

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЯНОЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математики

УЧЕБНО – МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

по дисциплине «Математика»

**РАЗДЕЛ 11. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО
ПЕРЕМЕННОГО**

**Теоретические основы
Методические указания для студентов
Материалы для самостоятельной работы студентов**

**Уфа
Издательство УГНТУ
2016**

Данное пособие содержит теоретические материалы, способы и методы решения практических задач, задания для самостоятельной работы студентов, контрольные вопросы для самопроверки, список рекомендуемой литературы.

Разработано для студентов, обучающихся по всем формам обучения по направлениям подготовки и специальностям, реализуемым в УГНТУ.

Первое издание пособия вышло в 2008 году.

Составители: Абзалимов Р.Р., Акмадиева Т.Р., Аносова Е.П., Ахтямов Н.Т., Байрамгулова Р.С., Галиуллин М.М., Галиакбарова Э.В., Гимаев Р.Г., Зарипов Э.М., Зарипов Р.М., Исламгулова Г.Ф., Ковалева Э.А., Лазарев В.А., Майский Р.А., Мухаметзянов И.З., Нагаева З.М., Сахарова Л.А., Сокова И.А., Степанова М.Ф., Сулейманов И.Н., Умергалина Т.В., Фаткуллин Н.Ю., Хайбуллин Р.Я., Хакимова З.Р., Чернятьева М.Р., Юлдыбаев Л.Х., Шамшович В.Ф., Якубова Д.Ф., Якупов В.М., Янчушка А.П., Яфаров Ш.А.

Ответственные за выпуск: Умергалина Т.В., доц. (часть 1, часть 2);

Нагаева З.М., ст.преподаватель (часть 3).

Компьютерный набор текста: Ахметзянова Л.У., Ямаева Э.Ф.

Рецензенты: Асадуллин Р.М., зав.каф. программирования и вычислительной математики БГПУ, д-р физ.-мат. наук, проф.

Морозкин Н.Д., зав. каф. вычислительной математики БГУ, д-р физ.-мат. наук, проф.

© Уфимский государственный нефтяной технический университет, 2015,
дополнение и исправление

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
1. Теоретические основы	6
1.1. Комплексные числа и действия над ними	6
1.2. Функции комплексного переменного	11
1.3. Производная функции комплексного переменного. Условия дифференцируемости. Аналитические функции. Понятие о конформном отображении	17
1.4. Интегрирование функции комплексного переменного	22
1.4.1. Интеграл от функции комплексного переменного	22
1.4.2. Вычисления интеграла от аналитической функции	23
1.4.3. Интегральная формула Коши	27
1.5. Ряды в комплексной области	29
1.5.1. Ряды с комплексными членами	29
1.5.2. Ряды Тейлора и Лорана	31
1.6. Изолированные особые точки функции комплексного переменного	34
1.6.1. Классификация изолированных особых точек	34
1.6.2. Ряды и особые точки	35
1.6.3. Нули аналитической функции. Связь между нулями и полюсами	35
1.6.4. Особенности функции в бесконечно удаленной точке	37
1.7. Вычеты функции комплексного переменного. Применение к вычислению контурных интегралов	39
1.7.1. Вычет функций и его вычисления	39
1.7.2. Теоремы о вычетах и их применение к вычислению контурных интегралов	41
1.8. Применение вычетов к вычислению определенных и несобственных интегралов	43
2. Методические указания для студентов	50
2.1. Комплексные числа и действия над ними	50
2.2. Множества точек, линии, области на комплексной плоскости	54
2.3. Функция комплексного переменного. Предел и непрерывность функции. Основные элементарные функции	60
2.4. Производная функции комплексного переменного. Условия дифференцируемости. Аналитические функции	69

2.5. Интегрирование функции комплексного переменного	73
2.6. Ряды в комплексной плоскости. Ряды Тейлора и Лорана	76
2.7. Изолированные особые точки функции комплексного переменного	82
2.8. Вычеты функции комплексного переменного. Применения вычетов	84
3. Материалы для самостоятельной работы студентов	91
3.1. Теоретические вопросы	91
3.2. Контрольные вопросы	92
3.3. Задачи и упражнения для самостоятельной работы	93
3.4. Расчетные задания	103
Список литературы	119

ВВЕДЕНИЕ

Следствие из основной теоремы алгебры о количестве корней (решений) алгебраического уравнения гласит: каков порядок уравнения – ровно столько у него корней. Рассмотрим алгебраическое уравнение второго порядка $x^2 + 1 = 0$. В соответствии с основной теоремой алгебры у этого уравнения должно быть ровно два корня. Решаем уравнение $x^2 = -1$, извлекаем корень квадратный из левой и правой частей $x = \pm\sqrt{-1}$. И получаем ровно два решения $x_1 = -\sqrt{-1}$ и $x_2 = +\sqrt{-1}$. Но тут мы видим под знаком радикала четной степени отрицательное число. Поэтому чтобы применять обще установленные методы решения алгебраических уравнений и для случая отрицательного дискриминанта, потребовалось расширить область действительных чисел, добавив к ним комплексные числа.

Замечательным свойством комплексных чисел является тот факт, что основные математические операции над ними не выводят из области комплексных чисел.

Комплексная форма записи удобна при математической формулировке многих физических и механических задач, например в электротехнике, радиотехнике, электродинамике. Методы теории функций комплексного переменного нашли широкое применение при решении большого круга задач гидро- и аэродинамики, теории упругости и других естественных наук, так как введение комплексных чисел и функций комплексного переменного удобно в процессе интегрирования различных функций, при решении обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

1.1. Комплексные числа и действия над ними

Любое действительное число (целое, дробное, рациональное, иррациональное) имеет геометрический образ – это точка на оси ОХ. Геометрический образ комплексного числа – это точка, но на плоскости, которая называется **комплексной плоскостью** (рис.1.1).

Определение 1. Мнимой единицей принято называть такое число, которое, будучи возведенным в квадрат, равно (-1) . Обозначают мнимую единицу буквой i (первая буква слова imagine-воображать), то есть $i^2 = -1$. Геометрически мнимая единица изображается на комплексной плоскости (рис.1.1) точкой с координатами $(0;1)$.

Определение 2. Мнимым числом называется выражение $b \cdot i$, где b – действительное число.

Определение 3. Комплексным числом (complex – сложный, составной) называется выражение вида $c = a + bi$,
(1.1)
где a и b – действительные числа, а i – мнимая единица. Числа a и b называются **действительной и мнимой** частями комплексного числа c и иногда обозначаются так: $a = \operatorname{Re} c$ и $b = \operatorname{Im} c$.

Форму (1.1) комплексного числа c называют **алгебраической**. Два комплексных числа $c_1 = a_1 + b_1 \cdot i$ и $c_2 = a_2 + b_2 \cdot i$ считаются равными, если равны их действительные и мнимые части: $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. Комплексное число считается равным нулю, если $a = 0$ и $b = 0$, то есть $c = 0$, если $c = 0 + i \cdot 0$.

Понятия "больше" и "меньше" для комплексных чисел не устанавливаются.

Число $\bar{c} = a - ib$ называется **сопряженным** числу $c = a + ib$. Алгебраические действия над комплексными числами, заданными в форме (1.1), определяются следующими равенствами:

$$c_1 \pm c_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) \cdot i,$$

$$c_1 \cdot c_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot i,$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1 \bar{c}_2}{c_2 \bar{c}_2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) \cdot i}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Комплексное число $c = a + bi$ изображается точкой $M(a, b)$ на координатной

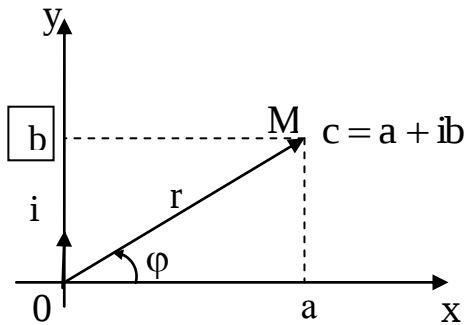


Рис. 1.1

плоскости XOY (рис.1.1). При этом действительные числа $c = a$ изображаются точками на оси OX , называемой здесь действительной осью, а мнимые числа $c = bi$ изображаются точками оси OY , называемой мнимой осью.

Комплексное число $c = a + bi$ может быть изображено вектором $\vec{r} \{a; b\}$ с

координатами a и b и с началом в точке $O(0,0)$, (рис. 1.1).

Длина $r = |\vec{r}|$ вектора $\vec{r} \{a; b\}$, изображающего комплексное число c , называется **модулем комплексного числа**. Угол φ , образуемый этим вектором с положительным направлением действительной оси, называется **аргументом комплексного числа**. Модуль числа принято обозначать $r = |c|$, а аргумент $\varphi = \text{Arg} c$.

Для модуля и аргумента, как видно на рис. 1.1, справедливы формулы

$$r = |c| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (1.2)$$

$$\text{tg} \varphi = \frac{b}{a} \quad (\text{при } a \neq 0). \quad (1.3)$$

Величина $\varphi = \text{Arg} c$ имеет бесчисленное множество значений, отличающихся одно от другого на целое, кратное 2π . Если величину одного из углов обозначить через φ_0 , то совокупность величин всех углов запишется в следующем виде:

$$\text{Arg} c = \varphi_0 + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Значение $\varphi = \operatorname{Arg} c$, принадлежащее промежутку $(-\pi, \pi]$, называется главным и обозначается $\varphi_0 = \arg c$. Итак, $-\pi < \arg c \leq \pi$ и

$$\operatorname{Arg} c = \arg c + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (1.4)$$

Зная действительную часть a и мнимую часть b комплексного числа c и пользуясь тем, что $\operatorname{tg}(\arg c) = \frac{b}{a}$, можем вычислить $\arg c$ по формуле

$$\arg c = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} & \text{при } a > 0, b \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi & \text{при } a < 0, b \geq 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \pi & \text{при } a < 0, b < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } a = 0, b > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{при } a = 0, b < 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Комплексному числу 0 не приписывается какое-либо значение аргумента.

Зная модуль комплексного числа $r = |c|$ и главное значение его аргумента φ_0 , мы можем вычислить его действительную часть a и мнимую часть b по формулам: $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$, подставить a и b в (1.1) и записать комплексное число в следующем виде $c = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. (1.6)

Эту форму комплексного числа называют **тригонометрической**.

Имеют место следующие правила умножения, деления, возведения в целую положительную степень и извлечение корня для комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме: $c_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и $c_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$

$$c_1 c_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \quad (1.7)$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)], \quad (1.8)$$

$$c^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)), \quad (n \in \mathbb{N}), \quad (1.9)$$

$$\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad \text{где } k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (1.10)$$

Формула (2.9) называется **формулой Муавра**.

Докажем формулу (1.9) методом математической индукции. Пусть $n=2$, тогда $c^2 = c \cdot c = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r^2 \cdot (\cos^2 \varphi + 2i \sin \varphi \cdot \cos \varphi + i^2 \sin^2 \varphi) = r^2 ((\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + 2i \sin \varphi \cdot \cos \varphi) = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$ и формула для $n=2$ доказана. Пусть мы доказали для $n = (k-1)$ и получили, что $c^{k-1} = r^{k-1} \cdot (\cos(k-1)\varphi + i \sin(k-1)\varphi)$. Рассмотрим $n=k$, тогда $c^k = r^{k-1} (\cos(k-1)\varphi + i \sin(k-1)\varphi) \cdot r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Перемножаем скобки, применяем формулы тригонометрии и получаем доказательство $c^k = r^k (\cos(k\varphi) + i \sin(k\varphi))$.

В результате вычислений по правилам (1.7), (1.8), (1.9) получаем однозначный результат, который геометрический изображается одной точкой на комплексной плоскости. Правило (1.10) дает многозначный результат. При $k=0, 1, 2, \dots, (n-1)$ мы получаем так называемые **главные** значения вычисляемого корня n -й степени из комплексного числа c . Но для k можно присваивать значения $n, (n+1), \dots$, которые будут совпадать с уже вычисленными главными значениями. Поэтому результат вычисления корня n -й степени из комплексного числа при его геометрическом изображении дает на комплексной плоскости n точек. Все эти точки расположены на окружности с центром в точке $(0,0)$ и с радиусом $\rho = \sqrt[n]{r}$.

В теории функций комплексного переменного известны формулы Эйлера (смотри [5])

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi. \quad (1.11)$$

С помощью первой формулы Эйлера, умножив левую и правую части на r , можно перейти от тригонометрической формы (1.6) к **показательной** форме комплексного числа $c = r e^{i\varphi}$. (1.12)

Ввиду ее компактности она удобнее равносильной тригонометрической формы.

Алгебраические действия (1.7) - (1.10) с помощью показательной формы (1.12) имеют более простой вид:

$$c_1 c_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (1.13)$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (1.14)$$

$$c^n = r^n e^{in\varphi}, \quad (1.15)$$

$$\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.16)$$

При решении задач полезно помнить, что $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ и вообще при любом целом k $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$.

Пример 1. Выделить действительную ($\operatorname{Re} c$) и мнимую ($\operatorname{Im} c$) части комплексного числа $c = \frac{3+2i}{1+i}$.

Решение. $c = \frac{(3+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-2(i)^2+2i-3i}{1+1} = \frac{5-i}{2} = \frac{5}{2} + (-\frac{1}{2})i.$

Итак, $\operatorname{Re} c = a = \frac{5}{2}$, $\operatorname{Im} c = b = -\frac{1}{2}$.

Пример 2. Выяснить геометрический смысл модуля разности $|c_1 - c_2|$ двух комплексных чисел $c_1 = a_1 + b_1 i$ и $c_2 = a_2 + b_2 i$.

Решение. $|c_1 - c_2| = |(a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$

Следовательно, $|c_1 - c_2|$ означает расстояние между точками $c_1 = a_1 + ib_1$ и

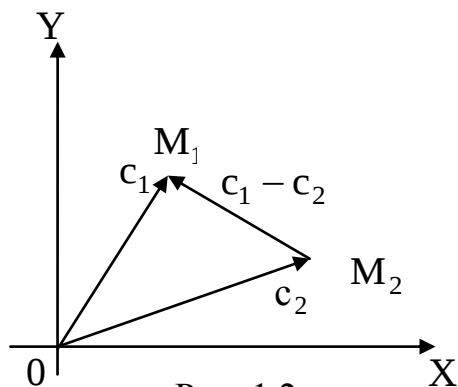


Рис. 1.2

$c_2 = a_2 + ib_2$ (рис. 1.2).

Если изобразить комплексные числа c_1 и c_2 с помощью векторов, то действительная и мнимая части числа $(c_1 - c_2)$ являются координатами вектора $\overline{c_1 - c_2}$, так как при вычитании векторов их координаты

соответственно вычитаются. Значит вычитание комплексных чисел сводится к вычитанию векторов, изображающих эти числа. Как видно из рис. 1.2 $|c_1 - c_2|$ есть длина вектора $c_1 - c_2 = \overline{M_2 M_1}$, иначе расстояние между точками, изображающими числа c_1 и c_2 .

1.2. Функции комплексного переменного

В дальнейшем от комплексных чисел $c = a + bi$ мы перейдем к комплексной переменной $z = x + iy$. И будем рассматривать множество D точек z на комплексной плоскости.

Определение 4. На множестве D точек плоскости z задана функция $w = f(z)$, если каждой точке $z \in D$ поставлено в соответствие одно (однозначная функция) или несколько (многозначная функция) значений комплексного переменного $w \in G$. Мы будем рассматривать только такие функции, для которых множества D и G являются областями, причем D называется *областью определения*, а G — *областью значений функции* $w = f(z)$.

Теорема. Задание функции комплексного переменного $w = f(z)$ равносильно заданию двух функций действительных переменных $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$:

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (1.17)$$

где $u(x, y) = \operatorname{Re} w(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} w(z)$.

Нахождение функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ называется **выделением действительной и мнимой частей функции** $w = f(z)$. Выделение действительной и мнимой частей функции $f(z)$ позволяет свести изучение функции комплексного переменного к изучению двух функций действительных переменных.

Пример 3. Рассмотрим функцию $w(z) = z^3$, где $z = x + iy$. Подставим в функцию $(x + iy)$ вместо z , тогда $w(z) = (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$.

Итак, мы получили $u(x,y)=x^3-3xy^2$ и $v(x,y)=3x^2y-y^3$.

Пример 4. Рассмотрим функцию $w(z)=e^z$, где $z=x+iy$. Подставим в функцию $(x+iy)$ вместо z , тогда $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} =$ по формуле (1.11) $= e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y$. Мы получили $u(x,y)=e^x \cos y$ и $v(x,y)=e^x \sin y$.

Геометрически заданную на D однозначную функцию $w=f(z)$ можно рассматривать как отображение точек области D плоскости z в некоторую область G плоскости w . В этом отображении и проявляются свойства функции $w=f(z)$ (рис. 1.3).

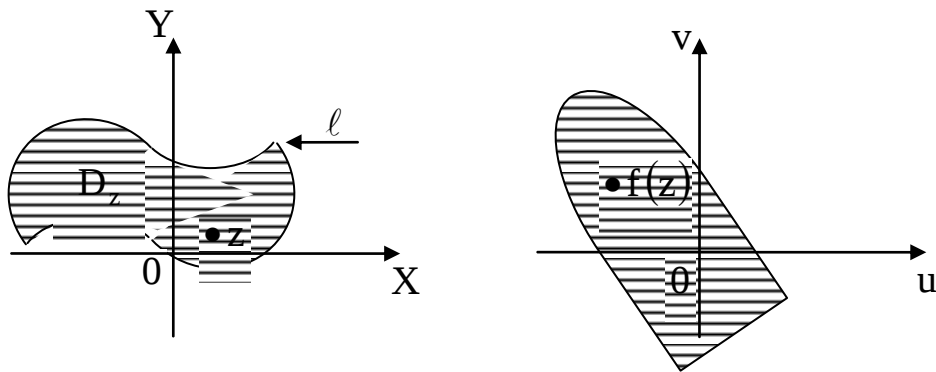


Рис. 1.3

Точки z , линии ℓ_z , области D_z называют прообразами точек $w=f(z)$, линий L_w и областей G_w соответственно, а w, L_w, G_w называют образами при отображении $w=f(z)$.

Если в плоскости z кривая ℓ_z задана неявным уравнением $F(x,y)=0$, то для того, чтобы найти уравнение ее образа L_w $\Phi(u,v)=0$ в плоскости w при отображении, осуществляемом функцией $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$,

достаточно исключить x и y из уравнений

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$$

Если кривая ℓ_z задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ или

$z(t) = x(t) + iy(t), \alpha \leq t \leq \beta$, то можно получить параметрические уравнения L_w , представив действительную и мнимую части $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ как функции параметра t :

$$u = u(x(t), y(t)) = U(t); \quad v = v(x(t), y(t)) = V(t).$$

Пример 5. При отображении $w = z^2$ найти образ прямой линии $\ell_z: y = x - 1$.

Решение. Линия ℓ_z – прямая, заданная уравнением в действительных переменных, от которого можно перейти к параметрическим уравнениям. Если заменить $x = t$, тогда $y = t - 1$.

Определим действительную и мнимую части функции $w = z^2$, зная, что $z = x + iy$, тогда $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + i2xy + (iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$.

Для того чтобы найти уравнение образа L_w данной прямой ℓ_z ,

исключаем y и x из уравнений $\begin{cases} u(x, y) = x^2 - y^2 \\ v(x, y) = 2xy \\ y = x - 1 \end{cases}$, в результате чего получим

параметрические уравнения $L_w: \begin{cases} u = 2t - 1 \\ v = 2t^2 - 2t \end{cases}$. Если из полученных уравнений

L_w исключить параметр t , то придем к уравнению образа в плоскости w в

действительных переменных u и v : $v = \frac{(u^2 - 1)}{2}$. Искомый образ - есть

парабола (рис. 1.4).

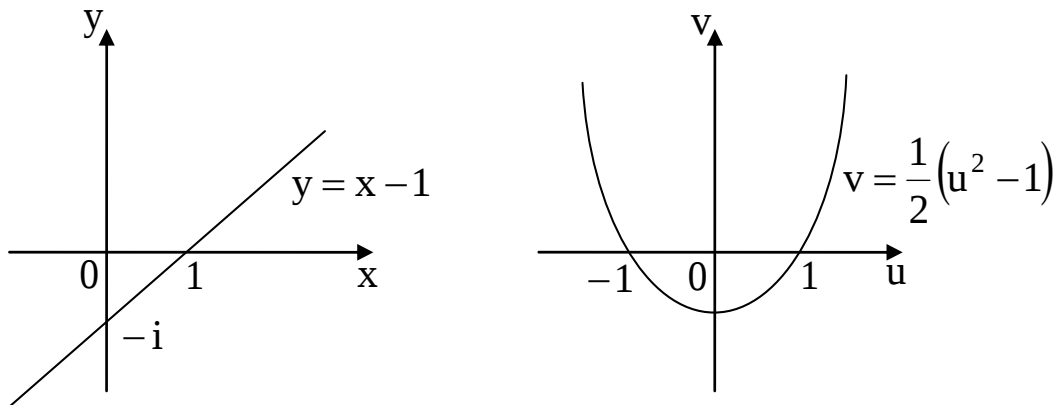


Рис. 1.4

Окрестностью точки $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ называется всякая область, содержащая эту точку; **δ -окрестностью** точки z_0 называется множество точек из области, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$. Так как $|z - z_0| = \delta$ - это уравнение окружности с центром в точке z_0 и с радиусом δ , то $|z - z_0| < \delta$ - это множество точек z , находящихся внутри этой окружности.

Будем рассматривать функцию $w = f(z)$, которая определена в некоторой δ -окрестности точки z_0 .

Определение 5. Комплексное число w_0 называется **пределом функции** $w = f(z)$ при $z \rightarrow z_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех $z \neq z_0$, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - w_0| < \varepsilon$, причем $z \rightarrow z_0$ по любому пути из δ -окрестности точки z_0 . В этом случае пишут $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$.

Теорема. Существование $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, где $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$,

$z_0 = x_0 + iy_0$ равносильно существованию $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y)$ и $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y)$,

причем $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) + i \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y)$.

Пределы для функции комплексного переменного обладают теми же свойствами, что и пределы функций действительного переменного, то есть:

1. $\lim_{z \rightarrow z_0} (f_1(z) \pm f_2(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) \pm \lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z),$
2. $\lim_{z \rightarrow z_0} (f_1(z) \cdot f_2(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z)$ и другие.

Определение 6. Функция $w = f(z)$ называется **непрерывной в точке** z_0 , если она определена в точке z_0 и ее окрестности и $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, где $f(z_0)$ – конечное комплексное число.

Функция, непрерывная в каждой точке области D , называется **непрерывной в этой области**.

Теорема. Для того чтобы функция $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ была непрерывна в точке $z_0 = x_0 + i y_0$, необходимо и достаточно, чтобы ее мнимая и действительная части были непрерывными функциями в точке (x_0, y_0) .

Мы не приводим доказательство этой теоремы, так как она легко выводится исходя из определения непрерывности функции.

Отметим, что правила действия с непрерывными функциями действительного переменного сохраняются и для действий с непрерывными функциями комплексного переменного.

Некоторые **элементарные** функции комплексного переменного.

1⁰. Дробно-рациональная функция

$$w(z) = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}, \quad n, m \in \mathbb{N}. \quad (1.18)$$

В частности, рациональная $w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$.

2⁰. Показательная функция $w(z) = e^z = e^x (\cos y + i \sin y),$ (1.19)

которая в отличие от функции действительного переменного является периодической функцией с периодом $2\pi i$, т.е. $e^{z+2k\pi i} = e^z$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Покажем это: $e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2nki} =$ по формуле (1.11) $= e^z (\cos(2\pi k) + i \cdot \sin(2\pi k)) = [\cos(2\pi k)=1; \sin(2\pi k)=0] = e^z$.

3⁰. Тригонометрические функции

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad (1.20)$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}. \quad (1.21)$$

Для тригонометрических функций остаются в силе все формулы тригонометрии.

Замечание. В отличие от тригонометрических функций действительного аргумента модули функций $\sin z$ и $\cos z$ могут быть больше 1 (далее во второй части будут приведены примеры).

4⁰. Гиперболические функции

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad (1.22)$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \quad (1.23)$$

Тригонометрические и гиперболические функции связаны между собой следующими соотношениями

$$\begin{aligned} \sin z &= -i \cdot \operatorname{sh}(iz), & \operatorname{sh} z &= -i \cdot \sin(iz) \\ \cos z &= \operatorname{ch}(iz), & \operatorname{ch} z &= \cos(iz) \\ \operatorname{tg} z &= -i \cdot \operatorname{th}(iz), & \operatorname{th} z &= -i \cdot \operatorname{tg}(iz) \\ \operatorname{ctg} z &= i \cdot \operatorname{cth}(iz), & \operatorname{cth} z &= i \cdot \operatorname{ctg}(iz) \end{aligned} \quad (1.24)$$

5⁰. Логарифмическая функция

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.25)$$

Из (1.25) видно, что логарифмическая функция - функция многозначная; ее значения для данного значения z отличаются друг от друга на число $2k\pi i$. Значение логарифма, соответствующее $k = 0$, называется *главным* и обозначается

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z. \quad (1.26)$$

Логарифмическая функция комплексного переменного обладает известными свойствами логарифма действительного переменного.

6⁰. Обобщенные степенная и показательная функции

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}, \text{ где } a - \text{любое комплексное число.} \quad (1.27)$$

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}, \text{ где } a = \alpha + i\beta \neq 0. \quad (1.28)$$

1.3. Производная функции комплексного переменного. Условия дифференцируемости. Аналитические функции. Понятия о конформном отображении

Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена в некоторой области D и пусть точки z_0 и $z_0 + \Delta z$ принадлежат области D .

Определение 7. Если существует и конечен предел отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$, когда $\Delta z \rightarrow 0$ произвольным образом (но $z_0 + \Delta z \rightarrow z_0$, оставаясь внутри области D), то:

1) этот предел называется **производной функции** $f(z)$ в точке z_0 и обозначается символом

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}; \quad (1.29)$$

2) и в этом случае функция $f(z)$ называется **дифференцируемой в точке** z_0 .

Все правила и формулы дифференцирования функции действительного переменного остаются в силе и для функций комплексного переменного.

Теорема. Если функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, то в этой точке существуют частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial v}{\partial x};$

$\frac{\partial v}{\partial y}$, причем эти производные связаны соотношениями

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1.30)$$

называемыми *условиями Коши-Римана (С.-Р.)* или *Даламбера-Эйлера*. Эти условия являются необходимыми условиями дифференцируемости функции $w=f(z)$ в точке z_0 . Если хотя бы одно из условий (1.30) нарушается, тогда функция $w=f(z)$ не дифференцируема в точке z_0 . При выполнении условий (С.-Р.) производная может быть найдена по одной из формул:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.31)$$

Приведем определение, имеющее фундаментальное значение в теории функции комплексного переменного.

Определение 8. *Функция называется аналитической в точке z_0 , если она является аналитической в некоторой окрестности точки z_0 , т.е. если для функции выполняются условия дифференцируемости не только в данной точке, но и в ее окрестности.*

Функция называется аналитической в области, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Из приведенных определений видно, что понятия аналитичности и дифференцируемости функции *в области* совпадают, а аналитичность функции *в точке* и дифференцируемость *в точке* - разные понятия. Если функция аналитична в точке, то она, безусловно, дифференцируема в ней, но обратное может и не иметь места. Так как функция может быть дифференцируема в точке, но не быть дифференцируемой ни в какой окрестности этой точки. В таком случае она не будет аналитической в рассматриваемой точке.

Условием аналитичности функции в области является выполнимость условий Коши-Римана для всех точек этой области.

Поскольку основные элементарные функции являются аналитическими, то производные для них находим по известной таблице производных:

$$\begin{aligned} 1) (z^n)' &= n \cdot z^{n-1}; & 2) (a^z)' &= a^z \cdot \ln a; & 2a) (e^z)' &= e^z; & 3) (\ln z)' &= \frac{1}{z}; \\ 4) (\sin z)' &= \cos z; & 4a) (\cos z)' &= -\sin z; & & & & \\ 4b) (\operatorname{tg} z)' &= \frac{1}{\cos^2 z}; & 4c) (\operatorname{ctg} z)' &= -\frac{1}{\sin^2 z}. & & & & \end{aligned} \quad (1.32)$$

Пример 6. Рассмотрим первую из формулы (1.31); $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ (*).

Для функции $f(z) = e^z$ по этой формуле надо найти производную.

Решение. Преобразуем функцию e^z к виду $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$: $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y$. Итак $u(x, y) = e^x \cos y$;

$v(x, y) = e^x \sin y$. Вычисляем частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$: $\frac{\partial u}{\partial x} = (e^x \cos y)'_x =$

$= e^x \cos y$; $\frac{\partial v}{\partial x} = (e^x \sin y)'_x = e^x \sin y$. Подставим их в (*): $(e^z)' = e^x \cos y + i e^x \sin y$

$= e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$. И мы получили формулу 2а из (1.32).

Пример решен.

Пусть функция $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ определена в некоторой области D и дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + i y_0 \in D$. Вычислим $f'(z_0)$ по

одной из формул (1.32), например по первой: $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$.

Предполагаем $f'(z_0) \neq 0$. В результате получается комплексное число $f'(z_0) =$

$a + b \cdot i$, где $a = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0)$ и $b = \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$. По формулам (1.2) и (1.5) можно вычислить

модуль $|f'(z_0)| = \sqrt{a^2 + b^2}$ и аргумент $\arg f'(z_0) = \arctg \frac{b}{a}$ этого комплексного числа.

Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Пусть функция $w = f(z)$ дифференцируема в области D и $f'(z_0) \neq 0$ ($z_0 \in D$). Функция отобразит точку z_0 плоскости Z в точку $w_0 = f(z_0)$ плоскости w , кривую ℓ , проходящую через точку z_0 — в кривую L , проходящую через w_0 (рис. 1.5).

Модуль производной $|f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$ есть предел отношения

бесконечно малого расстояния между отображенными точками w_0 и $w_0 + \Delta w$ к бесконечно малому расстоянию между их прообразами z_0 и $z_0 + \Delta z$.

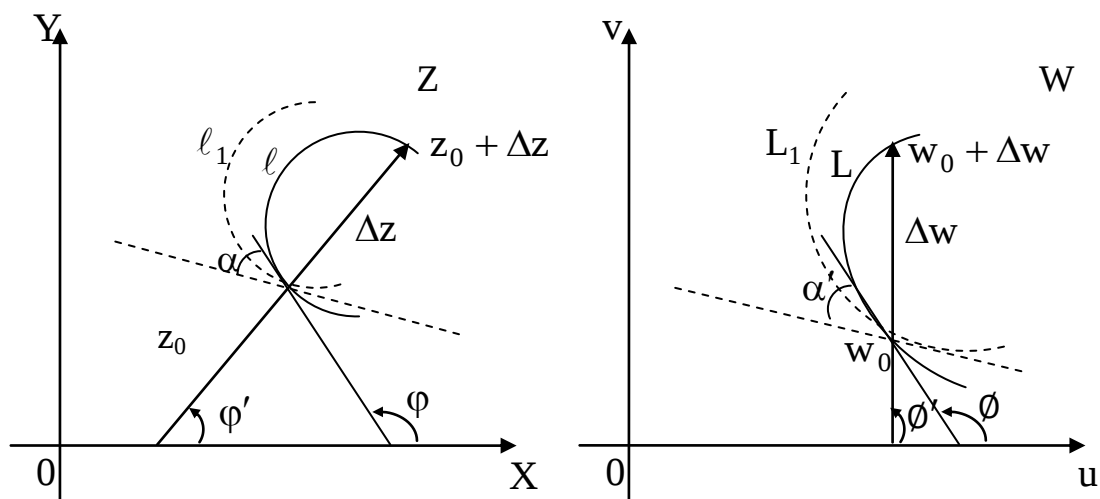


Рис. 1.5

Поэтому величину $k = |f'(z_0)|$ можно рассматривать геометрически как коэффициент растяжения (если $|f'(z_0)| > 1$) или сжатия (если $|f'(z_0)| < 1$) в точке z_0 при отображении области D_z в область G_w , осуществляемом функцией $w = f(z)$. В каждой точке области в каждом направлении коэффициент растяжения k будет свой.

Для аргумента производной можно записать

$$\arg f'(z_0) = \arg \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\arg \Delta w - \arg \Delta z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta z,$$

где $\arg \Delta z$ и $\arg \Delta w$ – это соответственно углы φ' и ϕ' , которые векторы Δz и Δw образуют с действительной осью (рис.1.5). Пусть φ и ϕ – углы, образованные касательными к кривой ℓ и L в точках z_0 и w_0 с действительной осью. Тогда при $z \rightarrow z_0$ $\varphi' \rightarrow \varphi$, а $\phi' \rightarrow \phi$, поэтому $\arg f'(z_0) = \phi - \varphi$ определяет угол, на который нужно повернуть касательную к кривой ℓ в точке z_0 , чтобы получить направление касательной к кривой L в точке w_0 .

Если рассмотреть две кривые ℓ_1 и ℓ_2 , L_1 и L_2 , то углы α и α' (рис.1.5) между их касательными, вообще говоря, неравные.

Определение 9. Отображение области D_z на область G_w , обладающее свойствами постоянства растяжений ($k = \text{const}$) в любом направлении и сохранения (или консерватизма) углов ($\alpha = \alpha'$) между двумя кривыми, пересекающимися в точке Z_0 , называется **конформным** (подобным в малом). Отображение, осуществляемое аналитической функцией, является конформным во всех точках, в которых $f'(z) \neq 0$.

Дадим еще одно определение – это гармонические функции - и поясним, как они связаны с аналитическими функциями.

Определение 10. Функция $\varphi(x, y)$, определенная в некоторой области D , называется **гармонической** в этой области, если она имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$; $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$; $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$; $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$ и удовлетворяет уравнению Лапласа: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$. (1.33)

Теорема. (Связь аналитической функции с гармоническими). Если функция $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ аналитическая в области D , то функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются гармоническими, т.е. удовлетворяют уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.

Однако если функции $\varphi(x, y)$ и $\theta(x, y)$ являются произвольно выбранными гармоническими функциями, то функция $\varphi(x, y) + i \theta(x, y)$, вообще говоря, может и не быть аналитической, т.к. условия (С.-R.) для них не всегда будут выполняться.

Основываясь на этом, можно **построить** аналитическую функцию $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ по одной заданной гармонической функции (например, $\text{Im } w = v(x, y)$), подобрав другую $\text{Re } w = u(x, y)$ так, чтобы удовлетворялись условия (С.-R.). Условия (С.-R.) (1.30) позволяют определить неизвестную функцию (например, $\text{Re } w = u(x, y)$) по ее двум частным

производным или, что то же самое, по ее полному дифференциалу. Отыскание гармонической функции по ее дифференциалу есть известная из действительного анализа задача интегрирования полного дифференциала функции двух переменных.

Достаточно полно изложены примеры во второй части.

1.4. Интегрирование функции комплексного переменного

1.4.1. Интеграл от функции комплексного переменного

Пусть в области D плоскости z задана однозначная непрерывная функция $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ и пусть L – кусочно-гладкая направленная *не замкнутая кривая*, принадлежащая области D вместе со своими концами z_0 и Z . По определению полагают

$$\int_L f(z) dz = \lim_{\max |\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k, \quad (1.34)$$

где ζ_k – произвольная точка элементарной дуги $\Delta L_k = (z_{k-1}, z_k)$ при произвольном разбиении дуги L на n частей точками $z_0, z_1, \dots, z_n = Z$, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. При данных условиях интеграл от функции $f(z)$ вдоль кривой L как предел интегральной суммы (1.34) существует.

Вычисление интеграла от функции комплексного переменного сводится к вычислению двух криволинейных интегралов 2-го рода по формуле

$$\int_L f(z) dz = \int_L u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_L v(x, y) dx + u(x, y) dy. \quad (1.35)$$

Покажем вывод формулы (1.35): так как $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ и $dz = dx + i dy$, то $\int_L f(z) dz = \int_L (u(x, y) + i v(x, y))(dx + i dy) = \int_L (u(x, y) dx + i v(x, y) dx + i u(x, y) dy + (i)^2 v(x, y) dy) = \int_L (u(x, y) dx - v(x, y) dy) + i \int_L (v(x, y) dx + u(x, y) dy)$.

Из формулы (1.35) следует, что на интегралы от функции комплексного переменного распространяются известные свойства криволинейных интегралов.

Если кривая L задана уравнением $y = y(x)$, где $a \leq x \leq b$, тогда $dy = y'(x)dx$ и формула (1.35) принимает вид:

$$\int_L (u(x, y(x))dx - v(x, y(x))y'(x)dx + i \int_L (v(x, y(x))dx + u(x, y(x))y'(x)dx = \\ = \int_L (u(x) - v(x)y'(x))dx + i \int_L (v(x) + u(x)y'(x))dx.$$

Если кривая L задана параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, что равносильно одному уравнению в комплексной форме $z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, то имеет место удобная для вычисления интеграла

$$\text{формула } \int_L f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt. \quad (1.36)$$

1.4.2. Вычисление интеграла от аналитической функции

Интеграл $\int_L f(z)dz$, вообще говоря, зависит от пути интегрирования. Но,

если функция $f(z)$ - аналитическая, то результат вычисления интеграла $\int_L f(z)dz$ уже не зависит от пути интегрирования и имеет место следующая теорема.

Теорема. Если $w = f(z)$ - *аналитическая* в области D и L – некоторая гладкая (или кусочно-гладкая)*не замкнутая* дуга (L содержится целиком в области D), соединяющая точки z_a и z_b , тогда результат интегрирования не зависит от пути интегрирования, то есть имеет место формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_L f(z)dz = \int_{z_a}^{z_b} f(z)dz = F(z) \Big|_{z_a}^{z_b} = F(z_b) - F(z_a), \quad (1.37)$$

где $F(z)$ - это первообразная для функции $f(z)$.

При выполнении условий теоремы первообразную можно находить по таблице, которую приведем лишь для нескольких элементарных функций.

$$1. \int_{z_a}^{z_b} z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} \Big|_{z_a}^{z_b}; n \in \mathbb{N}$$

$$3. \int_{z_a}^{z_b} a^z dz = \frac{a^z}{\ln a} \Big|_{z_a}^{z_b};$$

$$2. \int_{z_a}^{z_b} \sin z dz = -\cos z \Big|_{z_a}^{z_b};$$

$$4. \int_{z_a}^{z_b} \cos z dz = \sin z \Big|_{z_a}^{z_b}.$$

Кроме того, действуют правила дифференцирования: интегрирование по частям, замена переменной и работа с дифференциалом.

Пример 7. Вычислить интеграл $\int_L (1+i-2\bar{z})dz$ по линиям, соединяющим

точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1+i$; а) по прямой, б) по параболе $y = x^2$ (рис. 1.6).

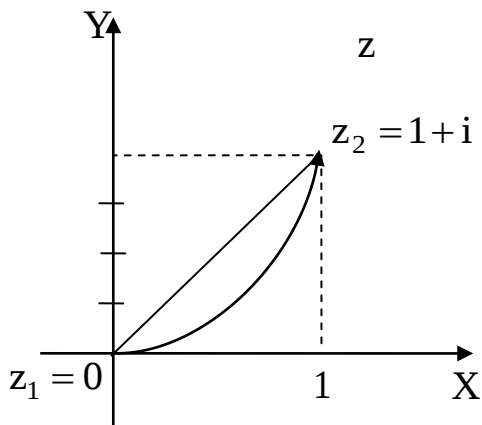


Рис. 1.6

Решение. Функция $f(z) = 1+i-2\bar{z}$ не является аналитической (проверьте!), поэтому вычисление интеграла возможно как по формуле (1.35), так и по формуле (1.36). Найдем действительную и мнимую части подынтегральной функции: $1+i-2\bar{z} = 1+i-2(x-iy) = (1-2x)+i(1+2y)$, то есть имеем:

$$u(x, y) = 1-2x, \quad v(x, y) = 1+2y. \quad \text{По формуле (1.35)} \quad \int_L (1+i-2\bar{z})dz =$$

$$\int_L (1-2x)dx - (1+2y)dy + i \int_L (1+2y)dx + (1-2x)dy.$$

а) уравнение отрезка прямой, проходящей через точки z_1 и z_2 : $y = x, 0 \leq x \leq 1$; значит $dy = dx$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \int_L (1+i-2\bar{z})dz &= \int_0^1 [(1-2x)-(1+2x)] dx + i \int_0^1 [(1+2x)+(1-2x)] dx = \\ &= -4 \int_0^1 x dx + 2i \int_0^1 dx = -2x^2 \Big|_0^1 + 2ix \Big|_0^1 = -2 + 2i; \end{aligned}$$

б) Первый способ. Уравнение дуги параболы: $y = x^2, 0 \leq x \leq 1$; значит,

$$\begin{aligned} dy = 2x dx \quad \text{и} \quad \int_L (1+i-2\bar{z}) dz &= \int_0^1 [(1-2x) - (1+2x^2)2x] dx + i \int_0^1 [(1+2x^2) + \\ &+ (1-2x)2x] dx = \int_0^1 (1-4x-4x^3) dx + i \int_0^1 (1+2x-2x^2) dx = (x+2x^2-x^4) \Big|_0^1 + \\ &+ i(x+x^2-\frac{2}{3}x^3) \Big|_0^1 = -2 + \frac{4}{3}i. \end{aligned}$$

Второй способ. Воспользуемся формулой (1.36). Параметрические уравнения параболы имеют вид: $x = t, y = t^2, 0 \leq t \leq 1$, а в комплексной форме - $z(t) = t + it^2$. Находим $z'(t) = 1 + 2it, \bar{z} = t - it^2$ и

$$\int_L (1+i-2\bar{z}) dz = \int_0^1 (1+i-2t+2it^2)(1+2it) dt = -2 + \frac{4}{3}i.$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int_i^{3+4i} (z^2 - 3) dz$.

Решение. Так как $f(z) = z^2 - 3$ аналитична всюду, то по формуле Ньютона - Лейбница (1.37) имеем $\int_i^{3+4i} (z^2 - 3) dz = \left(\frac{z^3}{3} - 3z \right) \Big|_i^{3+4i} = \frac{(3+4i)^3 - i^3}{3} - 3[(3+4i) - i] = -48 + 6i$.

Пример 9. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi i}{2}} ze^z dz$.

Решение. Функции $f(z) = z$ и $\varphi(z) = e^z$ являются аналитическими всюду. Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int_0^{\frac{\pi i}{2}} ze^z dz = ze^z \Big|_0^{\frac{\pi i}{2}} - \int_0^{\frac{\pi i}{2}} e^z dz = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\pi i}{2}} - e^z \Big|_0^{\frac{\pi i}{2}} = \left(-\frac{\pi}{2} + 1 \right) - i.$$

Итак, повторим, что условием независимости интеграла от пути интегрирования является аналитичность подынтегральной функции.

Теперь будем рассматривать L -кусочно-гладкую **замкнутую** кривую и будем ее называть замкнутым контуром. В этом случае важную роль в теории функций комплексного переменного играет интегральная теорема Коши. Приведем две формулировки этой теоремы для одно- и многосвязной областей.

Теорема. Коши (для **односвязной** области). Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D , тогда для любого замкнутого контура $L \in D$ (рис. 1.7) имеет место равенство $\oint_L f(z) dz = 0$. (1.38)

Теорема. Коши (для **многосвязной** области). Пусть $f(z)$ аналитична в многосвязной области D , ограниченной внешним контуром L_0 и внутренними контурами $L_1, L_2, \dots, L_n$. Тогда имеет место равенство

$$\oint_{L_0} f(z) dz = \oint_{L_1} f(z) dz + \oint_{L_2} f(z) dz + \dots + \oint_{L_n} f(z) dz \quad (1.39)$$

при условии, что интегрирование по всем контурам производится против часовой стрелки (рис. 1.8), то есть таким образом, чтобы при движении по контуру область, находящаяся внутри контура, оставалась слева.

Следствие. Для двусвязной области следует отметить утверждение: если $f(z)$ аналитична в области D всюду, кроме $z_0 \in D$, то

$$\oint_{L_1} f(z) dz = \oint_{L_2} f(z) dz, \quad (1.40)$$

где L_1 и L_2 - произвольные контуры в D , содержащие особую точку z_0 .

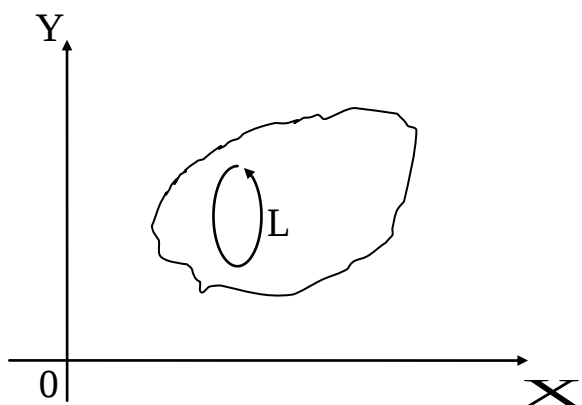


Рис. 1.7

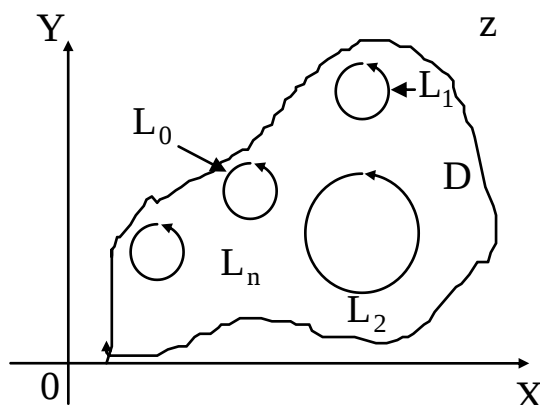


Рис. 1.8

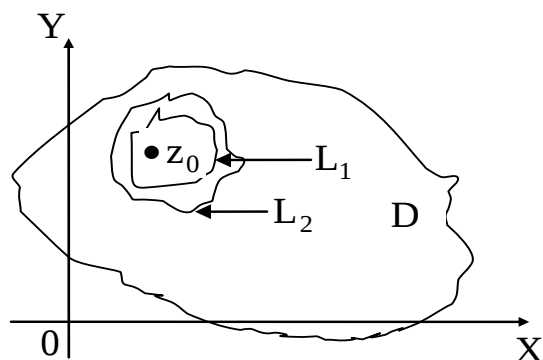


Рис. 1.9

1.4.3. Интегральная формула Коши

Если $f(z)$ *аналитична* в области $D, z_0 \in D$ и $L \subset D$ – *замкнутый* контур и точка z_0 находится или внутри контура L или на контуре, то имеют место следующие формулы:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad (1.41)$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad (1.42)$$

(контур L может быть объединением контуров $L_0, L_1, L_2, \dots, L_n$ (рис. 1.9)).

Формула (1.41) называется *интегральной формулой Коши*, а интеграл в правой части (1.41) – интегралом Коши. Интегральная формула Коши позволяет находить значение аналитической функции в любой точке, лежащей внутри области D , если известны значения этой функции на контуре L , ограничивающем D . Если точка z_0 лежит вне области D , то интеграл Коши равен нулю в силу теоремы Коши (смотри формулу 1.38), так как в этом случае подынтегральная функция является аналитической в области D .

Приведем доказательство частного случая формулы (1.41): $\oint_\rho \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$, где ρ – замкнутый контур (например, окружность с центром в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ и с радиусом ρ).

Пусть точка $z = x + iy$ произвольная точка на контуре, тогда $z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0)$. Перейдем в полярную систему координат с полюсом в точке (x_0, y_0) с помощью формул $\begin{cases} x = x_0 + \rho \cdot \cos \varphi \\ y = y_0 + \rho \cdot \sin \varphi \end{cases}$ или $\begin{cases} x - x_0 = \rho \cdot \cos \varphi \\ y - y_0 = \rho \cdot \sin \varphi \end{cases}$.

В полярной системе координат комплексная переменная $z - z_0$ принимает вид: $z - z_0 = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho \cdot e^{i\varphi}$. Тогда $dz = \rho \cdot i \cdot e^{i\varphi} d\varphi$. Подставим в интеграл: $\oint_{\rho} \frac{dz}{z - z_0} = \oint_{\rho} \frac{\rho \cdot i \cdot e^{i\varphi}}{\rho \cdot e^{i\varphi}} d\varphi = i \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = i(\varphi|_0^{2\pi}) = 2\pi i$, что и требовалось доказать.

Пример 10. Вычислить интеграл $\oint_L ze^z dz$ по замкнутому контуру $L: |z| = 3$.

Решение. Так как $f(z) = ze^z$ аналитична всюду и контур интегрирования $|z| = 3$ — замкнутый, то в силу теоремы Коши (1.38): $\oint_{|z|=3} ze^z dz = 0$.

Пример 11. Вычислить $\oint_L \frac{z^3}{z-3} dz$, где а) L — окружность $|z| = 2$, б) L — окружность $|z| = 4$.

Решение. а) Функция $w(z) = \frac{z^3}{z-3}$ аналитична в замкнутом круге $|z| \leq 2$,

поэтому по теореме Коши (формула (1,38)) $\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{z-3} dz = 0$.

б) В круге $|z| \leq 4$ функция $w(z) = \frac{z^3}{z-3}$ аналитична всюду, кроме точки $z = 3$, поэтому воспользуемся интегральной формулой Коши (1.41), положив $f(z) = z^3$, $z_0 = 3$. Функция $f(z) = z^3$ аналитична в круге $|z| \leq 4$. Итак

$$\oint_{|z|=4} \frac{z^3}{z-3} dz = 2\pi i z^3 \Big|_{z=3} = 2\pi i \cdot 27 = 54\pi i.$$

Пример 12. Вычислить интеграл $\oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z+3)(z-1)} dz$.

Решение. У подынтегральной функции $w(z) = \frac{\cos z}{(z+3)(z-1)}$ две особые точки (знаменатель обращается в ноль). Это $z = -3$ и $z = 1$. В этих точках функция $w(z)$ не аналитична. В области, ограниченной окружностью $|z| = 2$, находится только одна точка $z_0 = 1$. Для применения формулы (1.41) полагаем

$f(z) = \frac{\cos z}{z+3}$ и интеграл перепишем в виде $\oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{z-1} dz$. Здесь функция

$f(z) = \frac{\cos z}{z+3}$ является аналитической в круге $|z| \leq 2$, а точка $z_0 = 1$ внутренняя

точка круга, поэтому имеем $\oint_{|z|=2} \frac{f(z)dz}{z-1} = 2\pi i \frac{\cos z}{z+3} \Big|_{z=1} = \frac{\pi i}{2} \cos 1$.

1.5. Ряды в комплексной области

1.5.1. Ряды с комплексными членами

Бесконечная сумма комплексных чисел, подчиняющихся единому закону, называется **рядом** с комплексными членами: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$, (1.43)

где $a_n = \alpha_n + i\beta_n$. Ряд (1.43) можно записать в следующем виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \quad (1.43a)$$

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ - есть числовые ряды с действительными членами.

$$\text{Сумма} \quad S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n (\alpha_k + i\beta_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k + i \sum_{k=1}^n \beta_k$$

называется **частичной** суммой ряда (1.43), а $\overline{S_n} = \sum_{k=1}^n \alpha_k$ и $\widetilde{S_n} = \sum_{k=1}^n \beta_k$ есть

частичные суммы, соответственно для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$. Тогда $S_n = \overline{S_n} + i\widetilde{S_n}$.

Ряд (1.43) называется **сходящимся**, если существуют и **конечны**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S_n} = A \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{S_n} = B. \quad (1.44)$$

Ряд (1.43) будет *расходящимся*, если хотя бы один из пределов (1.44) не существует или равен бесконечности.

Если пределы (1.44) существуют и равны конечным числам, соответственно, A и B , тогда говорят, что ряд (1.43) сходится к числу $(A + B \cdot i)$.

Итак, сходимость ряда (1.43) с комплексными членами эквивалентна сходимости числовых рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ с действительными членами. В силу этого многие теоремы, относящихся к рядам с действительными членами, в том числе признаки сходимости (например, признаки Даламбера и Коши), переносятся на ряды с комплексными членами.

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то сходится и ряд (1.43), называемый в этом случае абсолютно сходящимся.

Рассмотрим ряд из *функций* комплексного переменного $\sum_{n=1}^{\infty} w_n(z)$, (1.45)

где все функции $w_n(z)$ определены в некоторой области D на комплексной плоскости.

Определение 11. Множество всех z , для которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n(z)$ сходится,

называется *областью сходимости* данного ряда.

Для нахождения области сходимости используем признаки Даламбера или Коши. Приведем их формулировки.

Признак Даламбера. Если существует конечный предел

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{w_{n+1}(z)}{w_n(z)} \right| = \ell$, то при $0 \leq \ell < 1$ ряд (1.45) сходится абсолютно, а при $\ell > 1$ –

расходится (при $\ell > 1$ расходится не только ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n(z)|$, но и ряд (1.45)).

Признак Коши. Для числового ряда (1.45) вычислим $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|w_n(z)|} = \ell$.

Тогда, если $0 \leq \ell < 1$, то ряд сходится абсолютно, если $\ell > 1$ – ряд расходится.

Определение 12. Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (1.46)$$

где a_n, z_0 – комплексные числа, $z = x + iy$, называется **степенным рядом**

по степеням $z - z_0$. В частности, при $z_0 = 0$ имеем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ по степеням z .

Как следует из теоремы Абеля, областью сходимости степенного ряда (1.46) является круг $|z - z_0| < R$ с центром в точке z_0 и с радиусом R , который находим по формулам

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ или } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \quad (1.47)$$

Обобщением степенного ряда (1.46) является ряд по целым **отрицательным** степеням $z - z_0$ вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots \quad (1.48)$$

Областью сходимости этого ряда является внешность круга $|z - z_0| > r$.

Область определяется также с помощью признаков Даламбера и Коши и радиус r находим по формулам (1.47).

1.5.2 Ряды Тейлора и Лорана

Теорема. Тейлора. Если функция $w = f(z)$, однозначная и аналитическая в точке z_0 , то она разлагается в окрестности этой точки в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (1.49)$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \text{ или } a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.50)$$

Этот ряд называется рядом Тейлора для функции $f(z)$.

Радиус R круга сходимости $|z - z_0| < R$ ряда Тейлора (1.49) равен расстоянию от точки z_0 до ближайшей к z_0 особой точки функции $f(z)$ (особая точка - это такая точка, в которой функция не является аналитической).

Приведем разложение в ряды Тейлора некоторых элементарных функций в окрестности точки $z_0 = 0$.

$$\begin{aligned}
 e^z &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (R = \infty), \\
 \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (R = \infty), \\
 \operatorname{sh} z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (R = \infty), \\
 \frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} \quad (R = 1).
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

Теорема Лорана. Если функция $f(z)$, однозначная и аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$ (не исключаются случаи, когда $r = 0, R = \infty$), то она разлагается в этом кольце в обобщенный степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{1.52}$$

коэффициенты которого определяются по формулам:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\substack{|z-z_0|=\rho \\ r < \rho < R}} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \text{ где } n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \tag{1.53}$$

Этот ряд называется **рядом Лорана** функции $f(z)$.

В формуле (1.52) ряд $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$ называется *главной*

частью ряда Лорана, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ — называется *правильной частью ряда Лорана*.

Формулы (1.53) малоудобны для вычисления коэффициентов ряда Лорана, поэтому часто для разложения функции в ряд Лорана пользуются искусственными приемами, которые будут рассмотрены на примерах. Ряды Тейлора и Лорана функции $f(z)$ определяются единственным образом. Эти ряды в области сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать.

Пример 13. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^{n+1}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$.

Решение. Рассмотрим отдельно ряды по положительным и отрицательным степеням z . Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$ можно рассматривать как ряд, составленный из членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{z}{2}$.

Такой ряд сходится при условии $|q| = \left| \frac{z}{2} \right| < 1$, т.е. в круге $|z| < 2$ радиуса $R = 2$.

Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^{n+1}}{z^n}$ $u_n = \frac{(1+i)^{n+1}}{z^n}$, $u_{n+1} = \frac{(1+i)^{n+2}}{z^{n+1}}$.

Для нахождения области сходимости применяем признак Даламбера, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(1+i)^{n+2} z^n}{z^{n+1} (1+i)^{n+1}} \right| = \frac{|1+i|}{|z|} = \frac{\sqrt{2}}{|z|} < 1. \quad \text{Откуда } |z| > \sqrt{2}, \quad \text{т.е.}$$

областью сходимости ряда по отрицательным степеням z является внешность круга радиуса $r = \sqrt{2}$ с центром в точке $z_0 = 0$.

Таким образом, данный степенной ряд Лорана сходится в области, общей для того и другого ряда, которая есть кольцо $\sqrt{2} < |z| < 2$.

1.6. Изолированные особые точки функции комплексного переменного

1.6.1. Классификация изолированных особых точек

Точки плоскости Z , в которых однозначная функция $f(z)$ является аналитической, называют **правильными точками функции**. Точки, в которых функция не является аналитической, называют **особыми точками** (в частности, точки, в которых $f(z)$ не определена).

Точка z_0 называется **изолированной особой точкой функции** $f(z)$, если $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности этой точки, за исключением самой точки z_0 .

В зависимости от поведения функции в окрестности особой точки различают три типа особенностей.

Определение 13. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется:

а) **устранимой особой точкой**, если существует конечный предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = C \neq \infty, \quad (1.54)$$

б) **полюсом**, если

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty, \quad (1.55)$$

в) **существенно особой точкой**, если не существует $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ (ни конечный, ни бесконечный).

Точка z_0 может оказаться полюсом кратности k (или k -го порядка). В этом случае, по определению, должны выполняться соотношения $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \infty, \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^2 f(z) = \infty, \dots, \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{k-1} f(z) = \infty \quad \text{и}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = C < \infty.$$

При $k=1$ точка z_0 называется простым полюсом.

1.6.2. Ряды и особые точки

Имеют место следующие утверждения

1⁰. Для того чтобы изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ была устранимой, необходимо и достаточно, чтобы лорановское разложение $f(z)$ в окрестности точки z_0 (1.52) не содержало главной части, т.е. имело вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

2⁰. Для того чтобы изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ была полюсом k -го порядка, необходимо и достаточно, чтобы главная часть лорановского разложения (1.52) содержала лишь конечное число (k) членов

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, a_{-k} \neq 0.$$

3⁰. Для того чтобы особая точка z_0 функции $f(z)$ была существенно особой, необходимо и достаточно, чтобы главная часть лорановского разложения содержала бесконечно много членов, то есть имела бы вид (1.53).

1.6.3. Нули аналитической функции. Связь между нулем и полюсом

Точка z_0 называется **нулем функции** $f(z)$, если $f(z_0) = 0$. Точка z_0 называется нулем порядка k , если

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad \text{и} \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0. \quad (1.56)$$

Ряд Тейлора (1.49) в окрестности точки z_0 — **нуля порядка** k функции

$$f(z) \text{ — имеет вид } f(z) = a_k (z - z_0)^k + a_{k+1} (z - z_0)^{k+1} + \dots = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Теорема. Для того чтобы точка z_0 была нулем порядка k функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство

$$f(z) = (z - z_0)^k \varphi(z), \quad (1.57)$$

где $\varphi(z)$ — аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Для определения порядка нуля функции полезно помнить, что если z_0 — нуль порядка k для $g_1(z)$ и нуль порядка ℓ для $g_2(z)$, то z_0 — нуль порядка $k + \ell$ для произведения $g_1(z) \cdot g_2(z)$, порядка $k - \ell$ (при $k > \ell$) для частного $\frac{g_1(z)}{g_2(z)}$; z_0 — правильная точка, не являющаяся нулем при $k = \ell$ и особая точка при $k < \ell$.

Теорема. Для того чтобы точка z_0 была полюсом порядка k для функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы эта точка была нулем порядка k для функции $\frac{1}{f(z)}$.

Пример 14. Найти нули функции $f(z) = (z^2 + \pi^2) \operatorname{sh} z$ и определить их порядки.

Решение. Полагая $f(z) = 0$, получим $(z^2 + \pi^2) \operatorname{sh} z = 0$, откуда $z^2 + \pi^2 = 0$ или $\operatorname{sh} z = 0$. Первое уравнение имеет корни $z = \pm \pi i$. Корнями второго уравнения являются числа $z_k = k \pi i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Итак, точки $z = \pm \pi i$, $z_k = k \pi i$ ($k = 0, \pm 2, \dots$) — нули функции $f(z)$. Определим их порядки. Точки $z = \pm \pi i$ — нули 2-го порядка, так как они являются одновременно нулями 1-го порядка для функции $g_1(z) = z^2 + \pi^2$ и $g_2(z) = \operatorname{sh} z$. В самом деле, в силу (1.56) получаем

$$g'_1(z)|_{z=\pm\pi i} = 2z|_{z=\pm\pi i} = \pm 2\pi i \neq 0,$$

$$g'_2(z)|_{z=\pm\pi i} = \operatorname{ch} z|_{z=\pm\pi i} = \pm \operatorname{ch} \pi i = \cos \pi \neq 0.$$

Точки $z_k = k\pi i$ ($k = 0, \pm 2, \pm 3, \dots$) являются нулями 1-го порядка данной функции $f(z)$, так как $f'(z)|_{z=z_k} = \left(2z \operatorname{sh} z + (z^2 + \pi^2) \operatorname{ch} z\right)|_{z=z_k} = (-1)^k \pi^2 (1 - k^2) \neq 0$ при $k = 0, \pm 2, \pm 3, \dots$

Пример 15. Найти особые точки функции и выяснить их характер:

$$\text{а) } f(z) = \frac{z^2}{(z-2)^3}; \quad \text{б) } f(z) = \frac{1}{\sin z}.$$

Решение. а) особая точка функции $f(z)$ $z = 2$ (знаменатель дроби обращается в нуль). Легко видеть, что $\lim_{z \rightarrow 2} f(z) = \infty$, значит, согласно (2.52), $z = 2$ – полюс, причем 3-го порядка, так как по определению (2.53)

$$\lim_{z \rightarrow 2} (z-2)^3 \frac{z^2}{(z-2)^3} = \lim_{z \rightarrow 2} z^2 = 4 \neq 0;$$

б) изолированные особые точки $z_n = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2$) – простые полюсы, так как для функции $\frac{1}{f(z)} = \sin z$ точки $z_n = n\pi$ являются нулями 1-го порядка. Действительно, $\sin n\pi = 0, (\sin z)' \Big|_{z=n\pi} = \cos n\pi = (-1)^n \neq 0$.

1.6.4. Особенности функции в бесконечно удаленной точке

Под точкой $z = \infty$ понимают абстрактную точку плоскости Z , окрестностью которой является множество чисел z , удовлетворяющих неравенству $|z| > R$, где R – достаточно большое действительное положительное число.

Ряд Лорана функции $w = f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ определяют с помощью замены переменной $z = \frac{1}{\zeta}$ для функции $w = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \varphi(\zeta)$ в окрестности точки $\zeta = 0$. Ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$ имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad (1.58)$$

где $f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$ — правильная часть,

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} z^{-n} = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_{-n}}{z^n} + \dots$$
 — главная часть.

Поведение функции в окрестности бесконечно удаленной точки дает возможность классифицировать ее особенности в этой точке.

Точка $z = \infty$ называется **устранимой особой точкой функции**, если $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = |A|$, где $|A| < \infty$.

Ряд Лорана в этом случае не содержит положительных степеней

$$f(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots$$

Точка $z = \infty$ называется **полюсом порядка k функции**, если $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$.

Ряд Лорана в этом случае содержит конечное число (k) положительных степеней:

$$f(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_1 z + \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} z^{-n} \quad (a_{-k} \neq 0).$$

Точка $z = \infty$ называется **существенно особой** для функции, если $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ не существует.

Ряд Лорана в этом случае содержит бесконечное число положительных степеней z .

Заметим, что точка $z = \infty$ называется нулем порядка k функции $f(z)$, если точка $\zeta = \frac{1}{z} = 0$ является нулем порядка k для функции $f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \varphi(\zeta)$.

Пример 16. Определить характер особой точки $z = \infty$ для функций:

$$\text{а) } f(z) = \sin \frac{1}{z}; \quad \text{б) } f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}.$$

Решение. а) Для функции $\sin \frac{1}{z}$ точка $z = \infty$ — устранимая особая точка данной функции, так как $\lim_{z \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{z} = 0$.

б) Разложим функцию $z^3 e^{\frac{1}{z}}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$:

$$f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}} = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!} = z^3 + z^2 + \frac{z}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n! z^{n-3}}.$$

Так как главная часть ряда Лорана содержит конечное число положительных степеней z и старшая степень равна 3, то особая точка $z = \infty$ есть полюс 3-го порядка данной функции.

1.7. Вычеты функции комплексного переменного. Применение к вычислению контурных интегралов

1.7.1. Вычет функции и его вычисление

Определение 14. Пусть z_0 — конечная изолированная особая точка однозначной функции $w = f(z)$. **Вычетом функции** $f(z)$ относительно точки z_0 называется комплексное **число**, обозначаемое символом $\operatorname{res} f(z_0)$ и определяемое равенство $\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} f(z) dz$, (1.59)

где L^+ – произвольный ориентированный против часовой стрелки замкнутый контур, лежащий в области аналитичности $f(z)$ и содержащий внутри себя одну особую точку z_0 .

Из определения (1.59) следует, что вычет функции равен коэффициенту a_{-1} при $(z - z_0)^{-1}$ в лорановском разложении $f(z)$ (1.52) в окрестности точки z_0

$$\operatorname{res} f(z_0) = a_{-1}. \quad (1.60)$$

Приведем формулы для вычисления вычета в полюсах функции, позволяющие избежать разложения функции в ряд Лорана - процесс в общем случае громоздкий.

Теорема. Если z_0 – простой полюс функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)(z - z_0)), \quad (1.61)$$

причем, если $f(z)$ представима в виде отношения двух аналитических в точке

z_0 функций $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z_0) \neq 0, \psi(z_0) = 0, \psi'(z_0) \neq 0$, то

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad (1.62)$$

Если z_0 – полюс k – го порядка ($k \geq 2$), то

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1} [(z - z_0)^k f(z)]}{dz^{k-1}}. \quad (1.63)$$

Теорема. Для устранимой особой точки $\operatorname{res} f(z_0) = 0$.

Теорема. Для нахождения вычета относительно существенно особой точки необходимо найти в ряде Лорана (1.52) коэффициент a_{-1} : $\operatorname{res} f(z_0) = a_{-1}$.

В некоторых случаях находит применение понятие вычета функции относительно бесконечно удаленной точки.

Пусть $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки $z = \infty$, кроме может быть, самой бесконечно удаленной точки. Вычетом функции $f(z)$ относительно бесконечно удаленной точки $z = \infty$ называют величину

$$\operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^-} f(z) dz, \quad (1.64)$$

где L^- — произвольный ориентированный по часовой стрелке замкнутый контур, принадлежащий области $R \leq |z|$ аналитичности функции.

Из определения следует, что вычет относительно $z = \infty$ равен коэффициенту при z^{-1} в лорановском разложении (1.58) $f(z)$ в окрестности $z = \infty$, взятому с противоположным знаком: $\operatorname{res} f(\infty) = -a_{-1}$ (1.65)

Между утверждениями (1.65) и (1.60), несмотря на их внешнее сходство, имеется существенное различие. Дело в том, что в разложении Лорана в окрестности точки $z = \infty$ член $a_{-1}z^{-1}$ принадлежит правильной (а не главной) части ряда, и $\operatorname{res} f(\infty)$ может быть отличным от нуля и тогда, когда $f(z)$ аналитична в бесконечности.

1.7.2. Теоремы о вычетах и их применение к вычислению контурных интегралов

Теорема. (Основная теорема Коши о вычетах). Если функция $f(z)$ аналитична в области D , за исключением изолированных особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$, то для любого замкнутого контура $L \subset D$, охватывающего эти

$$\text{точки, } \oint_{L^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k). \quad (1.66)$$

Основная теорема о вычетах имеет важное значение для приложений. Она позволяет вычислять интегралы по замкнутому контуру от функции комплексного переменного, не прибегая к первообразным или криволинейным интегралам. С помощью вычетов вычисляются определенные и несобственные

интегралы от функций действительного переменного. При вычислении некоторых интегралов удобно пользоваться теоремой о сумме вычетов.

Теорема. Если функция $f(z)$ аналитична в расширенной плоскости (т.е. включающей точку $z = \infty$), за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$, то
$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k) + \operatorname{res} f(\infty) = 0 \quad (1.67)$$

$$\text{или } \operatorname{res} f(\infty) = - \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k). \quad (1.68)$$

Пример 17. Найти вычеты функции относительно их особых точек

$$\text{а) } f(z) = \frac{z^2}{(z-2)^3}; \quad \text{б) } f(z) = \frac{1}{\sin z}.$$

Решение. Особые точки данных функций и их характер определены в примере 14. Итак, а) $z = 2$ — полюс 3-го порядка, поэтому по формуле (1.63)

$$\text{находим } \operatorname{res} f(2) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z-2)^3 \frac{z^2}{(z-2)^3} \right] = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 2} 2 = 1;$$

б) $z_n = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — простые полюсы, поэтому воспользуемся

$$\text{формулой (1.62) и получим } \operatorname{res} f(n\pi) = \frac{1}{(\sin z)'} \Big|_{z=n\pi} = \frac{1}{\cos n\pi} = (-1)^n.$$

Пример 18. Вычислить вычеты относительно точки $z = \infty$ для функции:

$$f(z) = \sin \frac{1}{z}.$$

Решение. Вычет функции относительно бесконечной удаленной точки можно определять по формуле (1.65), для чего необходимо получить лорановское разложение в окрестности данной точки.

Так как $z = \infty$ — устранимая особая точка $\left(\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0 \right)$, то лорановское разложение не содержит положительных степеней (главную часть), но содержит правильную часть, поэтому найдем ряд Лорана для данной функции в

окрестности $z = \infty$: $\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots$, откуда видно, что $a_{-1} = 1$, следовательно, $\text{resf}(\infty) = -1$.

Из примера следует, что вычет функции относительно бесконечно удаленной устранимой особой точки может оказаться отличным от нуля.

1.8. Применение вычетов к вычислению определенных и несобственных интегралов

Лемма. Если функция $f(z)$ есть аналитическая функция в верхней полуплоскости $\text{Im}z > 0$ за исключением конечного числа конечных изолированных особых точек и существуют действительные числа $R > 0$, $M > 0$, $\delta > 0$, для которых имеет место оценка

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}} \text{ при } |z| > R, \quad (1.69)$$

то
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\omega_R} f(\eta) d\eta = 0, \quad (1.70)$$

где (рис. 1.10) ω_R — полуокружность радиуса R с центром в начале координат.

Доказательство. Согласно (1.69) имеет место оценка

$$\left| \int_{\omega_R} f(\eta) d\eta \right| < \frac{M \pi R}{R^{1+\delta}} = \frac{\pi M}{R} \rightarrow 0$$

при $R \rightarrow +\infty$, что равносильно (1.70).

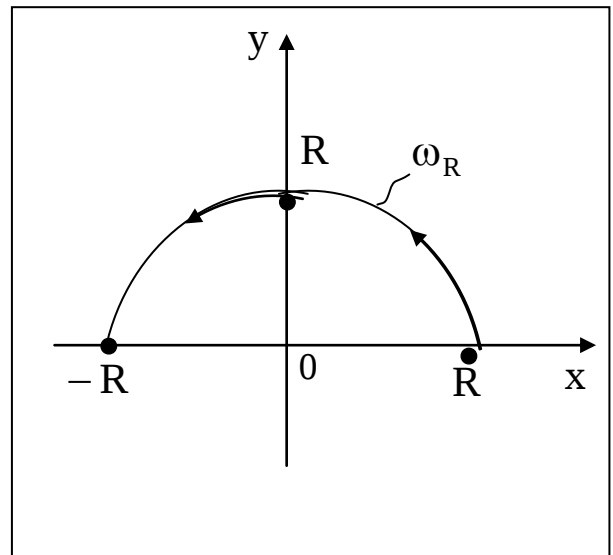


Рис1.10

Теорема. Если $f(z)$ — аналитическое продолжение $f(x)$, $x \in (-\infty; +\infty)$, на верхнюю полуплоскость $\text{Im}z \geq 0$ и удовлетворяет требованиям:

1⁰) $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы ;

2^0) не имеет особых точек z_k на оси Ox ;

3^0) все изолированные особые точки z_k в верхней полуплоскости ($y > 0$) конечны совместно с их числом: $k = \overline{1, N}$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^N \operatorname{Res} f(z_k). \quad (1.71)$$

Доказательство. R выберем таким образом, чтобы все изолированные особые точки $z_k, k = 1, \dots, N$ находились внутри замкнутого контура $L = [-R; R] \cup \omega_R$ (рисунок 1.10). Тогда по основной теореме Коши о вычетах имеем (формула (1.66))

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\omega_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res} f(z_k). \quad (1.72)$$

Совершая в последнем равенстве предельный переход ($R \rightarrow +\infty$) и учитывая лемму, мы приходим к (1.71), если учесть, что правая часть (1.72) не зависит от R , что и требовалось доказать.

Лемма Жордана. Если $f(z)$ — аналитическая функция в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, за исключением конечного числа конечных изолированных особых точек, и равномерно относительно $\arg z$ ($0 \leq \arg z \leq \pi$) стремится к нулю при $|z| \rightarrow \infty$, то при $a > 0$.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\omega_R} e^{ia\eta} f(\eta) d\eta = 0. \quad (1.73)$$

Доказательство. Равномерное стремление к нулю при $0 \leq \arg z \leq \pi$ означает следующее:

$$|f(z)| < \mu_R, \quad |z| = R, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \mu_R = 0. \quad (1.74)$$

Уравнение полуокружности $\omega_R : z = R \cdot e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi$, R выбрано так, чтобы изолированные особые точки $z_k, k = \overline{1, N}$, находились внутри замкнутого контура $L = [-R; R] \cup \omega_R$ (рис. 1.10). Тогда согласно (1.74)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\omega_R} e^{ia\eta} f(\eta) d\eta \right| &\leq \mu_R R \cdot \int_0^\pi \left| e^{iaR(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \right| d\varphi = \\ &= R \cdot \mu_R \cdot \int_0^\pi e^{-aR\sin\varphi} d\varphi = 2R \mu_R \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin\varphi} d\varphi. \end{aligned} \quad (1.75)$$

$$\text{Но при } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \text{ имеет место оценка } \sin\varphi \geq \frac{2\varphi}{\pi}, \quad (1.76)$$

в чем можно убедиться, строя графики рассматриваемых функций на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\begin{aligned} \text{что дает } \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin\varphi} d\varphi &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-2aR\varphi}{2}} d\varphi = -\frac{\pi}{2aR} \cdot e^{-\frac{\pi}{2aR}} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= -\frac{\pi}{2aR} \cdot (e^{-aR} - 1) = \frac{\pi}{2aR} \cdot (1 - e^{-aR}). \end{aligned}$$

С учетом последней оценки из (1.75) получаем

$$\left| \int_{\omega_R} e^{ia\eta} \cdot f(\eta) d\eta \right| \leq \frac{\pi}{a} \cdot \mu_R \cdot (1 - e^{-aR}) \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow +\infty.$$

Теорема. Если $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана и есть продолжение на верхнюю полуплоскость $\text{Im}z \geq 0$ функции $f(x), x \in (-\infty; \infty)$ и $f(x)$ не имеет особых точек на оси Ox , тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res } F(z_k). \quad (1.77)$$

где $z_k, k = \overline{1, N}$ есть особые точки $f(z)$ в $\text{Im}z > 0$, $F(z) = e^{iaz} f(z)$.

Доказательство. $L = [-R; R] \cup \omega_R$ – замкнутый контур, обходимый в положительном направлении, внутри которого особые точки $f(z)$. Тогда

$$\oint_L e^{i\alpha z} f(z) dz = \int_{-R}^R e^{i\alpha x} f(x) dx + \int_{\omega_R} e^{i\alpha \eta} f(\eta) d\eta = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^N \text{Res } F(z_k), \quad (1.78)$$

где правая часть (1.78) не зависит от R . Переходя в (1.78) к пределу при $R \rightarrow +\infty$ и учитывая лемму Жордана, получим (1.77), что и следовало доказать.

Пример 19. Вычислить $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b \cdot \cos x)^2}$, $a > b > 0$.

Решение. Полагая $z = e^{ix}$, найдем $\frac{1}{z} = e^{-ix}$, $\cos x = \frac{1}{2} \cdot (e^{ix} + e^{-ix}) =$
 $= \frac{1}{2} \cdot \left(z + \frac{1}{z} \right) = \frac{z^2 + 1}{2z}$, тогда наш интеграл имеет вид

$$\frac{1}{b^2} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(c + \cos x)^2} = \left| \begin{array}{l} c = \frac{a}{b} > 1 \\ dz = e^{ix} \cdot i dx \\ dx = -i \frac{dz}{z} \end{array} \right| = -\frac{i}{b^2} \cdot \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z \cdot \left(c + \frac{z^2 + 1}{2z} \right)^2} =$$

$$= -\frac{4i}{b^2} \cdot \oint_{|z|=1} \frac{z dz}{(z^2 + 2zc + 1)^2},$$

где при переходе к контурному интегралу использовалась формула (1.36). Подынтегральная

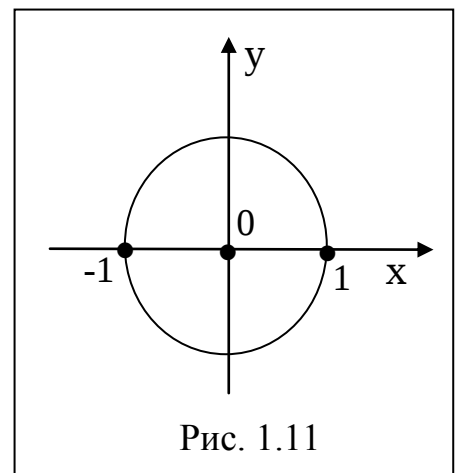
функция $f(z) = \frac{z}{(z^2 + 2zc + 1)^2}$. Найдем ее особые

точки и вычеты в них. Имеем

$$z^2 + 2zc + 1 = 0, \quad z_{1,2} = -c \pm \sqrt{c^2 - 1},$$

$z_1 = -c - \sqrt{c^2 - 1} < -1$ находится вне окружности

$|z| = 1$ (рис.1.11)



$$z_2 = -c + \sqrt{c^2 - 1} = \frac{-1}{c + \sqrt{c^2 - 1}} > -1 \text{ находится внутри окружности. Теперь}$$

$$f(z) = \frac{z}{\left(z + c + \sqrt{c^2 - 1}\right)^2 \cdot \left(z + c - \sqrt{c^2 - 1}\right)^2} \text{ и } z_2 - \text{ полюс 2-го порядка.}$$

$$\begin{aligned} \text{Res } f(z_2) &= \left| \underset{k=2}{\phi - \text{ла (1.63)}} \right| = \lim_{z \rightarrow z_2} \left[\frac{z}{\left(z + c + \sqrt{c^2 - 1}\right)^2} \right]' = \\ &= \lim_{z \rightarrow -c + \sqrt{c^2 - 1}} \left[\frac{\left(z + c + \sqrt{c^2 - 1}\right)^2 - 2z \cdot \left(z + c + \sqrt{c^2 - 1}\right)}{\left(z + c + \sqrt{c^2 - 1}\right)^4} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow -c + \sqrt{c^2 - 1}} \frac{c + \sqrt{c^2 - 1} - z}{\left(z + c + \sqrt{c^2 - 1}\right)^3} = \frac{2c}{8 \cdot (c^2 - 1) \cdot \sqrt{c^2 - 1}} = \frac{c}{4 \cdot (c^2 - 1) \cdot \sqrt{c^2 - 1}}. \end{aligned} \text{ Теперь}$$

применяем формулу (1.66)

$$\oint_{|z|=1} \frac{z dz}{\left(z^2 + 2zc + 1\right)^2} = \frac{2\pi ic}{4 \cdot (c^2 - 1) \cdot \sqrt{c^2 - 1}} = \frac{\pi ic}{2 \cdot (c^2 - 1) \cdot \sqrt{c^2 - 1}}.$$

Окончательно получаем, что искомый интеграл равен

$$-\frac{4i}{b^2} \cdot \frac{c\pi i}{2 \cdot (c^2 - 1) \cdot \sqrt{c^2 - 1}} = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2) \cdot \sqrt{a^2 - b^2}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}.$$

$$\text{Пример 20. Вычислить } I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{a + b \cdot \cos x}, a > b > 0.$$

Решение. Пусть $z = e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$ и $\bar{z} = e^{-ix} = \cos x - i \cdot \sin x$, тогда $z + \bar{z} = 2 \cos x$;

$$z - \bar{z} = 2i \cdot \sin x \text{ или } z + \frac{1}{z} = 2 \cos x; z - \frac{1}{z} = 2i \cdot \sin x. \text{ Отсюда}$$

$$\cos x = \frac{z^2 + 1}{2z}, \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz},$$

$$dz = e^{ix} \cdot i dx = i z dx, \quad dx = -i \cdot \frac{dz}{z}. \text{ В силу этого}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{b} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{c + \cos x} = \left| c = \frac{a}{b} > 1 \right| = \frac{1}{b} \cdot \oint \frac{(z^2 - 1)^2 \left(-i \cdot \frac{dz}{z} \right)}{-4z^2 \left(c + \frac{z^2 + 1}{2z} \right)} = \\ &= \frac{i}{2b} \cdot \oint_{|z|=1} \frac{(z^2 - 1)^2 \, dz}{z^2 (z^2 + 2cz + 1)}. \end{aligned}$$

Найдем особые точки подынтегральной функции, лежащие внутри окружности $|z|=1$ и вычеты в них: $z_1 = 0$ — полюс 2-го порядка, $z_{2,3} = -c \pm \sqrt{c^2 - 1}$, $z_2 = -c - \sqrt{c^2 - 1}$ — вне рассматриваемой окружности, $z_3 = \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1} + c} > -1$ лежит внутри окружности.

$$\begin{aligned} \text{Res } f(0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{(z^2 - 1)^2}{z^2 + 2cz + 1} \right]' = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2(z^2 - 1) \cdot 2z \cdot (z^2 + 2cz + 1) - 2 \cdot (z + c) \cdot (z^2 - 1)^2}{(z^2 + 2cz + 1)^2} = -2c; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Res } f(z_3) &= \lim_{z \rightarrow -c + \sqrt{c^2 - 1}} \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2 (z + c + \sqrt{c^2 - 1})} = \\ &= \frac{4 \cdot (c^2 - 1 - c\sqrt{c^2 - 1})^2}{(2c^2 - 1 - 2c\sqrt{c^2 - 1}) \cdot 2\sqrt{c^2 - 1}} = \frac{2 \cdot (c^2 - 1) \cdot (\sqrt{c^2 - 1} - c)^2}{(\sqrt{c^2 - 1} - c)^2 \cdot 2\sqrt{c^2 - 1}} = 2\sqrt{c^2 - 1} \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } I = \frac{i}{2b} \cdot 2\pi \cdot (-2c + 2\sqrt{c^2 - 1}) = \frac{2\pi}{b^2} \cdot (-\sqrt{a^2 - b^2} + a).$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\pi}{b^2} \cdot (-\sqrt{a^2 - b^2} + a).$$

$$\text{Пример 21. Вычислить } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \, dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}.$$

Решение. $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 4x + 13)^2}$ – непрерывная функция на $(-\infty; +\infty)$,

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 + 4z + 13)^2}, \quad |f(z)| = \frac{1}{|z|^3 \left| 1 + \frac{4}{z} + \frac{13}{z^2} \right|} < \frac{1}{|z|^3} \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty. \text{ Особые}$$

точки $f(z)$ в верхней полуплоскости определяются из уравнения $z^2 + 4z + 13 = 0$: $z_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-9} = -2 \pm 3i$, $z_1 = -2 - 3i$, $z_2 = -2 + 3i$ – полюс 2-го порядка в верхней полуплоскости. В силу этого

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(z_2) &= \lim_{z \rightarrow -2+3i} \left[\frac{z}{(z+2+3i)^2} \right]' = \\ &= \lim_{z \rightarrow -2+3i} \left[\frac{(z+2+3i)^2 - 2z \cdot (z+2+3i)}{(z+2+3i)^4} \right] = -\frac{1}{54}i. \end{aligned}$$

Тогда искомый интеграл равен $2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{54}i \right) = \frac{\pi}{27}$. *Ответ:* $\frac{\pi}{27}$.

Пример 22. Вычислить $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 9} dx$, по формуле (1.77), зная, что

$$\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}.$$

$$\text{Решение.} \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 9} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 9} dx = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 9} dx,$$

$F(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 9}$, $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2 + 9} = 0$. Особые точки определяются из уравнения

$$z^2 + 9 = 0, \quad z_1 = -3i, \quad z_2 = 3i \text{ – простой полюс. } \operatorname{Res} F(z_2) = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{e^{iz}}{z + 3i} = \frac{e^{-3}}{6i}.$$

$$\text{Тогда } \frac{1}{2} \cdot \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 9} dx = \frac{1}{2} 2\pi i \cdot \frac{1}{6 \cdot e^3 i} = \frac{\pi}{6 \cdot e^3}, \text{ что дает } \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 9} dx = \frac{\pi}{6 \cdot e^3}.$$

2.МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ

В данной части будут использованы формулы, теоремы и выводы (с соответствующими для них номерами) из первой теоретической части данного пособия.

2.1.Комплексные числа и действия над ними

Пример 2.1. Решить уравнение $z^2 - 6z + 10 = 0$, где $z = x + iy$.

Решение. Первый способ: $D = 36 - 40 = -4$.

$$z_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = \frac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i$$

$$z_1 = 3 + i, z_2 = 3 - i.$$

Второй способ: В результате подстановки $z = x + iy$ в данное уравнение имеем $(x + iy)^2 - 6(x + iy) + 10 = 0$, откуда после преобразований получим

систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 6x + 10 = 0 \\ xy - 3y = 0 \end{cases}$$
. Решая систему, получим

$$z_1 = x_1 + iy_1 = 3 + i, \quad z_2 = x_2 + iy_2 = 3 - i.$$

Пример 2.2. Выполнить действия: а) сложения; б) вычитания; в) умножения; г) деления комплексных чисел $z_1 = -1 - i$ и $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

Решение. а) $z_1 + z_2 = (-1 - i) + (1 + i\sqrt{3}) = (-1 + 1) + i(\sqrt{3} - 1) = 0 + i(\sqrt{3} - 1)$;

б) $z_1 - z_2 = (-1 - i) - (1 + i\sqrt{3}) = (-1 - 1) + i(-\sqrt{3} - 1) = -2 - i(\sqrt{3} + 1)$;

в) $z_1 \cdot z_2 = (-1 - i) \cdot (1 + i\sqrt{3}) = -1 - i - i\sqrt{3} - (i)^2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1) - i(1 + \sqrt{3})$;

$$\text{г) } \frac{z_1}{z_2} = \frac{-1 - i}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{(-1 - i)(1 - i\sqrt{3})}{(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})} = \frac{-1 - i + i\sqrt{3} - \sqrt{3}}{1 + 3} = -1 + i\frac{\sqrt{3} - 1}{4}.$$

Пример 2.3. Изобразить на комплексной плоскости числа: а) $z_1 = -1 - i$;

б) $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

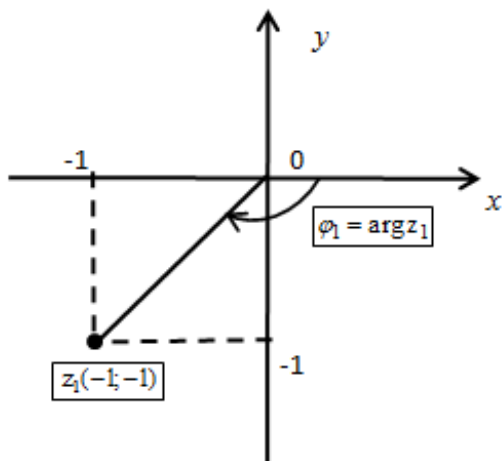


Рис. 2.1

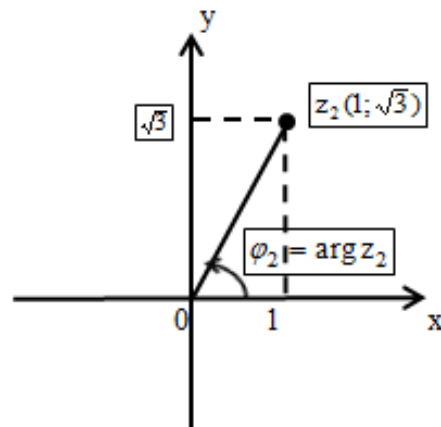


Рис. 2.2

Решение. Поскольку комплексное число $z=a+b\cdot i$ изображается точкой с координатами (a,b) на комплексной плоскости, то для случая а) (рис. 2.1)- это точка $z_1(-1,-1)$; для случая б) (рис. 2.2)- это точка $z_2(1,\sqrt{3})$.

Пример 2.4. Найти модуль и главное значение аргумента комплексного числа $z = 1 - \sqrt{3}i$; представить его в тригонометрической и показательной формах.

Решение. Для вычисления модуля и аргумента комплексного числа $z = 1 - \sqrt{3}i$ воспользуемся формулами (1.2) и (1.3) $r = |z| = \sqrt{1+3} = 2$. Так как значение аргумента φ удовлетворяет соотношению $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{1}$, то

$\operatorname{arg} z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$. Итак, $|z| = r = 2, \operatorname{arg} z = -\frac{\pi}{3}$ и согласно (1.6)

и (1.12) имеем $z = 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right]$, $z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Пример 2.5. Выполнить действия умножения и деления комплексных чисел $z_1 = -1 - i$ и $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$, представив их вначале в тригонометрической форме.

Решение. Поскольку эти числа уже изображены на рисунках 2.1 и 2.2, мы видим соответствующие этим числам аргументы. Вычисляем их по формулам (1.3) и (1.5), полученный результат сверяем с рисунком. Для z_1 : $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{-1}{-1} = 1$. Здесь $a = -1 < 0$ и $b = -1 < 0$, значит $\varphi_1 = \operatorname{arctg} 1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$.

$$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Для z_2 : $\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$. Здесь $a > 0$ и $b > 0$, значит $\varphi_2 = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

$$|z_2| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2. \text{ Итак } z_1 = \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{3}{4} \pi \right) + i \sin \left(-\frac{3}{4} \pi \right) \right];$$

$$z_2 = 2 \left[\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right]. \text{ Применяя формулы (1.7) и (1.8), получим}$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2\sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{3}{4} \pi + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{3}{4} \pi + \frac{\pi}{3} \right) \right] = \\ &= 2\sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{5}{12} \pi \right) + i \sin \left(-\frac{5}{12} \pi \right) \right], \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos \left(-\frac{3}{4} \pi - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{3}{4} \pi - \frac{\pi}{3} \right) \right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos \left(-\frac{13}{12} \pi \right) + i \sin \left(-\frac{13}{12} \pi \right) \right].$$

Пример 2.6. Вычислить $(1+i)^{12}$.

Решение. Предварительно переводим число $z = 1+i$ в тригонометрическую форму. Затем по формуле (1.9) имеем

$$\begin{aligned} (1+i)^{12} &= \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{12} = (\sqrt{2})^{12} (\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = \\ &= 2^6 (-1 + i \cdot 0) = -64. \end{aligned}$$

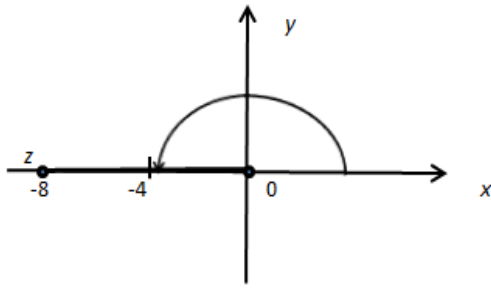


Рис. 2.3

Пример 2.7. Вычислить и изобразить на комплексной плоскости все значения $\sqrt[3]{-8}$.

Решение. Представим $z = -8 = -8 + 0 \cdot i =$ в тригонометрической форме (1.6), для чего найдем модуль и главное значение аргумента $|z| = |-8| = 8$. Из рис. 2.3 видно, что

$\varphi_0 = \arg z = \arg(-8) = \pi$. Итак, тригонометрическая форма этого комплексного числа имеет вид $z = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$.

Применяя формулу (1.10), находим три главных значения корня по формуле $W_k = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right)$, где $k = 0, 1, 2$.

Воспользовавшись показательной и тригонометрической формами числа (1.6), (1.12), получаем

$$\text{при } k = 0 \quad w_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + i\sqrt{3},$$

$$\text{при } k = 1 \quad w_1 = 2e^{i\pi} = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2,$$

$$\text{при } k = 2 \quad w_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

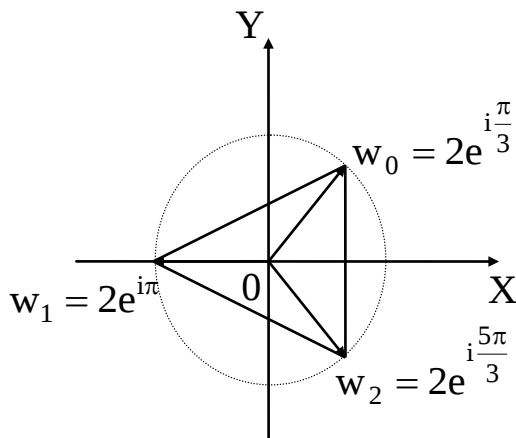


Рис. 2.4

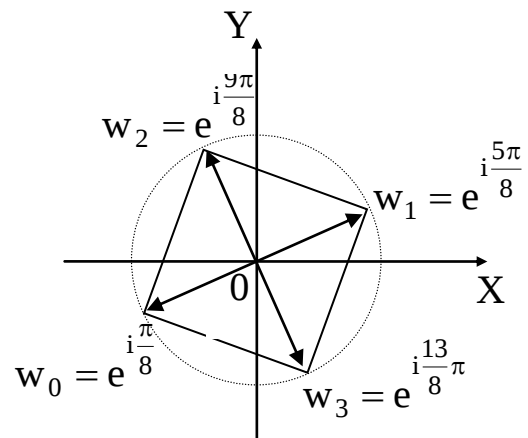


Рис. 2.5

Точки w_0, w_1, w_2 образуют вершины **правильного** треугольника, вписанного в окружность радиуса $r=|z|=2$ с центром в начале координат (рис. 2.4).

Пример 2.8. Решить двучленное уравнение $w^4 - i = 0$.

Решение. Нахождение всех корней уравнения сводится к задаче: найти все главные значения корня $\sqrt[4]{i}$. Данный пример можно решить аналогично примеру 2.7, то есть перевести комплексное число $z=i$ в тригонометрическую форму $z=1(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2})$ и затем извлекать корень четвертой степени по формуле (1.10). Но мы сейчас покажем, что можно работать и с показательной формой числа $z=i = 1 \cdot e^{i\pi/2}$. Применим формулу (1.16) $w_k = \sqrt[4]{1} e^{i\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{4}}$, где $k = 0, 1, 2, 3$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$.

При $k = 0$ $w_0 = e^{i\frac{\pi}{8}}$, откуда следует, что $|w_0| = 1, \arg w_0 = \frac{\pi}{8}$.

При $k = 1$ $w_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right)} = e^{i\frac{5}{8}\pi}$, откуда $|w_1| = 1, \arg w_1 = \frac{5}{8}\pi$.

При $k = 2$ $w_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi\right)} = e^{i\frac{9}{8}\pi} \Rightarrow |w_2| = 1, \arg w_2 = \frac{9}{8}\pi$.

При $k = 3$ $w_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 6\pi\right)} = e^{i\frac{13}{8}\pi} \Rightarrow |w_3| = 1, \arg w_3 = \frac{13}{8}\pi$.

Как видно из рис. 2.5, точки w_0, w_1, w_2, w_3 комплексной плоскости лежат в вершинах квадрата (на окружности радиуса $r = 1$ с центром в начале координат).

2.2. Множества точек, линии, области на комплексной плоскости

Линии и области на комплексной плоскости мы рассматриваем как множество точек Z , обладающих определенными свойствами, изученными в действительном анализе. Аналитически линии и области задаются как

множество чисел Z , удовлетворяющих определенным уравнениям или системе уравнений, неравенствами или системой неравенств.

Параметрические уравнения кривой в действительных переменных:

$$x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta$$

в комплексной плоскости могут быть заменены одним уравнением

$$z = z(t) = x(t) + i y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (2.1)$$

которое называется **комплексно-параметрическим** или **уравнением кривой в комплексной форме**.

Если кривая задана в действительных переменных в неявном виде $F(x, y) = 0$, то путем подстановки в это уравнение выражений $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$

$$\text{или } x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad (2.2)$$

получим уравнение кривой в комплексных переменных.

При решении задач по определению и изображению линии и областей в комплексной плоскости следует помнить геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел $|z_1 - z_2|$ (смотри пример 2 в первой части). Рассматривая $|z_1 - z_2|$ как расстояние между двумя точками z_1 и z_2 плоскости, достаточно легко задавать аналитически линии и области.

Пример 2.9. Написать в комплексной форме уравнение кривой ℓ :

$$x = t, \quad y = 3t^2, \quad -\infty < t < \infty.$$

Решение. 1-й способ. Согласно формуле (2.1) имеем комплексно-параметрическую форму кривой $z(t) = t + 3t^2 \cdot i$.

2-й способ. Легко видеть, что данная кривая - парабола $y = 3x^2$. Перейдем в этом уравнении к комплексному переменному, воспользуемся формулами $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, тогда $z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x$, то есть $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$.

$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy$, то есть $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. Подставим в равенство $y = 3x^2$ и

получим $\frac{z - \bar{z}}{2i} = 3\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2$, откуда получаем $3z^2 + 6z\bar{z} + 3\bar{z}^2 + 2zi - 2\bar{z}i = 0$.

Пример 2.10. Написать уравнение окружности в комплексной форме.

Решение. 1-й способ. Рассмотрим окружность как множество точек z , равноудаленных на расстояние r от центра $z_0 = x_0 + iy_0$. Тогда имеем $|z - z_0| = r$.

2-й способ. Как известно, параметрические уравнения окружности радиуса r и с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеют вид: $x - x_0 = r \cos t, y - y_0 = r \sin t$, где $-\pi < t \leq \pi$.

Следовательно, $z(t) = x_0 + r \cos t + i(y_0 + r \sin t)$, $-\pi < t \leq \pi$. Если воспользоваться показательной формой комплексного числа, то полученное уравнение можно записать в виде $z(t) = z_0 + re^{it}$, $-\pi < t \leq \pi$.

Пример 2.11. Написать уравнение эллипса с фокусами в точках z_1 и z_2 , большая ось которого равна $2a$.

Решение. По определению эллипса, $r_1 + r_2 = 2a$, где $r_1 = |z - z_1|$ и $r_2 = |z - z_2|$ — расстояния произвольной точки z эллипса до фокусов z_1 и z_2 соответственно (рис. 2.6). Следовательно, уравнение эллипса в комплексной форме имеет вид $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$. Расстояние между фокусами: $2c = |z_1 - z_2|$, а малая полуось по известным a и c определяется из формулы $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Пример 2.12. Выяснить геометрический смысл уравнения $|z - z_1| = |z - z_2|$.

Решение. 1-й способ (геометрический). В данном случае $\{z\}$ — множество точек, равноудаленных от точек z_1 и z_2 . Очевидно, это есть прямая L , перпендикулярная отрезку $[z_1, z_2]$ и проходящая через его середину (рис. 2.7).

2-й способ (аналитический). Пусть $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, тогда $z - z_1 = (x - x_1) + i(y - y_1)$;

$$z - z_2 = (x - x_2) + i(y - y_2);$$

$$|z - z_1| = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2};$$

$$|z - z_2| = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}.$$

Поскольку левые части последних соотношений равны (по условию задачи), то равны и их правые части, т.е. $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$. После упрощения получаем уравнение прямой линии

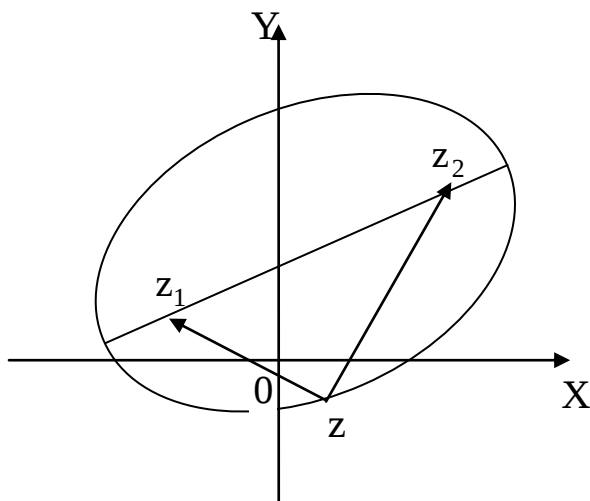


Рис. 2.6

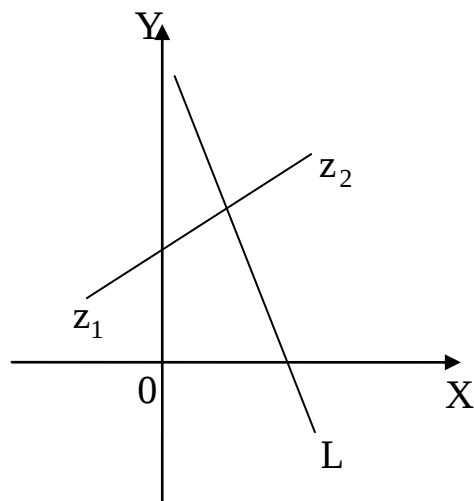


Рис. 2.7

$$Ax + By + C = 0.$$

Пример 2.13. Какая кривая определяется уравнением $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}$?

Решение. Пусть $z = x + iy$. Тогда $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$. Следовательно,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}. \text{ По условию } \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{4} \text{ или } x^2 + y^2 - 4x = 0. \text{ Откуда}$$

следует, что данное условие определяет окружность $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

Пример 2.14. Определить, какое множество точек удовлетворяет условию $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$.

Решение. Так как по определению $\operatorname{Im} z = y$, то данное условие может быть записано в виде: $0 \leq y \leq 1$. Следовательно, искомое множество точек - точки полосы между прямыми $y = 0$ и $y = 1$, включая эти прямые (рис. 2.8). Данное множество является областью, причем открытой, неограниченной.

Пример 2.15. Построить на комплексной плоскости области, заданные условиями: а) $4 \leq |z+1| + |z-1| \leq 5$; б) $1 < |z| < 2, 0 \leq \arg z < \frac{\pi}{4}$.

Решение. а) искомое множество точек удовлетворяет двум условиям: $|z+1| + |z-1| \geq 4$ и $|z+1| + |z-1| \leq 5$. Первое условие определяет внешность эллипса с фокусами $z_1 = -1$ и $z_2 = 1$, для которого $2a = 4, 2c = |z_1 - z_2|$, $b = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ (уравнение эллипса в действительных переменных: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$). Второе уравнение - внутренность эллипса с фокусами в тех же точках с полуосями $a_1 = \frac{5}{2}$ и $b_1 = \sqrt{\frac{25}{4} - 1} = \frac{\sqrt{21}}{2}$ (уравнение эллипса в действительных переменных: $\frac{x^2}{25/4} + \frac{y^2}{21/4} = 1$). Искомая область - часть плоскости, заключенная между двумя эллипсами (рис. 2.9), включая сами эллипсы. Область замкнутая, ограниченная.

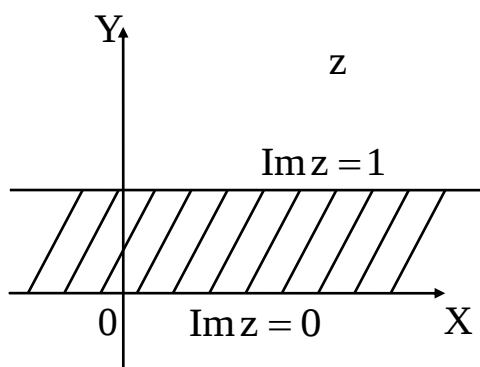


Рис. 2.8

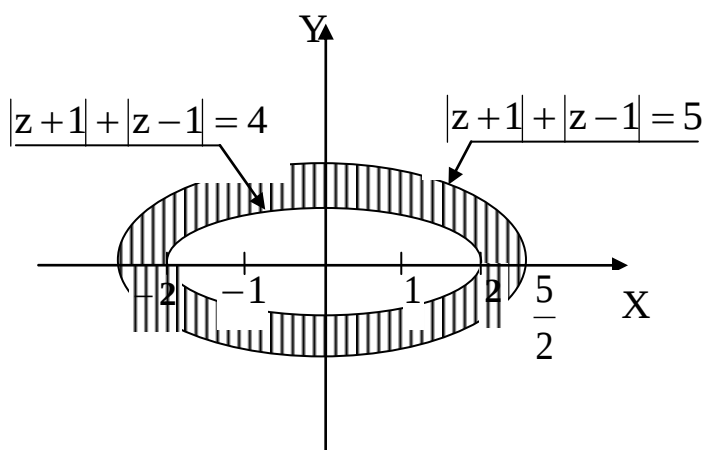


Рис. 2.9

б) легко видеть, что множество точек, удовлетворяющих условию $1 < |z| < 2$, есть внутренность кольца, ограниченного окружностями $|z|=1$ и $|z|=2$ с центрами в начале координат и радиусами 1 и 2. Система неравенств $0 \leq \arg z < \frac{\pi}{4}$ определяет множество точек, составляющих угол между лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{4}$, причем точки первого луча принадлежат области, а второго - нет.

Пересечение указанных областей определяет искомую область D , которая изображена на рис. 2.10.

Пример 2.16. Какое множество точек комплексной плоскости определяется условием $\operatorname{Im} \bar{z}^2 < -1$?

Решение. Пусть $z = x + iy$. Тогда $\bar{z} = x - iy$ и $\bar{z}^2 = x^2 - y^2 + i(-2xy)$. Следовательно, $\operatorname{Im} \bar{z}^2 = -2xy$. По условию $-2xy < -1$ или $xy > \frac{1}{2}$. Полученное неравенство определяет множество точек, изображенных на рис. 2.11.

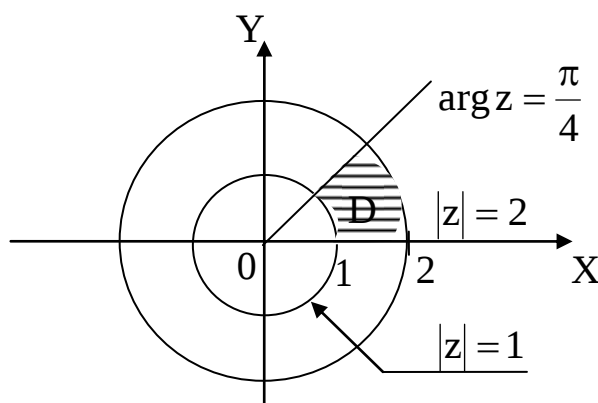


Рис. 2.10

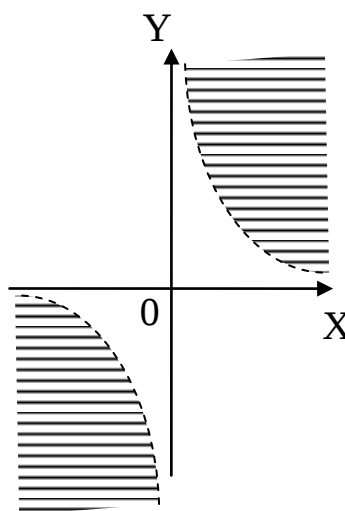


Рис. 2.11

2.3. Функция комплексного переменного. Предел и непрерывность функции. Основные элементарные функции

Напоминаем (формула 1.17 из первой части), что функцию комплексного переменного $w=w(z)$ можно представить в виде $w(z)=u(x;y) + i \cdot v(x;y)$.

Пример 2.17. Выделить действительную и мнимую части функции $w(z) = e^{z^2}$.

Решение. Так как $z = x + iy$, тогда по определению показательной функции (1.6) и (1.12), имеем $e^{z^2} = e^{(x^2-y^2)+i2xy} = e^{x^2-y^2} (\cos 2xy + i \sin 2xy)$. Откуда $\operatorname{Re} w = e^{x^2-y^2} \cdot \cos 2xy$, $\operatorname{Im} w = e^{x^2-y^2} \cdot \sin 2xy$.

Пример 2.18. Найти значение функции $w = \sin z$ в точке $z_0 = \pi + i \ln(2 + \sqrt{5})$, иначе говоря, найти образ точки z_0 при отображении $w = \sin z$.

Решение. $w_0 = \sin z_0 = \sin[\pi + i \ln(2 + \sqrt{5})]$ = по формуле приведения $= \sin(i \cdot \ln(2 + \sqrt{5}))$ = по формуле (1.24) $= i \operatorname{sh}(\ln(2 + \sqrt{5}))$ = используем формулу

$$(1.22) = \frac{e^{\ln(2+\sqrt{5})} - e^{-\ln(2+\sqrt{5})}}{2} i = \frac{2+\sqrt{5} - \frac{1}{2+\sqrt{5}}}{2} i = \frac{(2+\sqrt{5})^2 - 1}{2(2+\sqrt{5})} i = 2i, \quad |w_0| = 2$$

.

Этот пример показывает, что функция $w = \sin z$ в комплексной области может принимать значения, **большие единицы** по модулю.

Пример 2.19. Найти корни уравнения $\cos z = 2$ и изобразить их на плоскости.

Решение. По определению функции $w = \cos z$, из (1.22) имеем $\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2$, откуда $e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0$. Полученное квадратное уравнение относительно e^{iz} имеет корни $e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}$. Следовательно, в силу определения логарифмической функции (1.25) с учетом (1.26) получаем

$iz = \ln|2 \pm \sqrt{3}| + i \arg(2 \pm \sqrt{3}) + i2\pi k = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + i2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Отсюда определяем z : $z_k = 2\pi k - i \ln(2 \pm \sqrt{3}), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Итак, получены две серии корней $z_k^{(1)} = 2\pi k - i \ln(2 + \sqrt{3}), z_k^{(2)} = 2\pi k - i \ln(2 - \sqrt{3}), \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

Учитывая, что $\ln(2 - \sqrt{3}) = \ln \frac{4-3}{2+\sqrt{3}} = -\ln(2 + \sqrt{3})$, вторая серия корней $z_k^{(2)}$ переписывается в виде $z_k^{(2)} = 2\pi k + i \ln(2 + \sqrt{3})$. Таким образом, корнями данного уравнения являются точки, расположенные на прямых, параллельных действительной оси OX и отстоящих от нее на расстоянии $\ln(2 + \sqrt{3})$ (рис. 2.12). При изображении чисел учтено, что $\ln(2 + \sqrt{3}) \approx 1,31$.

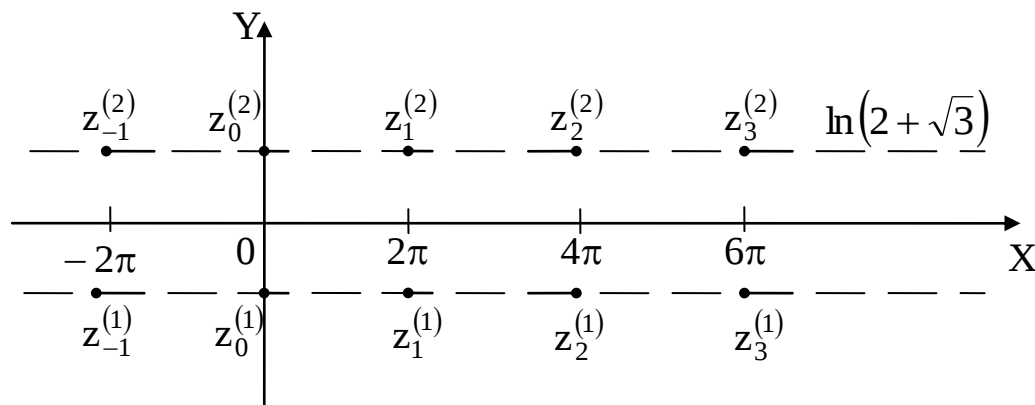


Рис. 2.12

Пример 2.20. При отображении $w = z^2$ найти:

- образ прямой линии $\ell_z: y = x - 1$;
- образы прямоугольной сетки, т.е. прямых, параллельных осям координат: $x = \text{const}, y = \text{const}$;
- образ линии $\ell_z: |z| = 2, 0 \leq \arg z \leq \pi$;
- образ области $D_z: |z| \leq 2, \text{Im} z > 0, \text{Re} z > 0$;
- образ области D_z : внутренность треугольника с вершинами в точках $0; 1; 1 + 2i$.

Решение. а) Полагая $z = x + iy$, определим действительную и мнимую части функции $w = z^2$: $\operatorname{Re} w = u(x, y) = x^2 - y^2$, $\operatorname{Im} w = v(x, y) = 2xy$. Для того чтобы найти уравнение образа L_w данной прямой ℓ_z , исключим y из

уравнений
$$\begin{cases} u(x, y) = x^2 - y^2 \\ v(x, y) = 2xy \\ y = x - 1 \end{cases},$$
 в результате чего получим два соотношения:

$$\begin{cases} u = 2x - 1 \\ v = 2x^2 - 2x \end{cases}.$$

Если из полученных соотношений исключить x , то придем к

уравнению образа в плоскости W в действительных переменных u и v :

$$v = \frac{1}{2}(u^2 - 1).$$

Как видно, искомый образ - есть парабола (рис. 2.13).

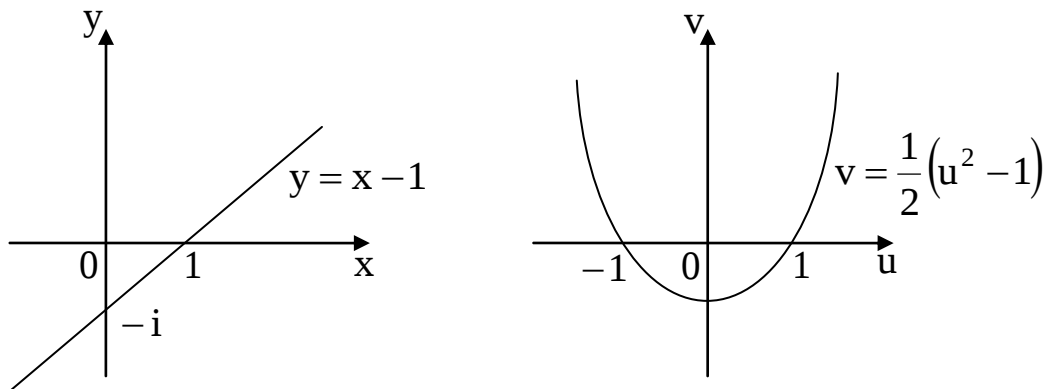


Рис. 2.13

б) Чтобы найти образы семейства прямых $x = c$, подставим вместо x его значение в действительную и мнимую части функции $w = z^2$: $u = c^2 - y^2$, $v = 2cy$. Исключив отсюда y , получим $u = c^2 - \frac{v^2}{4c^2}$ - семейство парабол, симметричных относительно оси $0u$, вершины которых находятся на положительной части этой оси, а ветви направлены в сторону отрицательной части оси $0u$ (рис. 2.14). В частности, при $c = \pm 1$ и $c = \pm 2$ соответственно имеем $v^2 = -4(u - 1)$ и $v^2 = -16(u - 4)$.

Мнимая ось (ее уравнение $x = 0$) плоскости Z отобразится на линию $\{u = -y^2; v = 0\}$. Второе из этих равенств указывает, что образ прямой $x = 0$ на оси $0u$, а из первого равенства следует, что u может принимать лишь отрицательные значения. Следовательно, мнимая ось $x = 0$ плоскости Z отображается на отрицательную часть действительной оси плоскости

$$w: \begin{cases} u \leq 0 \\ v = 0 \end{cases}.$$

Семейство прямых $y = d$ отображается в семейство кривых

$$\begin{cases} u = x^2 - d^2 \\ v = 2xd \end{cases} \quad \text{или} \quad u = \frac{v^2}{4d^2} - d^2 \quad \text{на плоскости } w.$$

Получили семейство парабол, симметричных относительно оси OU , вершины находятся на отрицательной части OU , направление ветвей совпадает с положительным направлением оси OU (рис. 2.14). В частности, при $d = \pm 1$ и $d = \pm 2$ имеем $v^2 = 4(u+1)$, $v^2 = 16(u+4)$. При $d = 0$ получаем: $\begin{cases} u = x^2 \\ v = 0 \end{cases}$. Это значит, что действительная ось $y = 0$ плоскости Z

отображается в положительную часть действительной оси плоскости w .

Итак, сетка прямых XOY линий отобразится в сетку параболических кривых в плоскости UOV .

в) Линия ℓ_z — полуокружность верхней полуплоскости с центром в начале координат и радиусом $r = 2$. Уравнение кривой запишем в комплексно-параметрической форме $z = r e^{i\varphi}$, где $r = |z| = 2$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

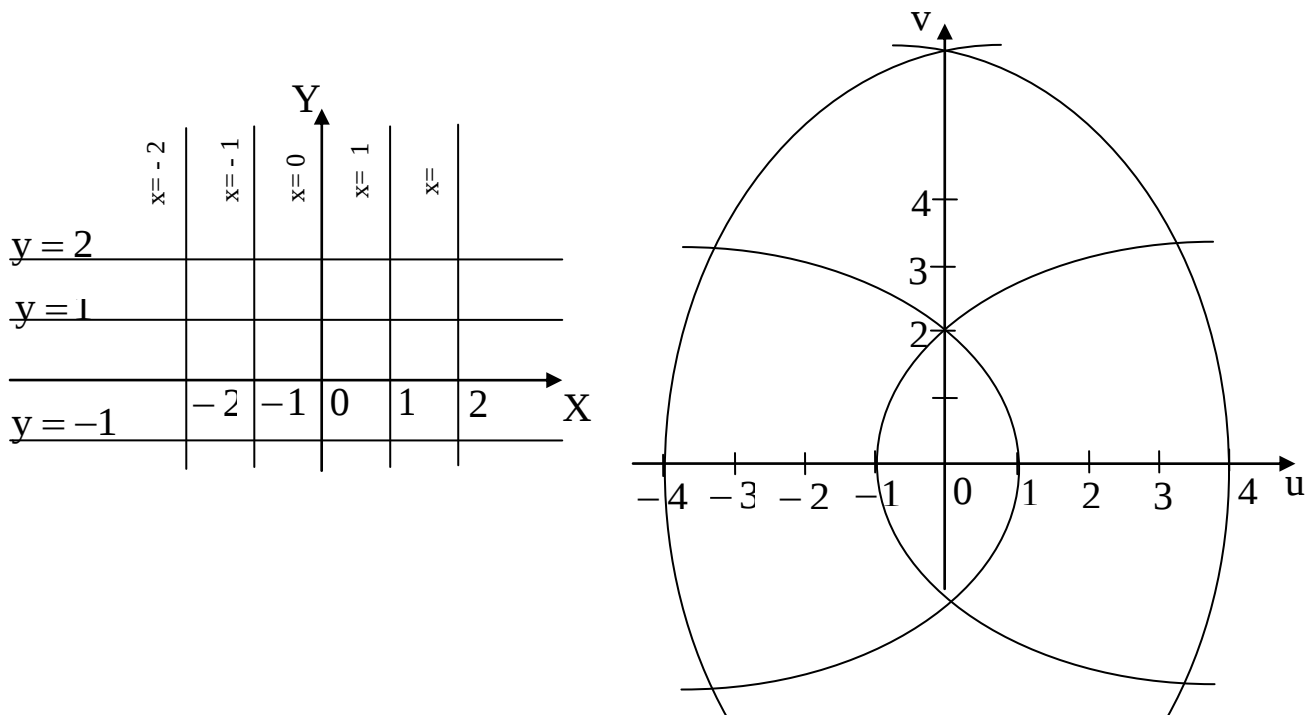


Рис. 2.14

Тогда $w = z^2 = r^2 e^{i2\varphi}$, откуда следует, что $|w| = 4$; $\arg w = 2 \arg z$. Значит, при отображении $w = z^2$ точки, лежащие на полуокружности плоскости z , перейдут в точки, лежащие на окружности $|w| = 4$, $0 \leq \arg w \leq 2\pi$ плоскости w (рис. 2.15).

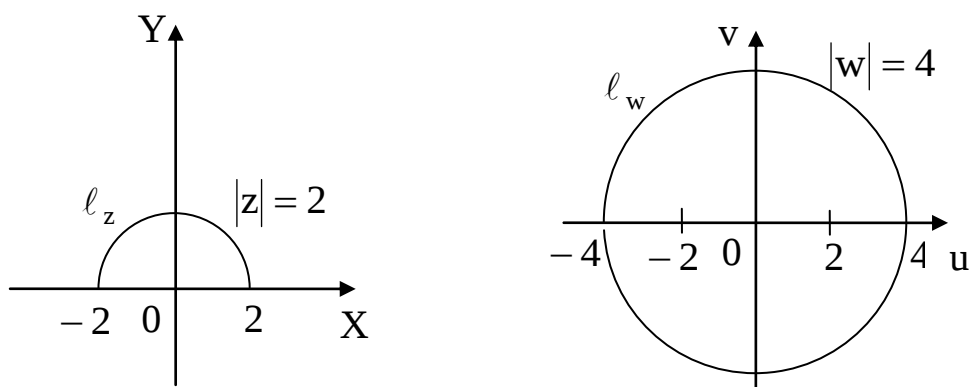


Рис. 2.15

г) Для отыскания образа G_w области D_z можно найти образ L_w ее границы (если область замкнутая или ограниченная), а затем выяснить расположение искомой области относительно ее границы. Если произвольная точка $z_0 \in D_z$ переходит в точку w_0 , лежащую внутри контура L_w , то

область G_w есть ограниченная область - множество точек плоскости w , лежащих внутри контура. Если точка $z_0 \in D$ переходит в точку w_0 , лежащую вне контура, то область G_w есть область неограниченная, расположенная вне линии L_w . По условию, область D_z плоскости z есть четверть круга в первой четверти координатной плоскости (рис. 2.16).

Как было показано в предыдущих пунктах б) и в) задачи, мнимая ось $OY(x=0)$ переходит в отрицательную полуось $OU(u \leq 0, v=0)$, действительная ось $OX(y=0)$ – в положительную полуось $OU(u \geq 0, v=0)$, а дуга AB окружности плоскости z переходит в полуокружность $A'SB'$ верхней полуплоскости w .

На основании этого можно заключить, что образом контура $OABO$ плоскости z является контур $OA'SB'O$ плоскости w (рис. 2.16). Чтобы убедиться в этом, четверть круга $|z| \leq 2, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0$ отображается в верхний полукруг: $|w| \leq 4, \operatorname{Im} v \geq 0$, покажем, что произвольная точка области D_z переходит в точку полукруга G_w . Например, при

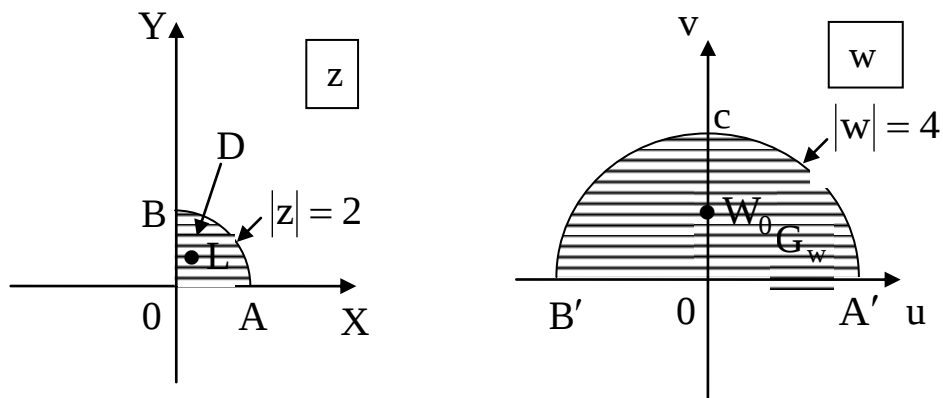


Рис. 2.16

$$z_0 = 1 + i, \quad w_0 = z_0^2 = 2i, \text{ т.е. } w_0 \in G_w.$$

д) область D_z изображена на рис. 2.17а. Найдём последовательно образы участков границы области D_z , помня, что $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$.

Отрезок z_1z_2 , уравнение которого $x_1 = 1$, причем $0 \leq y \leq 2$, имеет своим образом линию: $\{u = 1 - y^2; v = 2y\}$. Легко установить, что это есть часть параболы $v^2 = -4(u - 1)$, т.к. $-3 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 4$ (рис. 2.17 б).

Отрезок $0z_2$, уравнение которого $y = 2x$, где $0 \leq x \leq 1$, имеет своим образом линию: $\begin{cases} u = -3x^2 \\ v = 4x^2 \end{cases}$, откуда имеем $v = -\frac{3}{4}u$, причем $-3 \leq u \leq 0$, $0 \leq v \leq 4$ (рис. 2.17 б).

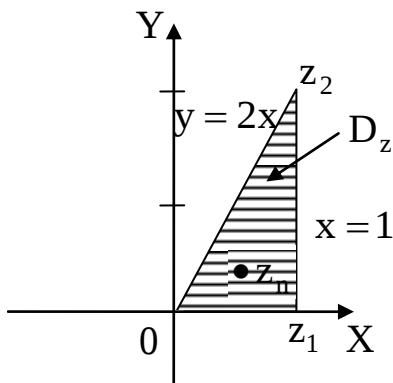


Рис. 2.17а

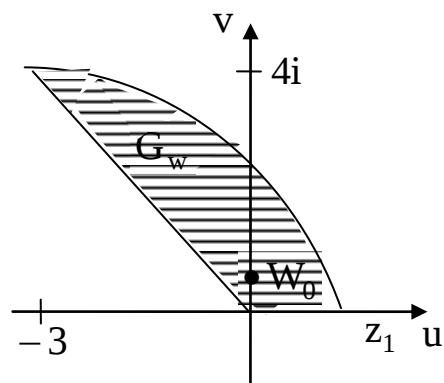


Рис. 2.17б

Отрезок $0z_1: y = 0, 0 \leq x \leq 1$ отображается в отрезок оси $0U$, т.к. $u = x^2$, $v = 0$ и $0 \leq u \leq 1$ (рис. 2.17 б).

Чтобы показать, куда переходит внутренность треугольника $0z_1z_2$, возьмем точку $z_0 = 0,5 + 0,5i$. Найдем соответствующее значение $w_0 = z_0^2 = \frac{i}{2}$. Таким образом, отображением прямолинейного треугольника плоскости Z , осуществляемого функцией $w = z^2$, является криволинейный треугольник плоскости W , представленный на рис. 2.17 б.

Пример 2.21. Отобразить с помощью функции $w = e^z$ декартову координатную сетку.

Решение. Введем на плоскости z декартовы, а на плоскости w – полярные координаты, то есть положим $z = x + iy, w = re^{i\varphi}$. По определению показательной функции имеем $w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} =$ (по формуле Эйлера) $= e^x (\cos y + i \sin y)$. Следовательно,

$$r = |w| = e^x, \quad \varphi = \arg w = y. \quad (2.3)$$

Найдем образы координатных линий $x = c$. Из равенства (2.3) имеем

$$r = |w| = e^c, \quad -\infty < \arg w < \infty. \quad (2.4)$$

Когда точка z пробегает прямую $x = c$, ее образ, как следует из системы (2.4), пробегает окружность, причем бесконечно много раз, в силу периодичности показательной функции $w = e^z$. Рассмотрим изменение ее аргумента в промежутке $0 \leq \arg w < 2\pi$, что соответствует изменению y в том же интервале. Тогда образами отрезков $x = c, 0 \leq y < 2\pi$ являются окружности радиуса $r = e^c$ с центром в начале координат, пробегаемые один раз (рис. 2.18).

Найдем теперь образы координатных прямых $y = d, -\infty < x < \infty$ и пусть $0 \leq d < 2\pi$. В силу равенства (2.4) имеем

$$0 < |w| = e^x < \infty, \quad 0 \leq \arg w = d < 2\pi. \quad (2.5)$$

Из системы (2.5) следует: когда точка z пробегает прямую $y = d$, точка w пробегает луч $\arg w = d$, исходящий из начала координат ($0 < |w| < \infty$) (рис. 2.18).

Итак, функция $w = e^z$ отображает прямые, параллельные мнимой оси ($x = \text{const}$), в окружности с центром в начале координат, а прямые, параллельные действительной оси ($y = \text{const}$), в лучи, выходящие из начала координат; иначе говоря, декартова прямоугольная сетка отображается в полярную координатную сетку. При этом заштрихованный прямоугольник

$c < x < c', d < y < d' \quad (0 < d' - d < 2\pi)$ плоскости z отображается в заштрихованную часть кольца плоскости w (рис. 2.18).

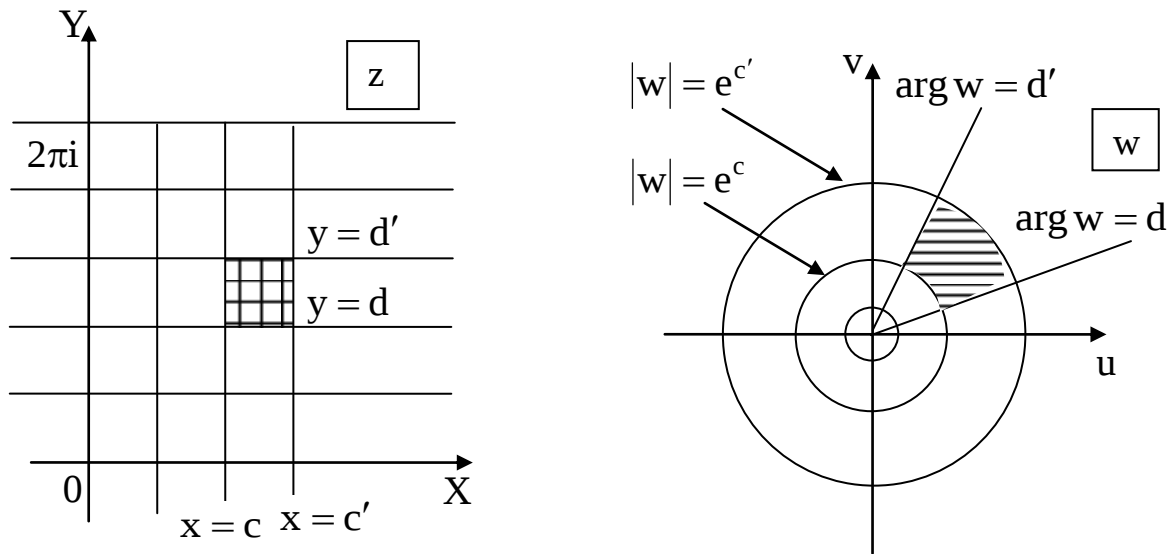


Рис. 2.18

Пример 2.22. Показать, что $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ не существует.

Решение. Пусть точка z стремится к нулевой точке по оси OX . Тогда $z = x$ и $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$. Пусть теперь $z \rightarrow 0$ по оси OY . Тогда $z = iy, \bar{z} = -iy$ и $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-iy}{iy} = \lim_{y \rightarrow 0} (-1) = -1$. Таким образом, пределы по двум направлениям различны и, следовательно, $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ не существует.

Пример 2.23. Вычислить $\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2 + 3iz - 2}{z + i}$.

Решение. Подставим в место z его предельное значение, то есть $(-i)$: $\frac{(-i)^2 + 3i(-i) - 2}{-i + i} = \frac{-1 + 3 - 2}{0} = \frac{0}{0}$ — получили неопределенность. Значит дробное выражение надо преобразовать: $z^2 + 3iz - 2 = 0 \Rightarrow z_1 = -2i, z_2 = -i$.

$$\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2 + 3iz - 2}{z + i} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{(z + 2i)(z + i)}{(z + i)} = \lim_{z \rightarrow -i} (z + 2i) = i.$$

2.4. Производная функции комплексного переменного.

Условия дифференцируемости. Аналитические функции

Пример 2.24. Показать, что функция $w(z)=z$ аналитическая, и найти ее производную.

Решение. В соответствии с формулой (1.17) из первой части этого пособия представим нашу функцию в виде $w(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$. Так как $z=x+iy$, то $w(z)=z=x+iy$. И мы видим, что $u(x,y)=x$; $v(x,y)=y$. Проверим, выполняются ли условия Коши (1.30). Для этого подготовим частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}=1$; $\frac{\partial u}{\partial y}=0$; $\frac{\partial v}{\partial x}=0$; $\frac{\partial v}{\partial y}=1$; и подставим результат в формулы (1.30). Видим, что равенства верны для всех z из области определения функции. Значит, функция $w(z)=z$ аналитична. Вычисляем ее производную по одной из формул (1.31), например по первой $w'(z)=1+0i$. Итак $w'(z)=(z)'=1$.

Пример 2.25. Проверить, является ли функция $w(z)=y+ix$ аналитической.

Решение. В отличие от функции, рассмотренной в предыдущем примере, здесь x и y поменялись местами. И теперь $u(x,y)=y$; $v(x,y)=x$. Значит частные производные будут другими: $\frac{\partial u}{\partial x}=0$; $\frac{\partial u}{\partial y}=1$; $\frac{\partial v}{\partial x}=1$; $\frac{\partial v}{\partial y}=0$. Подставим данные цифры в условия (1.30) и видим, что нарушается второе условие $1 \neq -1$. Значит, функция $w(z)=y+ix$ не аналитична во всех точках комплексной плоскости и производная для нее не существует.

Пример 2.26. Выяснить, является ли аналитической функция: а) $w = \bar{z}$;
б) $w = z \operatorname{Im} z$?

Решение. а) Так как $\bar{z} = x - iy$, то $\operatorname{Re} w = u = x$, $\operatorname{Im} w = v = -y$. Откуда

$\frac{\partial u}{\partial x}=1, \frac{\partial u}{\partial y}=0, \frac{\partial v}{\partial x}=0, \frac{\partial v}{\partial y}=-1$. Как видно, первое условие (C.-R.) (1.30) не выполняется ни при каких x и y . Следовательно, функция не дифференцируема ни в одной точке плоскости, а поэтому и не аналитична.

б) Имеем $w = z \operatorname{Im} z = (x + iy)y = xy + iy^2$. Функции $u(x, y) = xy$ и $v(x, y) = y^2$ дифференцируемы в каждой точке плоскости, ибо их частные производные $\frac{\partial u}{\partial x} = y, \frac{\partial u}{\partial y} = x, \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$ непрерывны на всей плоскости. Но условия (С.-R.) не выполняются ни в какой точке плоскости, кроме точки $(0;0)$, где все частные производные равны нулю. Следовательно, функция $w = z \operatorname{Im} z$ дифференцируема только в одной точке, но не является аналитической в ней, т.к. по определению, требуется дифференцируемость в окрестности данной точки. Таким образом, функция $w = z \operatorname{Im} z$ не является аналитической ни при каком значении z .

Из приведенного примера ясно, что аналитичность функции в точке более сильное требование, чем дифференцируемость ее в этой точке.

Пример 2.27. Показать, что функция $w = e^{2z}$ дифференцируема и аналитична во всей комплексной плоскости. Вычислить ее производную.

Решение. Найдем $\operatorname{Re} w$ и $\operatorname{Im} w$. По определению, имеем $e^{2z} = e^{2(x+iy)} = e^{2x}(\cos 2y + i \sin 2y)$. Следовательно, $u(x, y) = e^{2x} \cos 2y$,

$$v(x, y) = e^{2x} \sin 2y. \text{ Откуда } \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2e^{2x} \cos 2y, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -2e^{2x} \sin 2y, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 2e^{2x} \sin 2y, & \frac{\partial v}{\partial y} &= 2e^{2x} \cos 2y. \end{aligned}$$

Как видно, частные производные непрерывны на всей плоскости, и функции $u(x, y), v(x, y)$ дифференцируемы в каждой точке плоскости. Условия (С.-R.) выполняются. Следовательно, $w = f(z)$ дифференцируема в каждой точке плоскости, а значит, и аналитична на всей плоскости z . Поэтому производную можно найти по одной из формул (1.31):

$$w' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x}(\cos 2y + i \sin 2y) = 2e^{2z}.$$

Наконец, производная может быть найдена по правилам формального дифференцирования: $w' = (e^{2z})' = 2e^{2z}$.

Пример 2.28. Существует ли аналитическая функция, для которой $\text{Re} w = u(x, y) = e^{\frac{y}{x}}$?

Решение. Проверим, является ли функция $u(x, y) = e^{\frac{y}{x}}$ гармонической. С этой целью находим $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{\frac{y}{x}} \left(-\frac{y}{x^2} \right), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{\frac{y}{x}} \left(\frac{y^2}{x^4} + \frac{2y}{x^3} \right), \frac{\partial u}{\partial y} = e^{\frac{y}{x}} \frac{1}{x},$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2} e^{\frac{y}{x}}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \neq 0$. Из последнего соотношения следует, что $u = e^{\frac{y}{x}}$ не может быть действительной, а также и мнимой частью аналитической функции.

Пример 2.29. Найти, если это возможно, аналитическую функцию по ее действительной части $\text{Re} w = 3x^2y - y^3$.

Решение. Прежде проверим, является ли функция $u(x, y) = 3x^2y - y^3$ гармонической. Находим $\frac{\partial u}{\partial x} = 6xy, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6y, \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6y$ и

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y - 6y = 0$. Гармоническая на всей плоскости функция $u(x, y)$

сопряжена с $v(x, y)$ условиями Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Из этих

условий получаем $\frac{\partial v}{\partial y} = 6xy, \frac{\partial v}{\partial x} = -(3x^2 - 3y^2)$. Из первого уравнения системы

находим $v(x, y)$ интегрированием по y , считая x постоянным,

$$v(x, y) = \int 6xy dy + C(x) = 3xy^2 + C(x),$$

где $C(x)$ – произвольная функция, подлежащая определению. Найдем отсюда

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 3y^2 + C'(x) \text{ и приравняем к выражению } \frac{\partial v}{\partial x}, \text{ ранее найденному:}$$

$3y^2 + C'(x) = -3x^2 + 3y^2$. Получили дифференциальное уравнение для определения функции $C(x): C'(x) = -3x^2$. Откуда

$$C(x) = -3 \int x^2 dx + C = -x^3 + C. \quad \text{Итак,} \quad v(x, y) = 3xy^2 - x^3 + C. \quad \text{Тогда}$$

$$w = f(z) = 3x^2y - y^3 + i(3xy^2 - x^3 + C) = -iz^3 + iC.$$

Пример 2.30. Восстановить аналитическую функцию $w = f(z)$ по известной ее мнимой части $v(x, y) = -2 \sin 2x \operatorname{sh} 2y + y$ и при дополнительном условии $f(0) = 2$.

Решение. Опуская проверку данной функции на гармоничность, находим

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -4 \sin 2x \operatorname{ch} 2y + 1. \quad \text{Тогда по первому условию Коши-Римана}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} = -4 \sin 2x \operatorname{ch} 2y + 1. \quad \text{Интегрируем последнее соотношение,}$$

чтобы найти u : $u = \int (-4 \sin 2x \operatorname{ch} 2y + 1) dx + C(y) = 2 \cos 2x \operatorname{ch} 2y + x + C(y)$.

Функция $u = u(x, y)$ содержит пока не известную функцию $C(y)$. Чтобы определить ее вид, дифференцируем u по y , получим

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 4 \cos 2x \operatorname{sh} 2y + C'(y) \quad (*). \quad \text{По второму условию Коши-Римана} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

то есть $\frac{\partial u}{\partial y} = 4 \cos 2x \operatorname{sh} 2y \quad (**)$. Приравняем правые части из (*) и (**):

$$4 \cos 2x \operatorname{sh} 2y + C'(y) = 4 \cos 2x \operatorname{sh} 2y. \quad \text{Откуда следует, что} \quad C'(y) = 0 \quad \text{и} \\ C(y) = C = \text{const.}$$

$$\text{Итак, } u = 2 \cos 2x \operatorname{ch} 2y + x + C, \text{ следовательно, } w = u(x, y) + iv(x, y) = \\ = 2 \cos 2x \operatorname{ch} 2y + x + i(-2 \sin 2x \operatorname{sh} 2y + y) + C \text{ или } w(z) = z + 2 \cos 2z + C.$$

Как видно из приведенных примеров, аналитическая функция определяется по своей действительной или мнимой части с точностью до произвольной постоянной. Задание дополнительного условия - значения функции в точке - позволяет определить аналитическую функцию единственным образом.

По условию $f(0) = 2$; воспользуемся этим для определения $C: f(0) = 0 + 2 + C = 2$, откуда $C = 0$. Ответ: $f(z) = z + 2\cos 2z$.

Пример 2.31. Найти коэффициент подобия k и угол поворота φ в точке z_0 при отображении $w = f(z)$: а) $w = e^z, z_0 = -1 - i\frac{\pi}{2}$; б) $w = z^3, z_0 = 2i$.

Решение. а) Найдем $w' = f'(z) = e^z$ и ее частное значение в точке $z_0 = -1 - i\frac{\pi}{2}: f'(z_0) = e^{-1 - i\frac{\pi}{2}} = e^{-1} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right)$. Значит, коэффициент подобия $k = |f'(z_0)| = \frac{1}{e} < 1$, т.е. отображение производит сжатие в точке z_0 , а $\varphi = \arg f'(z_0) = -\frac{\pi}{2}$, т.е. в данной точке происходит вращение на угол $\frac{\pi}{2}$ по часовой стрелке.

б) $w' = 3z^2|_{z=2i} = -12 = 12(\cos \pi + i \sin \pi)$, откуда следует, что коэффициент растяжения $k = 12$, а угол поворота $\varphi = \pi$.

2.5. Интегрирование функции комплексного переменного

Пример 2.32. Вычислить интеграл $\int_{z_1}^{z_2} w(z) dz$, где $z = x + iy, w(z) =$

$(x^3 - 3xy^2 + x + 1) + i(y^3 - 3yx^2 + y)$ по прямой, соединяющей точки $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = i$, в направлении от z_1 к z_2 .

Решение. Уравнение пути интегрирования, то есть прямой линии $z_1 z_2$

(рис. 2.19) находим по формуле $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ или $\frac{x-1}{0-1} = \frac{y+1}{1+1}$. Тогда $y = -2x + 1$ (*) и $dy = -2dx$.

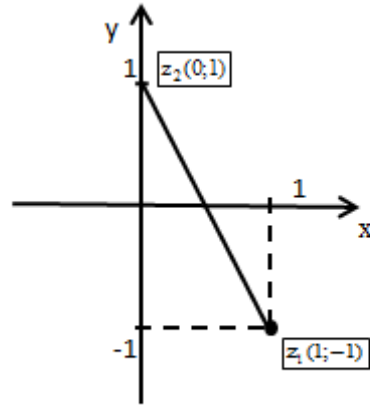


Рис. 2.19

Теперь рассматриваем интеграл $\int_{z_1}^{z_2} w(z) dz = \int_{z_1}^{z_2} ((x^3 - 3xy^2 + x + 1) + i(y^3 - 3x^2y + y))(dx + i dy) =$ по формуле (1.35) $= \int_{z_1}^{z_2} (x^3 - 3xy^2 + x + 1) dx - (y^3 - 3x^2y + y) dy + i \int_{z_1}^{z_2} (y^3 - 3x^2y + y) dx + (x^3 - 3xy^2 + x + 1) dy =$ вместо y подставим (*) и $dy = -2dx$ $= \int_1^0 (x^3 - 3x(-2x+1)^2 + x + 1) - \int_1^0 ((-2x+1)^3 - 3x^2(-2x+1) + (-2x+1))(-2dx) + i \int_1^0 ((-2x+1)^3 - 3x^2(-2x+1) + (-2x+1)) dx + \int_1^0 (x^3 - 3x(-2x+1)^2 + x + 1)(-2dx) = \frac{29}{4} + 2i.$

Пример 2.33. Вычислить $\int_{\pi i/2}^{\frac{\pi}{4} + \pi i} \sin^2 z dz$

Решение. Так как функция $w(z) = \sin^2 z$ аналитическая всюду, то не имеет значения, по какому пути идет интегрирование. Применим формулу Ньютона – Лейбница (1.37), но вначале по формуле $2 \cdot \sin^2 z = 1 - \cos 2z$ меняем

подынтегральную функцию:

$$\int_{\pi i/2}^{\frac{\pi}{4}+\pi i} \sin^2 z \, dz = \frac{1}{2} \int_{\pi i/2}^{\frac{\pi}{4}+\pi i} (1 - \cos 2z) \, dz = \frac{1}{2} \left(\int_{\pi i/2}^{\frac{\pi}{4}+\pi i} 1 \, dz - \int_{\pi i/2}^{\frac{\pi}{4}+\pi i} \cos 2z \, dz \right) = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi i}{4} - \frac{1}{4} ((e^{-2\pi} + e^{2\pi}) + i(e^{-2\pi} - e^{2\pi}))$$

Пример решен.

Пример 2.34. Вычислить интеграл $\oint_{\ell_1} z e^z \, dz$, где ℓ_1 - окружность $|z|=1$.

Решение. Так как функция $w(z)=z \cdot e^z$ аналитична всюду и контур интегрирования замкнутый, то по теореме Коши (1.38) $\oint_{\ell_1} z e^z \, dz = 0$.

Пример 2.35. Вычислить $\oint_{\ell_1} \frac{z}{z-2} \, dz$, где ℓ_1 - окружность $|z|=2$.

Решение. Подынтегральная функция $w(z)=\frac{z}{z-2}$ аналитична всюду, кроме точки $z=2$. Эта точка находится на контуре интегрирования, применяем формулу Коши (1.41), полагая $f(z)=z$, $z_0=2$. Итак, $\oint_{\ell_1} \frac{z}{z-2} \, dz = 2\pi i (z|_{z=2}) = 4\pi i$

Пример решен.

Пример 2.36. Интеграл $\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z^2 + 4} \, dz$.

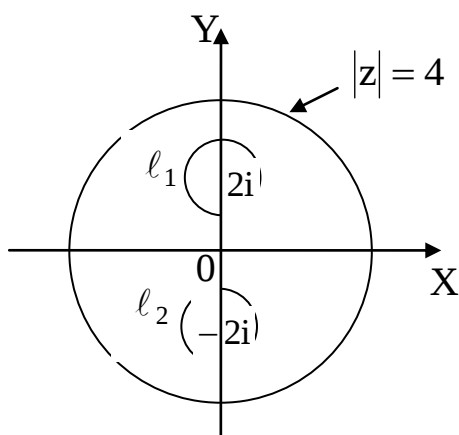


Рис. 2.20

Решение. В круге $|z| \leq 4$ функция $f(z) = \frac{\sin z}{z^2 + 4}$ аналитическая всюду, кроме точек $z_1 = 2i$ и $z_2 = -2i$. Вырежем из данного круга области δ_1 и δ_2 , ограниченные любыми непересекающимися замкнутыми контурами ℓ_1 и ℓ_2 , причем $\ell_1 \subset D$ и $\ell_2 \subset D$ (рис. 2.19). Тогда в силу теоремы Коши для многосвязной области

(формула (1.39)) имеем

$$I = \oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz = \oint_{\ell_1} \frac{\sin z dz}{z^2 + 4} + \oint_{\ell_2} \frac{\sin z dz}{z^2 + 4} = I_1 + I_2. \text{ В качестве } \ell_1 \text{ и } \ell_2 \text{ можно}$$

взять любые контуры, в частности окружности. Пусть $\ell_1 = \{z : |z - 2i| = 1\}$ и $\ell_2 = \{z : |z + 2i| = 1\}$ (рис. 2.19). Каждый из интегралов I_1 и I_2 можно

$$\text{вычислить по интегральной формуле Коши (1.41) } I_1 = \oint_{\ell_1} \frac{\sin z}{z + 2i} \frac{dz}{z - 2i} =$$

$$2\pi i \frac{\sin z}{z + 2i} \Big|_{z=2i} = \frac{\pi \sin 2i}{2}; I_2 = \oint_{\ell_2} \frac{\sin z}{z - 2i} \frac{dz}{z + 2i} = 2\pi i \frac{\sin z}{z - 2i} \Big|_{z=-2i} = -\frac{\pi \sin(-2i)}{2}.$$

$$\text{Таким образом, } I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2} [\sin 2i - \sin(-2i)] =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{e^{2i^2} - e^{-2i^2}}{2i} - \frac{e^{-2i^2} - e^{2i^2}}{2i} \right) = -\frac{\pi}{i} \cdot \frac{e^2 - e^{-2}}{2} = i\pi \operatorname{sh} 2.$$

Пример 2.37. Вычислить интеграл $\oint_L \frac{e^z dz}{(z + 2)^4}$, где L — произвольный

замкнутый контур, однократно обходящий точку $z = -2$ в положительном направлении.

Решение. Внутри контура подынтегральная функция $\frac{e^z}{(z + 2)^4}$ является

аналитической всюду, кроме точки $z_0 = -2$. Для вычисления интеграла воспользуемся формулой (1.42), выделив аналитическую в указанной области функцию $f(z) = e^z$, полагая $n = 3$. Так как $f'''(z) = e^z$, то в соответствии с

$$(1.42) \oint_L \frac{e^z dz}{(z + 2)^4} = \frac{2\pi i}{3!} f'''(-2) = \frac{\pi i}{3} e^{-2}.$$

2.6. Ряды в комплексной плоскости. Ряды Тейлора и Лорана

Пример 2.38. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(e - i)^n}{n^n}$.

Решение. К ряду из абсолютных величин членов данного ряда применим

признак Даламбера:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)(e-i)^{n+1} n^n}{(n+1)^{n+1} n! (e-i)^n} \right| =$$

$$= |e-i| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \sqrt{e^2+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} = \frac{\sqrt{e^2+1}}{e} = \sqrt{1 + \frac{1}{e^2}} > 1.$$

Следовательно, ряд расходится.

Пример 2.39. Найти радиус и круг сходимости рядов

а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(1+in)^n}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i-1)^n}{e^{\frac{n}{2}} \left(1 + ie^{\frac{n}{2}} \right)^n}$.

Решение. а) Применим признак Коши к ряду из абсолютных величин данного

ряда $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|w_n(z)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|z|^n}{|(1+in)^n|}} = |z| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|1+in|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|}{\sqrt{1+n^2}} = 0 < 1$.

Следовательно, данный ряд сходится, и притом абсолютно, для всех z . Роль круга сходимости выполняет вся плоскость, радиус сходимости $R = \infty$.

б) По признаку Даламбера имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{w_{n+1}(z)}{w_n(z)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(z+i-1)^{n+1} e^{\frac{n}{2}} (1+ie^{n/2})}{e^{\frac{n+1}{2}} \left(1 + ie^{\frac{n+1}{2}} \right)^{n+1} (z+i+1)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z+1-i| \cdot |1+ie^{\frac{n}{2}}|}{\sqrt{e} |1+ie^{\frac{n+1}{2}}|} =$$

$$= \frac{|z+1-i|}{\sqrt{e}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+e^n}}{\sqrt{1+e^{n+1}}} = \frac{|z+1-i|}{e} < 1.$$

Отсюда заключаем, что ряд сходится

абсолютно в области $|z+1-i| < e$, т.е. в круге с радиусом $R = e$ и с центром в точке $z_0 = -1 + i$.

Пример 2.40. Разложить функцию $w = f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности

точки z_0 и указать радиус сходимости: а) $f(z) = e^z, z_0 = \frac{1}{2}$;

б) $f(z) = \frac{z}{z+1}, z_0 = 2$; в) $f(z) = e^z \sin z, z_0 = 0$.

Решение. а) Воспользуемся известным разложением для e^z (формулы

(1.51)); с этой целью преобразуем функцию к виду $e^z = e^{\left(z - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}} = \sqrt{e} e^{z - \frac{1}{2}}$.

Заменяя в разложении z на $z - \frac{1}{2}$, получим следующий ряд Тейлора

$$e^z = \sqrt{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(z - \frac{1}{2}\right)^n}{n!}, \text{ для которого радиус сходимости } R = \infty.$$

б) Выделим в дроби целую часть, а затем знаменатель правильной дроби

преобразуем так, чтобы в нем было слагаемое $(z - 2)$: $\frac{z}{z+1} = 1 - \frac{1}{z+1} = 1 - \frac{1}{z-2+3} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-2}{3}}$. Используя разложение функции $\frac{1}{1+z}$ (формулы

(1.51)), получим $\frac{z}{z+1} = 1 - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-2}{3}\right)^n = 1 - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2)^n}{3^n}$.

Радиус сходимости $R = 3$, так как ближайшая особая точка $z = -1$ удалена от центра круга сходимости $z_0 = 2$ на расстояние, равное 3.

в) Представим данную функцию следующим образом:

$$e^z \sin z = e^z \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i} (e^{(1+i)z} - e^{(1-i)z}).$$

$$\text{Тогда } e^z \sin z = \frac{1}{2i} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{((1+i)z)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((1-i)z)^n}{n!} \right) = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{n!} z^n, R = \infty.$$

Пример 2.41. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$ по

степеням z в окрестности точки $z_0 = 0$.

Решение. Функция $f(z)$ не аналитична в точках $z_1 = 2$ и $z_2 = 3$. Мы решим три задачи в этом примере, если рассмотрим три различные области (с центром в точке $z_0 = 0$) исследования на сходимость полученных рядов к нашей функции. Выделим три кольца с центром в точке $z_0 = 0$, в каждом из которых $f(z)$ является аналитической: а) круг $|z| < 2$, б) кольцо $2 < |z| < 3$, в) $3 < |z| < \infty$ — внешность круга $|z| < 3$.

Разложим функцию на сумму двух простейших дробей $\frac{1}{(z-2)(z-3)} =$
 $= -\frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-3}.$

а) В круге $|z| < 2$ функция $f(z)$ аналитична. Коэффициенты ряда Лорана при степенях с отрицательными показателями равны нулю, ибо они выражаются интегралами от аналитической функции по замкнутому контуру. Ряд Лорана совпадает с рядом Тейлора. Запишем каждую из дробей в виде

$$-\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2-z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}}; \quad \frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}}$$

и воспользуемся разложением в

ряд Тейлора функции $\frac{1}{1-z}$ (формулы 1.51)). В силу чего имеем

$$-\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (|z| < 2), \quad \frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \quad (|z| < 3)$$

и $\frac{1}{(z-2)(z-3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) z^n$. В итоге мы разложили $f(z)$ в ряд Лорана,

который содержит только правильную часть: $a_{-n} = 0$,

$$a_n = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

б) В кольце $2 < |z| < 3$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}$ для функции $\frac{1}{z-3}$ сходится, поэтому

по-прежнему $\frac{1}{z-3} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}$, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$ для функции $-\frac{1}{z-2}$ расходится,

поэтому функцию $\frac{1}{z-2}$ преобразуем к виду $\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)}$. Представим

$\frac{1}{1-\frac{2}{z}}$ в виде суммы геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{2}{z}$:

$\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = 1 + \frac{2}{z} + \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{z}\right)^{n-1} + \dots$ Этот ряд сходится для $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$, то есть

при $|z| > 2$. Тогда $\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} \quad (|z| > 2)$.

Таким образом, $\frac{1}{(z-2)(z-3)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}$. Ряд Лорана содержит

правильную и главную части: $a_{-n} = -2^{n-1} (n=1, 2, \dots)$, $a_n = \frac{1}{3^{n+1}} (n=0, 1, 2, \dots)$.

в) В области $3 < |z| < \infty$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n}$ для функции $\frac{1}{z-2}$ сходится, а ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}$ для функции $\frac{1}{z-3}$ расходится. Поэтому функцию $\frac{1}{z-3}$ представим в

виде $\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{z^n} \quad (|z| > 3)$. Тогда имеем

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} - 2^{n-1}}{z^n} \quad (|z| > 3).$$

Полученный ряд Лорана содержит только главную часть. Приведенный пример показывает, что для одной и той же функции $f(z)$ ряд Лорана имеет, вообще говоря, разный вид для разных областей.

Пример 2.42. Разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0 следующие

функции: а) $f(z) = z^5 e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$ б) $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$, $z_0 = -1$;

$$\text{в) } f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}, \quad z_0 = 0.$$

Решение. а) Функция $z^5 e^{\frac{1}{z}}$ аналитична всюду, кроме $z_0 = 0$, поэтому ее можно разложить в ряд Лорана в кольце: $0 < |z| < R$ ($R = \infty$). В силу (1.51)

$$\begin{aligned} \text{имеем } e^{\frac{1}{z}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!}. \text{ Отсюда получаем } z^5 e^{\frac{1}{z}} = z^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = \\ &= z^5 + z^4 + \frac{z^3}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!z} + \dots \end{aligned}$$

б) Функция $\frac{1}{z^2(z-1)}$ аналитична в точке $z_0 = -1$. Поэтому в окрестности

точки $z_0 = -1$ ее можно разложить в ряд Тейлора, причем ряд будет сходиться в круге с центром в $z_0 = -1$ радиуса $R = 1$ (расстояние от точки $z_0 = -1$ до ближайшей особой точки $z_0 = 0$). Разложим функцию на сумму простейших

$$\text{дробей: } \frac{1}{z^2(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}.$$

В силу (1.51) имеем

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z+1-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z+1}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{2}\right)^n \quad (|z+1| < 2),$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z+1-1} = -\frac{1}{1-(z+1)} = -\sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^n \quad (|z+1| < 1).$$

Ряд для функции $\frac{1}{z^2}$ найдем почленным дифференцированием ряда

$$\text{функции } \frac{1}{z}: \quad \frac{1}{z^2} = \left(-\frac{1}{z}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n(z+1)^{n-1} \quad (|z+1| < 1).$$

Таким образом, в круге $|z+1| < 1$ получаем

$$\frac{1}{z^2(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{2^{n+1}} - 1 + (n+1) \right] (z+1)^n.$$

в) Функция $\frac{1}{z^2(z-1)}$ аналитична в кольце $0 < |z| < 1$, поэтому ее ряд

$$\text{Лорана имеет вид: } \frac{1}{z^2(z-1)} = -\frac{1}{z^2} \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n =$$

$$= -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \dots = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n. \quad \text{Главная часть Лорана в}$$

$$\text{окрестности } z_0 = 0 \quad f_1(z) = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}, \text{ а правильная } f_2(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

2.7. Изолированные особые точки функции комплексного переменного

Классификация изолированных особых точек представлено в первой части данного пособия, формулы (1.54) – (1.55).

Пример 2.43. Найти особые точки функции и выяснить их характер:

$$\text{а) } f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z^2 - \frac{\pi}{4}z}; \quad \text{б) } f(z) = z e^{-\frac{1}{z}}.$$

Решение. а) Особые точки: корни уравнения $z^2 - \frac{\pi z}{4} = 0$ и $\cos z = 0$

$$z = 0, \quad z = \frac{\pi}{4}, \quad z_n = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ Выясним их характер.}$$

Отметим, что в точке $z = 0$ обращается в нуль и числитель. Найдем предел

$$\text{функции при } z \rightarrow 0: \quad \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} \cdot \frac{1}{\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \cos z} = -\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, согласно (1.54) точка $z = 0$ является устранимой особой

точкой. Точка $z = \frac{\pi}{4}$ — простой полюс, так как для функции $\psi(z) = \frac{1}{f(z)} =$

$= z \left(z - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{ctg} z$ эта точка является нулем 1-го порядка. В самом деле,

функцию можно представить в виде: $\psi(z) = \left(z - \frac{\pi}{4}\right) \varphi(z)$, где $\varphi(z) = z \operatorname{ctg} z$

аналитична в точке $z = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq 0$. Точки $z_n = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) также являются простыми полюсами, так как для функции

$\psi(z) = \frac{1}{f(z)} = \left(z^2 - \frac{\pi}{4}z\right) \operatorname{ctg} z$ они являются нулями 1-го порядка

$$\begin{aligned} \psi'(z_n) &= \left[\left(2z - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{ctg} z - \frac{z^2 - \frac{\pi}{4}z}{\sin^2 z} \right]_{z=z_n} = (-1)^{n+1} \frac{(2n+1)\pi}{2} \times \\ &\times \left[(2n+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right] \neq 0 \end{aligned}$$

б) В окрестности особой точки $z = 0$ для $f(z)$ имеет место следующее

разложение: $f(z) = z e^{-\frac{1}{z}} = z \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{4!} \frac{1}{z^4} - \dots\right) =$

$= z - 1 + \frac{1}{2!} \frac{1}{z} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{4!} \frac{1}{z^3} - \dots$. Главная часть лорановского разложения

содержит бесконечно много членов. Следовательно, точка $z = 0$ является существенно особой для функции $f(z)$.

Замечание. Исследование функции $f(z)$ в существенной особой точке можно произвести лишь с использованием ряда Лорана.

Пример 2.44. Определить характер особой точки $z = \infty$ для функций:

а) $f(z) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{z}$; б) $f(z) = z^2 e^{-z}$.

Решение. а) точка $z = \infty$ — полюс функции $f(z) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{z}$, так как

$\lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{z} = \infty$. Порядок полюса равен порядку полюса функции

$\psi(\zeta) = \operatorname{ctg} \pi \zeta$ в точке $\xi = 0$ ($\zeta = \frac{1}{z}$), функция же $\psi(\zeta)$ имеет в точке $\zeta = 0$

полюс 1-го порядка, так как функция $\frac{1}{\psi(\zeta)} = \operatorname{tg} \pi \zeta$ имеет в этой точке нуль 1-

го порядка, в чем легко убедиться следующей проверкой: $(\operatorname{tg} \pi \zeta)|_{\zeta=0} = 0$,

$$(\operatorname{tg} \pi \zeta)|_{\zeta=0} = \frac{\pi}{\cos^2 \pi \zeta} \Big|_{\zeta=0} = \pi \neq 0. \text{ Таким образом, } z = \infty \text{ — простой полюс}$$

данной функции.

б) Разложим данную функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$:

$$f(z) = z^2 e^{-z} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+2}}{n!}. \quad \text{Ряд Лорана содержит}$$

бесконечное множество положительных степеней z , поэтому $z = \infty$ — существенно особая точка функции.

2.8. Вычеты функции комплексного переменного.

Применения вычетов

Пример 2.45. Найти вычеты функции относительно их особых точек

а) $f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z^2 - \frac{\pi}{4} z}$; б) $f(z) = z e^{\frac{1}{z}}$.

Решение. Особые точки данных функций и их характер определены в примере 2.43. Итак, а) $z = 0$ – устранимая особая точка, следовательно,

$\operatorname{res} f(0) = 0$. Точка $z = \frac{\pi}{4}$ – простой полюс, согласно (1.61) имеем

$$\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg} z}{z^2 - \frac{\pi}{4} z} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}.$$

Точки $z_n = (n+1)\frac{\pi}{2}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) – простые полюсы, тогда по (1.62)

получим

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] &= \frac{\varphi(z_n)}{\psi'(z_n)} = \frac{\sin z_n}{\left(\left(z^2 - \frac{\pi}{4} z\right) \cos z\right)'_{z=z_n}} = \\ &= \frac{\sin z_n}{\left[2z \cos z - \left(z^2 - \frac{\pi}{4} z\right) \sin z\right]_{z=z_n}} = \frac{(-1)^n}{-\left[(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{4} (2n+1) \frac{\pi}{2}\right] (-1)^n} = \\ &= -\frac{8}{(2n+1)(4n+1)\pi^2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

б) $z = 0$ – существенно особая точка. Для определения вычета относительно существенной точки надо получить разложение функции в окрестности этой точки. Как было показано в примере 2.43(б),

$$ze^{-\frac{1}{z}} = z - 1 + \frac{1}{2!z} - \frac{1}{3!z^2} + \dots \text{ Согласно (1.60), } \operatorname{res} f(0) = a_{-1} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}.$$

Пример 2.46. Вычислить вычеты относительно точки $z = \infty$ для функций: а) $f(z) = z^2 e^{-z}$; б) $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$.

Решение. Вычет функции относительно бесконечной удаленной точки можно определять по формуле (1.65), для чего необходимо получить лорановское разложение в окрестности данной точки.

а) Как показано в примере 16 из первой части ряд Лорана в окрестности $z = \infty$ для данной функции имеет вид:

$$z^2 e^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+2}}{n!} = z^2 - \frac{z^3}{2!} + \frac{z^4}{3!} - \dots. \text{ Так как в разложении слагаемое}$$

$\frac{a_{-1}}{z}$ отсутствует, то $\operatorname{res} f(\infty) = -a_{-1} = 0$.

б) В примере 2.42(а) показано разложение в ряд Лорана функции $z^5 e^{1/z}$.

Аналогично для $z^3 e^{\frac{1}{z}} = z^3 + z^2 + \frac{z}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4!z} + \frac{1}{5!z^2} + \dots$. Откуда следует,

$$\text{что } \operatorname{res} f(\infty) = -a_{-1} = -\frac{1}{4!}.$$

Пример 2.47. Используя теоремы о вычетах, вычислить контурные интегралы:

а) $\oint_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{z}{z^4 - 1} dz;$

б) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^3(z+1)};$

в) $\oint_L \frac{e^z dz}{(z^2 + 1)(z - 3)},$ где L — квадрат, ограниченный прямыми линиями

$$x = -2, x = 2, y = -2, y = 2;$$

г) $\oint_{|z|=2} (2z - 1) \cos \frac{z}{z-1} dz;$

д) $\oint_{|z|=2} \frac{2z^7 + 1}{z^6(z^2 + 1)} dz.$

Решение. а) Подынтегральная функция $f(z) = \frac{z}{z^4 - 1}$ имеет четыре

простых полюса, из которых три: $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$ лежат в круге

$|z - 1| < \frac{3}{2}$ (рис. 2.20). По основной теореме о вычетах (1.66) имеем:

$$I = \oint_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{z dz}{z^4 - 1} = 2\pi i [\operatorname{res} f(1) + \operatorname{res} f(i) + \operatorname{res} f(-i)]. \text{ Вычеты вычисляем по}$$

формуле (1.62) $\operatorname{res} f(z_0) = \operatorname{res} \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} = \frac{z_0}{4z_0^3} = \frac{1}{4z_0^2}$, значит,

$$\operatorname{res} f(1) = \frac{1}{4}, \quad \operatorname{res} f(i) = \operatorname{res} f(-i) = -\frac{1}{4}. \text{ Следовательно,}$$

$$I = 2\pi i \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = -\frac{\pi i}{2}.$$

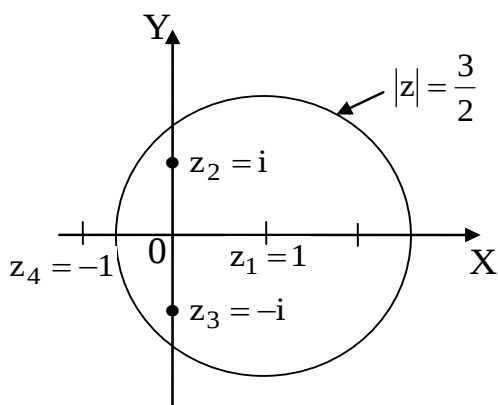


Рис. 2.21

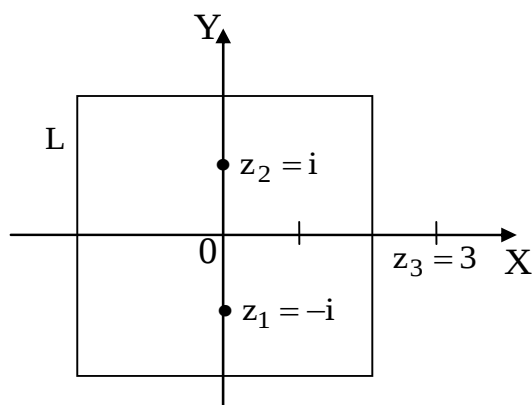


Рис. 2.22

б) Подынтегральная функция $f(z) = \frac{1}{z^3(z+1)}$ имеет две особых точки,

из которых $z_1 = -1$ — простой полюс, $z_2 = 0$ — полюс 3-го порядка; причем

$z_2 = 0$ находится в круге $|z| < \frac{1}{2}$. Поэтому $I = \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^3(z+1)} = 2\pi i \operatorname{res} f(0)$. По

$$\begin{aligned} \text{формуле (1.63)} \quad \operatorname{res} f(0) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} \left(z^3 \frac{1}{z^3(z+1)} \right) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{(z+1)^2} \right)' = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2}{(z+1)^3} = 1. \quad \text{Таким образом,} \quad I = 2\pi i. \end{aligned}$$

в) Подынтегральная функция $f(z) = \frac{e^z}{(z^2 + 1)(z - 3)}$ имеет три особых

точки: $z_1 = -i$, $z_2 = i$, $z_3 = 3$. Но $z_3 = 3$ лежит вне квадрата (рис. 2.21).

Вычеты функции относительно ее простых полюсов z_1 и z_2 определяем по формуле (1.62), положив $\varphi(z) = e^z$, $\psi(z) = (z^2 + 1)(z - 3)$. Тогда в силу (1.66)

$$\begin{aligned} \text{получаем } \oint_L \frac{e^z dz}{(z^2 + 1)(z - 3)} &= 2\pi i [\operatorname{res} f(-i) + \operatorname{res} f(i)] = \\ &= 2\pi i \left[\frac{e^{-i}}{-2i(-i-3)} + \frac{e^i}{2i(i-3)} \right] = \pi \left(\frac{e^{-i}}{i+3} + \frac{e^i}{i-3} \right) = \pi \left(\frac{e^{-i}(i-3)}{-10} + \frac{e^{-i}(i+3)}{-10} \right) = \\ &= -\frac{\pi}{10} \left(2i \frac{e^i + e^{-i}}{2} - 6 \frac{e^i - e^{-i}}{2} \right) = \frac{\pi}{10} (2i \operatorname{ch} i - 6 \operatorname{sh} i) = \frac{\pi}{5} (3 \operatorname{sh} i - i \operatorname{ch} i). \end{aligned}$$

г) Функция $f(z) = (2z-1) \cos \frac{z}{z-1}$ аналитична в круге $|z| < 2$ всюду,

кроме точки $z = 1$. Для определения типа особенности и вычета необходимо разложить функцию в ряд Лорана в кольце $0 < |z-1| < 1$. Предварительно

$$\begin{aligned} \text{найдем } \cos \frac{z}{z-1} &= \cos \left(1 + \frac{1}{z-1} \right) = \cos 1 \cos \frac{1}{z-1} \sin 1 \sin \frac{1}{z-1} = \\ &= \cos 1 \left(1 - \frac{1}{2(1-z)^2} + \dots \right) - \sin 1 \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!(z-1)^3} + \dots \right). \end{aligned}$$

Легко видеть, что

разложение функции $(2z-1) \cos \frac{z}{z-1} = [2(z-1) + 1] \cos \frac{z}{z-1}$ содержит

бесконечно много членов с отрицательными степенями; значит $z = 1$ — существенно особая точка. Так как вычет равен коэффициенту при $(z-1)^{-1}$, то

$$\text{получаем } \operatorname{res} f(1) = a_{-1} = -(\sin 1). \text{ Следовательно, } \oint_{|z|=2} (2z-1) \cos \frac{z}{z-1} dz =$$

$$2\pi i (\sin 1).$$

д). Подынтегральная функция имеет 3 особых точки: $z = 0$ — полюс 6-го порядка, $z = \pm i$ — простые полюсы, и все они принадлежат кругу $|z| < 2$. Можно применить основную теорему о вычетах, но удобнее вычислять, пользуясь вычетом относительно бесконечно удаленной точки:

$$I = \oint_{|z|=2} \frac{2z^7 + 1}{z^6(z^2 + 1)} dz = -2\pi i \operatorname{res} f(\infty).$$

Разложение подынтегральной функции в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$ можно получить, деля числитель на знаменатель по правилу деления

многочленов $\frac{2z^7 + 1}{z^6 + z^6} = \frac{2}{z} - \frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^5} - \frac{2}{z^7} + \dots$. Здесь $a_{-1} = 2$, значит: $\operatorname{res} f(\infty) = -2$, следовательно, $I = 4\pi i$.

Пример 2.48. Вычислить $\int \frac{x \cdot \sin x}{x^2 + 4x + 20} dx$.

Решение. $\int \frac{x \cdot \sin x}{x^2 + 4x + 20} dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cdot e^{ix}}{x^2 + 4x + 20} dx, \alpha = 1,$

$F(z) = \frac{z \cdot e^{iz}}{z^2 + 4z + 20}, \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z^2 \left(1 + \frac{4}{z} + \frac{20}{z^2}\right)} = 0$. Особые точки определяются из

уравнения $z^2 + 4z + 20 = 0$, $z_{1,2} = -2 \pm 4i$, $z_1 = -2 - 4i$, $z_2 = -2 + 4i$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} F(z_2) &= \lim_{z \rightarrow -2+4i} \frac{z \cdot e^{iz}}{(z + 2 + 4i)} = \frac{(-2 + 4i) \cdot e^{i(-2+4i)}}{8i} = \frac{(-2 + 4i) \cdot e^{-4-2i}}{8i} = \\ &= \frac{(-2 + 4i) \cdot e^{-4} \cdot e^{-2i}}{8i} = \frac{(-2 + 4i) \cdot (\cos 2 - i \sin 2)}{8i \cdot e^4} = \\ &= \frac{(\sin 2 - \cos 2) + i(\sin 2 + 2 \cos 2)}{4e^4 i}. \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot e^{ix}}{x^2 + 4x + 20} dx = \frac{\pi \cdot (\sin 2 - \cos 2) + i \pi (\sin 2 + 2 \cos 2)}{2e^4}, \text{ что дает}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot \sin x}{x^2 + 4x + 20} dx = \frac{(\sin 2 + 2 \cos 2)\pi}{2e^4},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot \cos x}{x^2 + 4x + 20} dx = \frac{(\sin 2 - \cos 2)\pi}{2e^4}.$$

Ответ: $\frac{\pi \cdot (\sin 2 + 2 \cos 2)}{2e^4}.$

Пример 2.49. Вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x^3 + 13x) \cdot \sin x}{x^4 + 13x^2 + 36} \cdot dx.$

Решение. Искомый интеграл равен $\operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x^3 + 13x) \cdot e^{ix}}{x^4 + 13x^2 + 36} dx,$

$$F(z) \frac{(2z^3 + 13z) \cdot e^{iz}}{z^4 + 13z^2 + 36}, \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{13}{z^2}}{z \cdot \left(1 + \frac{13}{z^2}\right)} = 0. \text{ Особые точки определяются из}$$

уравнения $z^4 + 13z^2 + 36 = 0, z^2 = -9; -4; z_1 = 3i; z_2 = -3i; z_3 = -2i; z_4 = 2i.$

Нас интересуют только особые точки (полюсы 1-го порядка) $z_1 = 3i$ и $z_4 = 2i$, так как они находятся в верхней полуплоскости.

$$\operatorname{Res} F(z_1) = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{(2z^3 + 13z) \cdot e^{iz}}{(z + 3i) \cdot (z^2 + 4)} = \frac{3i \cdot (-18 + 13)}{1i \cdot (-9 + 4)} = \frac{1}{2} \cdot e^{-3};$$

$$\operatorname{Res} F(z_4) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z \cdot (2z^2 + 13) \cdot e^{iz}}{(z^2 + 9) \cdot (z + 2i)} = \frac{1}{2} \cdot e^{-2}.$$

В силу этого и (1.77) имеем, что искомый интеграл равен

$$2\pi \cdot \frac{1}{2} (e^{-3} + e^{-2}) = \pi \cdot (e^{-2} + e^{-3}).$$

Ответ: $\pi \cdot (e^{-2} + e^{-3}).$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. Араманович И.Г., Лунц Т.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1968. – 415 с.
2. Болгов В.А., Демидович Б.П., Ефименко В.А. и др./Под ред. А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. Сборник задач по математике. Специальные разделы математического анализа. –М.: Наука, 1986. - 416 с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: Учебник для ВТУЗов.- Ростов-на-Дону, 1997.-511с.
4. Жевержеев В.Ф., Кальницкий Л.А., Сапогов Н.А. Специальный курс высшей математики для втузов. – М.: «Высшая школа», 1970. - 416 с.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. - М.: Интеграл-Пресс 2008. – Т.2. – 416с.
6. .Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. –М.: Айрис – Пресс, 2005. – ч.2.-256 с.

Дополнительная

1. Данко П.В., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах.- М.: Высшая школа, 1997.-Ч.2 - 415 с.
2. Кожевников Н.И., Краснощекова Т.И., Шишкин Н.Е. Ряды и интегралы Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. – М.: Наука, 1964. – 184 с.
3. Краснов М.А., Киселев А.И., Макаренко Т.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981.- 304 с.
4. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Наука, 1979. -320 с.
5. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1982. – 487 с.

Учебные пособия кафедры

1. Элементы теории функции комплексного переменного. Учебно-методическое пособие. – Яфаров Ш.А., Уфа, УГНТУ, 2004.
2. Практикум по элементам теории комплексного переменного. – Егорова Р.А., Степанова М.Ф., Умергалина Т.В., Уфа, УГНТУ, 2000.
3. Расчетные задания по математике. Раздел «Элементы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления». – Андреева Г.П., Егорова Р.А., Якубова Д.Ф., Уфа, УГНТУ, 2002. – 26 с.
4. Учебно- методический комплекс дисциплины Математика. Раздел 11. Теория функций комплексного переменного. Элементы операционного исчисления .- Уфа, УГНТУ, 2008.

3. МАТЕРИАЛЫ

ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

3.1. Теоретические вопросы

1. Комплексные числа и их геометрическое представление.
2. Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа. Модуль и аргумент. Формула Эйлера.
3. Действия над комплексными числами (сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в степень и извлечение корня).
4. Множества точек на комплексной плоскости (области и их границы; окрестности; порядок связности области).
5. Определение функции комплексного переменного и его геометрическое истолкование.
6. Предел и непрерывность функции.
7. Основные элементарные функции комплексного переменного (показательная, логарифмическая, тригонометрическая, гиперболические и обратные тригонометрические функции).
8. Производная и дифференциал.
9. Условия дифференцируемости функции. Условия Коши – Римана. (Даламбера – Эйлера).
10. Аналитичность функции в точке и в области.
11. Гармонические функции. Связь аналитических функций с гармоническими.
12. Интеграл от функции комплексного переменного. Определение, свойства, вычисление.
13. Интегральные теоремы Коши (для односвязной и многосвязной области).
14. Первообразная. Формула Ньютона – Лейбница.
15. Интегральная формула Коши.
16. Интегральная формула для производных аналитических функций.
17. Числовые комплексные ряды. Условия сходимости.
18. Понятие комплексного функционального ряда. Степенные ряды. Теорема Абеля.
19. Ряды Тейлора и Лорана (главная и правильная части ряда Лорана).
20. Изолированные особые точки (устраняемая, существенно особая, полюс).
21. Нули аналитической функции. Связь между нулем и полюсом.
22. Вычет функции в конечной и изолированной особой точке и его вычисления.
23. Основная теорема о вычетах.
24. Применение теории вычетов к вычислению контурных интегралов.
25. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов.

3.2. Контрольные вопросы

1. Существуют ли такие точки $z \in \mathbb{C}$, что $|\cos z| > 1$?
2. Верно ли, что функция $W = \sin z$ не является ограниченной на $\mathbb{C}$?
3. Может ли функция быть дифференцируемой в точке z_0 и не быть аналитической в этой точке?
4. Может ли функция быть аналитической только в одной точке?
5. Верно ли, что функция $f(z)$ аналитическая в области D , если $\operatorname{Re} f(z)$ и $\operatorname{Im} f(z)$ - функции, гармонические в этой области?
6. Может ли разложение некоторой функции в ряд Лорана содержать:
 - а) конечное число слагаемых с отрицательными степенями $(z - z_0)$;
 - б) конечное число слагаемых с положительными степенями $(z - z_0)$;
 - в) бесконечное число слагаемых с отрицательными степенями $(z - z_i)$;
 - г) бесконечное число слагаемых с положительными степенями $(z - z_i)$?
7. Пусть C_n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) - коэффициенты разложения в ряд Лорана функции

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n.$$

Найти коэффициенты C_n^* разложения в ряд Лорана функции:

$$\text{а) } (z - z_0)f(z); \quad \text{б) } (z - z_0)^3 f(z); \quad \text{в) } \frac{1}{z - z_0} f(z).$$

8. Пусть $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = 0$. Верно ли, что

$$\oint_{|z-z_0|=R} f(z) dz = 0$$

для любого $R > 0$?

3.3. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

3.3.1. Выполнить основные четыре действия алгебры над комплексными числами $z_1 = -1 + 2i$ и $z_2 = -3 - 4i$.

3.3.2. Найти действительные решения уравнения

$$(3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2i) = 5 + 6i.$$

3.3.3. Найти середину отрезка, соединяющего точки z_1 и z_2 .

3.3.4. Три последовательные вершины параллелограмма находятся в точках z_1, z_2, z_3 . Найти четвертую вершину.

3.3.5. Показать, что $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$, $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$.

3.3.6. Изобразить на комплексной плоскости числа $z = 3 + 2i$, $\bar{z} = 3 - 2i$. Найти их модули и аргументы.

3.3.7. Изобразить на комплексной плоскости числа

а) $3 + i\sqrt{3}$	б) $3 - i\sqrt{3}$	в) $-3 + i\sqrt{3}$	и вычислить их модули и
г) $-3 - i\sqrt{3}$	д) $i\sqrt{3}$	е) $-i\sqrt{3}$	

главные значения аргумента.

3.3.8. Представить в показательной форме числа

$$z_1 = 2i, \quad z_2 = -5, \quad z_3 = 2 + 2i, \quad z_4 = -1 - \sqrt{3}i.$$

3.3.9. Найти модуль и аргумент числа $e^{i\alpha} - e^{i\beta}$, если $\alpha > \beta$, $\alpha - \beta \leq 2\pi$.

3.3.10. Вычислить $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$.

3.3.11. Решить уравнение $z^5 + 1 - i = 0$.

3.3.12. Определить и изобразить линии, точки которых удовлетворяют уравнениям:

1) $|z - 3 + i| = 1$

2) $|z - 3i| - |z + 3i| = 2$

3) $z = \cos 2t + i(\sin 2t - 2),$
 $0 < t \leq 2\pi$

4) $z = t + i\frac{1}{t}, \quad 1 \leq t < \infty$

$$5) \operatorname{Re} \bar{z}^2 = 1$$

$$6) \operatorname{Re}(1+z) = |z|$$

$$7) 2z\bar{z} + (2+i)z + (2-i)\bar{z} = 2.$$

3.3.13. Найти множества точек комплексной плоскости, которые определяются неравенствами:

$$1) \operatorname{Re} z < 3$$

$$2) -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{6}$$

$$3) |z| - \operatorname{Re} z \leq 0$$

$$4) \left| \frac{z-1}{z+1} \right| \leq 1$$

$$5) 1 \leq |z-1+i| \leq 2$$

$$6) \frac{1}{4} < \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) < \frac{1}{2}.$$

3.3.14. Найти значение функции в указанной точке, записав ответ в алгебраической форме:

$$1) f(z) = \cos z, \quad z_0 = 5-i$$

$$2) f(z) = e^{e^z}, \quad z_0 = i$$

$$3) f(z) = \operatorname{Ln} z, \quad z_0 = -3+4i$$

$$4) f(z) = z^{1+i}, \quad z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

3.3.15. Найти значения степеней:

$$а) 2^i; \quad б) (-1)^{\sqrt{2}}; \quad в) i^{i+1}.$$

3.3.16. Решить уравнение $\sin 3z = 3i$.

3.3.17. Доказать тождества: а) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$, б) $\sin z = i \operatorname{sh} iz$,

в) $\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$.

3.3.18. При отображении $w = z^3$ найти: а) образ линии $\ell_z: \arg z = \frac{\pi}{3}$;

б) образ области $D_z: |z| \leq 2, \quad 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}$.

3.3.19. При отображении $w = \sin z$ найти:

а) образы прямых, параллельных действительных оси;

б) образ прямоугольника: $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2}$.

3.3.20. Найти область G_w , в которую преобразуется область D_z :

$2 < |z| < 3, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad \operatorname{Re} z > 0$ при помощи функции $f(z) = z + \frac{1}{z}$.

3.3.21. Выяснить, дифференцируемы ли следующие функции. В случае дифференцируемости найти производную: а) $|z| \cdot \bar{z}$; б) $\sin 3z + 2i$; в) $z^2 + \bar{z}$; г) e^{z^2} .

3.3.22. Выяснить, какие из следующих функций являются аналитическими хотя бы в одной точке: а) $w = \bar{z}^2$; б) $w = \operatorname{ch} z$; в) $w = e^{\bar{z}}$.

3.3.23. Показать, что условия Коши-Римана в полярных координатах

имеют вид $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r \frac{\partial v}{\partial r}$ и проверить их выполнение для

функций: а) $w = z^3$, б) $w = \ln z$.

Являются ли эти функции аналитическими?

3.3.24. Найти аналитическую функцию в области $0 < |z| < \infty$ по действительной или мнимой части: а) $u = x^3 - 3xy^2$; б) $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$;

в) $v = 3e^{2x} \cos 2y$.

3.3.25. Найти коэффициент подобия k и угол поворота φ при отображении с помощью функции $w = z^3 - 3z^2 + 3z + 5$ в точках: а) $z = 0$; б) $z = i$.

3.3.26. Найти коэффициент подобия и угол поворота при отображении в

данной точке $z_0 = i$: а) $w = \frac{1}{z}$; б) $w = \frac{z-1}{z+1}$.

3.3.27. Выяснить, какая часть комплексной плоскости растягивается, а какая - сжимается при отображении с помощью функции $w = z^2$.

3.3.28. Является ли конформным отображение: а) $w = \frac{1}{z}$; б) $w = 2\bar{z} + 1$;

в) $w = z \operatorname{Re} z$.

3.3.29. Вычислить интеграл $\int_L \operatorname{Im} z \, dz$, если

а) L — отрезок действительной оси от точки $z_0 = 3$ до $z_0 = -3$,

б) L — полуокружность $|z| = 3$, $0 \leq \arg z \leq \pi$.

3.3.30. Вычислить $\int_L \bar{z} \, dz$, если

а) L — отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = 1$ и $z_2 = i$,

б) L — дуга окружности $|z| = 1$ от точки $z_1 = 1$ до точки $z_2 = i$,

в) L — замкнутый контур: $|z| = 1$, $0 < \arg z \leq 2\pi$.

3.3.31. Вычислить интеграл $\int_1^i z \sin z \, dz$.

3.3.32. Вычислить $\oint_L \frac{dz}{z^2 + 9}$, если а) точки $\pm 3i$ вне контура L ,

б) точка $z_1 = 3i$ лежит внутри, а $z_1 = -3i$ — вне контура L ,

в) точка $z_2 = -3i$ лежит внутри, а $z_1 = -3i$ — вне контура,

г) точки $z_{1,2} = \pm 3i$ лежат внутри контура L .

3.3.33. Вычислить интеграл $\oint_L \frac{dz}{z - a}$, где L — окружность с центром в

точке a и радиусом R .

3.3.34. Вычислить $\oint_{|z|=2} \frac{2z - 1 - i}{(z - 1)(z - i)} \, dz$.

3.3.35. Вычислить:

$$1) \oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^3 + 4z};$$

$$2) \oint_{|z|=3} \frac{\sin z \, dz}{z^2 - 7z + 10};$$

$$3) \oint_{|z|=2} \frac{e^z dz}{(z+i)^3};$$

$$4) \oint_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)} dz;$$

$$5) \oint_{|z|=2} \frac{(z+1)dz}{z(z-1)^2(z-3)}.$$

3.3.36. Исследовать на сходимость ряды

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2in}}{n\sqrt{n}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2-i}{2}\right)^n; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin i n}{3^n}.$$

3.3.37. Найти область сходимости рядов

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{9^n} (z+i)^n;$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\ln i n}\right)^n;$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\pi}}{(z+1-i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1-i)^n}{n!};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z+1-i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} n(z+1-i)^n.$$

3.3.38. Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки z_0 и

найти радиус сходимости: 1) $f(z) = \sin 2z$, $z_0 = \frac{\pi}{4}$;

$$2) f(z) = \frac{1}{z^2 - z + 1}, \quad z_0 = 1; \quad 3) f(z) = \ln(z^2 + 6z + 12), \quad z_0 = -3.$$

3.3.39. Разложить функцию в ряд Лорана в указанной области:

$$1) f(z) = \frac{2z+3}{z^2+3z+2}, \quad 1 < |z| < 2; \quad 2) f(z) = \frac{(z-1)^2}{z}, \quad 0 < |z| < 1;$$

$$3) f(z) = \frac{e^{2z}-1}{z^2}, \quad 0 < |z| < 1; \quad 4) f(z) = (z-i)^3 \sin \frac{1}{z-i}, \quad 0 < |z-i| < \infty.$$

3.3.40. Найти нули функции и определить их порядки:

$$1) f(z) = (z^2+9)(z^2+4)^5; \quad 2) f(z) = (1-e^z)(z^2-4)^3; \quad 3) f(z) = \frac{z - \sin z}{z}.$$

3.3.41. Найти изолированные особые точки функции и определить их характер:

$$\begin{array}{ll} 1) f(z) = \frac{z+2}{(z-1)^3 z(z+1)}; & 2) f(z) = z e^{\frac{1}{z-1}}; \\ 3) f(z) = \frac{\sin z}{(z^2-1)(z+\pi)}; & 4) f(z) = \sin \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}. \end{array}$$

3.3.42. Выяснить характер особой точки $z = \infty$ для функций

$$\begin{array}{ll} 1) f(z) = e^{\frac{1}{z}} + z^2 - 4; & 2) f(z) = \frac{2z^2+1}{3z^2+1}; \\ 3) f(z) = \frac{2z^5-z+1}{z^2+z+8}; & 4) f(z) = \frac{\cos z}{z^2}. \end{array}$$

3.3.43. Найти вычеты функций относительно их особых точек

$$\begin{array}{ll} 1) f(z) = \frac{z+2}{(z-1)z(z+1)^2}; & 2) f(z) = z e^{\frac{1}{z-1}}; \\ 3) f(z) = \frac{\sin z}{(z^2-1)(z+\pi)}; & 4) f(z) = \sin \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}. \end{array}$$

3.3.44. Найти вычеты функций относительно точки $z = \infty$:

$$\begin{array}{ll} 1) f(z) = e^{\frac{1}{z}} + z^2 - 4; & 2) f(z) = \frac{2z^2+1}{3z^2+1}; \\ 3) f(z) = \frac{2z^5-z+1}{z^2+z+8}; & 4) f(z) = \frac{\cos z}{z^2}. \end{array}$$

3.3.45. Вычислить контурные интегралы:

$$\begin{array}{lll} 1) \oint_{|z|=2} \frac{e^{2z} dz}{z^2 \left(z - \frac{\pi i}{2} \right)}; & 2) \oint_{|z|=\frac{1}{2}} z^2 \sin \frac{1}{z} dz; & 3) \oint_{|z|=2} e^{\frac{z}{z-1}} dz; \\ 4) \oint_L \frac{z dz}{\cos z}, \text{ где } L - \text{прямоугольник с вершинами в точках } z_1 = -i, \end{array}$$

$$z_2 = 2 - i, \quad z_3 = 2 + i, \quad z_4 = i.$$

ОТВЕТЫ

$$3.3.1. \quad z_1 + z_2 = -4 - 2i; \quad z_1 - z_2 = 2 + 6i; \quad \frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i.$$

$$3.3.2. \quad x = \frac{20}{17}, \quad y = -\frac{36}{17}.$$

$$3.3.3. \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad 3.3.4. \quad z_4 = z_3 - z_2 + z_1.$$

$$3.3.6. \quad |z| = |\bar{z}| = \sqrt{13}, \quad \arg z = \operatorname{arctg} \frac{2}{3},$$

$$\arg \bar{z} = -\operatorname{arctg} \frac{2}{3}, \quad \operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + 2k\pi.$$

$$3.3.7. \quad 1) 2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}; \quad 2) 2\sqrt{3}, -\frac{\pi}{6}; \quad 3) 2\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6}; \quad 4) 2\sqrt{3}, -\frac{5\pi}{6};$$

$$5) \sqrt{3}, \frac{\pi}{2}; \quad 6) \sqrt{3}, -\frac{\pi}{2}.$$

$$3.3.8. \quad z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad z_2 = 5e^{i\pi}, \quad z_3 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_4 = 2e^{i\left(-\pi + \frac{\pi}{3}\right)}.$$

$$3.3.9. \quad r = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad 3.3.10. \quad 1.$$

$$3.3.11. \quad z_k = \sqrt[10]{2} e^{i\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{2R\pi}{5}\right)}, \quad k = \overline{0,4}.$$

$$3.3.12. \quad 1) \text{ окружность } r = 1 \text{ с центром в } z_0 = 3 - i,$$

$$2) \text{ гипербола с фокусами в точках } z_1 = 3i \text{ и } z_2 = -3i \text{ и параметром } a = 1,$$

$$3) \text{ окружность радиуса } r = 1 \text{ с центром в точке } z_0 = -2i,$$

$$4) \text{ часть ветви гиперболы } y = \frac{1}{x}, \text{ где } 1 \leq x < \infty,$$

$$5) \text{ гипербола } x^2 - y^2 = 1, 6) \text{ парабола } y^2 = 2x + 1,$$

7) окружность $(x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

3.3.13. 1) левая полуплоскость от прямой $x = 3$,

2) угол между лучами $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{\pi}{6}$,

3) действительная полуось, включая точку $O(0;0)$,

4) правая полуось, включая и мнимую ось,

5) кольцо, образованное окружностями с центром в $M_0(1;1)$ и радиусов $r_1 = 1$ и $r_2 = \sqrt{2}$,

6) область, заключенная между окружностями.

3.3.14. 1) $\operatorname{ch} 1 \cos 5 + i \operatorname{sh} 1 \sin 5$; 2) $e^{\cos 1} [\cos(\sin 1) + i \sin(\sin 1)]$;

3) $\ln 5 + i \left[(2k+1)\pi - \operatorname{arctg} \frac{4}{3} \right]$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4} - 2k\pi} (1+i)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3.3.15. а) $e^{2k\pi} (\cos \ln 2 + i \sin \ln 2)$; б) $e^{\sqrt{2}(2k+1)\pi i}$; в) $i e^{\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3.3.18. а) луч $L_w: \arg w = \pi$;

б) G_w — полукруг: $0 \leq |w| \leq 8$; $0 < \arg w \leq \pi$.

3.3.19. а) образом прямой $y = c$ ($c \neq 0$) является эллипс $\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 c} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 c} = 1$,

образом прямой $y = 0$ является отрезок действительной оси $-1 \leq u \leq 1$;

б) верхняя половина эллипса $\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 c} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 c} \leq 1$, $v \geq 0$.

3.3.20. G_w — часть кольца в первом квадранте, образованного эллипсами

$$\frac{u^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{u^2}{\left(\frac{10}{3}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{8}{3}\right)^2} = 1.$$

3.3.21. а) нет; б) да, $f'(z) = 3 \cos 3z$; в) нет; г) да, $f'(z) = 2ze^{z^2}$.

3.3.22. а) нет; б) да; в) нет.

3.3.24. 1) $w = u + iv = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) = z^3;$

2) $w = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(-\frac{y}{x^2 + y^2} + C\right);$ 3) $w = 3e^{2x}(-\sin 2y + i \cos 2y) + C.$

3.3.25. а) $k = 3, \varphi = 0;$ б) $k = 6, \varphi = -\frac{\pi}{2}.$

3.3.26. а) $1, 0;$ б) $1, -\frac{\pi}{2}.$

3.3.27. Растягивается внешность круга $|z| > \frac{1}{2};$ сжимается внутренность круга $|z| < \frac{1}{2}.$

3.3.28. а) да; б) да; в) нет 3.3.29. а) $0;$ б) $-\frac{9}{2}\pi.$

3.3.30. а) $i;$ б) $i\frac{\pi}{2};$ в) $2\pi i.$ 3.3.31. $\cos 1 - \sin 1 - ie^{-1}.$

3.3.32. а) $0;$ б) $\frac{\pi}{3};$ в) $-\frac{\pi}{3};$ г) $0.$ 3.3.33. $2\pi i.$ 3.3.34. $4\pi i.$

3.3.35. 1) $0;$ 2) $-\frac{2}{3}\pi i \sin 2;$ 3) $\frac{\pi i}{e};$ 4) $-\frac{\pi i}{2};$ 5) $-\frac{2}{3}\pi i.$

3.3.36. 1) сходится; 2) расходится; 3) сходится.

3.3.37. 1) $|z + i| < 3;$ 2) $z = 0;$ 3) $|z + 1 - i| > 1;$ 4) всюду расходится.

3.3.38. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} \left(z - \frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!} \quad (R = \infty);$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z^{3n} - z^{3n+1}) \quad (R = 1);$ 3) $\ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z+3)^{2n}}{n \cdot 4^n} \quad (R = 2).$

$$3.3.39. \quad 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}; \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n;$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n z^{n-2}}{n!}; \quad 4) (z-i)^2 - \frac{1}{3!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+3)!(z-i)^{2n}}.$$

3.3.40. 1) $z = \pm 3i$ — нули 1-го порядка, $z = \pm 2i$ — нули 5-го порядка;

2) $z = 0$ — нуль 1-го порядка, $z = \pm 2$ — нули 3-го порядка;

3) $z = 0$ — нуль 2-го порядка.

3.3.41. 1) $z = 0$ и $z = -1$ — простые полюсы, $z = 1$ — полюс 3-го порядка;

2) $z = 1$ — существенно особая точка; 3) $z = -\pi$ — устранимая особая точка, $z = \pm 1$ — простые полюсы;

4) $z = 0$ — существенно особая точка.

3.3.42. 1) полюс 2-го порядка; 2) устранимая особая точка;

3) полюс 3-го порядка; 4) существенно особая точка.

$$3.3.43. \quad 1) \operatorname{res} f(1) = \frac{3}{4}, \operatorname{res} f(0) = -2, f(-1) = \frac{5}{4}; \quad 2) \operatorname{res} f(1) = \frac{3}{2};$$

$$3) \operatorname{res} f(\pm 1) = \frac{\sin(\pm 1)}{\pm 2(\pi \pm 1)}, \operatorname{res} f(-\pi) = 0; \quad 4) \operatorname{res} f(0) = 1.$$

$$3.3.44. \quad 1) -1; \quad 2) 0; \quad 3) -81; \quad 4) 0.$$

$$3.3.45. \quad 1) \frac{8i}{\pi}(2 + \pi i); \quad 2) -\frac{\pi i}{3}; \quad 3) -\frac{2\pi i}{e}; \quad 4) -\pi^2 i.$$

3.4. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание №1

Найти модуль и главное значение аргумента комплексного числа, представить его в тригонометрической и показательной формах. Изобразить число на комплексной плоскости

1. $2+5i$;

13. $-i\sqrt{3}$;

25. $7+3i$;

2. $-2+5i$;

14. $1-i$;

26. $-1+\sqrt{2}i$;

3. $2-5i$;

15. $\sqrt{3}+i$;

27. $-1-5i$;

4. $-2-5i$;

16. $i\sqrt{3}$;

28. $-1-2i$;

5. $-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$;

17. $-\sqrt{3}-i$;

29. $-1+3i$;

6. $-2+2\sqrt{3}i$;

18. $3\sqrt{2}+i2\sqrt{2}$;

30. $-\sqrt{3}+i$;

7. $-7-i$;

19. $-3+3i$;

31. $-12-5i$;

8. $4-3i$;

20. $2-2i$;

32. $-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{i}{4}$.

9. $3-4i$;

21. $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$;

33. $-5+12i$;

10. $3i$;

22. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

34. $-63i$;

11. $-1-i$;

23. $1-i$;

35. $-7-7\sqrt{3}i$;

12. $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$;

24. $-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$;

36. $\frac{12}{13}-\frac{5}{13}i$.

Задание №2

Вычислить и изобразить результат на комплексной плоскости

1. $\left(\frac{2-2i}{1+i}\right)^6$;

13. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{20}$;

25. $\left(\frac{2\sqrt{3}-2i}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}$;

2. $\left(\frac{3i-3}{2+2i}\right)^{10}$;

14. $\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10}$;

26. $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^9$;

- | | | |
|--|--|---|
| 3. $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^{16}$; | 15. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6$; | 27. $\left(\frac{2-i}{1+2i}\right)^{40}$; |
| 4. $\left[(\sqrt{3}-i)(1+i\sqrt{3})\right]^8$; | 16. $\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^4$; | 28. $\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^4$; |
| 5. $\left(\frac{-2}{1+i}\right)^{14}$; | 17. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^6$; | 29. $\left(\frac{i+tg\frac{\pi}{3}}{i-tg\frac{\pi}{3}}\right)^4$; |
| 6. $\frac{1}{2}(7i-5)^{10}$; | 18. $\left[(1+i\sqrt{3})(1-i)\right]^{15}$; | 30. $\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)^{18}$; |
| 7. $\left(\frac{3+4i}{i}\right)^4$; | 19. $\left(\frac{-2+2i}{1+i}\right)^{20}$; | 31. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$; |
| 8. $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)^3$; | 20. $(-1+i\sqrt{3})^{30}$; | 32. $\left(\frac{2+i}{1-2i}\right)^4$. |
| 9. $\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^3$; | 21. $(2+i\sqrt{5})^{15}$; | 33. $\left(\frac{1}{1-i}\right)^6$; |
| 10. $\left(\frac{-2-2i}{-1+i}\right)^{10}$; | 22. $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^{15}$; | 34. $\left(\frac{-\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}\right)^{12}$; |
| 11. $(1+i)^8$; | 23. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{17}$; | 35. $(3-i\sqrt{3})^{10}$; |
| 12. $\left[(\sqrt{3}+i)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-i\right)\right]^4$; | 24. $(3+i\sqrt{3})^{18}$; | 36. $\left(\frac{-3+4i}{i}\right)^4$. |

Задание №3

Найти все значения корня и изобразить их на комплексной плоскости

- | | | |
|---------------------------------|---|--|
| 1. $\sqrt[3]{\frac{i}{1-2i}}$; | 13. $\sqrt[5]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$; | 25. $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$; |
| 2. $\sqrt[3]{(1-i)(2+3i)}$; | 14. $\sqrt[4]{3\sqrt{2}+i2\sqrt{2}}$; | 26. $\sqrt[5]{\frac{2}{1-3i}}$; |
| 3. $\sqrt[4]{-1}$; | 15. $\sqrt[5]{1+i}$; | 27. $\sqrt[3]{i(\sqrt{3}+i)}$; |

- | | | |
|---|--|-----------------------------------|
| 4. $\sqrt[6]{-8-8i}$; | 16. $\sqrt[3]{\frac{3i}{2+2\sqrt{3}i}}$; | 28. $\sqrt[3]{1+\sqrt{3}i}$; |
| 5. $\sqrt[8]{1}$; | 17. $\sqrt{-\frac{5}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i}$; | 29. $\sqrt[4]{-2+2i}$; |
| 6. $\sqrt[4]{\frac{1-i}{1+i}}$; | 18. $\sqrt[4]{(1+i)(1-i)}$; | 30. $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}$; |
| 7. $\sqrt{2+2i}$; | 19. $\sqrt{\frac{i-3}{2+i}}$; | 31. $\sqrt[4]{i(3-i)}$; |
| 8. $\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}$; | 20. $\sqrt{-\frac{5}{\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{2}}i}$; | 32. $\sqrt[3]{\frac{1+i}{1-i}}$; |
| 9. $\sqrt{-8+8\sqrt{3}i}$; | 21. $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{3}i}$; | 33. $\sqrt{\sqrt{3}-i}$; |
| 10. $\sqrt{i(1-i\sqrt{3})}$; | 22. $\sqrt[3]{(1-i)(1+2i)}$; | 34. $\sqrt[3]{i(1-i)}$; |
| 11. $\sqrt{\frac{-4-3i}{1+i}}$; | 23. $\sqrt[5]{(1-i)2i}$; | 35. $\sqrt[3]{\frac{1-i}{1+i}}$; |
| 12. $\sqrt[3]{2-2\sqrt{3}i}$; | 24. $\sqrt[3]{\frac{i}{1-i}}$; | 36. $\sqrt[6]{-1}$. |

Задание №4

Выяснить геометрический смысл соотношений

- | | |
|--|---|
| 1. $ z-z_1 = z-z_2 $; | 19. $\operatorname{Re}(z^2+\overline{z}^2)=0$; |
| 2. $ z-2 - z+2 >3$; | 20. $ z-2 = 1-2\overline{z} $; |
| 3. $ z-2 + z+2 =5$; | 21. $2z\overline{z}+(2+i)z+(2-i)\overline{z}=2$; |
| 4. $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z<1$; | 22. $0<\operatorname{Re}(iz)<1$; |
| 5. $\operatorname{Re} z=\operatorname{Im} z$; | 23. $0<\arg(z-i)<\frac{\pi}{2}$; |
| 6. $0\leq\operatorname{Im} z\leq1$; | 24. $ z =\operatorname{Re} z+1$; |
| 7. $\left \frac{z-1}{z+1}\right \leq1$; | 25. $\operatorname{Re} z\geq3$; |

$$8. 1 \leq |z + 2 + i| \leq 2;$$

$$9. |z - 1| < |z - i|;$$

$$10. |z| - \operatorname{Re} z \leq 0;$$

$$11. \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{9};$$

$$12. \operatorname{Im}\frac{1}{z} < -\frac{1}{2};$$

$$13. 4 \leq |z - 1| + |z + 1| \leq 8;$$

$$14. \operatorname{Im} \overline{z^2} < 1;$$

$$15. |z| > 2 + \operatorname{Im} z;$$

$$16. |z - i| + |z + i| = 5;$$

$$17. \operatorname{Re}(1 + z) = |z|;$$

$$18. z^2 + \overline{z^2} = 1;$$

$$26. 0 < \operatorname{Im}(iz) < 1;$$

$$27. \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2};$$

$$28. \begin{cases} |z| > 2, \\ 0 \leq \arg z < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 1 < |z| < 3, \\ 0 < \arg z < \pi \end{cases}$$

$$30. \left| \frac{z - i}{z + i} \right| = 1;$$

$$31. 0 < \operatorname{Re}[i(z + 2)] < 1;$$

$$32. 0 < \operatorname{Im}[i(z + 2)] < 1;$$

$$33. 1 \leq \operatorname{Im}(z + 2 + i) \leq 2;$$

$$34. |z - 2i| + |z + 2i| = 8;$$

$$35. 0 < \operatorname{Im}(iz) < 1;$$

$$36. z\bar{z} + (1 + i)z + (1 - i)\bar{z} = 4.$$

Задание №5

Привести функции к виду $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ и по условиям Коши-Римана проверить, являются ли аналитическими функции

$$1. w = e^z;$$

$$2. w = \bar{z};$$

$$3. w = z \operatorname{Re} z;$$

$$4. w = \sin z;$$

$$5. w = \cos z;$$

$$6. w = z^2;$$

$$7. w = z;$$

$$19. w = ze^z;$$

$$20. w = |z| \cdot \bar{z};$$

$$21. w = e^{z^2};$$

$$22. w = |z| \cdot \operatorname{Re} \bar{z};$$

$$23. w = \sin 3z - i;$$

$$24. w = \bar{z} \operatorname{Re} z;$$

$$25. w = z\bar{z};$$

8. $w = ze^z + (1+i)z;$

26. $w = z^2 + 3iz;$

9. $w = \frac{1}{z};$

27. $w = 2 \sin z - z;$

10. $w = 2 \sin z - z^2$

28. $w = 2i(\cos z - 1);$

11. $w = 2 \cos 2z + z;$

29. $w = (\bar{z} + 1)(\bar{z}^2 - 1);$

12. $w = 2i(\cos z - 1) - iz^2 + 2;$

30. $w = z^2 + 2\bar{z} + i;$

13. $w = \frac{1}{z+1};$

31. $w = \sin 3z + z;$

14. $w = \operatorname{Ln} z;$

32. $w = \bar{z}^2 - 2z;$

15. $w = \cos z - z;$

33. $w = \frac{1}{\bar{z}};$

16. $w = \bar{z} \operatorname{Im} z;$

34. $w = z \bar{z}^3;$

17. $w = |z| \cdot \operatorname{Im} z;$

35. $w = z^3 + 2iz - 1;$

18. $w = z^2 \bar{z};$

36. $w = i(\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2.$

Задание №6

Проверить, являются ли функции гармоническими. Если ответ «да», то найти аналитическую функцию $w(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, где $z = x + iy$ (x, y -вещественные), если известно, что:

1. $u = x^3 - 3xy^2;$

19. $v = 3x + 2xy, w(-i) = 2;$

2. $u = \frac{x}{x^2 + y^2};$

20. $u = e^x (x \cos y - y \sin y);$

3. $u = x^2 - y^2 + 2x;$

21. $v = e^x (y \cos y + x \sin y);$

4. $u = \frac{x}{x^2 + y^2} - 2y;$

22. $u = x^2 - y^2 - x;$

5. $u = 2e^x \sin y;$

23. $v = x + y;$

6. $v = -\frac{y}{(x+1)^2 + y^2};$

24. $u = 2^x \cos(y \ln 2);$

7. $v = 2xy + 3x$;
8. $v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, x > 0$;
9. $u = \frac{x}{x^2 + y^2}, w(\pi) = \frac{1}{\pi}$;
10. $v = e^x (y \cos y + x \sin y) + x + y$;
11. $v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, x > 0, w(1) = 0$;
12. $u = x^2 - y^2 + 2x, w(i) = 2i - 1$;
13. $v = 2(\operatorname{ch} x \cdot \sin y - xy), w(0) = 0$;
14. $u = 2 \sin x \cdot \operatorname{ch} y - x, w(0) = 0$;
15. $v = 2(2 \operatorname{sh} x \cdot \sin y + xy), w(0) = 3$;
16. $v = -2 \sin 2x \cdot \operatorname{sh} 2y + y, w(0) = 2$;
17. $v = 2 \cos x \cdot \operatorname{ch} y - x^2 + y^2$
 $w(0) = 2$,
18. $u = 2e^x \cos y, w(0) = 2$;
25. $v = \sin x \cdot \operatorname{sh} y$;
26. $u = e^x \cos y$;
27. $v = e^x \sin y$;
28. $u = x^2 - y^2 - x, w(0) = 1$;
29. $v = e^y (y \cos x - x \sin x)$;
30. $v = -\frac{y}{x^2 + y^2}, x \neq 0, y \neq 0$;
31. $u = x^2 - y^2 + 2x$;
32. $v = 3x + 2xy, w(-1) = 2$.
33. $v = x + y + (x^2 - y^2)$;
34. $u = e^x (\cos y + \sin y)$;
35. $v = e^y \sin x$;
36. $u = e^x \cos y + e^{-y} \sin x$.

Задание №7

Вычислить интегралы. В декартовой системе координат сделать рисунок контура интегрирования.

1. $\int_{AB} f(z) dz$, где $f(z) = (y+1) - xi$

AB – отрезок прямой, соединяющий точки $z_A = 1$; $z_B = -i$.

2. $\int_{AB} f(z) dz$, где $f(z) = x^2 + i y^2$

AB – отрезок, соединяющий точки $A(1+i), B(2+3i)$.

3. $\int_L (1+i-2\bar{z}) dz$, L – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1+i$.

4. $\int_L (z^2 + z \bar{z}) dz$, где L – дуга окружности $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$.
5. $\int_L e^{\bar{z}} dz$, где L – отрезок прямой $y = -x$, соединяющий точки $z_1 = 0$, $z_2 = \pi - i\pi$.
6. $\int_L z \operatorname{Im} z^2 dz$, где $L: |z| = 1$; $-\pi \leq \arg z \leq 0$.
7. $\int_L e^{|z|^2} \operatorname{Re} z dz$, где L – прямая, соединяющая точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$.
8. $\int_L (1 + i - 2\bar{z}) dz$, по дуге L параболы $y = x^2$, соединяющей точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$.
9. $\int_L z \operatorname{Re} z dz$, где $L: |z| = 1$. Обход против часовой стрелки.
10. $\int_L z \bar{z} dz$, где $L: |z| = 1$. Обход против часовой стрелки.
11. $\int_L z e^z dz$ по отрезку AB , соединяющему точки $z_A = 1$, $z_B = i$.
12. $\int_L \operatorname{Re} z dz$, где L – ломаная, состоящая из отрезка $[0; 2]$ действительной оси и отрезка, соединяющего точки $z_1 = 2$; $z_2 = 2 + i$.
13. $\int_L e^z dz$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$.
14. $\int_L \cos z dz$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = \frac{\pi}{2}$; $z_2 = \pi + i$.
15. $\int_L (i - 2\bar{z}) dz$ по ломаной L , соединяющей точки z_1, z_2, z_3 , где $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = 1$.
16. $\int_L \frac{dz}{z^2}$, где L – верхняя половина окружности $|z| = 1$.
17. $\int_L \frac{dz}{z}$, где $L: |z| = 1$, $\operatorname{Re} z \geq 0$.

$$18. \int_L \frac{dz}{z-1}, \text{ где } L - \text{нижняя половина окружности } |z-1|=1.$$

$$19. \int_{1+i}^{2i} (z^3 - z) e^{\frac{z^2}{2}} dz.$$

$$20. \int_0^i z \cos z dz.$$

$$21. \int_1^{1+i} z \sin z dz.$$

$$22. \int_0^i (z-i) e^{-z} dz.$$

$$23. \int_L \frac{dz}{z+1} \text{ по окружности } L: |z+1|=4, \text{ проходимой против часовой стрелки.}$$

$$24. \int_1^i e^z dz \text{ по отрезку прямой, соединяющей точки } z_1=1, z_2=i.$$

$$25. \int_1^i \frac{1+\operatorname{tg} z}{\cos^2 z} dz \text{ по прямой, соединяющей точки } z_1=1 \text{ и } z_2=i.$$

$$26. \int_{-1}^i \sin z \cos z dz \text{ по отрезку прямой, соединяющей точки } z_1=-1 \text{ и } z_2=i.$$

$$27. \int_L \cos^2 z dz, \text{ где } L - \text{отрезок прямой, соединяющий точки } z_1=0 \text{ и } z_2=i.$$

$$28. \int_L z \operatorname{Im}(z^2) dz \text{ где } L: |\operatorname{Im} z| \leq 1; \operatorname{Re} z = 1, \text{ начальная точка } 1-i.$$

$$29. \int_{-1}^i z e^{z^2} dz.$$

$$30. \int_L \operatorname{tg} z dz, \text{ где } L - \text{дуга параболы } y=x^2, \text{ соединяющей точки } z_1=0 \text{ и } z_2=1+i.$$

$$31. \int_L \cos z dz, \text{ где } L - \text{отрезок прямой, соединяющей точки } z_1 = \frac{\pi}{4}; z_2 = \pi + i.$$

$$32. \int_L e^z dz, \text{ где } L - \text{дуга параболы } y=x^2, \text{ соединяющей точки } z_1=1+i; z_2=-1+i.$$

33. $\int_L e^z dz$, где L : отрезок, соединяющий точки $z_1 = 0$; $z_2 = 1 + i$.
34. $\int_L \cos z dz$, где L - отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = \frac{\pi}{4}$;
 $z_2 = \frac{\pi}{4} + i$.
35. $\int_L dz$, где L - верхняя половина окружности $|z + i| = 1$, начальная точка
 $z = 1 - i$.
36. $\int_L z dz$, где L - граница квадрата $\operatorname{Re} z = 1$, $\operatorname{Im} z = 1$, направление
 обхода – против часовой стрелки.

Задание №8

Используя основную теорему Коши и интегральную формулу Коши, вычислить интегралы. В декартовой системе координат сделать рисунок контура интегрирования и указать на рисунке особые точки подынтегральной функции.

1. $\oint_{\Gamma} \frac{z^3}{z-3} dz$, где $\Gamma: |z| = 4$;
2. $\oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^2 + 2z - 3} dz$;
3. $\oint_{\Gamma} \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz$, где $\Gamma: x^2 + y^2 + 6y = 0$;
4. $\oint_{|z-1|=2} \frac{z - 2 \sin z}{(z - \pi/2)^3} dz$;
5. $\oint_{\Gamma} \frac{e^z dz}{(z+2)^4}$, где Γ – произвольный замкнутый контур, однократно обходящий точку $z = -2$ в положительном направлении;
6. $\oint_{\Gamma} \frac{2z - 1 - i}{(z-1)(z-i)} dz$, где $\Gamma: |z| = 2$;
7. $\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 + 9}$, если $\Gamma: |z - 3i| = 2$;
8. $\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^3 + 4z}$;
9. $\oint_{|z|=2} \frac{(z+1)dz}{z(z-1)^2(z-3)}$;
10. $\oint_{|z|=2} \frac{e^z dz}{(z+i)^3}$;
11. $\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{e^2} dz}{z^2 + 2}$;

$$12. \oint_{|z|=1} \frac{e^z \cos \pi z}{z^2 + 2z} dz;$$

$$14. \oint_{|z-1-i|=1} \frac{\sin \pi(z-1)}{z^2 - 2z + 2} dz;$$

$$16. \oint_{|z|=3} \frac{\cos z}{ze^z} dz;$$

$$18. \oint_{|z-9|=1} \frac{dz}{(z^2 - 81)};$$

$$20. \oint_{|z|=2} \frac{\sin z \cdot \sin(z-1)}{z^2 - z} dz;$$

$$22. \oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh}^2 z}{z^3} dz;$$

$$24. \oint_{|z|=2} \frac{z \operatorname{sh} z}{(z^2 - 1)^2} dz;$$

$$26. \oint_{|z-2|=3} \frac{\operatorname{ch} e^{i\pi z}}{z^3 - 4z^2} dz;$$

$$28. \oint_{|z-2|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z^2 + 4)^2} dz;$$

$$30. \oint_{|z-2|=1} \frac{\cos z}{z(z-2)} dz;$$

$$32. \oint_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z^2 + 4};$$

$$34. \oint_{|z|=5} \frac{dz}{(z^2 - 9)(z + 9)};$$

$$13. \oint_{|z-2|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{z^4 - 1} dz;$$

$$15. \oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{z} dz;$$

$$17. \oint_{|z|=5} \frac{dz}{z^2 + 16};$$

$$19. \oint_{\Gamma} \frac{\operatorname{sh}(z+1)}{z^2 + 1} dz,$$

где $\Gamma: |z| = 2$;

$$21. \oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz;$$

$$23. \oint_{|z-1|=1} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{(z-1)^2(z-3)} dz;$$

$$25. \oint_{|z-3|=6} \frac{z dz}{(z-2)^3(z+4)};$$

$$27. \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^3} \cos \frac{\pi}{z+1} dz;$$

$$29. \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1 - \sin z}{z^2} dz;$$

$$31. \oint_{|z|=2} \frac{(z+1)dz}{(z-1)^2(z-3)};$$

$$33. \oint_{|z|=3} \frac{z dz}{(z-1)^3(z+4)};$$

$$35. \oint_{|z-8|=3} \frac{z^2 dz}{(z^2 + 9)(z-9)};$$

$$36. \oint_{|z|=5} \frac{(z^2 + 1) dz}{(z^2 + 4)(z + 1)}.$$

Задание № 9

Выяснить характер особых точек функций

$$1. \frac{1}{z^3(z^2 + 4)^2};$$

$$19. \frac{z^2 - 1}{z^6 + 2z^5 + z^4};$$

$$2. \frac{\sin z}{z^2};$$

$$20. \frac{e^{z+e}}{z+e};$$

$$3. \sin \frac{1}{z^2};$$

$$21. \cos \frac{1}{z} + \sin \frac{2 - \pi z}{2z};$$

$$4. z^2 e^{\frac{1}{z}};$$

$$22. z \operatorname{sh} \frac{1}{z};$$

$$5. \frac{1}{z^2 + 5z + 4};$$

$$23. \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)};$$

$$6. \frac{\cos z}{\left(z + \frac{\pi}{2}\right)(z^2 + 1)^2};$$

$$24. \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2};$$

$$7. \operatorname{tg}^2 2z;$$

$$25. \frac{1 - \cos z}{z^2(z-3)};$$

$$8. \frac{1}{\cos z - \frac{1}{2}};$$

$$26. \frac{\cos z}{z^3};$$

$$9. z^2 \sin \frac{1}{z};$$

$$27. e^{z + \frac{1}{z}};$$

$$10. (z-1) \cos \frac{1}{(z-1)};$$

$$28. \frac{z - \sin z}{z^6};$$

$$11. \frac{1}{1 - \cos z};$$

$$29. \frac{\operatorname{sh} z}{z - \operatorname{sh} z};$$

$$12. \frac{1 + \cos z}{z^2};$$

$$30. \frac{z}{\sin(z/2)};$$

13. $\frac{e^z - 1}{z};$

31. $\frac{e^z - 1}{z^2};$

14. $\frac{\cos 2z}{(z - \pi)(z - \pi/6)};$

32. $z e^{\frac{1}{z}}.$

15. $\frac{1 + \cos z}{z - \pi};$

33. $z^2 \sin \frac{1}{z^2};$

16. $\frac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - 2z + 1};$

34. $z^2 e^{\frac{1}{z}};$

17. $\frac{\operatorname{sh} z}{z};$

35. $\frac{5z + 41}{z^2 + 5z + 4};$

18. $\cos \frac{1}{z + \pi};$

36. $\frac{\sin z}{(z + \pi)(z^2 + 1)^2}.$

Задание № 10

Вычислить вычеты функции относительно ее особых точек

1. $\frac{1}{z^3(z^2 + 4)^2};$

19. $z^2 \sin \frac{1}{z^2};$

2. $\frac{z}{\sin z};$

20. $\cos \frac{1}{z} + z^3;$

3. $z^2 e^{\frac{1}{z}};$

21. $\frac{\sin 2z}{(z + i)(z - i)^2};$

4. $\frac{1}{z \sin z};$

22. $\frac{1 - \cos z}{z^3(z - 3)};$

5. $\frac{2z - 5}{z^2 - 2z + 1};$

23. $e^{z^2 - \frac{1}{z^2}};$

6. $\frac{\cos 2z}{(z - \pi)\left(z - \frac{\pi}{6}\right)^2};$

24. $\frac{e^{iz}}{(z^2 - 1)(z + 3)};$

7. $z e^{\frac{1}{z-1}};$

25. $\frac{\cos z}{z^3 - \frac{\pi}{2} z^2};$

8. $\sin \frac{1}{z^2};$

26. $\frac{e^{\pi z}}{z - i};$

$$9. \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2};$$

$$27. \frac{z^{10}}{(z-1)^5};$$

$$10. \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)};$$

$$28. \operatorname{ctg}^2 z;$$

$$11. \frac{1}{z^4 + 1};$$

$$29. \frac{e^z - 1}{z};$$

$$12. z^3 e^{\frac{1}{z}};$$

$$30. \frac{1 - e^{-z}}{z};$$

$$13. \frac{\operatorname{tg} z}{z^2 - \frac{\pi}{4} z};$$

$$31. \frac{e^z}{z(z-1)};$$

$$14. z^5 \sin \frac{1}{z^2};$$

$$32. \frac{e^z}{1 + z^2}.$$

$$15. \frac{\operatorname{ch} z}{(z^2 + 1)(z - 3)};$$

$$33. z^2 e^{\frac{2}{z}};$$

$$16. \frac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{1 + z^4};$$

$$34. \frac{1}{\sin 2z};$$

$$17. \frac{e^z}{z^3(z-1)};$$

$$35. \frac{3z + 1}{z^2 + 6z + 9};$$

$$18. \frac{z}{(z+1)^3(z-2)^2};$$

$$36. \frac{\cos z}{\left(z - \frac{\pi}{3}\right)^2}.$$

Задание № 11

Вычислить с помощью вычетов следующие интегралы. В декартовой системе координат сделать рисунок контура интегрирования и указать на рисунке особые точки подынтегральной функции.

$$1. \int_{|z+2i|=3} \frac{dz}{z^3(z^2 + 4)^2};$$

$$19. \int_{|z-2|=1} (z-2)^2 \sin \frac{1}{z-2} dz;$$

$$2. \int_{|z|=4} \frac{z}{\sin z} dz;$$

$$20. \int_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin \pi z}{z^2 - z} dz;$$

3. $\int_{|z+2|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{z+2} dz;$
4. $\int_{|z|=1} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz;$
5. $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{(z+1)^2 z} dz;$
6. $\int_{\alpha} \frac{z}{z^4+1} dz;$
 $\alpha: \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1;$
7. $\int_{\alpha} \frac{dz}{\operatorname{sh} 2z}; \alpha: \left| z - \frac{\pi i}{2} \right| = 1;$
8. $\int_{|z+1|=\frac{3}{2}} \frac{\operatorname{ch} 2z}{z^2(z+2)(z-1)} dz;$
9. $\int_{|z|=2} e^{\frac{1}{z+1}} dz;$
10. $\int_{|z-1|=1} (z-1)^2 \sin \frac{1}{z-1} dz;$
11. $\int_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz;$
12. $\int_{|z|=2} \operatorname{tg} z dz;$
13. $\int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2 + 1} dz;$
14. $\int_{|z|=1} z \operatorname{tg}(\pi z) dz;$
21. $\int_{|z+1|=4} \frac{z dz}{e^z + 3};$
22. $\int_{|z|=1} \frac{z^2}{\sin^2 z \cdot \cos z} dz;$
23. $\int_{|z-i|=1} \frac{e^z}{z^4 + 2z^2 + 1} dz;$
24. $\int_{|z|=4} \frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3} dz;$
25. $\int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^2 - 4} dz, \text{ } \varrho \partial e \Gamma: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1;$
26. $\int_{\Gamma} \frac{e^{2z}}{z^3 - 1} dz, \text{ } \varrho \partial e \Gamma: x^2 + y^2 - 2x = 0;$
27. $\int_{\Gamma} \frac{\sin \pi z}{(z-1)^3(z+1)^3} dz, \text{ } \varrho \partial e \Gamma: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1;$
28. $\int_{\Gamma} \frac{z+1}{z^2 + 2z - 3} dz, \text{ } \varrho \partial e \Gamma: x^2 + y^2 = 16;$
29. $\int_{\Gamma} \frac{z \sin z}{(z-1)^5} dz, \text{ } \varrho \partial e \Gamma: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1;$
30. $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^4 + 1}, \text{ } \varrho \partial e \Gamma: x^2 + y^2 = 2x;$
31. $\int_{|z-1|=1} (z-1)^2 \sin \frac{1}{z-1} dz;$
32. $\int_{|z|=1} \operatorname{tg} z dz.$

$$15. \int_{\alpha} \frac{z dz}{(z-1)^2(z+2)};$$

$$\alpha: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}};$$

$$16. \int_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^3(z+1)};$$

$$17. \int_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2} dz;$$

$$18. \int_{|z|=\frac{1}{2}} z^2 \sin \frac{1}{z} dz;$$

$$33. \int_{|z+i|=1} \frac{\cos z}{z+i} dz;$$

$$34. \int_{|z|=1} z^5 e^{\frac{1}{z}} dz;$$

$$35. \int_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{(z+1)^2 z} dz;$$

$$36. \int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^4+1} dz.$$

Задание № 12

Вычислить несобственные интегралы

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2};$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx;$$

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3};$$

$$4. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1};$$

$$5. \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+16)^2} dx;$$

$$6. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2};$$

$$7. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1} dx;$$

$$8. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+13)^2};$$

$$19. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 dx}{(4+9x^2)^4};$$

$$20. \int_0^{\infty} \frac{(x^4+1) dx}{x^6+1};$$

$$21. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2};$$

$$22. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+20)^2};$$

$$23. \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2+1)(x^2+4)};$$

$$24. \int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^4} dx;$$

$$25. \int_0^{\infty} \frac{\cos 4x}{4+x^2} dx;$$

$$26. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)(x^2+9)} dx;$$

$$9. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)};$$

$$10. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2-2x+10} dx;$$

$$11. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2-2x+10} dx;$$

$$12. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2-4x+8} dx;$$

$$13. \int_0^{\infty} \frac{\cos 4x}{x^2+25} dx;$$

$$14. \int_0^{\infty} \frac{x \sin 6x}{x^2+9} dx;$$

$$15. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2};$$

$$16. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)};$$

$$17. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{1+x^6} dx;$$

$$18. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx;$$

$$27. \int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2+1)^2} dx;$$

$$28. \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+9} dx;$$

$$29. \int_0^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2+4} dx;$$

$$30. \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx;$$

$$31. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2+x+1} dx;$$

$$32. \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1} dx.$$

$$33. \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+1} dx;$$

$$34. \int_0^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^4+16} dx;$$

$$35. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^3};$$

$$36. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+16)(x^2+81)}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Список основной литературы

1. Араманович И.Г., Лунц Т.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1968. – 415 с.
2. Болгов В.А., Демидович Б.П., Ефименко В.А. и др. Сборник задач по математике. Специальные разделы математического анализа./под ред. А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. – М.: Наука, 1986. - 416 с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: учебник для втузов.- Ростов-на-Дону, 1997.-511с.
4. Жевержеев В.Ф., Кальницкий Л.А., Сапогов Н.А. Специальный курс высшей математики для втузов. – М.: Высшая школа, 1970. - 416 с.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. - М.: Интеграл-Пресс, 2008. – Т.2. – 416с.
6. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. –М.: Айрис – Пресс, 2005. – Ч.2. - 256 с.

Список дополнительной литературы

1. Данко П.В., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах.- М.: Высшая школа, 1997.-Ч.2 - 415 с.
2. Кожевников Н.И., Краснощекова Т.И., Шишкин Н.Е. Ряды и интегралы Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. – М.: Наука, 1964. – 184 с.
3. Краснов М.А., Киселев А.И., Макаренко Т.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981.- 304 с.
4. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Наука, 1979. -320 с.
5. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1982. – 487 с.

Список учебных пособий кафедры

1. Элементы теории функции комплексного переменного: учебно-методическое пособие / Яфаров Ш.А. Уфа: УГНТУ, 2004.
2. Практикум по элементам теории комплексного переменного / Егорова Р.А., Степанова М.Ф., Умергалина Т.В. Уфа: УГНТУ, 2000.
3. Расчетные задания по математике. Раздел «Элементы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления» / Андреева Г.П., Егорова Р.А., Якубова Д.Ф. Уфа: УГНТУ, 2002. – 26 с.
4. Математика: учебно - методический комплекс Раздел 11. Теория функций комплексного переменного. Элементы операционного исчисления. - Уфа: УГНТУ, 2008.