 0, & \text{если дуга } (a_i, a_j) \notin R. \end{cases} \quad (2.16)$$

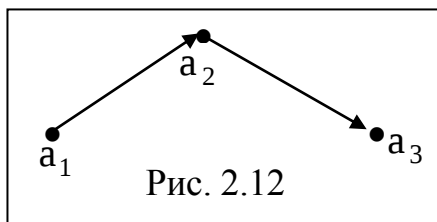
Если мы имеем мультиграф $G = (A; R)$, то есть граф, у которого некоторые пары вершин имеют более одной дуги соединения, тогда информация о структуре такого графа может быть задана матрицей инцидентности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Матрица инцидентности $B_G = (B_{ij})$ мультиграфа $G = (A; R)$ (где $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – множество вершин графа) – это прямоугольная матрица размером $n \times k$, где k – общее количество дуг, соединяющих вершины, определяемая следующим образом:

$$B_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } \ell_j \text{ исходит из вершины } a_i; \\ -1, & \text{если дуга } \ell_j \text{ входит в вершину } a_i \text{ и} \\ & \text{не является петлей} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2.17)$$

Замечание. Матрицы смежности и инцидентности применяют обычно в тех случаях, когда количество вершин у графа велико. Если же количество вершин у графа в пределах десяти и незначительное количество дуг, тогда граф задают простым перечислением вершин и дуг.

ПРИМЕР 2.38. Составить матрицу смежности для графа, изображенного на рис. 2.12.



Решение. Граф, изображенный на рис. 2.12, $G = (A; R)$ состоит из трех $(n = 3)$ вершин $A = \{a_1, a_2, a_3\}$. И двух дуг $R = \{(a_1; a_2); (a_2; a_3)\}$. Значит, матрица смежности A_{ij} для нашего графа будет размером 3×3 :

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поясним, как получена первая строка матрицы. В соответствии с формулой (2.16) первая строка $(i = 1)$ показывает связь точки a_1 с остальными точками: дуги (a_1, a_1) , то есть петли, нет, значит 0; дуга (a_1, a_2) есть, значит, 1;

дуги (a_1, a_3) нет, значит $- 0$. Поясним вторую строку ($i = 2$). Она показывает связь точки a_2 с остальными точками: дуги (a_2, a_1) нет, значит, $- 0$, дуги (a_2, a_2) , то есть петли, нет, значит $- 0$; дуга (a_2, a_3) есть, значит, 1. Третья строка полностью состоит из нулей, так как из точки a_3 к остальным точкам нет связи, значит, нет дуг: (a_3, a_1) ; (a_3, a_2) ; (a_3, a_3) .

$$\text{Ответ: } A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

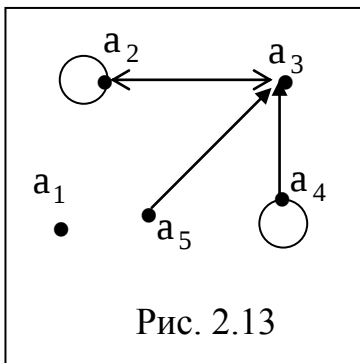


Рис. 2.13

ПРИМЕР 2.39. Составить матрицу смежности для графа, изображенного на рис. 2.13.

Решение. Граф, изображенный на рис. 2.13, $G = (A; R)$ состоит из пяти ($n = 5$) вершин

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ и шести дуг

$$R = \{(a_2; a_2); (a_2; a_3); (a_3; a_2); (a_4; a_3); (a_4; a_4); (a_5; a_3)\}.$$

Вершина a_1 – изолированная, она не имеет связей с остальными точками. Значит, первая строка и первый столбец матрицы смежности A_{ij} будут состоять из нулей, так как они показывают наличие связей первой точки с остальными точками:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поясним, как получена вторая строка матрицы A_{ij} . Эта строка показывает «связь» вершины a_2 с остальными вершинами: дуги (a_2, a_1) нет, значит, $- 0$; дуга (a_2, a_2) есть, значит 1; дуга (a_2, a_3) есть, значит, 1; дуги (a_2, a_4) нет, значит -0 ; дуги (a_2, a_5) нет, значит, $- 0$. Аналогичным образом формируются остальные строки, соответственно для вершин a_3, a_4, a_5 .

ПРИМЕР 2.40. Из предложенных трех матриц:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

указать ту, которая является матрицей смежности для графа, изображенного на рис. 2.14.

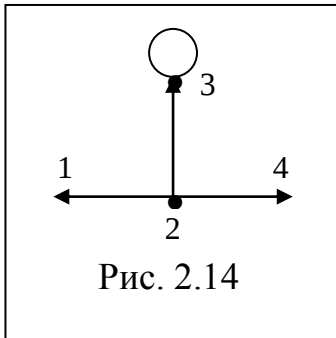


Рис. 2.14

Решение. Граф, изображенный на рис. 2.14, $G = (A; R)$ состоит из четырех ($n = 4$) вершин $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и четырех дуг $R = \{(2;1); (2;3); (2;4); (3;3)\}$. Поскольку по определению матрицы смежности, она будет размером $n \times n$, то есть 4×4 , то из предложенных трех матриц матрица A_1 уже не подходит, так как она размером 3×3 . Кроме того, мы в аналитической записи (перечислении) записали четыре дуги, значит, в матрице смежности будет всего четыре единицы, а остальные все нули. Этому условно соответствует матрица A_3 и не соответствует матрица A_2 , так как там записано шесть единиц.

Правильно ли проставлены в матрице A_3 эти единицы и нули, предлагаем проверить самим.

$$\text{Ответ: } A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 2.41. Записать матрицу инцидентности для мультиграфа G , изображенного на рис. 2.15.

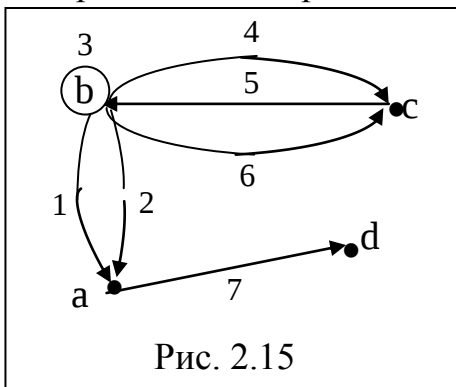


Рис. 2.15

Решение. Мультиграф, изображенный на рис. 2.15 $G = (A; R)$ состоит из четырех ($n = 4$) вершин $A = \{a; b; c; d\}$ и семи ($k = 7$) дуг (на рисунке дуги дополнительно обозначены цифрами). Значит, матрица будет размером $n \times k = 4 \times 7$, то есть четыре строки и семь столбцов:

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поясним первую строку. Она показывает расположение всех семи дуг по отношению к точке a :

- дуга 1 в точку а входит, значит, ставим (-1) ;
- дуга 2 в точку а входит, значит, ставим (-1) ;
- дуги 3, 4, 5, 6 в точку а не входят и не выходят, поэтому в первой строке на месте 3, 4, 5, 6 стоят нули;
- дуга 7 из точки а выходит, поэтому в первой строке на седьмом месте стоит единица.

Поясним вторую строку матрицы. Она показывает расположение всех дуг по отношению к точке b: дуги 1, 2, 3, 4 и 6 выходят из точки b, поэтому во второй строке на первом, втором, третьем, четвертом и шестом местах стоят единицы. А вот дуга 5 в точку b входит, поэтому на пятом месте стоит (-1) . Дуга 7 в точку b не входит и не выходит, поэтому на седьмом месте стоит 0.

Аналогично формируются третья строка (соответствующая точке c) и четвертая строка (соответствующая точке d). Предлагаем самостоятельно проанализировать эти строки.

УЧЕБНО – МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

РАЗДЕЛ 12. «ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ»

3. Материалы для самостоятельной работы студентов

3.1. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Понятие множества, способы задания множества.
2. Понятие подмножества, символы включения, равенства множества.
3. Основные операции над множествами, их свойства. Диаграммы Эйлера-Венна.
4. Операция декартова (прямого) произведения множеств, определение.
5. Мощность множества.
6. Понятие n –местного отношения или n –местного предиката P на множествах $A_1, A_2, \dots, A_n$.
7. Определение функции (отображения).
8. Определение: перестановки, размещения, сочетания.
9. Понятие простого и сложного высказывания.
10. Логические операции, их таблицы истинности, свойства логических операций.
11. Определение функции алгебры логики (переключательной функции).
12. Определение ориентированного графа (орграфа) и неориентированного графа.
13. Степени (или валентности) вершины графа.
14. Матрица смежности графа и матрица инцидентности.
15. Операции над графами.
16. Расстояния в графах.

3.2. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

3.2.1. Теория множеств.

1. Доказать, что $A \setminus B \subset A \cap \overline{B}$
2. Доказать, что $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
3. Доказать включение $A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$
4. Верно ли равенство $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$?
5. Доказать равенство $(A \cap B) \cup (A \cup \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$.
6. Доказать равенство $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

3.2.2. Комбинаторика.

1. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел получать вещи, выяснилось, что он забыл номер. Он только помнит, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру нужно правильно набрать пятизначный номер. Какое наибольшее количество номеров нужно перебрать, чтобы открыть камеру?

2. В прямоугольной таблице из m строк и n столбцов записаны числа $+1$ и -1 так, что произведение чисел в каждой строке и каждом столбце равно -1 . Сколькими способами это можно сделать?

3. Сколько имеется четырехзначных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей?

4. Если повернуть лист белой бумаги на 180° , то цифры 0, 1, 8 не изменяются, цифры 6 и 9 переходят друг в друга, а остальные цифры теряют смысл. Сколько существует семизначных чисел, величина которых не изменяется при повороте листа бумаги на 180° ?

5. В розыгрыше первенства страны по футболу в высшей лиге класса А участвует 10 команд. Команды, которые займут первое, второе и третье места, награждаются соответственно золотой, серебряной и бронзовой медалями, а команды, которые займут последние 2 места, покинут высшую лигу. Сколько разных результатов первенства может быть?

6. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы слова «комбинаторика»?

7. Сколько делителей у числа 16200?

8. Докажите следующее утверждение. Число n имеет нечетное количество делителей тогда и только тогда, когда $n = m^2$.

3.2.3. Отображения (предикаты)

1. Пусть X – множество людей в некотором помещении, Y – множество стульев в этом помещении и пусть:

а) каждому человеку поставлен в соответствие стул, на котором он сидит;

б) каждому стулу поставлен в соответствие человек, который на нем сидит.

В каких случаях правила а) и б) определяют отображения $X \rightarrow Y$ и $Y \rightarrow X$?

2. Даны множества: X , состоящее из m элементов, и Y , состоящее из n элементов. Сколько существует отображений $f : X \rightarrow Y$, обладающих свойством: $\forall y \in Y$ имеет не более двух прообразов в X .

3. Даны множества: X , состоящее из m элементов, и Y , состоящее из n элементов. Сколько существует отображений $f : X \rightarrow Y$, обладающих свойством: $\forall y \in Y$ имеет ровно два прообраза в X .

4. Каждому n -угольнику из некоторого множества n -угольников ставится в соответствие центр окружности, описанной около него. Привести примеры конкретных множеств n -угольников, для которых такое соответствие: а) определяет отображение; б) не определяет отображение.

5. Пусть X – множество всех треугольников, f действует из X в $\mathbb{R}$ и ставит в соответствие каждому треугольнику его площадь. Сколько прообразов имеют числа 1, 0, 4? Какое подмножество $X_1 \subset X$ следует рассмотреть, чтобы $\forall y \in \mathbb{R}$ имел не более одного прообраза в X_1 ?

6. Является ли соответствие, задаваемое формулой $y = \ln x^2$, отображением: а) из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}_+$; б) из $(0; 1)$ в $\mathbb{R}$; в) из $(0,5; 1)$ в $\mathbb{R}_+$?

В каждом из случаев, когда ответ положителен, найдите прообраз элемента y .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. М.: Высшая школа, 1986. – 310 с.
2. Дискретная математика и вопросы кибернетики/ под ред. С.В. Яблонского. –М.: Мир, 1973.
3. Кузнецов О.П., Адельсон – Вельский Г.М. Дискретная математика для инженеров. – М.: Энергия, 1980.-342 с.
4. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики: учебное пособие. – М.: Изд. МАИ, 1992.

Дополнительная литература

1. Оре О. Теория графов. – М.: Наука, 1980. – 336 с.
2. Романовский И.В. Дискретный анализ. – СПб.: МИМ, 1990. – 254 с.
3. Судоплатов С.В., Овчинников Е.В. Элементы дискретной математики. – М.: Новосибирск: ИНФРА – М, 2002. – 280 с.
4. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986. – 384 с.

Учебные пособия кафедры

1. Введение в дискретную математику: учебно-методическое пособие/ Т.В. Умергалина, Р.Р. Чернятьева –Уфа: Изд-во УГНТУ, 2006.
2. Дискретная математика: Сборник задач/ В.И.Луценко. –Уфа: Изд-во БашГУ, 1998.
3. Дискретная математика: учебное пособие/ С.Р.Абдюшева, Д.Р. Алтынбаев, В.Ф. Галиакбаров. - Уфа: Изд-во УГНТУ, 1999. - ч. 1.
4. Дискретная математика: учебно-методическое пособие/ М.Р.Ахмадуллина, В.Р.Ганиева, Е.В.Дружинская, М.А.Салихова. – Уфа: Изд-во УГНТУ, 2003.

Подписано в печать 19.11.2008. Бумага офсетная. Формат бумаги 60x84 1/16.

Гарнитура «Таймс». Печать трафаретная. Усл. печ. л. 3,75. Уч.-изд. л. 3,33.

Тираж 200 экз. Заказ .

Издательство Уфимского государственного нефтяного технического университета
Типография Уфимского государственного нефтяного технического университета

Адрес издательства и типографии:
450062, Республика Башкортостан, г. Уфа, ул. Космонавтов, 1