



Кафедра математики

УЧЕБНО – МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
дисциплины «Математика»

РАЗДЕЛ 10 «ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ»

Теоретические основы
Методические указания для студентов
Материалы для самостоятельной работы студентов

Уфа • 2016

Ответственный редактор д. ф.-м. наук, проф. Р.Н. Бахтизин

Редколлегия:

Акмадиева Т.Р., Аносова Е.П., Байрамгулова Р.С., Галиуллин М.М., Галиева Л.М., Галиакбарова Э.В., Гимаев Р.Г., Гудкова Е.В., Егорова Р.А., Жданова Т.Г., Зарипов Э.М., Зарипов Р.М., Исламгулова Г.Ф., Ковалева Э.А., Майский Р.А., Мухаметзянов И.З., Нагаева З.М., Савлучинская Н.М., Сахарова Л.А., Степанова М.Ф., Сокова И.А., Сулейманов И.Н., Умергалина Т.В., Фаткуллин Н.Ю., Хайбуллин Р.Я., Хакимов Д.К., Хакимова З.Р., Чернятьева М.Р., Юлдыбаев Л.Х., Шамшович В.Ф., Якубова Д.Ф., Якупов В.М., Янчушка А.П., Яфаров Ш.А.

Рецензенты: Кафедра программирования и вычислительной математики Башкирского государственного педагогического университета.

Заведующий кафедрой д. ф.-м. наук, профессор Р.М. Асадуллин.

Кафедра вычислительной математики Башкирского государственного университета.

Заведующий кафедрой д. ф.-м. наук, профессор Н.Д. Морозкин.

Учебно-методический комплекс дисциплины «Математика». Раздел 10 «Числовые и функциональные ряды». Теоретические основы. Методические указания для студентов. Материалы для самостоятельной работы студентов. – Уфа: Издательство УГНТУ, 2016. – 180 с.

Содержит теоретические материалы, способы и методы решения практических задач, задания для самостоятельной работы студентов, контрольные вопросы для самопроверки, список рекомендуемой литературы.

Разработан для студентов, обучающихся по всем формам обучения по направлениям подготовки и специальностям, реализуемым в УГНТУ.

© Уфимский государственный нефтяной технический университет, 2016

СОДЕРЖАНИЕ

1. Теоретические основы

Введение	6
1.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ	7
1.1.1. Числовые ряды. Основные понятия	7
1.1.2. Ряд геометрической прогрессии со знаменателем q	8
1.1.3. Остаток ряда	8
1.1.4. Свойства сходящихся числовых рядов	9
1.1.5. Необходимый признак сходимости числового ряда	10
1.1.6. Признак сравнения рядов с неотрицательными членами	11
1.1.7. Признак Даламбера	13
1.1.8. Радикальный признак Коши	14
1.1.9. Интегральный признак Коши	15
1.1.10. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости	17
1.1.11. Свойства абсолютно сходящихся рядов	19
1.1.12. Знакочередующиеся ряды	19
1.1.13. Приближенные вычисления с помощью рядов	21
1.2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ	23
1.2.1. Основные определения и теоремы	23
1.2.2. Интегрирование и дифференцирование функциональных рядов	26
1.2.3. Степенные ряды	30
1.2.4. Определение радиуса сходимости степенного ряда	32
1.2.5. Схема определения интервала сходимости степенного ряда	33
1.2.6. Характер сходимости степенного ряда	35
1.2.7. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов	36
1.2.8. Ряды по степеням $(x - x_0)$	37
1.2.9. Разложение функций в степенные ряды	39
1.2.9.1. Ряды Тейлора и Маклорена	39
1.2.9.2. Разложение в ряд Маклорена функций $e^x, \sin x, \cos x$	41
1.2.10. Биномиальный ряд	43
1.2.11. Вычисление значения функций при помощи рядов	45
1.2.12. Вычисление определенных интегралов с помощью рядов	47
1.2.13. Интегрирование дифференциальных уравнений	48
1.3. РЯДЫ ФУРЬЕ	50
1.3.1. Постановка задачи	50
1.3.2. Определение коэффициентов ряда по методу Эйлера-Фурье	52
1.3.3. Разложение функций в ряд Фурье	56
1.3.4. Ряды Фурье для четных и нечетных функций	60
1.3.5. Ряды Фурье для функции с периодом 2ℓ	62
1.3.6. О разложении в ряд Фурье непериодической функции	64
1.3.7. Ряд Фурье в комплексной форме	66
1.3.8. Интеграл Фурье	68

1.3.9. Интеграл Фурье для четных и нечетных функций	69
1.3.10. Интеграл Фурье в комплексной форме	71
1.3.11. Преобразование Фурье и его свойства	72
2. Методические указания для студентов	
2.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ	76
2.1.1. Числовой ряд и его сумма	76
2.1.2. Сходимость рядов с положительными членами. Признаки сравнения	80
2.1.3. Признак Даламбера	81
2.1.4. Признак Коши	81
2.1.5. Интегральный признак Коши	82
2.1.6. Сходимость числовых рядов с членами произвольных знаков. Абсолютная и условная сходимость	83
2.1.7. Знакопередающие ряды. Теорема Лейбница	84
2.1.8. Приближенное вычисление суммы ряда	85
2.2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ	87
2.2.1. Функциональный ряд и область его сходимости	87
2.2.2. Равномерная сходимость функциональных рядов	88
2.2.3. Степенные ряды. Радиус и интервал сходимости	90
2.2.4. Разложение функций в степенные ряды	93
2.2.5. Вычисление сумм числовых и степенных рядов	96
2.2.6. Приближенные вычисления значений функций с помощью степенных рядов	98
2.2.7. Применение степенных рядов к вычислению определенных интегралов	99
2.2.8. Применение степенных рядов к решению дифференциальных уравнений	101
2.3. РЯДЫ ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ	106
2.3.1. Разложение периодических функций в ряд Фурье	106
2.3.2. Разложение в ряд Фурье непериодической функции	109
2.3.3. Ряды Фурье в комплексной форме	110
2.3.4. Интеграл Фурье	111
2.3.5. Интеграл Фурье в комплексной форме. Преобразование Фурье	112
2.3.6. Спектральные характеристики ряда и интеграла Фурье	114
3. Материалы для самостоятельной работы студентов	
3.1. Контрольные вопросы	117
3.2. Задачи и примеры для самостоятельной работы	118
3.3. Расчетные задания	138
3.4. Лабораторные работы	173
3.5. Литература	180

УЧЕБНО - МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

РАЗДЕЛ 10 «ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ»

1. Теоретические основы

ВВЕДЕНИЕ

К понятию бесконечных сумм подошли еще ученые древней Греции, у них уже встречалась сумма членов бесконечной геометрической прогрессии с положительным знаменателем меньшим единице. Как самостоятельное понятие ряд вошел в математику в 17 веке. И. Ньютон и Г. Лейбниц систематически использовали ряды для решения уравнений как алгебраических, так и дифференциальных. Формальная теория рядов успешно развивалась в 18 – 19 веках в работах Я. и И. Бернулли, Б. Тейлора, К. Маклорена, Л. Эйлера, Ж. Даламбера, Ж. Лагранжа и других. В этот период использовались как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, хотя не было полной ясности в вопросе о законности действий над ними. Точная теория рядов была создана в 19 веке на основе понятия предела в трудах К. Гаусса, Б. Больцано, О. Коши, П. Дирихле, Н. Абеля, К. Вейерштрасса, Г. Римана и других.

Ряды широко используются в математике и ее приложениях как в теоретических исследованиях, так и при приближенных численных решениях задач. Многие числа могут быть записаны в виде специальных рядов, с помощью которых удобно вычислять их приближенные значения с нужной точностью.

Метод разложения в ряды является эффективным методом изучения функций. Он применяется для вычисления приближенных значений функций, для вычисления и оценок интегралов, для решения всевозможных уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных).

1.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1.1.1. Числовые ряды. Основные понятия

Рассмотрим числовую последовательность $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, где $u_n = f(n)$. Построим из этой последовательности выражение $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Выражение

$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ – члены бесконечной числовой последовательности, называется **числовым рядом**.

Числа $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ называют **членами ряда**, а u_n – общим **членом ряда**.

Зная общий член ряда, можно записать любой член ряда.

ПРИМЕР 1.1. Дан общий член ряда $u_n = \frac{n+1}{n(n+2)}$. Написать первые три члена ряда и $(n+1)$ -й член.

Решение. Если $n = 1$, $u_1 = \frac{2}{1 \cdot 3} = \frac{2}{3}$;

$$n = 2, \quad u_2 = \frac{3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8};$$

$$n = 3, \quad u_3 = \frac{4}{3 \cdot 5} = \frac{4}{15};$$

.....

$$n+1, \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{(n+1)((n+1)+1)} = \frac{n+2}{(n+1)(n+3)}.$$

Итак, для того, чтобы найти u_{n+1} член, нужно к каждому n прибавить единицу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Сумма конечного числа n первых членов ряда называется **n -й частичной суммой ряда**.

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n. \quad (1.1)$$

Очевидно, первая, вторая, третья и т.д. частичные суммы будут иметь вид

$$S_1 = u_1$$

$$S_2 = u_1 + u_2$$

.....

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Ряд называется **сходящимся**, если существует конечный предел частичной суммы S_n при $n \rightarrow \infty$, то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S. \quad (1.2)$$

Число S называется **суммой ряда**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Ряд называется *расходящимся*, если предел частичной суммы не существует или равен бесконечности при $n \rightarrow \infty$.

1.1.2. Ряд геометрической прогрессии со знаменателем q

Ряд $a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \dots + a \cdot q^{n-1} + \dots$ называется *рядом геометрической прогрессии со знаменателем q* .

Рассмотрим случай, когда $a \neq 0$. Определим S_n :

$$S_n = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \dots + a \cdot q^{n-1} = a \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{a \cdot q^n}{1 - q}$$

(по формуле суммы геометрической прогрессии при $q \neq \pm 1$):

1) если $|q| < 1$, то $q^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и, следовательно,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{1 - q} - \frac{a \cdot q^n}{1 - q} \right) = \frac{a}{1 - q}$. Значит, в случае $|q| < 1$ ряд сходится и его сумма
 равна $S = \frac{a}{1 - q}$;

2) если $|q| > 1$, то $q^n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, следовательно, ряд расходится;

3) если $q = 1$, то ряд имеет вид $a + a + a + \dots + a + \dots$, его частичная сумма $S_n = n \cdot a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a = \infty \Rightarrow$ ряд расходится;

4) если $q = -1$, то ряд имеет вид $a - a + a - a \dots$

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{при } n - \text{четном,} \\ a, & \text{при } n - \text{нечетном.} \end{cases}$$

S_n не имеет предела, при $n \rightarrow \infty$ ряд расходится.

1.1.3. Остаток ряда

Пусть дан ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (1.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Ряд, членами которого являются члены ряда (1.3), начиная с $(n+1)$ -го, взятые в том же порядке, что и в исходном ряде, называется **n -м остатком ряда** и обозначается

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots$$

Частичная сумма сходящегося ряда отличается от его суммы на величину суммы остатка. Поэтому чем меньше сумма остатка ряда, тем точнее описывает соответствующая частичная сумма ряда сумму всего ряда.

Теорема 1.1. Если ряд (1.3) сходится, то сумма его n -го остатка при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

Доказательство. Обозначим n -й остаток ряда через $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ и

будем для краткости называть просто остатком ряда, тогда сумму ряда $\sum_1^{\infty} u_n$

можно записать в виде

$$S = S_n + R_n. \quad (1.4)$$

В (1.4) перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n + R_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n + \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = S + \lim_{n \rightarrow \infty} R_n, \text{ тогда } \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0.$$

Что и требовалось доказать.

1.1.4. Свойства сходящихся числовых рядов

Теорема 1.2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и его сумма равна S , то ряд $c \cdot u_1 + c \cdot u_2 + \dots + c \cdot u_n + \dots$, где $c = \text{const}$, также сходится и его сумма равна $c \cdot S$.

Доказательство. Обозначим S_n – частичную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и

σ_n – частичную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n$, тогда $\sigma_n = c \cdot u_1 + c \cdot u_2 + \dots + c \cdot u_n =$

$$= c \cdot (u_1 + u_2 + \dots + u_n) = c \cdot S_n, \text{ а так как ряд } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ сходится, то } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = c \cdot S \Rightarrow$ ряд $c \cdot u_1 + c \cdot u_2 + \dots + c \cdot u_n + \dots$ сходится и его сумма равна $c \cdot S$.

Теорема 1.3. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся и их суммы соответственно равны S и σ , то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ сходится и его сумма равна $S + \sigma$.

Доказательство. Пусть $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$; $\sigma_n = \sum_{k=1}^n v_k$ и $S'_n = \sum_{k=1}^n (u_k + v_k)$, тогда $S'_n = S_n + \sigma_n$.

По условию ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся, а это значит, что $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ и

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma \Rightarrow$, что предел S'_n существует

$\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n + \sigma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = S + \sigma \Rightarrow$, что ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ сходится и его сумма равна $S + \sigma$. Таким образом, сумма двух сходящихся рядов является сходящимся рядом.

Замечание 1.1. Разность двух сходящихся рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ есть ряд

сходящийся, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$ является суммой двух сходящихся рядов

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (-v_n)$.

Теорема 1.4. Сходимость ряда не изменится, если отбросить или добавить конечное число членов (без доказательства).

Замечание 1.2. Разность двух расходящихся рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$ может

быть как сходящимся так и расходящимся рядом. Числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ расходятся, но $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится.

1.1.5. Необходимый признак сходимости числового ряда

Теорема 1.5. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то его общий член при

неограниченном возрастании n стремится к нулю, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Доказательство. Дан сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, а это значит, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad (1.5)$$

но и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S, \quad (1.6)$$

так как $(n-1) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Вычитая из (1.5) (1.6), получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n-1 \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$$

так как $S_n - S_{n-1} = u_n$.

Замечание 1.3. Если для некоторого ряда $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то такой ряд расходится (достаточный признак расходимости).

ПРИМЕР 1.2. Ряд вида

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ называется *гармоническим*. Для этого ряда

выполняется необходимое условие сходимости, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Покажем, что этот ряд расходится. Известно, что возрастающая последовательность $\{a_n\}$, где $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, сходится и ее предел равен e :

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$; при этом $e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Логарифмируя это неравенство,

имеем $\ln e > n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n(\ln(n+1) - \ln n)$ или, поделив обе части на n ,

получим $\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n$.

При $n = 1$ $1 > \ln 2$

$n = 2$ $\frac{1}{2} > \ln 3 - \ln 2$

$n = 3$ $\frac{1}{3} > \ln 4 - \ln 3$

.....

$n = n$ $\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n$.

Частичная сумма $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ гармонического ряда, каждый член которой больше соответствующего члена суммы вида

$$\ln 2 + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + \dots + (\ln(n+1) - \ln n) = \ln(n+1),$$

удовлетворяет неравенству $S_n > \ln(n+1)$, но $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$, откуда

следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$.

Из рассмотренного примера следует, что рассмотренный признак не является достаточным признаком сходимости ряда.

1.1.6. Признак сравнения рядов с неотрицательными членами

Теорема 1.6. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и $0 < v_n \leq u_n$ ($n = 1, 2, \dots$), то и

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится. Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, а $0 < u_n \leq v_n$, то и ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится.

Доказательство. Пусть S_n – частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, а σ_n – частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то его частичная сумма ограничена, то есть для всех n $S_n < M$, где M – некоторое число. Но так как $u_n \geq v_n$, то $S_n \geq \sigma_n$, а это значит, что частичная сумма σ_n ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ также ограничена, а этого достаточно для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ с неотрицательными членами.

Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ также расходится, так как предположив, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится и $v_n \geq u_n$, по условию, по выше доказанному должен сходиться и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, что противоречит условию.

Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится.

ПРИМЕР 1.3. Пользуясь признаком (1.6), исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$.

Решение. Проверим, выполняется ли для данного ряда необходимый признак сходимости знакоположительных рядов $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n \cdot n} = 0$ – ряд может сходиться.

Для доказательства сходимости применим теорему 1.6. Для сравнения рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, который сходится как ряд геометрической прогрессии при $|q| < 1$, причем $\frac{1}{2^n} > \frac{1}{n \cdot 2^n}$. Следовательно, по признаку сравнения сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$.

Следствие 1.1. Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k$, то из сходимости ряда с общим членом u_n следует сходимость ряда с общим членом v_n , и из расходимости первого ряда следует расходимость второго.

1.1.7. Признак Даламбера

Если в ряде с положительными членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (1.7)$$

отношение $(n+1)$ -го члена к n -му при $n \rightarrow \infty$ имеет (конечный) предел ℓ , то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell, \quad (1.8)$$

то 1) при $\ell < 1$ ряд сходится;

2) при $\ell > 1$ ряд расходится;

3) при $\ell = 1$ этот признак не решает вопроса о сходимости и расходимости ряда.

Доказательство. 1. Пусть для исследуемого ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$, $\ell < 1$. Рассмотрим число q , удовлетворяющее соотношению $\ell < q < 1$. Тогда, начиная с некоторого номера N из определения предела для всех $n \geq N$, выполняется неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q \quad \text{или} \quad u_{n+1} < q u_n. \quad (1.9)$$

Запишем неравенство для различных n , начиная с номера N , тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{u_{N+1}}{u_N} < q &\Rightarrow u_{N+1} < q u_N; \\ \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} < q &\Rightarrow u_{N+2} < q u_{N+1} < q^2 u_N; \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\frac{u_{N+3}}{u_{N+2}} < q \Rightarrow u_{N+3} < q u_{N+2} < q^3 u_N.$$

Рассмотрим два ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_N + u_{N+1} + \dots \quad (1.11)$$

$$q u_N + q^2 u_N + \dots + q^n u_N + \dots \quad (1.12)$$

Ряд (1.12) есть ряд геометрической прогрессии со знаменателем q : $0 < q < 1$. Следовательно, он сходится. Так как члены ряда (1.11) начиная с u_{N+1} меньше соответствующих членов ряда (1.12), то на основании признака сравнения теоремы 1.6 ряд сходится.

2. Пусть $\ell > 1$. Тогда из равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ ($\ell > 1$) следует, что, начиная с некоторого номера N (то есть для $n \geq N$), будет иметь место

неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ или $u_{n+1} > u_n$, а это означает, что члены ряда возрастают и общий член ряда не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то есть нарушается необходимый признак сходимости, что приводит к расходимости исследуемого ряда.

ПРИМЕР 1.4. Исследовать на сходимость числовой ряд $1 + \frac{4}{2!} + \frac{9}{3!} + \frac{16}{4!} + \dots$

Решение. Запишем n -й член ряда $u_n = \frac{n^2}{n!}$. Проверим необходимый

признак сходимости $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot n}{(n-1)!n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n-1)!} = 0$.

Необходимый признак выполняется, ряд может сходиться. Для установления сходимости применяем признак Даламбера, для чего запишем u_{n+1} член,

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!}.$$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 n!}{n!(n+1)n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2} = 0$.

Значит, в данном случае $\ell = 0 < 1$ и ряд сходится.

1.1.8. Радикальный признак Коши

Если для ряда с положительными членами $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$, ($u_n > 0$) величина $\sqrt[n]{u_n}$ имеет конечный предел p при $n \rightarrow \infty$, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = p$, то

1) при $p < 1$ ряд сходится;

2) при $p > 1$ ряд расходится;

3) при $p = 1$ этот признак не дает возможности определить сходимость или расходимость ряда.

Доказательство 1. Пусть $p < 1$, удовлетворяющее соотношению $p < q < 1$. Начиная с некоторого номера $n = N$, будет иметь место соотношение $|\sqrt[n]{u_n} - p| < q - p$, откуда следует, что $\sqrt[n]{u_n} < q$ или $u_n < q^n$ для всех $n \geq N$. Рассмотрим два ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_N + u_{N+1} + \dots \quad (1.13)$$

$$q^N + q^{N+1} + \dots \quad (1.14)$$

Так как $q < 1$, то ряд (1.14) сходится. Члены ряда (1.13) меньше

соответствующих членов ряда (1.14), начиная с u_N . Следовательно, ряд (1.13) сходится на основании признака сравнения 1.6.

2. Пусть $p > 1$. Тогда, начиная с некоторого N , $\sqrt[p]{u_n} > 1$ или $u_n > 1$, то есть не выполняется необходимое условие сходимости ряда, ряд расходится.

ПРИМЕР 1.5. Исследовать на сходимость числовой ряд

$$1 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{7}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n + \dots$$

Решение. Определим $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2+n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$, ряд сходится.

Замечание 1.4. Признаки Даламбера и Коши основаны на сравнении данного ряда с рядом геометрической прогрессии. Эти признаки не являются чувствительными к рядам, сходящимся медленнее, чем ряд геометрической прогрессии. Для таких рядов рассматривают более сильные признаки, в частности, интегральный признак Коши.

1.1.9. Интегральный признак Коши

Пусть члены ряда

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1.15)$$

положительны и не возрастают, то есть $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots$ и $f(x)$ – непрерывная невозрастающая функция, причем

$$f(1) = u_1; f(2) = u_2; \dots; f(n) = u_n, \dots, \text{ тогда}$$

1) если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ сходится, то сходится и ряд (1.15);

2) если интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ расходится, то расходится и ряд (1.15).

Доказательство. Для доказательства изобразим члены ряда (1.15) геометрически, откладывая по оси Ox номера $1, 2, \dots, n, n+1, \dots$ членов ряда, а по оси ординат – соответствующие значения членов ряда $u_1, u_2, \dots, u_n$, (рис. 1.1).

На этом же чертеже построим график непрерывной невозрастающей функции $y = f(x)$, удовлетворяющей

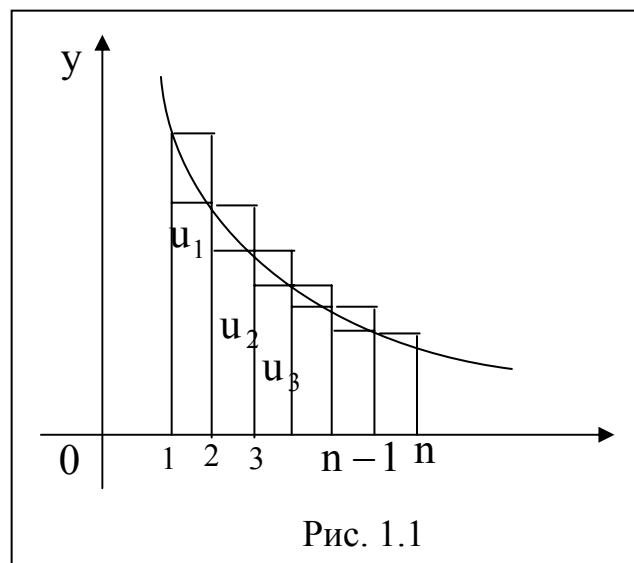


Рис. 1.1

условиям теоремы. Сравнивая площади ступенчатых фигур, криволинейной трапеции, из геометрического смысла определенного интеграла имеем

$$f(2) + f(3) + \dots + f(n) < \int_1^n f(x) dx < f(1) + f(2) + \dots + f(n-1),$$

или с учетом, что $f(1) = u_1$, $f(2) = u_2, \dots$, получим

$$u_2 + u_3 + \dots + u_n < \int_1^n f(x) dx < u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}. \quad (1.16)$$

Но так как частичная сумма S_n ряда (1.15) равна $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, то левая часть (1.16) есть $S_n - u_1$, а правая S_{n-1} , тогда

$$S_n - u_1 < \int_1^n f(x) dx < S_{n-1}. \quad (1.17)$$

1. Предположим, что интеграл $\int_1^\infty f(x) dx$ сходится. Так как

$$\int_1^n f(x) dx < \int_1^\infty f(x) dx, \text{ то в силу неравенства (1.17) будем иметь}$$

$$S_{n-1} < S_n < \int_1^\infty f(x) dx + u_1, \quad (1.18)$$

то есть частичные суммы ограничены при всех значениях n , а это значит, по теореме 1.6 ряд (1.15) сходится.

2. Предположим, что интеграл $\int_1^\infty f(x) dx$ расходится, то есть

$$\int_1^\infty f(x) dx = \infty. \text{ Из расходимости } \int_1^\infty f(x) dx \text{ следует, что интеграл } \int_1^n f(x) dx$$

неограниченно возрастает при $n \rightarrow \infty$, то есть ряд расходится.

ПРИМЕР 1.6. Исследовать сходимость ряда

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Решение. 1. Рассмотрим случай, когда $p \leq 0$. Тогда

$$u_n = \frac{1}{n^p} = n^{-p} \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty, \text{ так как } -p \geq 0. \text{ Для данного случая}$$

необходимое условие сходимости не выполняется, ряд расходится. Применим

интегральный признак для случая $p > 0$, положив $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Эта функция при

$x \geq 1$ непрерывная и монотонно убывающая. Рассмотрим интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a x^{-p} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_1^a = \frac{1}{1-p} (a^{1-p} - 1), & p \neq 1 \\ \ln x \Big|_1^a = \ln a - \ln 1 = \ln a; & p = 1. \end{cases}$$

$$2. \quad p > 1, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} (a^{1-p} - 1) = \frac{1}{1-p} - \text{предел конечен, интеграл сходится,}$$

следовательно, ряд сходится.

$$3. \quad 0 < p < 1, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} (a^{1-p} - 1) = \infty - \text{интеграл расходится, ряд}$$

расходится.

$$4. \quad p = 1; \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \ln a = \infty - \text{интеграл расходится, ряд расходится.}$$

Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$, при $p \leq 1$ расходится. Данный ряд называется **обобщенным гармоническим рядом**. При $p = 1$ получим гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится.

Без доказательства приводим формулу, которая позволяет оценить остаток числового ряда (1.15) как сверху, так и снизу:

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x) dx \leq R_n \leq \int_n^{\infty} f(x) dx. \quad (1.19)$$

1.1.10. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Ряд называется **знакопеременным**, если среди его членов имеются бесконечное число членов как с положительными, так и с отрицательными знаками.

Пусть

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1.20)$$

знакопеременный ряд. Некоторую информацию об этом ряде можно получить, рассматривая ряд

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots, \quad (1.21)$$

членами которого являются абсолютные величины членов знакопеременного ряда (1.20). Ряд (1.21) является рядом с положительными членами, поэтому его можно изучить на основании приемов, изложенных выше. Между сходимостью ряда (1.20) и сходимостью ряда (1.21) существует связь, которая устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1.7. Если знакопеременный ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ таков, что ряд, составленный из абсолютных величин его членов, сходится, то и данный знакопеременный ряд также сходится.

Доказательство. Пусть S_n — частичная сумма ряда $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$, σ_n — частичная сумма ряда $|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$, а S'_n — сумма всех положительных членов ряда, S''_n — сумма абсолютных величин всех отрицательных членов среди первых n членов данного ряда: тогда $S_n = S'_n - S''_n$; $\sigma_n = S'_n + S''_n$. По условию теоремы ряд, составленный из абсолютных величин, сходится; значит, σ_n имеет $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$. Сумма S'_n и S''_n — положительные возрастающие величины, меньше σ . Следовательно, они имеют пределы, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = S'$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} S''_n = S''$. Но так как $S'_n - S''_n = S_n$, S_n имеет предел, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S'_n - S''_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S''_n = S' - S''$. Так как S_n — частичная сумма ряда $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ и она имеет предел, то данный ряд сходится, то есть знакопеременный ряд сходится.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Знакопеременный ряд называется *условно сходящимся*, если сам ряд сходится, а ряд составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Условно сходящиеся ряды называют также неабсолютно сходящимися рядами.

ПРИМЕР 1.7. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{\sin \alpha}{1} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \dots, \text{ где } \alpha - \text{любое число.}$$

Решение. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин данного ряда, то есть $\left| \frac{\sin \alpha}{1} \right| + \left| \frac{\sin 2\alpha}{2^2} \right| + \left| \frac{\sin 3\alpha}{3^2} \right| + \dots + \left| \frac{\sin n\alpha}{n^2} \right| + \dots$. Для

доказательства сходимости полученного ряда применим признак сравнения.

Сравнение данного ряда проведем с рядом $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$,

который сходится (см. 1.15). Члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ больше соответствующих

членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n\alpha}{n^2} \right|$, значит ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n\alpha}{n^2} \right|$ сходится (см. 1.8).

Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n\alpha}{n^2} \right|$ следует по теореме 1.7 сходимость ряда

$$\frac{\sin \alpha}{1} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \dots$$

1.1.11. Свойства абсолютно сходящихся рядов

Теорема 1.8. (о перестановке членов ряда) (без доказательства). Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму. Это свойство не сохраняется для условно сходящихся рядов.

Теорема 1.9. (о группировке членов ряда) (без доказательства). В сходящемся ряде любая группировка членов ряда, не изменяющая их порядка, сохраняет сходимость ряда и величину суммы.

Теорема 1.10. (умножение абсолютно сходящихся рядов) (без доказательства). Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно и их сумма соответственно равна S и σ , то ряд, составленный из всех произведений вида $u_i v_k$ ($i, k = 1, 2, \dots$), взятых в каком угодно порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна $S \cdot \sigma$ — произведению сумм перемножаемых рядов.

1.1.12. Знакопередающие ряды

Рассмотрим ряд, члены которого имеют чередующиеся знаки, то есть ряд вида $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots$, где

$$u_n > 0, n = 1, 2, \dots \text{ или } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n. \quad (1.22)$$

Ряд (1.22) называется знакопередающим рядом.

Теорема 1.11. (Лейбница)

Если у знакопередающегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$, $u_n \geq 0$, члены убывают, то есть $u_1 > u_2 > \dots$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, то ряд сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена.

Доказательство. 1. Рассмотрим сумму $n = 2m$ первых членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$, то есть

$$S_{2m} = u_1 - u_2 + u_3 - \dots + u_{2m-1} - u_{2m}. \quad (1.23)$$

Правую часть (1.23) запишем в виде

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m}). \quad (1.24)$$

Из условия теоремы ($u_1 > u_2 > \dots$) следует, что разность в скобках (1.24) положительна. Следовательно, сумма S_{2m} положительна $S_{2m} > 0$ и возрастает с возрастанием m .

Докажем, что она ограничена. Для этого представим S_{2m} следующим образом:

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}. \quad (1.25)$$

В силу условия $u_1 > u_2 > u_3 > \dots$ каждая разность в скобках (1.25) положительна. Поэтому в результате вычитания этих скобок из u_1 , получим число, меньшее, чем u_1 , то есть $S_{2m} < u_1$.

Таким образом, S_{2m} при возрастании m возрастает и ограничена сверху. Следовательно, по теореме о пределе монотонной переменной ряд сходится и $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S$, причем $0 < S < u_1$.

2. Чтобы доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$, нужно доказать еще, что «нечетные» частичные суммы также стремятся к этому пределу.

Рассмотрим сумму $n = 2m + 1$ первых членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$

$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}. \quad (1.26)$$

По условию теоремы $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, следовательно, $\lim_{m \rightarrow \infty} u_{2m+1} = 0$; тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} (S_{2m} + u_{2m+1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} + \lim_{m \rightarrow \infty} u_{2m+1} = S.$$

Тем самым доказали, что $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ (как при n четном, так и при нечетном). Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ сходится.

ПРИМЕР 1.8. Исследовать сходимость ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$$

Решение. Данный ряд знакочередующийся. Для исследования его сходимости согласно теореме 1.7 составляем ряд из абсолютных величин его членов, то есть ряд вида $1 + \left| -\frac{1}{2} \right| + \left| \frac{1}{3} \right| + \left| -\frac{1}{4} \right| + \dots + \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Полученный ряд гармонический, который расходится. Применим теорему Лейбница, так как ряд знакочередующийся. Проверим выполнения условий

этой теоремы $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots > \frac{1}{n} > \dots$, то есть первое условие

выполняется. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ – второе условие также выполнено.

Следовательно, ряд сходится, но ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится, тогда согласно определению 1.8 этот ряд сходится условно.

Замечание 1.5. Теорема Лейбница позволяет оценить ошибку, которая получается, если заменить его сумму S частичной суммой S_n .

При такой замене мы отбрасываем все члены ряда, начиная с u_{n+1} , то есть получаем ряд вида

$$\pm (u_{n+1} - u_{n+2} + \dots u_{n+3} + \dots) = R_n. \quad (1.27)$$

Здесь R_n – остаток ряда, представляет собой знакочередующийся ряд, удовлетворяющий теореме Лейбница. По теореме Лейбница сумма ряда (1.27) не превосходит по абсолютной величине члены u_{n+1} , то есть $|R_n| < u_{n+1}$. Таким образом, пользуясь приближенным равенством $S \approx S_n$, допускают ошибку, которая меньше абсолютной величины первого из отбрасываемых членов.

ПРИМЕР 1.9. Вычислить сумму ряда

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} + \dots \text{ с точностью } 10^{-3}.$$

Решение. Исследуем на сходимость данный ряд. Для этого составим ряд из абсолютных величин его членов, то есть вида

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{n^4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}. \text{ Полученный ряд гармонический с } p = 4 > 1. \text{ Поэтому он сходится. Тогда по теореме (1.7) сходится и ряд}$$

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} + \dots$$

Но этот ряд знакочередующийся. Согласно замечанию 1.5 ошибка, которая получается при замене данного ряда его частичной суммой, не превосходит по абсолютной величине члена $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^4}$. Чтобы достичь

заданной точности, достаточно положить $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^4} \leq 10^{-3}$, откуда

находим наименьшее n , удовлетворяющее этому неравенству, то есть $n = 5$. Для вычисления суммы ряда с точностью 10^{-3} достаточно взять сумму первых пяти слагаемых, то есть $1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} \approx 0,9475$. Сумма данного ряда с точностью 10^{-3} равна 0,9475.

Замечание 1.6. Теорема Лейбница остается в силе, если члены знакочередующегося ряда начинают убывать, начиная с некоторого n .

1.1.13. Приближенные вычисления с помощью рядов

Если неизвестное число A разложено в ряд

$$A = U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots, \quad (1.28)$$

где $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ – легко вычисляемые числа, положим приближенно

$$A \approx U_1 + U_2 + \dots + U_n,$$

то погрешность на отбрасывание всех остальных чисел выразится остатком

$$R_n = U_{n+1} + U_{n+2} + \dots \quad (1.29)$$

При достаточно большом n эта погрешность станет сколь угодно малой, так что $U_1 + U_2 + \dots + U_n$ воспроизведет A с любой наперед заданной точностью.

Если рассматриваемый ряд является знакочередующимся с монотонно убывающими членами, то согласно теореме Лейбница остаток имеет знак своего первого члена и по абсолютной величине меньше его. Из неравенства

$$|R_n| < U_{n+1} < 10^{-m}, \quad (1.30)$$

где 10^{-m} – заданная точность, находим наименьшее значение n , тогда

$$A \approx U_1 + U_2 + \dots + U_n -$$

значение числа A , вычисленное с заданной точностью 10^{-m} .

Если числовой ряд для A знакоположительный, то для оценки остатка можно использовать формулу (1.19). Согласно этой формуле R_n удовлетворяет неравенству

$$R_n < \int_n^{\infty} f(x) dx, \quad (1.31)$$

где $U_n = f(n)$ – общий член ряда (1.28).

В некоторых случаях оценка остатка ряда (1.28) по формулам (1.30) и (1.31) оказывается чрезвычайно трудной, например, если общий член ряда содержит факториал. В этих случаях применяют различные искусственные приемы. Например, стараются найти числовой ряд с положительными членами, члены которого были бы больше членов остатка R_n , затем оценивают остаток R_n суммой этого ряда.

ПРИМЕР 1.10. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ с точностью 10^{-3} .

Решение. Оценки остатка (1.30), (1.31) не применимы для этого ряда, так как ряд не является знакочередующимся и его общий член содержит факториалы. Поэтому оценим остаток ряда непосредственно:

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right) < \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right); \end{aligned}$$

все сомножители в знаменателях заменены на $n+1$. Определяя сумму геометрической прогрессии, заключенную в скобках, получаем

$$R_n < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n \cdot n!} < 10^{-3}.$$

Наименьшее значение n , удовлетворяющее этому неравенству, равно 6, так как $R_6 < \frac{1}{6 \cdot 6!} \cdot \frac{1}{4320} < 10^{-3}$.

Это значит, что, взяв первые шесть членов ряда, достигается точность 10^{-3} . Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \approx 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \approx 1,718$.

Ответ: 1,718.

1.2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

1.2.1. Основные определения и теоремы

Задание числового ряда состоит в задании каждого его члена, а член ряда есть число. Задание функционального ряда от некоторой переменной x состоит в задании ряда функций от этой переменной, являющихся членами функционального ряда. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Выражение $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, где $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ – функции, заданные на одном и том же множестве X , называется *функциональным рядом с общим членом $u_n(x)$* .

Если в функциональном ряде

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (1.32)$$

переменную x заменить любым числом $x_0 \in X$, то получим числовой ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots \quad (1.33)$$

Таким образом, каждый функциональный ряд определяет множество числовых рядов, получаемых из него подстановкой вместо переменной ее значений. В зависимости от значения, принимаемого переменной x , числовой ряд (1.33) может сходиться или расходиться.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.10. Функциональный ряд (1.32) называется *сходящимся в точке $x_0 \in X$* , если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.

Подобно числовым рядам в функциональных рядах вводится понятие частичной суммы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.11. *Частичными суммами* функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называются функции

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x). \quad (1.34)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.12. Функциональный ряд (1.32) называется *сходящимся в точке* $x_0 \in X$, если в этой точке сходится последовательность его частичных сумм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.13. Множество значений переменной X , при которых функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится, называется *областью сходимости этого ряда*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.14. Предел частичных сумм сходящегося на множестве X ряда (1.32) называется его суммой $S(x)$.

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x). \quad (1.35)$$

ПРИМЕР 1.11. Исследовать на сходимость функциональный ряд $1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots$. Этот ряд при каждом x представляет ряд геометрической прогрессии. Значит, если $|x| < 1$, ряд сходится. Если $|x| \geq 1$, то ряд расходится. Таким образом, область сходимости данного ряда состоит из всех тех значений переменной x , для которых $|x| < 1$.

Для определения области сходимости функционального ряда можно применять известные достаточные признаки сходимости числовых рядов.

ПРИМЕР 1.12. Определить область сходимости функционального ряда

$$x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} + x^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \dots + x^n \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$$

Для установления области сходимости применим признак Даламбера

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2^{n+1}}}{x^n \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2^{n+1}}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2^n}} \right| = \\ &= \frac{|x|}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2^{n+1}}}{\frac{x}{2^{n+1}}} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2^n}} \right| = \frac{|x|}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2^{n+1}}}{\frac{x}{2^{n+1}}} \right| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x}{2^n}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2^n}} \right| = \frac{|x|}{2}, \end{aligned}$$

По признаку Даламбера данный ряд сходится для всех x , для которых $\frac{|x|}{2} < 1$ или $|x| < 2$, а для всех x , $|x| > 2$ ряд расходится.

Остается исследовать сходимость на границе области при $x = \pm 2$. Для этого в функциональный ряд вместо x подставим $x = 2$ и $x = -2$; в результате получим числовые ряды. При $x = 2$ получаем ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| 2^n \operatorname{tg} \frac{2}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| 2^n \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2^{n-1}} \right|$. Применим к нему необходимый признак сходимости ряда, то есть найдем $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| 2^n \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2^{n-1}} \right| = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2^{n-1}}}{\frac{1}{2^{n-1}}} \right| = 2. \text{ Необходимый признак не выполняется,}$$

значит при $x = 2$ ряд расходится.

При $x = -2$ получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-2)^n \operatorname{tg} \frac{(-2)}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \cdot 2^n \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2^{n-1}} \right|, \text{ для которого } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0. \text{ Тогда}$$

областью сходимости функционального ряда является интервал $(-2; 2)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.15. Ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ называется n -м *остатком функционального ряда* (1.32).

Если сумму остатка обозначить через $r_n(x)$, то сумма сходящегося функционального ряда $S(x)$ есть $S(x) = S_n(x) + r_n(x)$.

Для всех x в области сходимости ряда имеет место соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$, поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S(x) - S_n(x)) = 0$, то есть предел частичных сумм остатка сходящегося ряда стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.16. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, сходящийся для всех x из области X , называется равномерно сходящимся в этой области, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такой не зависящий от x номер N , что при $n > N$ неравенство $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ выполняется одновременно для всех $x \in X$.

Теорема 1.12. (Критерий Коши равномерной сходимости рядов).

Для того, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходил на множестве X , необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0 \exists$ такой N , чтобы для всех $n > N$ и $\forall$ натуральных p и $\forall x \in X$ выполнялось неравенство

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Практическое применение критерия Коши для исследования ряда на равномерную сходимость затруднительно. Более простым и удобным при исследовании функционального ряда на равномерную сходимость является достаточный признак равномерной сходимости – признак Вейерштрасса.

Теорема 1.13. (Признак Вейерштрасса).

Пусть даны два ряда: функциональный $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, членами которого являются функции $u_n(x)$, определенные на множестве X , и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$. Если числовой ряд сходится и для $\forall x \in X$ выполняется неравенство $|u_n(x)| \leq a_n$, $n = 1, 2, \dots$, то функциональный ряд абсолютно и равномерно сходится на множестве X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.17. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *мажорируемым* в некоторой области изменения X , если существует такой сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|u_n(x)| \leq a_n$.

ПРИМЕР 1.13. Доказать, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ сходится равномерно на всей числовой оси.

Решение. Для всех $x \in \mathbb{R}$ $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, а числовой ряд с n -м членом $\frac{1}{n^2}$ сходится. Значит ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ по теореме Вейерштрасса равномерно сходится на всей числовой оси.

1.2.2. Интегрирование и дифференцирование функциональных рядов

Теорема 1.14. (Почленное интегрирование функциональных рядов).

Если функции $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) непрерывны на отрезке $[a, b]$ и составленный из них ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на этом отрезке и имеет суммой функцию $S(x)$, то ряд составленный из интегралов от его членов на отрезке $[\alpha; \beta]$, также сходится и имеет суммой функцию $\int_{\alpha}^{\beta} S(x) dx$, где $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$.

Доказательство. В силу равномерной сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функция $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и

поэтому интегрируема на любом отрезке с концами в точках $\alpha \in [a; b]$ и $\beta \in [a; b]$. Функцию $S(x)$ можно представить в виде

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x),$$

где $r_n(x)$ — остаток, S_n — частичная сумма.

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + r_n(x), \text{ тогда}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} u_1(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} u_2(x) dx + \dots + \int_{\alpha}^{\beta} u_n(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} r_n(x) dx. \quad (1.36)$$

(интеграл от суммы конечного числа слагаемых равен сумме интегралов от этих слагаемых). Таким образом, сумма n членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} u_n(x) dx$

отличается от интеграла $\int_{\alpha}^{\beta} S(x) dx$ дополнительным членом $\int_{\alpha}^{\beta} r_n(x) dx$. Для

доказательства теоремы нужно лишь установить, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} r_n(x) dx = 0$. В силу

равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ для $\forall \varepsilon > 0$ найдется номер N такой,

что при $n > N$ $|r_n(x)| < \varepsilon$ сразу для всех x в рассматриваемом промежутке.

Поэтому

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} r_n(x) dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |r_n(x)| dx < \int_{\alpha}^{\beta} \varepsilon dx = \varepsilon(\beta - \alpha) \leq \varepsilon(b - a).$$

Но так как при $n \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} r_n(x) dx \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon(b - a) = 0$ и из

(1.36) получаем

$$\int_{\alpha}^{\beta} r_n(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} S(x) dx - \left(\int_{\alpha}^{\beta} u_1(x) dx + \dots + \int_{\alpha}^{\beta} u_n(x) dx \right). \quad (1.37)$$

В (1.37) перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\alpha}^{\beta} S(x) dx - \left(\int_{\alpha}^{\beta} u_1(x) dx + \dots + \int_{\alpha}^{\beta} u_n(x) dx \right) \right) = 0. \quad (1.38)$$

В силу (1.37)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\alpha}^{\beta} u_1(x) dx + \dots + \int_{\alpha}^{\beta} u_n(x) dx \right) = \int_{\alpha}^{\beta} S(x) dx. \quad (1.39)$$

Сумма, стоящая слева в равенстве (1.39), есть частичная сумма ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} u_n(x) dx$, она имеет конечный предел. Следовательно, этот ряд сходится

и его сумма равна $\int_{\alpha}^{\beta} S(x) dx$. Тем самым доказаны сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} u_n(x) dx$ и равенство его суммы интегралу $\int_{\alpha}^{\beta} S(x) dx$.

ПРИМЕР 1.14. Почленно проинтегрировать функциональный ряд $1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n \cdot x^{2n} + \dots$ и найти его сумму.

Этот ряд сходится равномерно при $|x| < 1$, так как при $|x| < 1$ ряд является рядом геометрической прогрессии со знаменателем меньше 1, сумма его равна

$$S(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Проинтегрируем данный ряд от 0 до x , где $x < 1$, в результате чего получим ряд $\int_0^x 1 \cdot dx - \int_0^x x^2 dx + \int_0^x x^4 dx - \dots + \int_0^x (-1)^n \cdot x^{2n} dx + \dots =$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots. \text{Полученный ряд сходится равномерно}$$

при $|x| < 1$ в силу мажорируемости его числовым сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$.

Тогда сумма полученного ряда $\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^x = \arctg x$.

Теорема 1.15. (Почленное дифференцирование функциональных рядов).

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на отрезке $[a; b]$ и имеет сумму $S(x)$, а его члены имеют на этом отрезке непрерывные производные, причем ряд, составленный из этих производных $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$, сходится равномерно на $[a; b]$ и

имеет сумму $\sigma(x)$. Тогда функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на отрезке

$[a; b]$ равномерно и производная его суммы равна сумме ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$, то есть $S'(x) = \sigma(x)$.

Доказательство. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a; b]$, то на основании теоремы (1.14) его можно почленно интегрировать от α до x , где $a \leq \alpha \leq x \leq \beta$.

$$\int_{\alpha}^x \sigma(x) dx = \int_{\alpha}^x u_1'(x) dx + \int_{\alpha}^x u_2'(x) dx + \dots + \int_{\alpha}^x u_n'(x) dx + \dots \text{ или}$$

$\int_{\alpha}^x \sigma(x) dx = (u_1(x) - u_1(\alpha)) + (u_2(x) - u_2(\alpha)) + \dots + (u_n(x) - u_n(\alpha)) + \dots$ Но, по условию теоремы, ряд $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ сходится и его сумма равна $S(x)$; сходится по условию и ряд $u_1(\alpha) + u_2(\alpha) + \dots + u_n(\alpha) + \dots$, его сумма равна $S(\alpha)$, тогда сходится и сумма рядов $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x) - u_n(\alpha))$. Поэтому

$$\int_{\alpha}^x \sigma(x) dx = S(x) - S(\alpha).$$

Дифференцируя по x обе части равенства, получим

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\alpha}^x \sigma(x) dx \right) = (S(x) - S(\alpha))' \Rightarrow \sigma(x) = S'(x).$$

Остается доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ при выполнении условий теоремы равномерно сходится на отрезке $[a; b]$. Из равенства

$$\int_{\alpha}^x \sigma(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^x u_n'(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x) - u_n(\alpha)) \quad \text{в силу доказанной}$$

сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x) - u_n(\alpha))$ и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\alpha)$ следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^x u_n'(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\alpha), \text{ но ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^x u_n'(x) dx \text{ равномерно}$$

сходится на отрезке $[a; b]$ на основании теоремы (1.14), а $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\alpha) -$

сходящийся числовой ряд и их сумма, то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, равномерно

сходится на отрезке $[a; b]$. Таким образом, при выполнении условий теоремы

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на отрезке $[a; b]$ и производная от суммы

ряда равна сумме производных от членов ряда.

ПРИМЕР 1.15. Почленно дифференцировать функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}.$$

Ряд составленный из производных, то есть полученный из данного дифференцированием его членов, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, равномерно сходится на всей числовой оси, так как он мажорируется от $-\infty$ до $+\infty$ числовым сходящимся

рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, а $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$. Данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ удовлетворяют условиям теоремы (1.15). Следовательно, по доказанной теореме $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, то есть $S'(x)$ равна $\sigma(x)$, где $S(x)$ – сумма исходного ряда.

1.2.3. Степенные ряды

Чаще всего на практике используют функциональные ряды двух типов: степенные и тригонометрические.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.18. *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (1.40)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ – числа, называемые коэффициентами ряда.

Областью сходимости степенного ряда всегда является некоторый интервал, который, в частности, может вырождаться в точку. Для того, чтобы убедиться в этом, докажем очень важную для всей теории степенных рядов теорему.

Теорема 1.16. (теорема Абеля)

1. Если степенной ряд сходится при некотором значении x_0 , не равном нулю, то он абсолютно сходится при всяком значении x , для которого $|x| < |x_0|$; если ряд расходится при некотором значении x'_0 , то он расходится при всяком x , для которого $|x| > |x'_0|$.

Доказательство. По условию теоремы числовой ряд

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n + \dots \quad (1.41)$$

сходится, значит, при $n \rightarrow \infty$ $a_n \cdot x_0^n \rightarrow 0$, а это значит, что $\exists M > 0$, что для любого n будет выполняться неравенство $|a_n \cdot x_0^n| < M$ (члены ряда ограничены). Запишем ряд 1.41 в виде

$$a_0 + a_1 x_0 \left(\frac{x}{x_0} \right) + a_2 x_0^2 \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 + \dots + a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0} \right)^n + \dots \quad (1.42)$$

и рассмотрим ряд из абсолютных величин его членов

$$|a_0| + |a_1 x_0| \left| \frac{x}{x_0} \right| + |a_2 x_0^2| \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots + |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots \quad (1.43)$$

Члены ряда (1.43) меньше соответствующих членов ряда

$$M + M \left| \frac{x}{x_0} \right| + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots \quad (1.44)$$

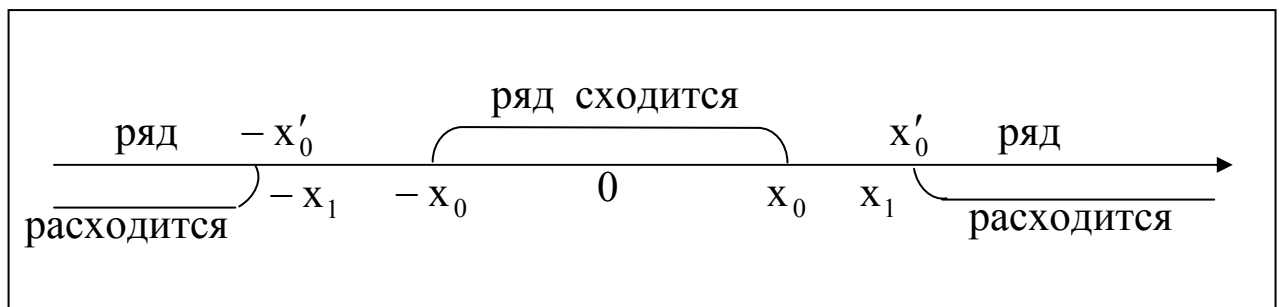
Ряд (1.44) при $|x| < |x_0|$ представляет геометрическую прогрессию со знаменателем $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ и, следовательно, сходится. По признаку сравнения числовых рядов из сходимости ряда (1.44) следует сходимость ряда (1.43).

Из сходимости ряда (1.43) следует абсолютная сходимость ряда (1.42), а следовательно, и ряда (1.41). Значит, при $|x| < |x_0|$ ряд (1.40) сходится абсолютно.

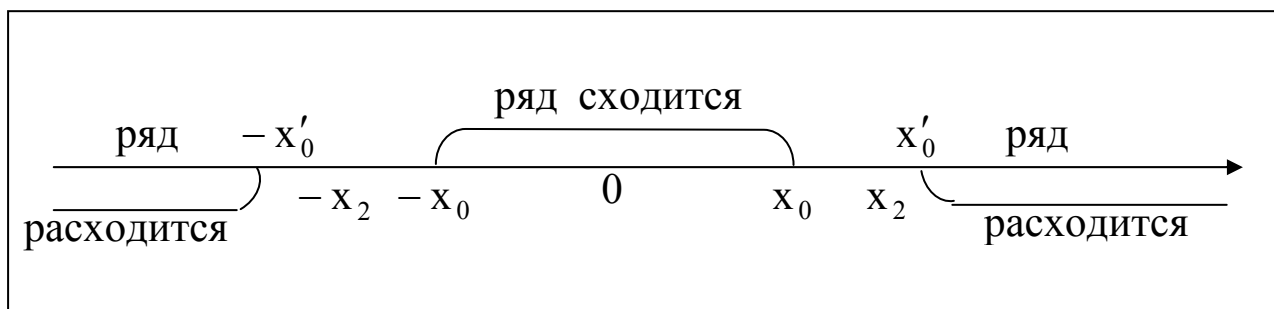
2. Докажем вторую часть теоремы. Пусть в некоторой точке x'_0 ряд (1.40) расходится. Тогда он будет расходиться и в любой точке x , удовлетворяющей условию $|x| > |x'_0|$. Действительно, если бы в какой-либо точке x , удовлетворяющей этому условию, ряд сходил, то в силу доказанного он должен был бы сходиться и в точке x'_0 , так как $|x'_0| < |x|$, что противоречит условию. Следовательно, ряд расходится и в точке x . Таким образом, теорема полностью доказана.

Теорема Абеля приводит нас к следующему утверждению.

Существует такое неотрицательное R , что при $-R < x < R$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится, а при $x > R$ или $x < -R$ – расходится (поведение ряда при $x = \pm R$ подлежит дальнейшему анализу). На самом деле: пусть для всех $|x| < |x_0|$ степенной ряд сходится, а при $|x| > |x'_0|$ – расходится.

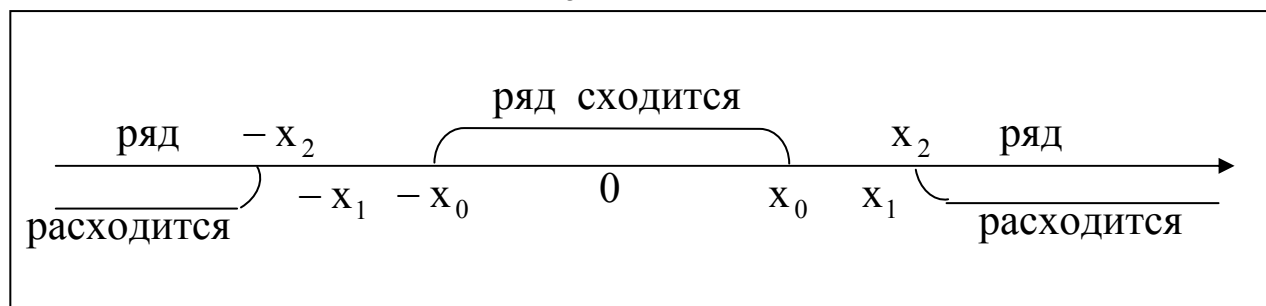


Выберем $|x_0| < x_1 < |x'_0|$, если при $x = x_1$ степенной ряд сходится, тогда он будет сходиться при всех $|x| < |x_1|$ (по теореме Абеля).



Выберем $x_1 < x_2 < x'_0$, пусть при $x = x_2$ ряд расходится, тогда по теореме Абеля ряд будет расходиться при всех $|x| > x_2$.

Выбирая последовательно $x_3, x_4, \dots, x_n$, получим такое $R > 0$, что при



всех $|x| < R$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ будет сходиться, а при $|x| > R$ – расходиться.

Таким образом, имеет место следующая теорема о строении области сходимости степенного ряда.

Теорема 1.17. Областью сходимости степенного ряда вида (1.40) является интервал с центром в начале координат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.19. *Интервалом сходимости степенного ряда* называется такой интервал от $-R$ до $+R$, что для всякой точки x , лежащей внутри интервала, ряд сходится и притом абсолютно, а для точек x , лежащих вне его, ряд расходится.

Число R называют радиусом сходимости степенного ряда



1.2.4. Определение радиуса сходимости степенного ряда

Дан ряд $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$$|a_0| + |a_1| |x| + |a_2| |x|^2 + \dots + |a_n| |x|^n + \dots \quad (1.45)$$

Для определения сходимости ряда (1.45) применим признак Даламбера, то есть определим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} \cdot x^{n+1}}{a_n \cdot x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| \cdot L$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L.$$

Тогда по признаку Даламбера ряд (1.45) сходится, если $|x| \cdot L < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{L}$ ($L > 0$ так как ряд 1.45 с положительными членами), и расходится, если $|x| \cdot L > 1 \Rightarrow |x| > \frac{1}{L}$. Итак, из сходимости ряда (1.45) при $|x| < \frac{1}{L}$ следует

абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$. Из вышеизложенного интервал сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ будет иметь вид $\left(-\frac{1}{L}; \frac{1}{L}\right)$. Значит,

$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \quad (1.46)$$

Аналогично для определения радиуса сходимости можно пользоваться признаком Коши

$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \quad (1.47)$$

1.2.5. Схема определения интервала сходимости степенного ряда

Дан степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$. Требуется определить его интервал сходимости. Для решения поставленной задачи поступаем следующим образом:

а) определяем радиус сходимости степенного ряда по формулам (1.46) и (1.47);

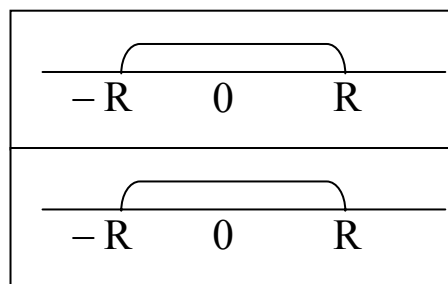
б) записываем интервал сходимости $(-R; R)$;

в) проверяем поведение ряда на концах интервала ($x = \pm R$). В ряд вместо x подставляем $x = R$ и $x = -R$, в результате чего получаем знакоположительные или знакочередующиеся числовые ряды, к которым применяем соответствующие признаки сходимости;

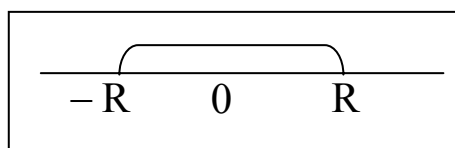
г) если при $x = \pm R$ числовые ряды сходятся, то данный степенной ряд сходится на отрезке $[-R; R]$.

Если при $x = \pm R$ числовые ряды расходятся, то данный степенной ряд сходится на интервале $(-R; R)$.

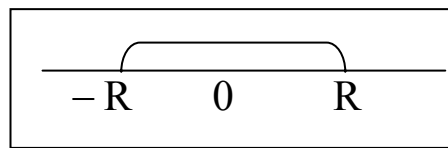
Если при $x = R$ числовой ряд сходится, а при $x = -R$ расходится или, наоборот, при $x = R$ расходится, а при $x = -R$ сходится, то данный степенной ряд сходится на полуинтервале $(-R; R]$ или $[-R; R)$



$(-R; R]$



$[-R; R)$



ПРИМЕР 1.16. Определить интервал сходимости ряда

$$\frac{2x}{1} - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{(2x)^n}{n} + \dots$$

Решение. Определим радиус сходимости по формуле (1.46), для чего запишем a_n и a_{n+1} .

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n}{n} \quad \text{и} \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2} \cdot 2^{n+1}}{n+1}, \quad \text{тогда}$$

$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n (n+1)}{n \cdot 2^{n+1}} \right| = \frac{1}{2}$. Так как $R = \frac{1}{2}$, то интервал сходимости будет иметь вид $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Проверим поведение ряда на концах интервала.

Пусть $x = -\frac{1}{2}$, тогда получим числовой ряд $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n} - \dots$

Полученный числовой знакпостоянный ряд является гармоническим рядом и расходится. При $x = \frac{1}{2}$ получаем числовой знакочередующийся ряд

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots - (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$, который сходится, так как для него

выполняются условия теоремы Лейбница, а именно: члены ряда убывают по абсолютной величине, то есть $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Следовательно, данный степенной ряд сходится на полуинтервале $(-1/2.; 1/2]$.

Отметим, что если $R = 0$, то интервал $(-R; R)$ сходимости вырождается

в точку $x = 0$, если $R = \infty$, то интервал сходимости $(-\infty; \infty)$.

ПРИМЕР 1.17. Определить интервал сходимости ряда

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Решение. Вычислим радиус сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!(n+1)}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(n+1)| = \infty. \text{ Таким}$$

образом, интервал сходимости этого ряда состоит из всех вещественных чисел $x \in (-\infty; \infty)$.

ПРИМЕР 1.18. Определить интервал сходимости ряда $x + x^2 \cdot 2! + \dots + x^n \cdot n! + \dots$

Решение. Вычислим радиус сходимости $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = 0. \text{ Итак, } R = 0 - \text{ интервал сходимости вырождается в точку, то}$$

есть данный ряд сходится лишь при $x = 0$.

1.2.6. Характер сходимости степенного ряда

Теорема 1.18. Степенной ряд сходится на любом отрезке, лежащем внутри интервала сходимости.

Доказательство. Пусть отрезок $[a; b]$ лежит внутри интервала сходимости $(-R; R)$ ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Тогда найдется такое число r ($0 < r < R$), что отрезок $[-r; r]$ будет содержать отрезок $[a; b]$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ абсолютно сходится при $x = r$, то есть сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. Но для всех x отрезка $[-r; r]$ выполняется неравенство $|a_n \cdot x^n| \leq |a_n| \cdot r^n$, которое означает, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ на отрезке $[-r; r]$ мажорируется числовым сходящимся рядом.

Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равномерно сходится на этом отрезке, в частности, он равномерно сходится и на отрезке $[a; b]$, что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы вытекает следующее следствие.

Следствие 1.2. Сумма степенного ряда является непрерывной функцией на интервале сходимости.

1.2.7. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов

Теорема 1.19. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ в промежутке $[0; x]$, где $|x| < R$,

всегда можно интегрировать почленно, то есть

$$\int_0^x S(x) dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{n} \cdot x^n + \dots,$$

где $S(x)$ – сумма ряда.

Доказательство. Выберем число r между $|x|$ и R . Тогда в силу теоремы

(1.18) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно на отрезке $[-r; r]$, а по теореме о

почленном интегрировании функциональных рядов (1.36) на отрезке $[0; x]$ ряд можно почленно интегрировать.

Теорема 1.20. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ внутри его интервала

сходимости можно дифференцировать почленно, то есть

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + \dots + n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + \dots,$$

где $S(x)$ – сумма степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Доказательство. Для любого $x = x_0$, $-R < x_0 < R$ можно выбрать два числа r_0 и r так, чтобы $|x_0| < r_0 < r < R$. Ввиду сходимости ряда

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ (теорема 1.18) его общий член ограничен:

$$|a_n| r^n \leq L \quad (n = 1, 2, \dots, L = \text{const}).$$

Тогда при $|x| \leq r_0$

$$n \cdot |a_n \cdot x^{n-1}| \leq n |a_n| \cdot r_0^{n-1} = n |a_n| \cdot r^{n-1} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{n-1} \leq L_0 \cdot n \left(\frac{r_0}{r} \right)^{n-1},$$

где $L_0 = \frac{L}{r} = \text{const}$.

Члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$ для указанных значений x не превосходят

соответствующих членов числового ряда:

$$L_0 + L_0 \cdot 2 \left(\frac{r_0}{r} \right) + L_0 \cdot 3 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 + \dots + L_0 \cdot n \left(\frac{r_0}{r} \right)^{n-1} + \dots \quad (1.48)$$

Принимая во внимание, что $\frac{r_0}{r} < 1$, ряд (1.48) по признаку Даламбера сходится.

Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$ на отрезке $[-r; r]$ сходится равномерно, а по теореме о почленном дифференцировании функциональных рядов ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можно почленно дифференцировать на отрезке $[-r; r]$ и, в частности, при $x = x_0$.

Следствие 1.3. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ в интервале сходимости можно почленно дифференцировать любое число раз, причем ряды, полученные в результате дифференцирования, сходятся в том же интервале.

Замечание 1.7. В теоремах (1.19) и (1.20) показано, что ряды $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$ сходятся на интервале $(-R; R)$, следовательно, их радиусы сходимости не меньше R . Но, в свою очередь ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ получается почленным дифференцированием ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ и почленным интегрированием $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$, так что R не может быть меньше упомянутых радиусов R . Из сказанного вытекает, что радиусы сходимости рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$ равны между собой.

1.2.8. Ряды по степеням $(x - x_0)$

Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots \quad (1.49)$$

называется *степенным рядом по степеням разности $(x - x_0)$* .

Нетрудно заметить, что при $x_0 = 0$ из ряда (1.49) получается известный степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ является частным случаем ряда (1.49).

Для определения интервала сходимости ряда (1.49) сделаем в нем замену: $x - x_0 = X$. Тогда ряд (1.49) примет вид

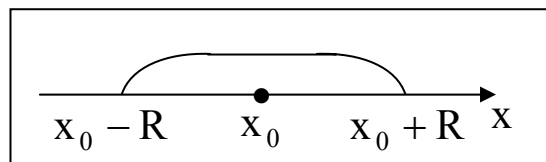
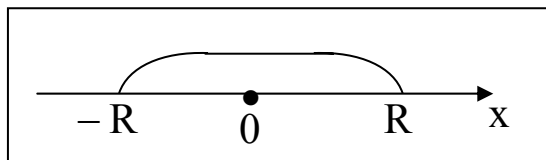
$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n + \dots \quad (1.50)$$

Ряд (1.50) разложен по степеням X . Пусть интервал сходимости ряда (1.50) $-R < X < R$.

Отсюда следует, что ряд (1.50) будет сходиться при значениях X , удовлетворяющих неравенству

$$-R < x - x_0 < R \quad \text{или}$$

$$x_0 - R < x < x_0 + R, \text{ и расходится при } |x - x_0| > R.$$



Следовательно, интервалом сходимости данного ряда будет интервал $x_0 - R < x < x_0 + R$ с центром в точке x_0 .

Замечание 1.8. Все сказанное о степенных рядах по степеням X остается справедливым и для степенных рядов по степеням разности $x - x_0$ в соответствующих интервалах сходимости.

ПРИМЕР 1.19. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^n}{n^2}$.

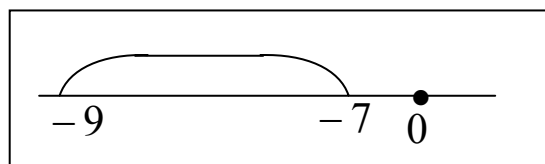
Решение. Найдем радиус сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2}{n^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{n^2} \right| = 1.$$

$$|x+8| < 1 \Rightarrow -1 < x+8 < 1 \Rightarrow -9 < x < -7.$$

При $x = -7$ получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, который сходится, так как является обобщенным гармоническим рядом с $p = 2 > 1$.

При $x = -9$ получим числовой знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, для



которого выполняются условия теоремы Лейбница, и он сходится. Следовательно, областью сходимости данного ряда является отрезок $[-9; -7]$.

1.2.9. Разложение функций в степенные ряды

1.2.9.1. Ряды Тейлора и Маклорена

Если функция $f(x)$ имеет все производные до $(n+1)$ -го порядка включительно, в окрестности точки $x = x_0$, то можно написать формулу Тейлора для любого значения $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ & \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x), \end{aligned} \quad (1.51)$$

где $r_n(x)$ – остаточный член, который вычисляется по формуле

$$r_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)) \quad 0 < \theta < 1.$$

Если $f(x)$ имеет производную любого порядка, то n может быть сколь угодно большим. Допустим, что в рассматриваемой окрестности $r_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Тогда переходя в (1.51) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим справа ряд, который называется *рядом Тейлора*

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ & \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots \end{aligned} \quad (1.52)$$

Равенство (1.52) справедливо лишь в том случае, если $r_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то есть (1.52) сходится, его сумма равна $f(x)$.

Докажем, что это действительно так:

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x), \quad (1.53)$$

где

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

В (1.53) перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (P_n(x) + r_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x), \text{ так как } \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0. \end{aligned}$$

Но $P_n(x)$ есть n -я частичная сумма ряда (1.52), ее предел равен сумме ряда $f(x)$. Следовательно, равенство (1.52) справедливо, то есть

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots$$

Итак, ряд Тейлора представляет данную функцию $f(x)$ только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) \neq 0$, то ряд не представляет данной функции, хотя может сходиться (к другой функции).

На практике чаще всего приходится иметь дело со случаем, когда $x_0 = 0$ и функция $f(x)$ разлагается в ряд непосредственно по степеням x . При $x_0 = 0$ получается ряд, который называется *рядом Маклорена*; он имеет вид

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots \quad (1.54)$$

Укажем теперь одно достаточное условие разложимости в степенной ряд.

Теорема 1.21. Пусть функция и все ее производные ограничены в совокупности на интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$, то есть существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ и всех $n = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство

$$|f^{(n)}(x)| \leq M. \quad (1.55)$$

Тогда на интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ функция $f(x)$ раскладывается в ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n, \quad |x-x_0| < h.$$

Доказательство. Для того, чтобы доказать, что функция $f(x)$ раскладывается в ряд Тейлора, достаточно убедиться, что предел остаточного члена в формуле Тейлора стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Возьмем $r_n(x)$ в форме Лагранжа, то есть

$$r_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))$$

или

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon_1)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \quad (1.56)$$

где $\varepsilon = x_0 + \theta(x-x_0)$, $0 < \theta < 1$.

Из неравенства (1.55) следует, что

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq M \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (1.57)$$

где $|\varepsilon - x_0| < |x - x_0| < h$.

Переходя в неравенстве (1.57) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |r_n(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} = M \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} = 0. \quad (1.58)$$

Равенство нулю предела, стоящего в правой части (1.58), следует из того, что выражение $\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$ является общим членом сходящегося ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$.

Но в таком случае и $r_n(x)$ имеет пределом 0, что и доказывает наше утверждение.

1.2.9.2. Разложение в ряд Маклорена функций e^x , $\sin x$, $\cos x$

Так как $f(x) = e^x$, то

$$f'(x) = e^x$$

$$f''(x) = e^x$$

.....

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

Для любого фиксированного $h > 0$ при всех $x \in (-h; h)$ и всех $n = 0, 1, 2, \dots$ $|f^{(n)}(x)| < e^h$ или $0 < f^{(n)} < e^h$. Таким образом, условие теоремы (2.9.1) для $f(x) = e^x$ выполнено, поэтому функция e^x раскладывается в ряд Тейлора на любом конечном интервале, а значит, и на всей действительной оси. Если $x_0 = 0$, то $f^{(n)}(0) = 1$; получим разложение функции в ряд Маклорена, который имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (1.59)$$

Полученный ряд можно использовать для разложения в ряд Маклорена сложных показательных функций.

ПРИМЕР 1.20. Разложить функцию $f(x) = e^{-x}$ в ряд Маклорена. Для решения поставленной задачи воспользуемся выражением (1.59), заменив x на t :

$$e^x = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots \quad (1.60)$$

Подставим в (1.60) $t = -x$; получим искомый ряд

$$e^x = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Ряд (1.60) сходится абсолютно при любых t , а значит, и при любых x (так как $t = -x$).

Разложить в ряды Маклорена тригонометрических функций $\cos x$ и $\sin x$.

Пусть $f(x) = \sin x$. Тогда

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = \sin x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \dots,$$

поэтому $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ для всех действительных x . Согласно теореме (1.21)

функция $\sin x$ раскладывается в степенной ряд по всей действительной оси.

Полагая $x = 0$, найдем

$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{IV}(0) = 0, \dots$ Следовательно,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

или

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}. \quad (1.61)$$

Ряд (1.61) есть разложение $f(x) = \sin x$ в ряд Маклорена.

Разложение $\cos x$ в ряд Маклорена можно получить, повторяя предыдущие рассуждения; так как ряд (1.61) сходится на всей действительной оси и его можно почленно дифференцировать, в результате чего получим разложение $\cos x$ в степенной ряд

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots$$

или

$$\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-2}}{(2n-2)!}. \quad (1.62)$$

Отметим, что $\sin x$ (нечетная функция) разлагается по нечетным степеням x , а $\cos x$ (четная функция) – по четным степеням x .

1.2.10. Биномиальный ряд

Разложим в ряд Маклорена функцию

$$f(x) = (1+x)^m, \quad (1.63)$$

где m – произвольное постоянное число. К разложению данной функции в ряд подойдем иначе в силу трудности оценки остаточного члена.

Заметим, что функция $f(x) = (1+x)^m$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1+x) f'(x) = m f(x) \quad (1.64)$$

и условию $f(0) = 1$. Найдем степенной ряд, сумма которого $S(x)$ удовлетворяет уравнению (1.64) и условию $S(0) = 1$.

$$S(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1.65)$$

Подставим (1.65) в (1.64), получим

$$(1+x) \cdot (a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots) = m(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots)$$

или

$$\begin{aligned} a_1 + x(a_1 + 2a_2) + x^2(2a_2 + 3a_3) + \dots + (n a_n + (n+1)a_{n+1})x^n + \dots = \\ = m + m a_1 x + m a_2 x^2 + \dots + m a_n x^n + \dots \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим $a_1 = m$; $a_1 + 2a_2 = m a_1$; ...; $n a_n + (n+1)a_{n+1} = m a_n$

Отсюда для коэффициентов ряда получаем выражение

$$\begin{aligned} a_0 = 1; \quad a_1 = m; \quad a_2 = \frac{m(m-1)}{2}; \quad a_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}; \\ a_n = \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Полученные коэффициенты (1.66), называются *биномиальными*, подставим их в (1.65), получим

$$\begin{aligned} S(x) = 1 + m \cdot x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots + \\ + \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} x^n + \dots \end{aligned} \quad (1.67)$$

Полученный ряд (1.67) называется *биномиальным рядом*.

Если m – целое положительное число, то, начиная с члена, содержащего x^{m+1} , все коэффициенты равны нулю, и ряд превращается в многочлен. При m дробном или m целом отрицательном имеем ряд.

Определим радиус сходимости ряда (1.67):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)(n+1)!}{n!m(m-1)\dots(m-n+2)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{m-n+2} \right| = 1.$$

Следовательно, в интервале $(-1;1)$ ряд сходится и представляет функцию $S(x)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению (1.64) и начальному условию $S(0) = 1$.

Так как дифференциальному уравнению (1.64) и условию $S(0) = 1$ удовлетворяет единственная функция, то, следовательно, сумма ряда (1.67) тождественно равна функции $(1+x)^m$, мы получаем разложение

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots \quad (1.68)$$

Частные случаи биномиального ряда.

При $m = -1$ получаем

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n. \quad (1.69)$$

При $m = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots \quad (1.70)$$

При $m = -\frac{1}{2}$ имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \dots \quad (1.71)$$

Применим биномиальный ряд к разложению других функций в ряд Маклорена.

Пусть дана функция $f(x) = \arcsin x$. Требуется разложить ее в ряд Маклорена. Для решения поставленной задачи воспользуемся разложением (1.71), заменив в нем x на $(-x^2)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots \\ \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}x^{2n} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}x^{2n}. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Ряд (1.72) можно почленно интегрировать при $|x| < 1$ на основании теоремы об интегрировании степенных рядов, тогда

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad (1.73)$$

Ряд (1.73) сходится в интервале $(-1;1)$. Отметим без доказательства, что данный ряд сходится и при $x = \pm 1$.

Пусть дана функция $y = \ln(x+1)$. Требуется разложить ее в ряд Маклорена. Для решения поставленной задачи проинтегрируем ряд (1.69) от 0 до x , где $|x| < 1$. На основании теоремы об интегрировании функциональных рядов получим

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \quad (1.74)$$

Ряд (1.74) сходится в интервале $(-1;1)$, причем он сходится и при $x = 1$ (без доказательства).

Если в (1.74) заменить x на $(-x)$, то получим разложение функции $\ln(1-x)$ в степенной ряд, то есть

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots, \quad (1.75)$$

где $-1 < x < 1$.

1.2.11. Вычисление значения функций при помощи рядов

Разложение функции в ряды Маклорена позволяет во многих случаях вычислить с большой точностью значения этих функций.

ПРИМЕР 1.21. Вычислить с точностью до пяти знаков $\sqrt[10]{e} = e^{\frac{1}{10}}$.

Решение. Воспользуемся разложением (1.59), положив $x = 0,1$.

$e^{\frac{1}{10}} = 1 + \frac{0,1}{1!} + \frac{0,01}{2!} + \frac{0,001}{3!} + \dots$. Значит, $e^{0,1}$ близко к единице. Остаточный

член r_3 имеет вид $r_3(x) = \frac{f^{(3)}(\varepsilon)}{4!} x^4 = \frac{e^\varepsilon \cdot x^4}{4!} = \frac{e^\varepsilon \cdot 0,0001}{4!} \approx 4 \cdot 10^{-5} e^\varepsilon$,

где $0 < \varepsilon < 1$, так что e^ε близко к единице. Поэтому ненаписанные члены в разложении $e^{0,1}$ не повлияют на первые пять знаков после запятой, их можно отбросить. Тогда $e^{0,1} \approx 1 + \frac{0,1}{1!} + \frac{0,01}{2!} + \frac{0,001}{3!} = 1,10517$.

Иногда при вычислении значений функций удобно пользоваться почленным дифференцированием или интегрированием рядов.

ПРИМЕР 1.22. Вычислить $\arctg 0,1$.

Решение. В разложении (1.69), заменив x на x^2 , получим

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \quad (1.76)$$

Ряд (1.76) сходится равномерно при $|x| < 1$, поэтому его можно почленно интегрировать. Выполнение этого интегрирования от 0 до $x < 1$ нам дает

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (1.77)$$

В частности, при $x = 0,1$ имеем

$$\arctg 0,1 = 0,1 - \frac{(0,1)^3}{3} + \frac{(0,1)^5}{5} - \dots \quad (1.78)$$

Полученный ряд знакочередующийся. Поэтому его остаток не превосходит по абсолютной величине первого из отброшенных членов. Сохраняя в (1.78) два первых члена, получим, что $\arctg 0,1 = 0,1 - \frac{(0,1)^3}{3} = 0,09967$ с пятью верными знаками.

При помощи биномиального ряда можно вычислить значения корней из чисел, а также значений различных функций.

ПРИМЕР 1.23. Вычислить $\sqrt[5]{35}$ в следующем виде:

$$\sqrt[5]{35} = \sqrt[5]{32+3} = \sqrt[5]{32\left(1+\frac{3}{32}\right)} = \sqrt[5]{2^5\left(1+\frac{3}{32}\right)} = 2\left(1+\frac{3}{32}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Отсюда $x = \frac{3}{32}$, а $m = \frac{1}{5}$. Воспользуемся разложением в ряд, то есть

разложением (1.68), тогда
$$2\left(1+\frac{3}{32}\right)^{\frac{1}{5}} = 2\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{32}-\frac{4}{2!5^2}\cdot\frac{3^2}{32^2}+\dots\right).$$

Получили числовой знакочередующийся ряд. По условию $\sqrt[5]{35}$ нужно вычислить с точностью 0,0001, поэтому все члены, которые по абсолютной величине меньше 0,0001, можно отбросить. Проверим четвертый член

$$\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{9}{5}\right)\cdot\frac{3^3}{(32)^3\cdot 3!} = \frac{4\cdot 9\cdot 3^3}{3!5^3\cdot 32^3} = 4\cdot 10^{-6} < 0,0001.$$

Значит,
$$\sqrt[5]{35} \approx 2\cdot\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{32}-\frac{4}{2!5^2}\cdot\frac{3^2}{32^2}\right) = 2+\frac{3}{80}-\frac{9}{6400} = 2,0361.$$

1.2.12. Вычисление определенных интегралов с помощью рядов

Вычислениями значений функций приложения теории рядов далеко не исчерпываются. При помощи рядов можно вычислять определенные интегралы. К вычислениям определенных интегралов с помощью рядов прибегают в том случае, когда определенные интегралы не выражаются в конечном виде через элементарные функции.

ПРИМЕР 1.24. Вычислить интеграл $\int_0^a e^{-x^2} dx$.

Среди элементарных функций нет такой, производная которой равнялась бы e^{-x^2} . Вычислим этот интеграл разложением подынтегральной функции в степенной ряд. Заменяя в формуле (1.59) t на $-x^2$, получим

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots; \text{ поэтому} \\ \int_0^a e^{-x^2} dx &= \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots \right) dx = \\ &= a - \frac{a^3}{3} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{a^5}{5} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{a^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \cdot \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)} + \dots \end{aligned} \quad (1.79)$$

Подставляя в полученный ряд вместо a те или иные значения, можно вычислить интеграл при любом верхнем пределе.

Пусть требуется вычислить этот интеграл с тремя верными десятичными знаками, когда верхний предел интегрирования $a = 1$.

Полагая в (1.79) $a = 1$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{9} - \dots \\ &\dots + \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{(2n+1)} + \dots \end{aligned} \quad (1.80)$$

Поскольку вычисление следует производить с тремя верными десятичными знаками, то погрешность не должна превышать 0,0005. В правой части равенства (1.80) стоит знакочередующийся ряд. Поэтому в разложении необходимо сохранить столько членов, чтобы первый из отброшенных был меньше 0,0005. Вычислим члены нашего ряда, начиная с четвертого:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{7} &= 0,02380\dots; & \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{9} &= 0,00462\dots; \\ \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{11} &= 0,00075\dots; & \frac{1}{6!} \cdot \frac{1}{13} &= 0,00004\dots \end{aligned}$$

Значит, если мы сохраним в ряде только первые шесть членов, то погрешность при этом будет по абсолютной величине меньше первого

отброшенного, то есть седьмого (меньше, чем 0,00004). Окончательно получаем $\int_0^1 e^{-x^2} dx = 0,7467$.

1.2.13. Интегрирование дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n – го порядка вида

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \dots + f_{n-1}(x)y' + f_n(x)y = F(x). \quad (1.81)$$

Теорема 1.22. Если коэффициенты и правая часть дифференциального уравнения (1.81) разлагаются в степенные ряды по степеням $(x - x_0)$, сходящиеся в некоторой окрестности $x = x_0$, то решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

($y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ – произвольно заданное число), разлагается в степенной ряд по степеням $(x - x_0)$, сходящийся, по крайней мере, в меньшем из интервалов сходимости рядов для коэффициентов и правой части дифференциального уравнения.

Практически решение дифференциального уравнения в виде степенного ряда можно получить двумя способами: сравнением коэффициентов и последовательным дифференцированием.

Способ сравнения коэффициентов заключается в следующем:

а) записываем решение в виде степенного ряда с неопределенными коэффициентами

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots; \quad (1.82)$$

б) из начальных условий определим значения коэффициентов

$$a_0, a_1, \dots, a_{n-1};$$

в) подставляем в дифференциальное уравнение вместо y и производных соответствующие степенные ряды, а также вместо коэффициентов и правой части $F(x)$ записываем их разложение в степенные ряды по степеням $x - x_0$ и производим действия над рядами;

г) приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях $(x - x_0)$, откуда находим неизвестные коэффициенты искомого ряда.

ПРИМЕР 1.25. Найти решение дифференциального уравнения $y'' - x y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Решение. Записываем решение в виде $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

Так как $x_0 = 0$, то из начальных условий определяем a_0, a_1 :

$$\begin{aligned} y(0) &= a_0 = 1, & a_0 &= 1 \\ y'(0) &= (a_1 + 2a_2 x + \dots)|_{x=0} = a_1 = 0, & a_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{От } y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots \quad (1.83)$$

находим y' и y'' и подставляем в данное дифференциальное уравнение:

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots,$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \dots,$$

$$2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \dots - a_0 x - a_1 x^2 - a_2 x^3 - a_3 x^4 - \dots = 0$$

или $2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \dots = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \dots$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим

$$2a_2 = 0 \quad a_2 = 0$$

$$6a_3 = a_0 = 1 \quad a_3 = \frac{1}{6}$$

$$12a_4 = a_1 = 0 \quad a_4 = 0$$

$$4 \cdot 5a_5 = a_2 \quad a_5 = 0$$

$$5 \cdot 6 a_6 = a_3 \quad a_6 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}$$

.....

Найденные коэффициенты подставим в (1.83); получим ряд

$$y = 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} x^6 + \dots$$

Полученный ряд, как это следует из теоремы (1.81), сходится при всех значениях x .

Способ последовательного дифференцирования заключается в следующем:

а) искомое решение разлагают в ряд Тейлора по степеням $(x - x_0)$:

$$y = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \dots;$$

б) первые n коэффициентов $y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$ заданы начальными условиями. Подставляя в уравнение (1.81) $x = x_0$, определяем $y^{(n)}(x_0)$;

в) последовательно дифференцируя уравнение (1.81) и подставляя $x = x_0$, определяем коэффициент ряда искомого решения.

ПРИМЕР 1.26. Найти решение дифференциального уравнения $y'' - x y = 0$ при начальных условиях $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Решение. Запишем решение уравнения в виде

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

По условию $y(0)=1$, $y'(0)=0$. Подставим в дифференциальное уравнение $x=0$, получим $y''(0)=0$. Будем последовательно дифференцировать уравнение $y'' - xy' = 0$ и подставлять значение $x=0$, тогда

$$\begin{aligned} y''' &= y + xy' & y'''(0) &= 1 \\ y^{IV} &= y' + y' + xy'' = 2y' + xy'' & y^{IV}(0) &= 0 \\ y^V &= 2y'' + y'' + xy''' = 3y'' + xy''' & y^V(0) &= 0 \\ y^{VI} &= 4y''' + xy^{IV} & y^{VI}(0) &= 4 \end{aligned}$$

.....

Полученные значения производных подставим в выражение y :

$$y = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

Таким образом, если дифференциальное уравнение не сводится к квадратурам, то прибегают к приближенным методам интегрирования. Одним из таких методов является представление решения уравнения в виде ряда Тейлора.

1.3. РЯДЫ ФУРЬЕ

1.3.1. Постановка задачи

В науке и в технике часто приходится иметь дело с периодическими явлениями, то есть таким, которые воспроизводятся в прежнем виде через определенный промежуток T , называемый **периодом**. Величины, связанные с периодическими явлениями, представляют собой периодические функции от времени t , характеризующиеся равенством $\varphi(t+T) = \varphi(t)$.

Таковы, например, сила и напряжение переменного тока и т.д. Простейшей из периодических функций является синусоидальная величина

$$A \cdot \sin(\omega t + \alpha),$$

где ω есть частота, связанная с периодом T соотношением $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Из подобных простейших периодических функций могут быть составлены и более сложные, причем составляющие синусоидальные величины должны быть разных частот, ибо сложение синусоидальных величин одной и той же частоты не дает ничего нового, так как приводит к синусоидальной величине прежней частоты.

Если сложить несколько величин вида

$$\begin{aligned} y_0 &= A_0, \quad y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega t + \alpha_1), \\ y_2 &= \sin(2\omega t + \alpha_2) \cdot A_2, \dots, \end{aligned} \tag{1.84}$$

которые, если не считать постоянной A_i ($i = 1, 2, 3, \dots$), имеют частоты $\omega, 2\omega, \dots$ и периоды $T, \frac{1}{2}T, \dots$, то получится периодическая функция с периодом T , но уже существенно отличная от величин типа (1.84).

При изучении данного раздела в технических вузах чаще всего возникает обратная задача: можно ли данную периодическую функцию $\varphi(t)$ периода T представить в виде суммы конечного или хотя бы бесконечного множества синусоидальных величин вида (1.84). Оказывается, что по отношению к довольно широкому классу функций на этот вопрос можно дать утвердительный ответ, но только если привлечь именно всю бесконечную последовательность величин (1.84). Для функций этого класса имеет место разложение

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= A_0 + A_1 \cdot \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cdot \sin(2\omega t + \alpha_2) + \dots = \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(n\omega t + \alpha_n),\end{aligned}\quad (1.85)$$

где $A_0, A_1, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ — постоянные, имеющие особые значения для каждой функции, а частота ω дается формулой $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Если в разложении (1.85) за независимую переменную выбрать $x = \omega t = \frac{2\pi \cdot t}{T}$, то $\varphi(t)$ будет функцией от x :

$$f(x) = \varphi\left(\frac{x}{\omega}\right). \quad (1.86)$$

Функция (1.86) периодическая с периодом 2π и разложение (1.85) примет вид

$$\begin{aligned}f(x) &= A_0 + A_1 \cdot \sin(x + \alpha_1) + A_2 \cdot \sin(2x + \alpha_2) + \dots = \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(n \cdot x + \alpha_n).\end{aligned}\quad (1.87)$$

Разложив (1.87) синус суммы по формуле

$$\sin(n x + \alpha_n) = \sin n x \cdot \cos \alpha_n + \cos n x \cdot \sin \alpha_n$$

и положив

$A_0 = a_0$, $A_n \cdot \sin \alpha_n = a_n$, $A_n \cdot \cos \alpha_n = b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), мы придем к окончательной форме тригонометрического разложения:

$$\begin{aligned}f(x) &= a_0 + (a_1 \cdot \cos x + b_1 \cdot \sin x) + (a_2 \cdot \cos 2x + b_2 \cdot \sin 2x) + \dots \\ &\dots + = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos n x + b_n \cdot \sin n x).\end{aligned}\quad (1.88)$$

Таким образом, отправляясь от периодических, колебательных явлений и связанных с ними величин, мы пришли к разложению функции $f(x)$ в тригонометрический ряд (1.88).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.20. Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

$$\dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
(1.89)

называется **тригонометрическим рядом**.

Постоянные числа $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ называются коэффициентами ряда (1.89). В ряде (1.89) свободный член ряда a_0 для удобства записывается в виде $\frac{a_0}{2}$.

Если ряд (1.89) сходится, то его сумма есть периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π , так как $\sin nx, \cos nx$ являются периодическими функциями с периодом 2π .

Пусть дана периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π .

Постановка задачи: определить, при каких условиях для функции $f(x)$ можно найти тригонометрический ряд, сходящийся к данной функции?

Для решения поставленной задачи необходимо определить коэффициенты ряда так, чтобы ряд (1.89) был сходящимся и его сумма равнялась заданной периодической функции $f(x)$ периода 2π .

1.3.2. Определение коэффициентов ряда по методу Эйлера-Фурье

Для определения коэффициентов ряда (1.89) укажем прием, который во второй половине XVIII века был применен Эйлером и независимо от него в начале XIX века – Фурье.

Предположим, что функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi; \pi]$, то есть $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty$, имеет место разложение

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

и числовой ряд вида $\frac{1}{2}|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ сходится.

Тогда ряд (1.89) равномерно сходится и, следовательно, его можно интегрировать почленно в промежутке от $-\pi$ до π . Используем это для вычисления коэффициента a_0 .

Проинтегрируем обе части равенства (1.89) в пределах от $-\pi$ до π :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cdot \cos x dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \cdot \sin x dx \right). \quad (1.90)$$

Вычислим каждый интеграл отдельно:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \frac{a_0}{2} \cdot x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{a_0}{2} (\pi + \pi) = a_0 \cdot \pi. \quad (1.91)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cdot \cos n x dx &= a_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos n x dx = \frac{a_n}{n} \cdot \sin n x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{a_n}{n} (\sin n \pi + \sin n \pi) = 0. \end{aligned} \quad (1.92)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} b_n \cdot \sin n x dx &= b_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin n x dx = -\frac{b_n}{n} \cdot \cos n x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= -\frac{b_n}{n} (\cos n \pi - \cos n \pi) = 0. \end{aligned} \quad (1.93)$$

Таким образом, с учетом (1.91), (1.92), (1.93) равенство (1.90) примет вид

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 \pi, \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (1.94)$$

Для определения коэффициентов a_n и b_n ($n = 1, 2, \dots$) нам понадобятся определенные интегралы

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \cos n x \cdot \sin k x dx, \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \cos n x \cdot \cos k x dx, \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \sin n x \cdot \sin k x dx. \end{aligned} \right. \quad (1.95)$$

Рассмотрим следующие случаи:

1) пусть n и k — целые числа и $n \neq k$, тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos n x \cdot \sin k x dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\sin(n+k)x - \sin(n-k)x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+k)x dx - \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-k)x dx \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.96)$$

(в силу нечетности функций $\sin(n+k)x$ и $\sin(n-k)x$).

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos n x \cdot \cos k x \, dx &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+k)x \, dx + \right. \\ &+ \left. \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-k)x \, dx \right) = \frac{1}{2} \left(\sin(n+k)x \Big|_{-\pi}^{\pi} \cdot \frac{1}{n+k} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{n-k} \cdot \sin(n-k)x \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.97)$$

так как $\sin(n+k)x$ и $\sin(n-k)x$ равны нулю при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin n x \cdot \sin k x \, dx &= \frac{1}{2} \left(- \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+k)x \, dx + \right. \\ &+ \left. \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-k)x \, dx \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 \left(- \int_0^{\pi} \cos(n+k)x \, dx + \right. \\ &+ \left. \int_0^{\pi} \cos(n-k)x \, dx \right) = - \frac{\sin(n+k)x}{n+k} \Big|_0^{\pi} + \frac{\sin(n-k)x}{n-k} \Big|_0^{\pi} = 0, \end{aligned} \quad (1.98)$$

так как $\sin 0 = 0$ и $\sin(n \pm k)\pi = 0$;

2) пусть n и k – целые числа и $n = k$, тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos n x \cdot \sin n x \, dx = 0 \quad (1.99)$$

в силу нечетности подынтегральной функции.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos n x \cdot \cos n x \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 n x \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2n x) \, dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2n x}{2n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{2} (2\pi + 0) = \pi. \end{aligned} \quad (1.100)$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin n x \cdot \sin n x \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 n x \, dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2n x) \, dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2n x}{2n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\
&= \frac{1}{2} (2\pi - 0) = \pi.
\end{aligned} \tag{1.101}$$

Теперь мы можем вычислить коэффициенты a_k и b_k .

Для отыскания коэффициента a_k при каком-либо определенном значении $k \neq 0$ умножим обе части равенства (1.89) на $\cos k x$:

$$\begin{aligned}
f(x) \cos k x &= \frac{a_0}{2} \cos k x + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x \cdot \cos k x + \\
&\quad + b_n \cdot \sin n x \cdot \cos k x).
\end{aligned} \tag{1.102}$$

В силу равномерной сходимости ряда (1.102) его можно почленно проинтегрировать в пределах от $-\pi$ до π .

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos k x \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos k x \, dx + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos n x \cdot \cos k x \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin n x \cdot \cos k x \, dx \right).
\end{aligned} \tag{1.103}$$

Принимая во внимание (1.92), (1.96), (1.97), (1.99), (1.100), нетрудно заметить, что все интегралы в правой части (1.103) равны нулю, кроме интеграла с коэффициентом a_k . Следовательно,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos k x \, dx &= a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 k x \, dx = a_k \cdot \pi. \\
a_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos k x \, dx.
\end{aligned} \tag{1.104}$$

Аналогично умножая обе части (1.95) на $\sin k x$ и почленно интегрируя от $-\pi$ до π , получим

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin k x \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \sin k x \, dx + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos n x \cdot \sin k x \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin n x \cdot \sin k x \, dx \right).
\end{aligned} \tag{1.105}$$

В силу (1.93), (1.96), (1.98), (1.99), (1.101) все интегралы правой части (1.105) равны нулю, кроме интеграла с коэффициентом b_n . Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = b_k \cdot \pi.$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx. \quad (1.106)$$

Коэффициенты, определенные по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx,$$

называются **коэффициентами Фурье функции $f(x)$** , а тригонометрический ряд (1.90) с такими коэффициентами называется **рядом Фурье функции $f(x)$** .

Выясним, какими свойствами должна обладать функция, чтобы построенный для нее ряд Фурье сходилась и чтобы сумма построенного ряда Фурье равнялась значениям данной функции в соответствующих точках.

1.3.3. Разложение функций в ряд Фурье

Ряд Фурье функции $f(x)$ будет сходиться и его сумма будет равна $f(x)$, если только сделать некоторые ограничительные предположения относительно функции $f(x)$. Эти ограничения сформулируем в виде определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.21. Говорят, что функция $f(x)$ периода 2π удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке $[-\pi; \pi]$, если она непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода на этом отрезке и этот отрезок можно разбить на конечное число таких отрезков, в каждом из которых $f(x)$ меняется монотонно. Одной из основных теорем рядов Фурье является следующая.

Теорема 1.23. (Дирихле). Если периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π , заданная на отрезке $[-\pi; \pi]$, удовлетворяет на этом отрезке условиям Дирихле, то ряд Фурье, построенный для этой функции, сходится во всех точках. Сумма, полученного ряда $S(x)$ равна значению функции $f(x)$ в точках непрерывности функции. В точках разрыва функции $f(x)$ сумма ряда равняется среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева, то есть, если $x = c$ — точка разрыва, то

$$S(c) = \frac{1}{2} (f(c-0) + f(c+0)).$$

Данную теорему приводим без доказательства. Из этой теоремы следует, что класс функций, представимых рядами Фурье, довольно широк. Поэтому ряды Фурье нашли широкое применение в различных разделах математики.

ПРИМЕР 1.27. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ с периодом 2π , если $f(x) = x$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

Функция $f(x) = x$ удовлетворяет условиям Дирихле (рис.1.2), следовательно, она допускает разложение в ряд Фурье.

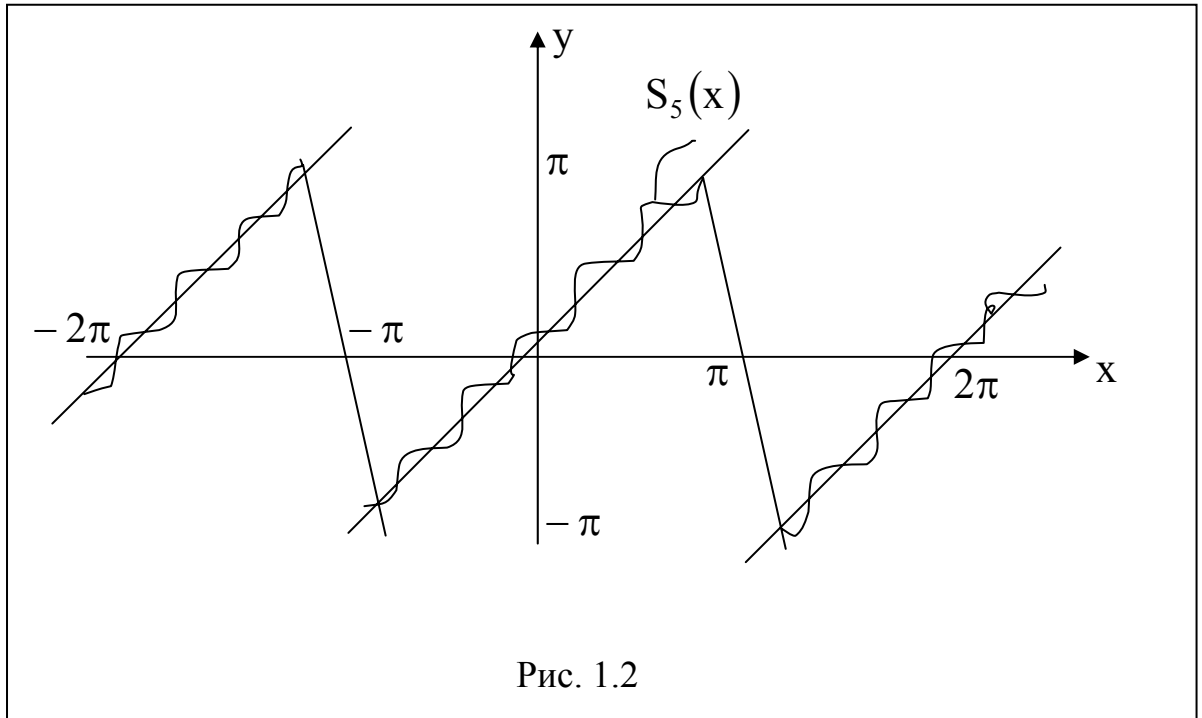


Рис. 1.2

По формуле (1.94) находим a_0 : $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$ (так как $f(x) = x$ — нечетная).

Определим a_k и b_k : $a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \cos kx dx$ (так как $x \cdot \cos kx$ есть функция нечетная как произведение четной функции на нечетную, то определенный интеграл в симметричных пределах интегрирования относительно нуля от нечетной функции равен нулю).

$$b_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\frac{x \cdot \cos kx}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi \cdot \cos k\pi}{k} - \frac{\pi \cdot \cos k\pi}{k} + \frac{1}{k^2} \cdot \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{\pi \cdot \cos k\pi}{k} + \frac{1}{k^2 \cdot \sin k\pi} \right) = -\frac{2}{\pi k} \cdot \pi \cdot \cos k\pi = (-1)^{k+1} \cdot \frac{2}{k}.$$

Таким образом, получаем ряд

$$x = 2 \cdot \left(\sin x - \frac{1}{2} 2x + \dots + \frac{(-1)^k}{k} \sin kn + \dots \right) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot \sin kx.$$

Это равенство имеет место во всех точках, кроме точек разрыва. В каждой точке разрыва сумма ряда равна среднему арифметическому ее пределов справа и слева, то есть равна нулю.

На рис.1.2 приведен график этой функции и график частичной суммы $S_5(x)$ ряда Фурье

$$S_5(x) = 2 \cdot \left(\sin x - \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + \frac{1}{3} \cdot \sin 3x - \frac{1}{4} \cdot \sin 4x + \frac{1}{5} \cdot \sin 5x \right).$$

Замечание 1.9. Если функция $\varphi(x)$ периодическая с периодом 2π , а λ – любое число, то справедливо равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx = \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} \varphi(x) dx. \quad (1.107)$$

Так как $\varphi(x)$ периодическая с периодом 2π , то $\varphi(\varepsilon - 2\pi) = \varphi(\varepsilon)$.

Полагая $x = \varepsilon - 2\pi$ при любых c и d , рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \int_c^d \varphi(x) dx &= \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \varphi(\varepsilon - 2\pi) d\varepsilon = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = \\ &= \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \varphi(x + 2\pi) dx = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

В частности, принимая $c = -\pi$, $d = \lambda$, получим

$$\int_{-\pi}^{\lambda} \varphi(x) dx = \int_{\pi}^{\lambda+2\pi} \varphi(x) dx. \quad (1.108)$$

Рассмотрим интеграл $\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} \varphi(x) dx = \int_{\lambda}^{-\pi} \varphi(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx + \int_{\pi}^{\lambda+2\pi} \varphi(x) dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{с учетом} \\ (1.108) \end{array} \right| = \int_{\lambda}^{-\pi} \varphi(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx + \int_{-\pi}^{\lambda} \varphi(x) dx =$$

$$= -\int_{-\pi}^{\lambda} \varphi(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx + \int_{-\pi}^{\lambda} \varphi(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx \Rightarrow$$

$$\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} \varphi(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx.$$

Из доказанного вытекает, что при вычислении коэффициентов Фурье можно заменить промежуток интегрирования $(-\pi; \pi)$ промежутком интегрирования $(\lambda; \lambda + 2\pi)$, то есть можем положить:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x) dx \\ a_k = \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x) \cos kx dx, \\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x) \sin kx dx. \end{cases} \quad (1.109)$$

Покажем на примере, как доказанное свойство упрощает процесс нахождения коэффициентов в некоторых случаях.

ПРИМЕР 1.28. Разложить в ряд Фурье $f(x)$ с периодом 2π , которая на отрезке $0 \leq x \leq 2\pi$ задана равенством $f(x) = x$.

График функции изображен на рис.1.3. Как видно из рис.1.3, функция на отрезке $[-\pi; \pi]$ задана двумя формулами

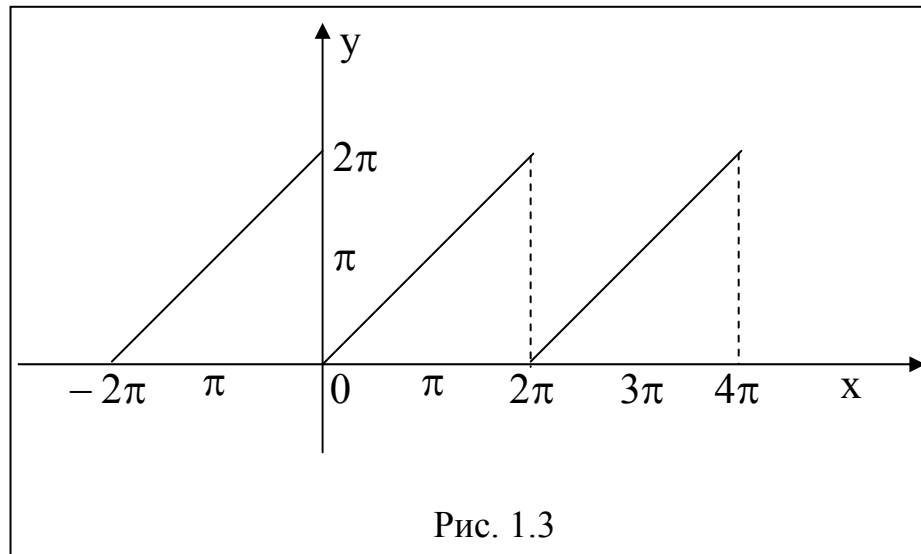


Рис. 1.3

$$f(x) = \begin{cases} x + 2\pi, & -\pi \leq x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

и вычисление коэффициентов ряда Фурье по формулам (1.94), (1.104), (1.106) неудобно, так как в каждом из интервалов интегрирования приходится разбивать на два: от $-\pi$ до 0 и от 0 до π . В то же время на отрезке $[0; 2\pi]$ функция гораздо проще, она задается одной формулой $f(x) = x$. Поэтому для вычисления дифференциалов ряда Фурье удобнее формула (1.109) при $\lambda = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \frac{x^2}{2\pi} \Big|_0^{2\pi} = 2\pi,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cdot \cos kx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{k} \cdot \sin kx \Big|_0^{2\pi} + \frac{\cos kx}{k^2} \Big|_0^{2\pi} \right) = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cdot \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\frac{x}{k} \cdot \cos kx \Big|_0^{2\pi} \right) = -\frac{2}{k}.$$

Тогда разложение функции в ряд Фурье будет иметь вид

$$f(x) = \pi - 2 \left(\sin x + \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + \dots + \frac{1}{n} \cdot \sin nx + \dots \right).$$

Этот ряд дает заданную функцию во всех точках, кроме точек разрыва (то есть кроме точек $x = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$). В этих точках сумма ряда равна полусумме предельных значений функции $f(x)$ справа и слева, в данном случае числу π .

1.3.4. Ряды Фурье для четных и нечетных функций

Пусть функция $f(x)$ (периодическая, с периодом 2π) удовлетворяет условиям теоремы Дирихле.

Если функция $f(x)$ четная, то произведение $f(x) \sin nx$ нечетная функция:

$$\begin{cases} b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0, \\ a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx. \end{cases} \quad (1.110)$$

Таким образом, ряд Фурье четной функции содержит лишь косинусы:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx.$$

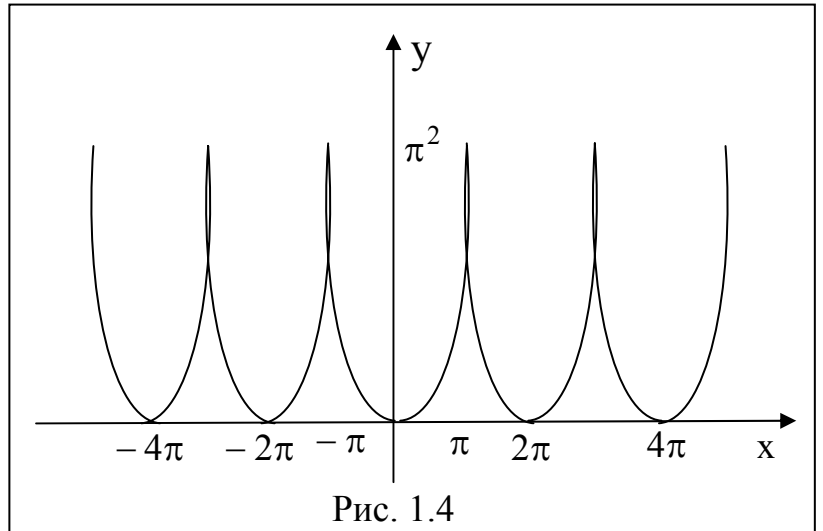
Если $f(x)$ нечетная, то произведение $f(x) \cdot \cos nx$ функция нечетная:

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0, \\ b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx. \end{cases} \quad (1.111)$$

Отсюда следует, что ряд Фурье нечетной функции содержит одни лишь синусы: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx$.

ПРИМЕР 1.29.

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x^2$ периода $T = 2\pi$ ($-\pi \leq x \leq \pi$). График этой функции изображен на рис.1.4. Данная функция четная. Тогда ее ряд Фурье содержит только косинусы ($b_k = 0$). Вычислим коэффициенты a_k :



$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3};$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cdot \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \cdot x^2 \cdot \frac{\sin kx}{k} \Big|_0^{\pi} -$$

$$- \frac{4}{k \cdot \pi} \int_0^{\pi} x \cdot \sin kx dx = \frac{4x}{\pi \cdot k} \cdot \frac{\cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} -$$

$$- \frac{4}{\pi k^2} \int_0^{\pi} \cos kx dx = (-1)^k \cdot \frac{4}{k^2}, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

$$\text{Таким образом, } x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\cos kx}{k^2}, \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

ПРИМЕР 1.30. Периодическая с периодом 2π функция $f(x)$ определена следующим образом: $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

Эта функция нечетная. Тогда ее ряд Фурье содержит только синусы ($a_k = 0$). Вычислим коэффициенты b_k :

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-1) \sin kx dx + \int_0^{\pi} \sin kx dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos kx}{k} \Big|_{-\pi}^0 - \frac{\cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi k} \cdot (1 - \cos \pi k). \end{aligned}$$

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{при } k \text{ четном} \\ \frac{4}{\pi k} & \text{при } k \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Следовательно, для рассматриваемой функции ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots + \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} + \dots \right).$$

Это равенство справедливо во всех точках, кроме точек разрыва. На рис.1.5 показаны график функции $f(x)$ и частичной суммы

$$S_3(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \right).$$

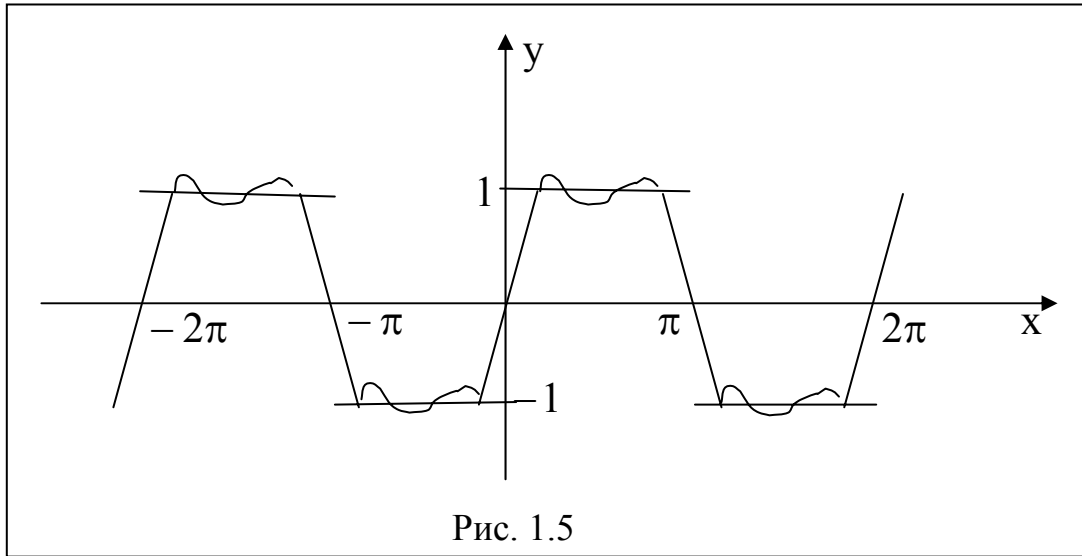


Рис. 1.5

1.3.5 . Ряды Фурье для функции с периодом 2ℓ

Пусть $f(x)$ есть периодическая функция с периодом 2ℓ . Разложим ее в ряд Фурье. Сделаем замену переменной по формуле $x = \frac{\ell}{\pi} t$. Тогда функция

$f\left(\frac{\ell}{\pi} t\right)$ будет периодической функцией от t с периодом 2π . Ее можно

разложить в ряд Фурье на отрезке $-\pi \leq x \leq \pi$:

$$f\left(\frac{\ell}{\pi} t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad (1.112)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi} t\right) \cos kt \, dt,$$

где

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi} t\right) \sin kt \, dt.$$

Переходим к старой переменной x : $x = \frac{\ell}{\pi} \cdot t$, $t = \frac{\pi}{\ell} \cdot x$, $dt = \frac{\pi}{\ell} \cdot dx$,

тогда получим

$$a_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{k \cdot \pi x}{\ell} dx. \quad (1.113)$$

$$b_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{k \cdot \pi x}{\ell} dx. \quad (1.114)$$

Равенство (1.112) принимает вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos \frac{k \pi}{\ell} x + b_k \cdot \sin \frac{k \pi}{\ell} x \right), \quad (1.115)$$

где коэффициенты a_k, b_k вычисляются по формулам (1.113), (1.114). Все утверждения, которые имели место для рядов Фурье от периодических функций с периодом 2π , сохраняются и для рядов Фурье от периодических функций с периодом 2ℓ .

ПРИМЕР 1.31. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2ℓ , которая на отрезке $[-\ell; \ell]$ задается равенством

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\ell \leq x \leq 0, \\ x & \text{при } 0 \leq x \leq \ell. \end{cases}$$

Определим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx = \frac{1}{\ell} \left(\int_{-\ell}^0 0 \cdot dx + \int_0^{\ell} x dx \right) = \frac{1}{\ell} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\ell} = \frac{1}{\ell} \cdot \frac{\ell^2}{2} = \frac{\ell}{2}.$$

$$a_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{k \pi}{\ell} x dx = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} x \cdot \cos \frac{k \pi}{\ell} x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ \cos \frac{k \pi}{\ell} x dx = dv, \quad v = \frac{\ell}{k \pi} \sin \frac{k \pi}{\ell} x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\ell} \left(\frac{\ell \cdot x}{k \pi} \cdot \sin \frac{k \pi}{\ell} x \Big|_0^{\ell} - \int_0^{\ell} \sin \frac{k \pi}{\ell} x dx \right) = \frac{\ell}{(k \pi)^2} \cos \frac{k \pi}{\ell} x \Big|_0^{\ell} =$$

$$= \frac{1}{k^2 \pi^2} ((-1)^k - 1) = \begin{cases} -\frac{2\ell}{k^2 \pi^2} & \text{при } k \text{ нечетном,} \\ 0 & \text{при } k \text{ четном;} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{k\pi}{\ell} x \, dx = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} x \cdot \sin \frac{k\pi}{\ell} x \, dx = \\
&= \frac{1}{\ell} \left(-\frac{\ell \cdot x}{k\pi} \cdot \cos \frac{k\pi}{\ell} x \Big|_0^{\ell} + \frac{\ell}{k\pi} \int_0^{\ell} \cos \frac{k\pi}{\ell} x \, dx \right) = \\
&= \frac{1}{\ell} \left(-\frac{\ell^2}{k\pi} \cos k\pi + \frac{\ell^2}{k^2 \pi^2} \sin \frac{k\pi}{\ell} x \Big|_0^{\ell} \right) = \\
&= -\frac{\ell}{k\pi} \cos k\pi = \begin{cases} \frac{\ell}{k\pi} & \text{при } k \text{ нечетном,} \\ -\frac{\ell}{k\pi} & \text{при } k \text{ четном.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Таким образом, ряд Фурье для этой функции будет иметь вид

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\ell}{4} - \frac{2\ell}{\pi^2} \cdot \left(\frac{\cos \frac{\pi x}{\ell}}{1} + \frac{\cos \frac{3\pi x}{\ell}}{3^2} + \frac{\cos \frac{5\pi x}{\ell}}{5^2} + \dots + \right) + \\
&+ \frac{\ell}{\pi} \cdot \left(\frac{\sin \frac{\pi x}{\ell}}{1} - \frac{\sin \frac{2\pi x}{\ell}}{2} + \frac{\sin \frac{3\pi x}{\ell}}{3} - \frac{\sin \frac{4\pi x}{\ell}}{4} + \dots \right).
\end{aligned}$$

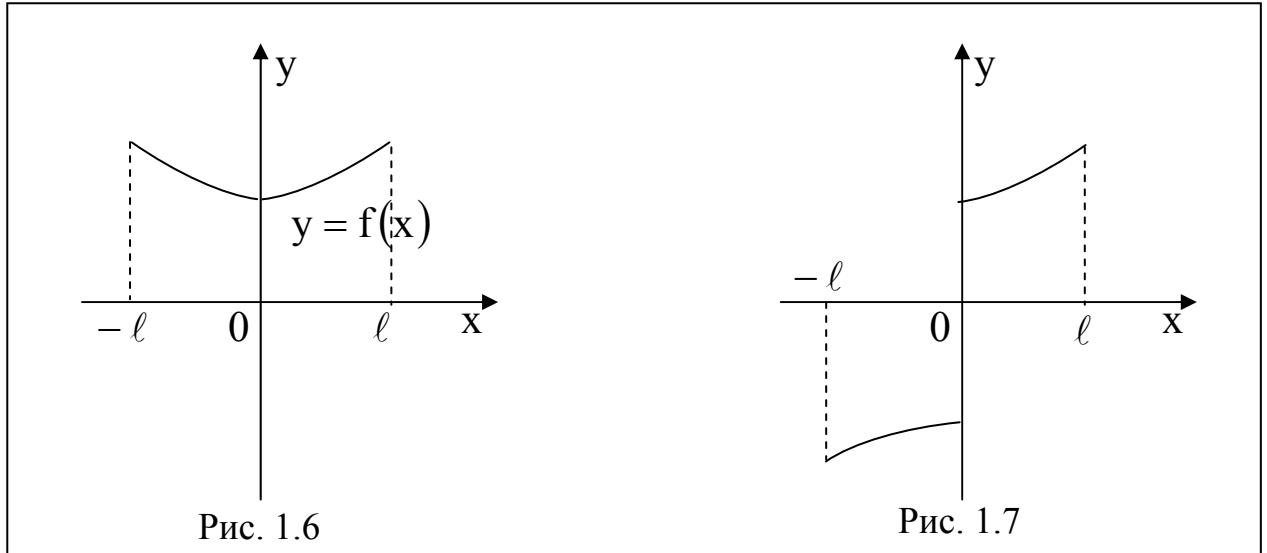
1.3.6. О разложении в ряд Фурье непериодической функции

Вся построенная выше теория исходила из предположения, что заданная функция определена для всех значений x и притом имеет период 2π . Между тем чаще всего приходится иметь дело с непериодической функцией $f(x)$, заданной на отрезке $[a; b]$. Пусть она удовлетворяет условиям теоремы Дирихле. Покажем, что данную функцию $f(x)$ в точках непрерывности можно представить в виде суммы ряда Фурье. Для этого рассмотрим произвольную периодическую функцию $f(x)$ с периодом $2\mu \geq |b-a|$, совпадающую с функцией $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Разложим функцию $f_1(x)$ в ряд Фурье. Сумма этого ряда во всех точках отрезка $[a; b]$ совпадает с заданной функцией $f(x)$, то есть функция $f(x)$ разложена в ряд Фурье на отрезке $[a; b]$.

Предположим далее, что функция $f(x)$ задана лишь на отрезке $[0; \ell]$. Желая разложить ее в этом промежутке в ряд Фурье, дополним определение функции $f(x)$ для значений x произвольным образом на отрезке $[-\ell; 0]$.

Затем по формулам (1.94), (1.104), (1.106) определим коэффициенты ряда Фурье для этой функции. Такое доопределение функции $f(x)$ на отрезке $[-\ell; 0]$ дает возможность получить различные тригонометрические ряды.

Если дополним определение функции $f(x)$ так, чтобы при $-\ell \leq x \leq 0$ было $f(x) = f(-x)$, в результате получится четная функция (см. рис.1.6). В этом случае говорят, что функция «продолжена четным образом». Эту



функцию разлагают в ряд Фурье, который содержит только косинусы, коэффициенты его определяются по формулам (1.113).

Аналогично, если дополнить определение функции $f(x)$ условием $f(-x) = -f(x)$, $x \in [-\ell; 0]$ так, чтобы она казалась нечетной (см. рис.1.7), то в ее разложении содержатся только члены с синусами, коэффициенты b_n определяются по формулам (1.114).

Таким образом, заданную на отрезке $[0; \ell]$ функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям теоремы Дирихле, можно разложить в ряд Фурье, как по косинусам, так и по синусам.

ПРИМЕР 1.32. Требуется разложить функцию $f(x) = x^2$ на отрезке $[0; \pi]$ в ряд по синусам. Продолжая эту функцию нечетным образом, получим

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi, \\ -x^2, & \text{если } -\pi \leq x \leq 0. \end{cases}$$

По формулам (1.111)

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin kx \, dx = \\ &= -\frac{2}{\pi} \cdot x^2 \cdot \frac{\cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} + \frac{4}{k\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \cos kx \, dx = \end{aligned}$$

$$= -\frac{2\pi \cdot (-1)^k}{k} + \frac{4}{k\pi} \left(\frac{x}{k} \cdot \sin kx \Big|_0^\pi - \frac{1}{k} \int_0^\pi \sin kx dx \right) =$$

$$= \frac{2\pi}{k} \cdot (-1)^{k+1} + \frac{4}{\pi k^3} \cdot ((-1)^k - 1),$$

так что $x^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{k} (-1)^{k+1} + \frac{4}{\pi k^3} \cdot ((-1)^k - 1) \right) \cdot \sin kx, \quad x \in [0; \pi].$

1.3.7. Ряд Фурье в комплексной форме

Функция $f(x)$ периода $T = 2\pi$ удовлетворяет условиям разложимости в ряд Фурье, тогда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (1.116)$$

Найдем выражение для $\sin nx$ и $\cos nx$ через показательные функции. Для этого напомним формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, где $i^2 = -1$, заменяя в формуле Эйлера φ на nx , получим

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx, \quad (1.117)$$

также заменяя φ на $-nx$, имеем

$$e^{-inx} = \cos nx - i \sin nx. \quad (1.118)$$

Из равенств (1.117), (1.118) находим

$$\sin nx = \frac{1}{2i} (e^{inx} - e^{-inx}), \quad \cos nx = \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}).$$

Подставляя выражение для $\sin nx$, $\cos nx$ в формулу (1.116), производим соответствующие преобразования:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) - i b_n \cdot \frac{1}{2} (e^{inx} - e^{-inx}) \right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot (a_n - i b_n) e^{inx} + \frac{1}{2} \cdot (a_n + i b_n) e^{-inx} \right). \quad (1.119)$$

Введем обозначения:

$$\frac{a_0}{2} = C_0, \quad \frac{a_n - i b_n}{2} = C_n, \quad \frac{a_n + i b_n}{2} = C_{-n}. \quad (1.120)$$

При этих обозначениях равенство (1.119) примет вид

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{inx} + C_{-n} e^{-inx}). \quad (1.121)$$

Выразим коэффициенты C_n и C_{-n} через интегралы. Пользуясь формулами для определения коэффициентов ряда Фурье, формулу для C_n можно выразить так:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx - i \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot (\cos nx - i \sin nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-inx} \, dx. \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx.$$

$$\text{Аналогично } C_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} \, dx, \quad C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx.$$

Выражения для C_n , C_{-n} , C_0 можно объединить в одну формулу

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (1.122)$$

C_n, C_{-n} называются комплексными коэффициентами Фурье для функции $f(x)$. В этих обозначениях ряд Фурье (1.121) для функции $f(x)$ примет вид

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}.$$

Итак, $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$, которая называется **комплексной формой ряда Фурье**.

Если функция $f(x)$ периодическая с периодом 2ℓ , то комплексная форма ряда Фурье имеет вид $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{\frac{i n \pi}{\ell} x}$, коэффициенты C_n этого ряда выражаются формулами

$$C_n = \frac{1}{2\ell} \cdot \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cdot e^{-\frac{i n \pi x}{\ell}} \, dx.$$

Выражение $e^{\frac{i n \pi x}{\ell}}$ называется **гармониками**, числа $\alpha_n = \frac{n\pi}{\ell}$ называются **волновыми числами**. Совокупность волновых чисел называется **спектром**.

1.3.8. Интеграл Фурье

Функция $f(x)$ определена на бесконечном интервале $(-\infty; \infty)$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty, \quad (1.123)$$

на любом конечном интервале $(-\ell; \ell)$ разлагается ряд Фурье, тогда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{\ell} x + b_k \sin \frac{k\pi}{\ell} x \right), \quad (1.124)$$

где

$$a_k = \frac{1}{\ell} \cdot \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \frac{k\pi t}{\ell} dt, \quad b_k = \frac{1}{\ell} \cdot \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \sin \frac{k\pi t}{\ell} dt. \quad (1.125)$$

Подставляя в ряд (1.124) выражения для коэффициентов a_k, b_k , получим

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\ell} \cdot \int_{-\ell}^{\ell} f(t) dt + \frac{1}{\ell} \left(\left(\int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cdot \cos \frac{k\pi t}{\ell} dt \right) \cdot \cos \frac{k\pi x}{\ell} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cdot \sin \frac{k\pi t}{\ell} dt \right) \cdot \sin \frac{k\pi x}{\ell} \right) = \frac{1}{2\ell} \cdot \int_{-\ell}^{\ell} f(t) dt + \\ &\quad + \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-\ell}^{\ell} f(t) \left(\cos \frac{k\pi t}{\ell} \cdot \cos \frac{k\pi x}{\ell} + \sin \frac{k\pi t}{\ell} \cdot \sin \frac{k\pi x}{\ell} \right) dt \right), \end{aligned}$$

применяя формулу косинуса разности двух аргументов, можно написать

$$f(x) = \frac{1}{2\ell} \cdot \int_{-\ell}^{\ell} f(t) dt + \frac{1}{\ell} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \frac{k\pi(t-x)}{\ell} dt. \quad (1.126)$$

Введем следующие обозначения:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{\ell}, \quad \alpha_2 = \frac{2\pi}{\ell}, \dots, \quad \alpha_k = \frac{k\pi}{\ell}, \dots, \quad \Delta\alpha_k = \frac{\pi}{\ell}.$$

Равенство (1.126) при этих обозначениях примет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\ell} \cdot \int_{-\ell}^{\ell} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \alpha_k (t-x) dt \right) \cdot \Delta\alpha_k. \quad (1.127)$$

Дискретные значения $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots$ можно рассматривать как значения переменной α , непрерывно меняющийся от 0 до $+\infty$; при этом

приращение $\Delta\alpha_k = \alpha_{k+1} - \alpha_k = \frac{\pi}{\ell}$ стремится к нулю при $\ell \rightarrow +\infty$. Тогда

правая часть формулы (1.127) напоминает интегральную сумму для функции $\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos \alpha(t-x) dt$ от переменной α в промежутке $[0; \infty)$. Переходя к

пределу в (1.127) при $\ell \rightarrow +\infty$, $\Delta\alpha_k \rightarrow 0$, вместо ряда получим интеграл, при этом первый член в правой части равенства (1.127) стремится к нулю, тогда

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos \alpha (t - x) dt \right) d\alpha. \quad (1.128)$$

Правая часть формулы (1.128) называется **интегралом Фурье** для функции $f(x)$. Это равенство выполняется во всех точках, где функция $f(x)$ непрерывна. В точках разрыва выполняется равенство

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos \alpha (t - x) dt \right) d\alpha = \frac{1}{2} \cdot (f(x + 0) + f(x - 0)).$$

Формулу (1.128) можно представить, раскрывая выражение косинуса разности, в виде

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a(\alpha) \cdot \cos \alpha x + b(\alpha) \cdot \sin \alpha x) d\alpha, \quad (1.129)$$

где
$$a(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos \alpha t dt, \quad b(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin \alpha t dt.$$

Здесь ясно обнаруживается аналогия с тригонометрическим разложением: лишь параметр k , пробегающий ряд натуральных значений, заменен непрерывно изменяющимся параметром α , а бесконечный ряд — интегралом. Коэффициенты $a(\alpha)$, $b(\alpha)$ также по своим выражениям напоминают коэффициенты ряда Фурье.

1.3.9. Интеграл Фурье для четных и нечетных функций

Пусть $f(x)$ — функция, удовлетворяющая условиям $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$. Тогда эту функцию можно представить интегралом Фурье:

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a(\alpha) \cdot \cos \alpha x + b(\alpha) \cdot \sin \alpha x) d\alpha, \quad (1.130)$$

где

$$a(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos \alpha t dt, \quad b(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin \alpha t dt. \quad (1.131)$$

1. Пусть $f(x)$ — четная функция, тогда

$$a(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos \alpha t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cdot \cos \alpha t dt,$$

$$b(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin \alpha t dt = 0,$$

следовательно, интеграл Фурье (1.130) принимает вид

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(\alpha) \cdot \cos \alpha x d\alpha, \quad (1.132)$$

где

$$a(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cdot \cos \alpha t dt, \quad (1.133)$$

правая часть равенства (1.132) называется *интегралом Фурье для четной функции*.

2. Пусть $f(x)$ – нечетная, тогда

$$a(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos \alpha t dt = 0,$$

$$b(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin \alpha t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cdot \sin \alpha t dt,$$

следовательно, интеграл Фурье (1.130) принимает вид

$$f(x) = \int_0^{\infty} b(\alpha) \cdot \sin \alpha x d\alpha, \quad (1.134)$$

где

$$b(\alpha) = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} f(t) \cdot \sin \alpha t dt, \quad (1.135)$$

правая часть равенства (1.134) называется *интегралом Фурье для нечетной функции* $f(x)$.

Заменяя $a(\alpha)$ в формуле (1.132) его выражением, получим

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(t) \cdot \cos \alpha t dt \right) \cdot \cos \alpha x d\alpha. \quad (1.136)$$

Положим $F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot \cos \alpha t dt,$ (1.137)

тогда $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} F_c(\alpha) \cdot \cos \alpha x d\alpha.$ (1.138)

выражение в правой части равенства (1.137) называется *косинус - преобразованием Фурье* функции $f(x)$, а выражение в правой части равенства (1.138) называется *обратным косинус - преобразованием Фурье*.

Положим

$$F_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot \sin \alpha t dt, \quad (1.139)$$

тогда

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} F_s(\alpha) \cdot \sin \alpha x \, d\alpha. \quad (1.140)$$

Интеграл в правой части равенства (1.139) называется **синус – преобразованием Фурье функции** $f(x)$, а интеграл в правой части равенства (1.140) называется **обратным синус – преобразованием Фурье**.

ПРИМЕР 1.33. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{при } |x| = 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Решение. Функция $f(x)$ – четная, следовательно, на основании (1.136) имеем

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(\alpha) \cdot \cos \alpha x \, d\alpha,$$

$$a(\alpha) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot \cos \alpha t \, dt = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^1 f(t) \cdot \cos \alpha t \, dt +$$

$$+ \frac{k}{\pi} \cdot \int_1^{\infty} f(t) \cdot \cos \alpha t \, dt = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^1 \cos \alpha t \, dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin \alpha t}{\alpha} \Big|_0^1 = \frac{2 \sin \alpha}{\pi \alpha},$$

поэтому $f(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \cos \alpha x \, d\alpha.$

1.3.10. Интеграл Фурье в комплексной форме

Пусть $f(x)$ – функция, удовлетворяющая условию $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt < \infty$, тогда ее можно представить интегралом Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos \alpha \cdot (t - x) \, dt \right) d\alpha.$$

Пользуясь свойством четности функции косинуса, интеграл в правой части этого равенства можно переписать так:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos \alpha \cdot (t - x) \, dt \right) d\alpha. \quad (1.141)$$

Далее рассмотрим интеграл $\int_{-M}^M \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin \alpha \cdot (t-x) dt \right) dx$, который тождественно равен нулю, как интеграл от нечетной функции в симметричных пределах, тогда $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin \alpha \cdot (t-x) dt \right) d\alpha = 0$ или

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin \alpha \cdot (t-x) dt \right) d\alpha. \quad (1.142)$$

Умножим обе части равенства (1.142) на $-\frac{i}{2\pi}$, где $i^2 = -1$ и сложим с равенством (1.141), тогда получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot (\cos \alpha \cdot (t-x) - i \sin \alpha \cdot (t-x)) dt \right) d\alpha,$$

пользуясь формулой $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \cdot \sin \varphi$, имеем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\alpha(t-x)} dt \right) d\alpha. \quad (1.143)$$

Интеграл в правой части формулы (1.143) называется интегралом Фурье в комплексной форме для функции $f(x)$.

1.3.11. Преобразование Фурье и его свойства

Пусть $f(x)$ — функция, удовлетворяющая условию $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dx < \infty$, тогда эту функцию можно представить интегралом Фурье в комплексной форме:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\alpha(t-x)} dt \right) d\alpha \text{ или}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\alpha t} dt \right) \cdot e^{i\alpha x} d\alpha. \quad (1.144)$$

Положим

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\alpha t} dt, \quad (1.145)$$

тогда
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) \cdot e^{i\alpha x} d\alpha. \quad (1.146)$$

Интеграл в правой части равенства (1.145) называется **преобразованием Фурье функции** $f(x)$, а выражение в правой части равенства (1.146) — **обратным преобразованием Фурье**.

Рассмотрим свойства преобразования Фурье.

1. Если $F(\alpha)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$ и $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)| dx < \infty$, то $i\alpha F(\alpha)$ является преобразованием Фурье функции $f'(x)$.

Доказательство. По определению найдем преобразования Фурье $f'(x)$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \cdot e^{-i\alpha x} dx &= \left| \begin{array}{l} e^{-i\alpha x} = u, \quad du = -i\alpha e^{-i\alpha x} dx \\ dv = f'(x) dx, \quad v = f(x) \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\lim_{A \rightarrow \infty} -i\alpha f(x) \cdot e^{-i\alpha x} \Big|_{-A}^A + \int_{-\infty}^{\infty} i\alpha f(x) \cdot e^{-i\alpha x} dx \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(-i\alpha \lim_{A \rightarrow \infty} (f(A) \cdot e^{-i\alpha A} - f(-A) \cdot e^{-i\alpha A}) + i\alpha \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i\alpha x} dx \right) = \\ &= \frac{i\alpha}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i\alpha x} dx, \quad \text{так как} \quad \lim_{A \rightarrow \infty} f(A) \cdot e^{-i\alpha A} = \lim_{A \rightarrow \infty} f(-A) \cdot e^{i\alpha A} = 0, \end{aligned}$$

тогда $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \cdot e^{-i\alpha x} dx = \frac{i\alpha}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i\alpha x} dx = i\alpha F(\alpha)$ отсюда

следует, что преобразованием Фурье функции $f'(x)$ является функция $F(\alpha)i\alpha$.

2. Если $F(\alpha)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$ и $\int_{-\infty}^{\infty} |x \cdot f(t)| dx < \infty$, то $F'(\alpha)$ является преобразованием функции Фурье функции $-i x f(x)$.

Доказательство. По определению, имеем $F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i\alpha x} dx$, обе части последнего равенства продифференцируем по переменной α и получим $F'(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (-ix) \cdot e^{-i\alpha x} dx = \frac{i\alpha}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (-ix f(x)) \cdot e^{-i\alpha x} dx$; отсюда следует, что функция $-ix f(x)$ имеет своим преобразованием Фурье функцию $F'(\alpha)$.

ПРИМЕР 1.34. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Решение. По определению преобразования Фурье имеем

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}x^2 - i\alpha x} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2i\alpha x)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}((x+i\alpha)^2 + \alpha^2)} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+i\alpha)^2 - \frac{\alpha^2}{2}} dx = \left| \begin{array}{l} x + i\alpha = t, \quad dx = dt \\ \text{если } x \rightarrow \pm\infty, \text{ то } t \rightarrow \pm\infty \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot e^{-\frac{\alpha^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \cdot \sqrt{2\pi} = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}, \text{ так как } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}, \text{ тогда } F(\alpha) = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}.
\end{aligned}$$

ПРИМЕР 1.35. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Решение. Согласно второму свойству преобразования Фурье имеем: функция $-ix \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ имеет своим преобразованием Фурье функцию $(F(\alpha))'$, где $F(\alpha) = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$, тогда функция $x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ имеет своим преобразованием Фурье функцию $-\alpha \cdot e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$.

УЧЕБНО - МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

РАЗДЕЛ 10 «ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ»

2. Методические указания для студентов

2.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

2.1.1. Числовой ряд и его сумма

Задана последовательность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Выражение $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ называется *числовым рядом*, а числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — *членами ряда*, a_n называется его *общим членом*. Ряд часто записывают в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (2.1)$$

Сумму первых n членов числового ряда обозначают через S_n и называют n — й частичной суммой ряда:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Если существует конечный предел $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, *ряд* называется *сходящимся*, а число S — *суммой ряда*.

В этом случае пишут $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Ряд называется *расходящимся*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует (в частности $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Ряд $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$, полученный из ряда (2.1) отбрасыванием первых n членов, называется n — м *остатком ряда* (2.1).

Если сумму остатка сходящегося ряда обозначить через R_n , то $S_n + R_n = S$.

Приведем основные теоремы о сходящихся числовых рядах.

1. Отбрасывание от ряда или присоединением к ряду конечного числа начальных членов не меняет его сходимости или расходимости.

2. Если ряд (2.1) сходится, то предел его n — го остатка при $n \rightarrow \infty$ равен нулю, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$.

3. Если члены сходящегося ряда (2.1), имеющего сумму S , умножить на число λ , то полученный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda \cdot a_n)$ будет также сходящимся, а число $\lambda \cdot S$ — его суммой.

4. Если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, имеющие соответственно суммы A и B , то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, причем сумма последнего ряда равна $A + B$.

5. Необходимый признак сходимости ряда. Если ряд (2.1) сходится, то предел его общего члена равен нулю: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Отсюда вытекает, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится. Если же $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то о сходимости ряда еще ничего нельзя сказать, но есть смысл исследовать ряд дальше.

ПРИМЕР 2.1. Примером расходящегося ряда, удовлетворяющего необходимому признаку сходимости, является гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Здесь $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, но ряд расходится. Это вытекает из того, что $S_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Докажем это.

Известно, что возрастающая последовательность $\{a_n\}$, $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ сходится и ее предел равен e , $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ при этом $e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Логарифмируя это неравенство, имеем $\ln e > n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n(\ln(n+1) - \ln n)$

или, деля обе части на n , $\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n$.

При

$$n = 1 \quad 1 > \ln 2$$

$$n = 2 \quad \frac{1}{2} > \ln 3 - \ln 2$$

$$n = 3 \quad \frac{1}{3} > \ln 4 - \ln 3$$

.....

$$n = n \quad \frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n$$

Частичная сумма гармонического ряда, каждый член которой больше соответствующего члена больше суммы ряда.

$$\ln 2 + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + \dots + (\ln(n+1) - \ln n) = \ln(n+1)$$

удовлетворяет неравенству $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$, но

$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$ откуда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$.

ПРИМЕР 2.2. Дан общий член ряда $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. Написать первые четыре члена ряда и записать ряд.

Решение. Если $n = 1$, то $a_1 = \frac{1}{2}$; $n = 2$, $a_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$; $n = 3$, $a_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3$; $n = 4$, $a_4 = \left(\frac{4}{4+1}\right)^4 = \left(\frac{4}{5}\right)^5$. Ряд можно записать в виде $\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{4}{5}\right)^4 + \dots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^n + \dots$.

ПРИМЕР 2.3. Найти общий член ряда $\frac{10}{7} + \frac{100}{9} + \frac{1000}{11} + \frac{10000}{13} + \dots$

Решение. Запишем данный ряд в следующем виде: $\frac{10^1}{7} + \frac{10^2}{9} + \frac{10^3}{11} + \frac{10^4}{13} + \dots$

Показатель степени числителя совпадает с номером члена ряда, поэтому показатель степени n -го члена равен n . Числитель n -го члена будет 10^n . Знаменатель образуют арифметическую прогрессию с первым членом 7 и разностью 2. Следовательно, знаменатель n -го члена равен $2n + 5$.

Итак, общим членом ряда является $a_n = \frac{10^n}{2n+5}$.

ПРИМЕР 2.4. Найти сумму ряда и доказать его сходимость, если $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Решение. Общий член данного ряда $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Представим его в виде суммы простейших дробей $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}$. Определим A и B , для чего справа приведем к общему знаменателю

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A(n+1) + B(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}, \quad \text{откуда} \quad 1 = n(2A + 2B) + A - B.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях n , получаем $2A + 2B = 0$, $A - B = 1$. Решая полученную систему, находим

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}. \quad \text{Таким образом,} \quad a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right). \quad \text{Отсюда}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right), \quad a_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right), \quad a_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right), \quad a_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right),$$

$$a_5 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right), \dots, a_{n-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} \right) \quad \text{Найдем частичную сумму } n$$

$$\begin{aligned} \text{членов } S_n &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \right. \\ &- \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \Big) = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right). \quad \text{Итак,} \quad S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right). \end{aligned}$$

Найдем предел частичной суммы S_n при $n \rightarrow \infty$, то есть найдем сумму ряда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}$.

Таким образом, данный ряд сходится и его сумма $S = \frac{1}{2}$.

ПРИМЕР 2.5. Установить сходимость или расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+2}$.

Решение. Найдем предел общего члена a_n данного ряда при $n \rightarrow \infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(2 + \frac{1}{n} \right)}{n \left(3 + \frac{2}{n} \right)} = \frac{2}{3}. \quad \text{Необходимый признак сходимости}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ для этого ряда не выполняется, поэтому ряд расходится.

2.1.2. Сходимость рядов с положительными членами. Признаки сравнения

Пусть дан ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (2.2)$$

с положительными членами. Перечислим основные признаки сходимости и расходимости рядов с положительными членами.

Признак сравнения 1. Пусть даны ряды (2.2) и

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (2.3)$$

с положительными членами, причем для всех достаточно больших n $a_n \leq b_n$.

Тогда:

- из сходимости ряда (2.3) следует сходимость ряда (2.2);
- из расходимости ряда (2.2) следует расходимость ряда (2.3).

Этот признак остается в силе, если неравенства $a_n \leq b_n$ выполняются не при всех n , а лишь начиная с некоторого номера $n = N$.

Признак сравнения 2. Если существует конечный и отличный от нуля

предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, что оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ одновременно сходятся и расходятся.

ПРИМЕР 2.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Решение. Так как $n > \ln n$ или $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, а $\frac{1}{n}$ — общий член

расходящегося гармонического ряда, то в силу признака сравнения 1 данный ряд расходится.

ПРИМЕР 2.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n + \ln n}$.

Решение. Сравнение с гармоническим рядом по признаку сравнения 1 здесь ничего не дает, так как $\frac{1}{n + \ln n} < \frac{1}{n}$, и никакого заключения о сходимости данного ряда сделать нельзя. Воспользуемся признаком сравнения 2 с тем же гармоническим рядом. Имеем $a_n = \frac{1}{n + \ln n}$, $b_n = \frac{1}{n}$, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n + \ln n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\ln n}{n} + 1} = 1 \neq 0.$$

Получен конечный и отличный от нуля предел. Сравниваемые ряды ведут себя одинаково, и так как гармонический ряд расходится, то расходится и данный ряд.

2.1.3. Признак Даламбера

1. Пусть задан числовой ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (2.4)$$

с положительными членами.

Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = P$, то при $P < 1$ ряд (2.4) сходится, а при $P > 1$ – расходится (при $P = 1$ ряд может сходиться или расходиться – в этом случае вопрос о сходимости ряда остается открытым).

ПРИМЕР 2.8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

Решение. Применяем признак Даламбера. Здесь $a_n = \frac{2^n}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$,

$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \cdot n!}{2^n (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$, следовательно, ряд сходится.

ПРИМЕР 2.9. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$.

Решение. Применяем признак Даламбера. $a_n = \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$, $a_{n+1} = \frac{3^{2n+3}}{2^{3n+2}}$,

$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n+3} \cdot 2^{3n-1}}{2^{3n+2} \cdot 3^{2n+1}} = \frac{9}{8} > 1$, следовательно, ряд расходится.

2.1.4. Признак Коши

Пусть задан ряд числовой ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами.

Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = P$, то при $P < 1$ этот ряд сходится, а при $P > 1$ – расходится (при $P = 1$ возможны случаи как сходимости, так и расходимости ряда).

ПРИМЕР 2.10. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$.

Решение. Здесь удобно применить признак Коши, поскольку $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1} \right)^n} = \frac{n}{2n+1}$, а предел последней дроби находится просто: $P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1$, то ряд сходится.

ПРИМЕР 2.11. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$.

Решение. Снова применим признак Коши. $a_n = \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$; $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$, $P = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{1}{2} e$. Так как $P = \frac{1}{2} e > 1$, то ряд расходится.

2.1.5. Интегральный признак Коши

Рассмотрим числовой ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (2.5)$$

с положительными членами.

Этот признак основан на сравнении рядов с несобственными интегралами.

Если функция $f(x)$, принимающая в точках $x = n$, $n = 1, 2, \dots$ значения $f(n) = a_n$, монотонно убывает в некотором промежутке $a < x < \infty$, где $a \geq 1$, то числовой ряд (2.5) и несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно.

ПРИМЕР 2.12. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Решение. Применим интегральный признак Коши. Так как $f(n) = \frac{1}{n \ln n}$, то функцией принимающей в точках $x = n$ значения $f(n)$, будет функция

$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. Она непрерывна в промежутке $2 \leq x < \infty$ и монотонно в нем

убывает. Вычислим несобственный интеграл $\int_2^{\infty} f(x) dx$.

$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{d \ln x}{\ln x} = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln \ln b - \ln \ln 2) = \infty$. Интеграл $\int_2^{\infty} f(x) dx$ расходится. Из его расходимости следует расходимость данного ряда.

ПРИМЕР 2.13. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

Решение. Применим интегральный признак Коши, положив $f(x) = \frac{1}{x^s}$, эта функция при $x \geq 1$ непрерывна, положительная и монотонно убывающая.

Рассмотрим интеграл $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-s} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-s} x^{1-s} \Big|_1^b =$
 $= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-s} (b^{1-s} - 1) \right)$ при $s \neq 1$.

а) $s > 1$, $\lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-s} (b^{1-s} - 1) \right) = \frac{1}{s-1}$ предел конечен, несобственный интеграл сходится, следовательно, сходится и числовой ряд.

б) $s < 1$, $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-s} (b^{1-s} - 1) = \infty$ несобственный интеграл расходится, то расходится и числовой ряд.

в) $s = 1$. $\lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty$. Из расходимости несобственного интеграла следует расходимость числового ряда.

Итак, числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ при $s > 1$ сходится, при $s \leq 1$ расходится. Данный числовой ряд называется обобщенным гармоническим рядом.

2.1.6. Сходимость числовых рядов с членами произвольных знаков. Абсолютная и условная сходимость

Пусть дан числовой ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (2.6)$$

Среди членов этого ряда имеются бесконечно много как положительных, так и отрицательных членов.

Числовой ряд (2.6) с членами произвольных знаков сходится, если сходится ряд $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. В этом случае исходный

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **абсолютно сходящимся**.

Сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **условно сходящимся**, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то ряд, полученный после любой перестановки его членов, абсолютно сходится и имеет ту же сумму, что и первоначальный ряд.

Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ условно сходится, то при перестановке бесконечного множества его членов сумма ряда может измениться.

ПРИМЕР 2.14. Исследовать на сходимость числовой ряд $1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \dots$

Решение. Составим ряд из модулей членов данного ряда $1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Этот ряд сходится как обобщенный гармонический ряд с показателем $S = 2 > 1$. Следовательно, сходится и данный ряд, и притом абсолютно.

2.1.7. Знакопеременные ряды. Теорема Лейбница

Числовой ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad (2.7)$$

называется знакопеременным, где $a_n > 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Для знакопеременных рядов справедлива теорема Лейбница.

Если члены знакопеременного ряда (1) начиная с некоторого номера n монотонно убывают по абсолютной величине и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то ряд (2.7) сходится.

Исследование сходимости знакопеременных рядов следует начинать с исследования их абсолютной сходимости, так как это часто быстрее приводит к цели, чем применение теоремы Лейбница с последующим исследованием абсолютной сходимости ряда.

При исследовании знакочередующихся рядов на абсолютную сходимость пользуются всеми признаками сходимости для рядов с положительными членами.

ПРИМЕР 2.15. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Решение. Исследуем этот ряд на абсолютную сходимость, для этого составим числовой ряд из абсолютных величин членов исходного ряда, получаем ряд $1 + \left| \frac{-1}{2} \right| + \frac{1}{3} + \dots + \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Этот ряд является гармоническим с показателем $s = 1$, поэтому расходится.

Для исследования на сходимость применяем теорему Лейбница. Так как $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \dots$ (члены ряда монотонно убывают) и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, то по теореме Лейбница, данный ряд сходится. Однако он сходится условно, так как, составленный из модулей его членов, расходится.

ПРИМЕР 2.16. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot n^n}{(2n)!}$.

Решение. Исследуем данный знакочередующийся ряд на абсолютную сходимость. С этой целью составим ряд из модулей членов данного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$. Применим к этому ряду признак Даламбера: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot (2n)!}{(2n+2)! \cdot n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2(2n+1)} \right) = 0 < 1$. Ряд из модулей сходится. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

2.1.8. Приближенное вычисление суммы ряда

Для приближенного вычисления суммы S сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ полагают $S \approx S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, пренебрегая остатком $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Чтобы оценить ошибку, допускаемую при этом, нужно оценить остаток.

Для сходящихся знакоположительных рядов, члены которых монотонно убывают начиная с $n+1$, справедливы следующие оценки остатка.

$R_n \leq \int_n^{\infty} f(x)dx$, $\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq R_n < \int_n^{\infty} f(x)dx$, где $f(n)$ – общий член данного ряда, а $f(x)$ – функция, принимающая в точках $x = n$, $n = 1, 2, \dots$ значения $f(n) = a_n$ и монотонно убывающая в промежутке интегрирования.

ПРИМЕР 2.17. Оценить n –й остаток ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Вычислить сумму ряда с точностью 10^{-2} .

Решение. Воспользовавшись оценкой остатка ряда, получим $R_n < \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2x^2} \right) \Big|_n^b = \frac{1}{2n^2}$. Найдем наименьшее значение n удовлетворяющее неравенству $R_n < \frac{1}{2n^2} < 10^{-2}$. Это значение n равно 8, тогда

$$S \approx S_8 = \sum_{n=1}^8 \frac{1}{n^3} = 1,1951.$$

Точное значение, взятое из справочника $S = 1,20215$. Ошибка, которая допущена равна $|S - S_8| = 0,00695 < 10^{-2}$.

Для знакочередующихся рядов, члены которых удовлетворяют условиям теоремы Лейбница, справедлива следующая оценка остатка $|R_n| \leq a_{n+1}$.

ПРИМЕР 2.18. С погрешностью 10^{-3} вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n}$.

Решение. Согласно выше приведенной оценке

$|R_n| \leq \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} < 10^{-3}$. Найдем наименьшее значение n , удовлетворяющее последнему неравенству, которое определяется непосредственной проверкой и $n = 7$, тогда $S \approx S_7 = \sum_{n=1}^7 \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n} = 0,405$.

2.2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

2.2.1. Функциональный ряд и область его сходимости

Ряд

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad (2.8)$$

членами которого являются функции от аргумента x , определенные на некотором множестве D называется **функциональным**.

Функциональный ряд (1) называется сходящимся при $x = x_0$, если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Множество всех значений x , для которых функциональный ряд сходится называется **областью сходимости функционального ряда**.

Для нахождения областей сходимости функциональных рядов можно использовать достаточные признаки сходимости числовых рядов.

ПРИМЕР 2.19. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.

Решение. Данный ряд представляет собой сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q = \ln x$. Так как прогрессия сходится лишь при $|q| < 1$, то он сходится, и притом абсолютно, при $|\ln x| < 1$, то есть при $-1 < \ln x < 1$, и, следовательно, неравенства $e^{-1} < x < e$ определяют область сходимости данного ряда.

ПРИМЕР 2.20. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$.

Решение. Применим признак Даламбера. Так как $f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$,
 $f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{1 + x^{2n+2}}$, то $P = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} \cdot (1 + x^{2n})}{(1 + x^{2n+2}) \cdot x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + x^{2n}}{1 + x^{2n+2}} =$
 $= \begin{cases} |x| & \text{при } |x| < 1 \\ 1 & \text{при } |x| = 1 \\ \frac{1}{|x|} & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$

Так как при $x = 0$ сходимость ряда очевидна, а при всех других $x \neq \pm 1$ $P < 1$, то по признаку Даламбера, данный ряд сходится для всех $x \neq \pm 1$. При $x = \pm 1$ получаются ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n}{2}$, не удовлетворяющие необходимому признаку сходимости и, следовательно расходящиеся. Таким образом, область сходимости данного ряда состоит из всех $x \neq \pm 1$.

2.2.2. Равномерная сходимость функциональных рядов

Рассмотрим функциональный ряд

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \quad (2.9)$$

Представим сумму ряда (2.9) в виде $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$, где $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$.

Сходящийся в некотором промежутке функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется равномерно сходящимся в этом промежутке, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N , не зависящий от x и такой, что для всех $n > N$ справедливо неравенство $|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ одновременно для всех значений x рассматриваемого промежутка.

Введение в рассмотрение понятия равномерно сходящихся рядов целесообразно потому, что последние обладают рядом важных свойств, связанных, в частности, с непрерывностью суммы ряда, с возможностью дифференцирования и интегрирования функциональных рядов.

Приведем достаточный признак равномерной сходимости функционального ряда.

Признак Вейерштрасса. Если члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ в некотором промежутке не превосходят по абсолютной величине соответствующих членов сходящегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами, то есть, если $|f_n(x)| \leq a_n$ для всех x упомянутого промежутка, то данный ряд функциональный ряд сходится в этом промежутке абсолютно и равномерно.

ПРИМЕР 2.21. Установить равномерную сходимость функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

Решение. Для всех значений x справедливо неравенство $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$.

Так как $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — сходящийся, то данный функциональный ряд, по признаку Вейерштрасса, сходится равномерно на любом отрезке.

ПРИМЕР 2.22. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ в интервале $(0,1)$.

Решение. Сумма данного ряда и модуль остатка равны $S(x) = \frac{1}{1-x}$,

$$|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| = \left| \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right| = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Зададимся теперь произвольным числом $\varepsilon > 0$ и попытаемся отыскать номер N так, чтобы из справедливости неравенства $n > N$ вытекала справедливость неравенства $|R_n(x)| < \varepsilon$, т.е.

$$\frac{x^{n+1}}{1-x} < \varepsilon.$$

С этой целью разрешим последнее неравенство относительно n : $x^{n+1} < (1-x)\varepsilon$; $n \ln x < \ln(1-x)\varepsilon$; $n > \frac{\ln(1-x)\varepsilon}{\ln x}$ (смысл неравенства изменился так, как $\ln x < 0$).

Примем за число N целую часть последней дроби, т.е. положим

$$N = \left[\frac{\ln(1-x)\varepsilon}{\ln x} \right]. \quad (2.10)$$

Этой формулой определяется наименьшее из всех возможных целых положительных чисел N таких, что из $n > N$ следует справедливость неравенства

$$\frac{x^{n+1}}{1-x} < \varepsilon.$$

Из равенства (2.10) видна зависимость N от ε и x . Остается исследовать поведение функции $N(x)$ в интервале $(0,1)$. Нетрудно видеть, что в этом интервале она неограничена, так как при $x \rightarrow 1$ $\ln x \rightarrow 0$ и, следовательно, $N \rightarrow \infty$. А так как даже наименьшее из всех возможных N неограниченно возрастает при $x \rightarrow 1$, то не существует числа N такого, чтобы для всех x интервала $(0,1)$ остаток ряда был меньше ε . Таким образом, данный ряд в интервале $(0,1)$ сходится неравномерно.

2.2.3. Степенные ряды. Радиус и интервал сходимости

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \text{где } a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots -$$

действительные числа называется **степенным**.

Основное свойство степенных рядов состоит в том, что если степенной ряд сходится при $x = x_0$, то он сходится при всяком значении x , удовлетворяющем неравенству $|x| < |x_0|$ (теорема Абеля).

Одним из следствий теоремы Абеля является факт существования для всякого степенного ряда радиуса и интервал сходимости $-R < x < R$, внутри которого степенной ряд абсолютно сходится и вне которого он расходится. На концах которого интервал сходимости (в точках $x = \pm R$) различные степенные ряды ведут себя по-разному: одни сходятся абсолютно на обоих концах, другие – либо условно сходятся на обоих концах, либо на одном из них условно сходятся, на другом расходятся, третьи – расходятся на обоих концах.

Радиус сходимости степенного ряда можно вычислить по одной из формул

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{или} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

при условии, что пределы в них входящие существуют. Так, например, этими формулами нельзя пользоваться в тех случаях, когда бесконечное число коэффициентов степенного ряда равно нулю. В частности, приведенные формулы неприменимы, если степенной ряд содержит лишь четные или нечетные степени x .

Характер сходимости степенного ряда характеризуется следующей теоремой.

Теорема 2.1. На всяком отрезке, целиком принадлежащем интервалу сходимости, степенной ряд сходится равномерно.

Исследовать степенной ряд на сходимость – значит найти его интервал сходимости и выяснить, сходится или расходится в граничных точках интервала сходимости. Область сходимости степенного ряда всегда состоит из его интервала сходимости и, быть может, граничных точек этого интервала.

ПРИМЕР 2.23. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2^n}$.

Решение. Здесь $a_n = \frac{n^2}{2^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$, следовательно,

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot 2^{n+1}}{2^n (n+1)^2} = 2. \quad \text{Интервал сходимости характеризуется}$$

неравенством $-2 < x < 2$. Исследуем сходимость ряда в граничных точках этого интервала. При $x = \pm 2$ степенной ряд принимает вид $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 (\pm 2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \cdot n^2$. Оба ряда расходятся, так как не удовлетворяют необходимому условию сходимости. Следовательно, область сходимости данного степенного ряда совпадает с его интервалом сходимости: $-2 < x < 2$.

ПРИМЕР 2.24. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$.

Решение. Так как $a_n = \frac{1}{n^n}$, то $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$. Ряд сходится при всех значениях: $-\infty < x < \infty$.

Одновременно с рядами вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ рассматривают степенные ряды более общего вида: $a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$.

Подстановка $x-a = y$ приводит последний ряд к виду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$. Если интервал сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ симметричен относительно точки $x=0$, то интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ характеризуется неравенствами $a-R < x < a+R$.

ПРИМЕР 2.25. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$.

Решение. Здесь $a_n = \frac{1}{n^2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$, следовательно, $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 = 1$. Интервал сходимости характеризуется неравенством $-1 < x-2 < 1$, т.е. $1 < x < 3$.

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка. Если $x = 3$, то получаем ряд $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$, который сходится, так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

сходится при $s > 1$. Если $x = 1$, то получается $-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots$. Этот ряд сходится (и притом абсолютно), так как сходится ряд из абсолютных величин его членов.

Итак, степенной ряд сходится для значений x , удовлетворяющих двойному неравенству: $1 \leq x \leq 3$.

Функциональный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (f(x))^n$ называется **обобщенным степенным**.

Подстановка $f(x) = y$ приводит его к виду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$. Если $|y| < R$ – область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$, то для нахождения области сходимости данного ряда следует решить неравенство $|f(x)| < R$ относительно x .

ПРИМЕР 2.26. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} \cdot e^{-nx}$.

Решение. Данный ряд является обобщенным степенным. Положив $e^{-x} = y$, получим степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} y^n$ с радиусом сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \text{ В граничной точке } y = e \text{ данный}$$

ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}$, и так как для любого n $\sqrt[n]{a_n} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > 1$

и $a_n > 1$, то этот ряд расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости.

Так как $y = e^{-x} > 0$, то областью сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} \cdot y^n$ будет множество чисел y , удовлетворяющих неравенству $0 < y < e$. Отсюда $0 < e^{-x} < e$, $-\infty < -x < 1$ и, следовательно, $x > -1$. Последнее неравенство определяет область сходимости данного ряда.

2.2.4. Разложение функций в степенные ряды

Всякая функция бесконечно дифференцируемая в интервале $|x - x_0| < r$, т.е. $x_0 - r < x < x_0 + r$, может быть разложена в этом интервале в сходящийся к ней степенной ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots,$$

если в этом интервале выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0,$$

где $R_n(x)$ — остаточный член формулы Тейлора, $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$.

При $x_0 = 0$ получается ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Приведем разложения в ряд Маклорена основных элементарных функций:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty;$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

$$-1 < x < 1.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n} + \dots, \quad -1 < x < 1;$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots, \quad -1 < x < 1;$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

Используя эти разложения, можно довольно просто находить разложения многих других функций. Так, например, для нахождения разложения в ряд по степеням x функции $\cos x^2$ нужно в ряде для $\cos x$ заменить x на x^2 . При этом отпадает необходимость исследовать остаточные члены соответствующих формул Тейлора с целью выяснения, можно ли между составленным рядом и самой функцией поставить знак равенства, так как области сходимости степенных рядов для основных элементарных функций известны.

ПРИМЕР 2.27. Разложить функцию 2^x в ряд Тейлора по степеням x .

Решение. Применим прием непосредственного разложения.

Составим для данной функции ряд Тейлора. С этой целью найдем сначала числовые значения производных всех порядков функции 2^x в точке $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^x, & f(0) &= 1; \\ f'(x) &= 2^x \ln 2, & f'(0) &= \ln 2; \\ f''(x) &= 2^x \ln^2 2, & f''(0) &= \ln^2 2; \\ &\dots & & \dots \\ f^{(n)}(x) &= 2^x \ln^n 2, & f^{(n)}(0) &= \ln^n 2; \\ &\dots & & \dots \end{aligned}$$

Подставляя теперь найденные значения производных в выражение для ряда Тейлора при $x_0 = 0$, получаем ряд Тейлора для функции 2^x по степеням x :

$$1 + \frac{\ln 2}{1!} x + \frac{\ln^2 2}{2!} x^2 + \dots + \frac{\ln^n 2}{n!} x^n + \dots$$

Находим область сходимости

полученного ряда. Так как $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \ln^n 2}{n! \ln^{n+1} 2} = \infty$, то ряд сходится для всех значений x .

Выясним, для каких значений x найденное разложение сходится к функции 2^x . С этой целью заметим, что производные всех порядков данной функции на любом отрезке $-R \leq x \leq R$ ввиду справедливости неравенства $\ln^n 2 < 1$ ограничены одним и тем же числом 2^R : $|f^{(n)}(x)| = |2^x \ln^n 2| \leq 2^R$.

Отсюда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln^{n+1} 2}{(n+1)!} = 0$, тогда найденное разложение сходится к функции 2^x при всех значениях x :

$$2^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n 2}{n!} x^n.$$

ПРИМЕР 2.28. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \sin \frac{x^2}{3}$.

Решение. Полагаем $\frac{x^2}{3} = y$ и используем разложение для $\sin y$. Тогда

$$\begin{aligned} \sin \frac{x^2}{3} &= \sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \\ &= \frac{x^2}{3} - \frac{x^6}{3! \cdot 3^3} + \frac{x^{10}}{5! \cdot 3^5} + \dots + \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)! \cdot 3^{2n+1}} + \dots \end{aligned}$$

Так как разложение в ряд функции $\sin y$ имеет место для всех y , то и разложение в ряд функции $\sin^2 \frac{x^2}{3}$ имеет место для всех x .

ПРИМЕР 2.29. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Решение. Полагаем $y = -x^2$ и используем разложение для функции $\frac{1}{1-y}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + \dots + y^n + \dots = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + \\ &+ (-1)^n x^{2n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}. \end{aligned}$$

Разложение имеет место для $x \in (-1; 1)$.

ПРИМЕР 2.30. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Решение. Замечаем, что функцию $\operatorname{arctg} x$ можно получить интегрированием функции $\frac{1}{1+x^2}$, разложение которой имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \text{ поэтому} \\ \operatorname{arctg} x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned} \quad \text{Так как}$$

полученный ряд сходится к функции $\operatorname{arctg} x$ и в граничных точках интервала сходимости $x = \pm 1$, то найденное разложение имеет место для $x \in [-1; 1]$.

2.2.5. Вычисление сумм числовых и степенных рядов

Рассмотрим степенной ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можно почленно дифференцировать в каждой точке x его интеграла сходимости, т.е.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}.$$

Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можно почленно интегрировать на отрезке $[0, x]$ целиком принадлежащем интервалу сходимости, сколько угодно раз.

Дифференцирование и интегрирование рядов часто применяется для нахождения суммы $S(x)$ степенного ряда. Если сумму $S(x)$ некоторого ряда трудно найти непосредственно, но легко найти сумму ряда производных (или интегралов), то дифференцируя (или интегрируя) ряд с известной суммой можно вычислить и сумму исходного ряда.

Иногда после нескольких дифференцирований степенного ряда обнаруживается линейная зависимость между суммой $S(x)$ данного ряда и ее производными. Тогда вычисление суммы $S(x)$ сводится к решению некоторого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Дифференцирование и интегрирование степенных рядов применяется и для вычисления сумм некоторых числовых рядов. Для этого составляется дополнительный степенной ряд, который при $x = x_0$ совпадает с данным числовым рядом. Если сумма $S(x)$ функционального ряда найдена и он сходится при $x = x_0$, то число $S(x_0)$ является суммой данного числового ряда.

ПРИМЕР 2.31. Найти сумму ряда $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$.

Решение. Интервал сходимости данного ряда $(-1, 1)$. Сумму этого ряда обозначим через $S(x)$. Дифференцируя этот ряд, получаем $1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots + S'(x)$. Суммируя полученную бесконечно убывающую при $|x| < 1$ прогрессию, находим $S'(x) = \frac{1}{1-x}$, откуда $S(x) = \int \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x) + C$. Постоянную C можно вычислить, зная, что при $x = 0$ $S(0) = 0$ и, следовательно, $0 = -\ln(1-0) + C$, откуда $C = 0$. Таким образом, сумму данного ряда $S(x) = -\ln(1-x)$, т.е.

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots = -\ln(1-x).$$

ПРИМЕР 2.32. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x^2-1)^n$.

Решение. Положим $x^2 - 1 = y$ и найдем $S(y)$ степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)y^n$, сходящегося для $|y| < 1$. Интегрируя равенство $S(y) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)y^n$ на отрезке $[0, y]$ и затем дифференцируя полученное равенство по y , получаем $\int_0^y S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} y^{n+1} = \frac{y}{y-1}$;

$$S(y) = \left(\frac{y}{1-y} \right)' = \frac{1}{(1-y)^2}, \text{ но } y = x^2 - 1, \text{ поэтому}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x^2-1)^n = \frac{1}{(2-x^2)^2}.$$

Последнее равенство выполняется, если $|x^2 - 1| < 1$ или $-\sqrt{2} < x < 0$, $0 < x < \sqrt{2}$. Равенства и определяют область сходимости данного ряда к сумме $\frac{1}{(2-x^2)^2}$.

ПРИМЕР 2.33. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$.

Решение. Составим вспомогательный степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ и обозначим его сумму через $S(x)$. Необходимо найти $S(1)$. Для этого обе части равенства $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ продифференцируем по x и найдем сумму полученного ряда:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{1}{2-x}.$$

Теперь обе части равенства $S'(x) = \frac{1}{2-x}$ проинтегрируем на отрезке $[0, x]$: $S(x) = \int_0^x \frac{dt}{2-t} = -(\ln(2-t)) \Big|_0^x = -\ln(2-x) + \ln 2$, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = S(1) = \ln 2$.

2.2.6. Приближенные вычисления значений функций с помощью степенных рядов

Для вычисления приближенного значения функции $f(x)$ в ее разложении в степенной ряд сохраняют первые n членов, а остальные члены отбрасывают. Для оценки погрешности найденного приближенного значения нужно оценить сумму отброшенных членов. Если данный ряд знакопостоянный, то ряд, составленный из отброшенных членов, сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией. В случае знакопеременного ряда, члены которого удовлетворяют условиям теоремы Лейбница, используется оценка $|R_n| < a_{n+1}$, где a_{n+1} — первый из отброшенных членов ряда.

ПРИМЕР 2.34. Оценить погрешность приближенного равенства $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$, $0 < x < n + 1$.

Решение. Погрешность этого приближенного равенства определяется суммой членов, следующих после $\frac{x^n}{n!}$ в разложении функции e^x .

$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \dots$, заменив каждый из сомножителей $n+2, n+3, n+4, \dots$ меньшей величиной $n+1$, получим неравенство $R_n = \frac{x^n}{n!} \left(\frac{x}{n+1} + \left(\frac{x}{n+1} \right)^2 + \dots \right)$. Просуммируем бесконечно убывающую геометрическую

прогрессию в круглых скобках: $R_n < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{(n+1) \left(1 - \frac{x}{n+1} \right)}$, т.е.

$$R_n < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{n+1-x} = \frac{x^{n+1}}{n!(n+1-x)}.$$

ПРИМЕР 2.35. Вычислить $\sqrt[4]{e}$ с точностью до 0,00001.

Решение. В разложении функции e^x полагаем $x = \frac{1}{4}$, $e^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2 \cdot 2!} + \frac{1}{4^3 \cdot 3!} + \frac{1}{4^4 \cdot 4!} + \dots$, если взять пять членов этого ряда, то ошибка вы-

числения не будет превышать 0,00001: $R_n < \frac{x^{4+1}}{4!(4+1-x)} = \frac{1}{4^5 \cdot 4! \left(5 - \frac{1}{4}\right)} < 0,0001$. Подсчитав сумму пяти выписанных выше членов

ряда, получим $\sqrt[4]{e} \approx 1,28403$.

ПРИМЕР 2.36. Вычислить $\sqrt[3]{68}$ с точностью до 0,001.

Решение. $\sqrt[3]{68} = \sqrt[3]{64+4} = 4 \sqrt[3]{1+\frac{4}{64}} = 4 \left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}}$. Раскладываем в

ряд функцию $(1+x)^{\frac{1}{3}}$:

$$\begin{aligned} (1+x)^{\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3 + \dots + \\ &= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1 \cdot 2}{3^2 \cdot 2!}x^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3!}x^3 - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{3^4 \cdot 4!}x^4 + \dots \end{aligned}$$

Пологая в полученном разложении $x = \frac{1}{16}$ и умножая ряд на 4, получаем

$$\sqrt[3]{68} = 4 \left(1 + \frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 4 \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 16} - \frac{1 \cdot 2}{3^2 \cdot 2! \cdot 16^2}\right) = 4 + \frac{1}{12} - \frac{1}{576} \approx 4,082.$$

Здесь взятые три члена ряда обеспечивают нужную точность, так как

$$|R_3| < 4 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3! \cdot 16^2} < 0,001.$$

2.2.7. Применение степенных рядов к вычислению определенных интегралов

Для приближенного вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ его предварительно

представляют в виде числового ряда, для суммирования которого берут необходимое число членов.

ПРИМЕР 2.37. Вычислить $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ с точностью до 0,0001.

Решение. Заменяв в подынтегральном выражении $\cos x$ его разложением в степенной ряд, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots}{x^2} dx = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \dots \right) dx = \left(\frac{1}{2!}x - \frac{x^3}{4!3!} + \frac{x^5}{6!5!} - \dots \right) \Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2! \cdot 2} - \frac{1}{4! \cdot 3 \cdot 2^3} + \\ &+ \frac{1}{6! \cdot 5 \cdot 2^5} - \dots \approx 0,25 - 0,0017 = 0,2483 \quad \text{так, как} \quad |R_2| < a_3 = \frac{1}{6! \cdot 5 \cdot 2^5} < \\ &< 0,0001. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2.38. Вычислить $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ с точностью ε при любом значении

x .

Решение. Раскладывая подынтегральную функцию в степенной ряд и интегрируя ряд, получим

$$\sin x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + \dots$$

Приведем программу для вычисления этой суммы на ФОРТРАНЕ

```

PROGRAM SI
C — ВВОД ЗНАЧЕНИЯ АРГУМЕНТА X И ТОЧНОСТИ E
  READ (*, 100) X, E
  1000 FORMAT (F 5.2, E 10.3)
C — ПОИСК ЧИСЛА ЧЛЕНОВ В N — ЧАСТИЧНОЙ СУММЕ
  AX=ABC (X)
  N=0
  A=AX
2000 N=N+1
  A=A*(AX/2*N+1)**2*(2*N-1)/(2*N)
  IF(A-E) 300, 200, 200
C — ВЫЧИСЛЕНИЕ N- ЧАСТИЧНОЙ СУММЫ
3000 S=1.0
  DO 400 J=N,1,-1
4000 S=1.0-S*(AX/2*J+1)**2*(2*J-1)/(2*J)
  S=S*X
C — ПЕЧАТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ

```

```

WRITE (*, 500) X, S
500 FORMAT (5 X, 'S I (', F 5.2, ') = ', F 7.5)
END

```

2.2.8. Применение степенных рядов к решению дифференциальных уравнений

Пусть требуется проинтегрировать дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = F(x, y, y'). \quad (2.11)$$

Если его решение не выражается через элементарные функции в конечном виде, то его решение удастся отыскать в виде некоторого степенного ряда. Рассмотрим два способа решения дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

Способ последовательных дифференцирований применяется, когда требуется найти частное решение $y = f(x)$ уравнения (2.11), удовлетворяющее начальным условиям $f(x_0) = y_0$, $f'(x_0) = y'_0$. Если в окрестности своих начальных условий (в окрестности точки (x_0, y_0, y'_0)) уравнение (2.11) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка, то частное решение ищут в виде ряда Тейлора

$$y = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \dots, \quad (2.12)$$

первые два члена которого известны, так как $f(x_0) = y_0$, $f'(x_0) = y'_0$.

Из уравнения (2.11) $f''(x_0) = F(x_0, y_0, y'_0)$. Если затем продифференцировать уравнение (2.11) по x , то можно найти сколько угодно производных искомой функции $f(x)$ в точке x_0 :

$$f'''(x_0) = \frac{dF(x_0, y_0, y'_0)}{dx}, \quad f^{(n)}(x_0) = \frac{d^{n-2}F(x_0, y_0, y'_0)}{dx^{n-2}}, \dots$$

Здесь под символами $\frac{dF}{dx}, \dots, \frac{d^{n-2}F}{dx^{n-2}}, \dots$ понимаются полные производные по x от функции $F(x, y, y')$ в предположении, что y и y' зависят от x , т.е.

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot F(x, y, y') \quad \text{и т.д.}$$

Подставляя значения найденных производных функции $f(x)$ в разложение (2.12) получаем искомое решение

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0) + \frac{1}{2!} y''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} y^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \dots$$

Рассмотренный метод можно применить для решения дифференциальных уравнений любого порядка.

Этот метод применим и для построения общего решения дифференциального уравнения, если y_0, y'_0 рассматривать как произвольные постоянные.

ПРИМЕР 2.39. Найти первые шесть членов разложения в ряд решения уравнения $y'' = x \sin y'$, удовлетворяющего условиям $y(1) = 0, y'(1) = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Решение будем искать в виде ряда

$$y = f(1) + \frac{1}{1!} f'(1)(x - 1) + \frac{1}{2!} f''(1)(x - 1)^2 + \frac{1}{3!} f'''(1)(x - 1)^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(1)(x - 1)^4 + \dots$$

Здесь $f(1) = 0, f'(1) = \frac{\pi}{2}$. Находим производные 2,3,4,5 порядков:

$f''(1) = 1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1, f'''(x) = \sin y' + x y'' \cos y', f'''(1) = 1,$ аналогично $f^{(4)}(1) = -1, f^{(5)}(1) = -6$. Подставляя найденные значения производных в искомый ряд, получаем решение данного уравнения

$$y = \frac{\pi}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{6}(x - 1)^3 - \frac{1}{24}(x - 1)^4 - \frac{1}{20}(x - 1)^5 + \dots$$

Способ неопределенных коэффициентов применяется, когда требуется найти либо частное решение $y = f(x)$ уравнения (2.11), удовлетворяющее начальным условиям $f(x_0) = y_0, f'(x_0) = y'_0$, либо общее решение в виде степенного ряда по степеням $(x - x_0)$.

Если дифференциальное уравнение (2.11) в окрестности точки (x_0, y_0, y'_0) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши, то его частное решение можно искать в виде ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n, \quad (2.13)$$

коэффициенты C_n которого подлежат определению.

Если точка (x_0, y_0, y'_0) является особой для уравнения (2.11), то его частное решение следует искать в виде обобщенного степенного ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^{n+\rho}, \quad (2.14)$$

где ρ — не обязательное целое число и подлежит определению вместе с коэффициентами ряда.

Чтобы определить коэффициенты C_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, искомого ряда (2.13) или (4) поступают следующим образом:

1) дважды дифференцируют ряд (2.13) или (2.14) с неизвестными коэффициентами и находят y' и y'' ;

2) подставляют разложения y, y', y'' в степенные ряды в исходное дифференциальное уравнение (2.11);

3) представляют функцию $F(x, y, y')$ в виде степенного ряда по степеням $x - x_0$, после чего равенство принимает вид равенства двух степенных рядов;

4) путем приравнивания коэффициентов полученных рядов при одинаковых степенях разностей $x - x_0$, получают уравнения для определения неизвестных коэффициентов C_n ; если решение ищется в виде ряда (2.14), то, приравнявая коэффициенты степени разности $x - x_0$, получают уравнения для определения ρ ;

5) из полученных уравнений находят коэффициенты C_n и подставляют их в искомый ряд (2.13).

Полученное в виде ряда решение может быть исследовано на сходимость известными признаками. Если полученный ряд сходится в некоторой области, то обязательно к решению дифференциального уравнения, так как его коэффициенты определялись из условия, чтобы сумма ряда была решением.

ПРИМЕР 2.40. Решить дифференциальное уравнение

$$\begin{cases} x y' = \sin x \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Решение. Решение будем искать в виде степенного ряда $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$. Подставляя в (2.15) и используя разложение для

$$\sin x, \text{ получим } \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ a_0 = 0. \end{cases} \quad \text{Приравнявая теперь коэффици-}$$

енты при одинаковых степенях аргумента, получаем

$$\begin{cases} 2n a_{2n} = 0, & n = 1, 2, 3, \dots \\ (2n+1)a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, & n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad \text{Поэтому окончательно получаем}$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} = \text{Si}(x), \text{ что совпадает с результатом разложения } \text{Si}(x) \text{ в степенной ряд.}$$

ПРИМЕР 2.41. Решить дифференциальное уравнение

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - k^2) y = 0. \quad (2.16)$$

Решение. Одно из решений этого уравнения неограниченно возрастает при $x \rightarrow 0$ другое может быть найдено в виде степенного ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \quad (2.17)$$

Найдем это второе решение. Дифференцируя (2.17) и подставляя в (2.16), получаем

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1};$$

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + 4 \cdot 3 a_4 x^2 + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2};$$

$$x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + (x^2 - k^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \text{ или:}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} - k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0. \text{ Учитывая то,}$$

$$\text{что } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n, \text{ и собирая коэффициенты при одинаковых степенях аргумента } x, \text{ получаем}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} ((n^2 - k^2) a_n + a_{n-2}) x^n + a_1 (1 - k^2) x - k^2 a_0 = 0.$$

Функция, разлагаемая в степенной ряд, тождественно равна нулю только в том случае, если все ее коэффициенты при степенях аргумента x равны нулю. Поэтому получаем следующую бесконечную систему уравнений для коэффициентов разложения (2.17):

При целом k из первых $|k|$ уравнений получается $a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$. Из $k+1$ -го уравнения следует, что a_k — произвольное число, играющее роль произвольной постоянной. Остальные коэффициенты, определяются из предыдущих посредством рекуррентной формулы, получающейся из (2.18):

Поскольку $a_{k-1} = 0$, то из (2.19) получаем $a_{k+1} = a_{k+3} = \dots = 0$. Следовательно, ненулевыми коэффициенты будут только коэффициенты с индексом $n = k + 2\ell$, $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$. Используя то, что $n^2 - k^2 = (k + 2\ell)^2 - k^2 = 4\ell(k + \ell)$, получаем

ное выражение в (2.17), получаем

Функция

называется функцией Бесселя k -го порядка, $2^k k! a_k = C$ – произвольная постоянная, поэтому общее решение уравнения (2.16), ограниченное при $x = 0$, имеет при целом k следующий вид:

105

ПРИМЕР 2.42. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0 \\ y(0) < \infty \\ y'(0) = 2 \end{cases} \quad \text{и вычислить } y(2) \text{ с точностью } \varepsilon = 10^{-6}.$$

Решение. Согласно приведенным выше выкладкам

$$y(x) = C J_1(x) = C \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^n}{n!(n+1)!} = C \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + \dots \right). \text{ Отсюда получаем}$$

$$y'(0) = \frac{C}{2} = 2 \Rightarrow C = 4; \text{ решение задачи Коши } y = 4 J_1(x).$$

При $x = 2$ получаем следующий знакочередующийся ряд:

$$y(2) = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}.$$

Программа на БЕЙСИКЕ может иметь следующий вид:

```
10 DIM A (100): A (1)=4
20 FOR I=1 TO 100: A (I+1)=-A(I)/(I+1)
30 IF ABS (A(I+1))<1. E-6 THEN 50
40 NEXT I
50 S=0: FOR K=I+1 TO 1 STEP 1: S=S+A(K): NEXT K
60 PRINT S: END
```

Полученное значение 2,306899309 ... и точное значение из справочника 2,306899231 ...

2.3. РЯДЫ ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

2.3.1. Разложение периодических функций в ряд Фурье

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. *Рядом Фурье* периодической функции $f(x)$ с периодом 2π , определенной на отрезке $[-\pi, \pi]$, называется функциональный ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Если ряд (1) сходится, то его сумма $S(x)$ есть периодическая функция с периодом 2π , т.е. $S(x + 2\pi) = S(x)$.

Теорема 2.2. Если функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ имеет конечное число экстремумов и является непрерывной за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, тогда ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке отрезка $[-\pi, \pi]$ и сумма $S(x)$:

1) $S(x) = f(x)$ во всех точках непрерывности функции $f(x)$, лежащих внутри отрезка $[-\pi, \pi]$;

2) $S(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0))$, где x_0 — точка разрыва первого рода функции $f(x)$;

3) $S(x) = \frac{1}{2}(f(-\pi + 0) + f(\pi - 0))$ на концах отрезка, т.е. при $x = \pm\pi$.

Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[-\ell, \ell]$, где ℓ — произвольное положительное число, то при выполнении условий выше приведенной теоремы эта функция $f(x)$ может быть представлена в виде ряда Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{\ell} x + b_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right),$$

$$\text{где } a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi}{\ell} x dx, \quad b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx.$$

В случае, когда $f(x)$ — четная функция, ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{\ell} x, \quad \text{где } a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi}{\ell} x dx.$$

Если $f(x)$ — нечетная функция, то ее ряд Фурье содержит только синусы, т.е.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad \text{где } b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx.$$

ПРИМЕР 2.42. Разложить в ряд Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi < x < 0, \\ \pi - x, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Решение. Данная функция удовлетворяет условиям теоремы разложимости в ряд Фурье, вне предела интервала $(-\pi, \pi)$ продолжаем периодически с периодом $T = 2\pi$.

Вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \pi dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) dx = \frac{1}{\pi} \pi \cdot x \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(\pi - x)^2}{2} \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi \cos nx dx -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = - \frac{1}{\pi n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1} - 1}{\pi n^2};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi \sin nx dx -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{\cos nx}{n} = \frac{(-1)^n}{n}, \text{ тогда ряд Фурье для этой функции}$$

принимает вид:

$$f(x) = \frac{3}{4} \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^2 \pi} \cos nx + \frac{(-1)^n}{n} \sin nx \right). \text{ Найденные раз-}$$

ложения имеет место при всех значениях $x \in (-\pi; \pi)$.

ПРИМЕР 2.43. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом $T = 2$, заданную на отрезке $(-1, 1)$ уравнением $f(x) = x^2$.

Решение. Рассматриваемая функция является четной. Ее график – дуга параболы, заключенная между точками $(-1; 1)$ и $(1; 1)$. Так как $\ell = 1$, то

$$a_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3};$$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi}{\ell} x dx = 2 \int_0^1 x^2 \cos n\pi x dx. \text{ Здесь нужно дважды про-}$$

интегрировать по частям:

$$1) u = x^2, dv = \cos n\pi x, du = 2x dx, v = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x;$$

$$a_n = \frac{2x^2}{n\pi} \sin n\pi x \Big|_0^1 - \frac{4}{n\pi} \int_0^1 x \sin n\pi x dx = - \frac{4}{n\pi} \int_0^1 x \sin n\pi x dx;$$

$$2) u = x, dv = \sin n\pi x, du = dx, v = - \frac{1}{n\pi} \cos n\pi x;$$

$$a_n = \frac{4x}{n^2 \pi^2} \cos n \pi x \Big|_0^1 - \frac{4}{n^2 \pi^2} \int_0^1 \cos n \pi x dx = \frac{4}{n^2 \pi^2} (-1)^n.$$

Все коэффициенты $b_n = 0$, так как эта функция четная. Следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n \pi x.$$

2.3.2. Разложение в ряд Фурье непериодической функции

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[0, \ell]$. Дополняя определение этой функции произвольным образом на отрезке $[-\ell, 0]$ можно разложить эту функцию в ряд Фурье.

а) дополним определение данной функции так, чтобы при $-\ell \leq x < 0$ было $f(x) = f(-x)$, в результате получится четная функция. (В этом случае говорят, что функция $f(x)$ «продолжена четным образом»). Полученную функцию разлагают в ряд Фурье, этот ряд имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n \pi}{\ell} x, \quad x \in [0, \ell], \text{ где}$$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n \pi}{\ell} x dx.$$

б) продолжим определение $f(x)$ при $-\ell \leq x < 0$ так: $f(x) = -f(-x)$, то получим нечетную функцию, которая разлагается в ряд Фурье по синусам, т.е.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n \pi}{\ell} x, \quad x \in [0, \ell], \text{ где } b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n \pi}{\ell} x dx.$$

В этом случае говорят, что $f(x)$ «продолжение нечетным образом».

ПРИМЕР 2.44. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ на отрезке $[0, \pi]$ по синусам.

Решение. Продолжая эту функцию на отрезке нечетным образом, имеем

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin n \pi x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin n \pi x dx = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n} \text{ Тогда,}$$

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n x, \quad x \in [0, \ell].$$

ПРИМЕР 2.45. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ на отрезке $[0, \pi]$ по косинусу.

Решение. Продолжая эту функцию четным образом, получим $f(x) = |x|$, $x \in (-\pi; \pi]$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = -\frac{4}{\pi n^2}, \text{ тогда ряд Фурье}$$

имеет вид:

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad x \in [0, \pi].$$

2.3.3. Ряд Фурье в комплексной форме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8. Если функция $f(x)$ периодическая с периодом $T = 2\pi$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ удовлетворяют условиям разложимости в ряд, то ряд

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$$

называется **комплексной формой ряда Фурье**, где

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

C_n называется комплексным коэффициентом ряда Фурье функции $f(x)$.

Если функция $f(x)$ периодическая с периодом 2ℓ , то ряд Фурье в комплексной форме имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \ell^{\frac{in\pi}{\ell}}.$$

Коэффициенты ряда C_n выражаются формулами

$$C_n = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-\frac{in\pi}{\ell}x} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ПРИМЕР 2.46. Функцию $e^{\frac{1}{2}xi}$ разложить в ряд Фурье в комплексной форме на интервале $(-\pi, \pi)$.

Решение. Согласно вышеприведенной формуле для коэффициента C_n имеем:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{1}{2}xi} \cdot e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\left(\frac{1}{2}-n\right)ix} dx = \\ &= \frac{2}{\pi(1-2n)} \sin\left(\frac{1}{2}-n\right)\pi. \text{ Тогда ряд Фурье имеет вид:} \end{aligned}$$

$$e^{\frac{1}{2}xi} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{2} - n\right) i \pi}{1 - 2n} \cdot e^{inx}, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

2.3.4. Интеграл Фурье

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям разложимости в ряд Фурье и $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ — сходится, то

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos z(u-x) du \right) dz$$

называется интегралом Фурье для функции $f(x)$.

а) если $f(x)$ — четная функция, то $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(u) \cos zu du \right) \cos zx dz$;

б) если $f(x)$ — нечетная функция, тогда $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(x) \sin zu du \right) \sin zx dz$.

ПРИМЕР 2.47. Функцию $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| > 1, \\ 1, & \text{если } 0 < x < 1, \\ -1, & \text{если } -1 < x < 0 \end{cases}$ представить интегралом Фурье.

Решение.

Функция $f(x)$ является нечетной, поэтому $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(u) \sin zu du \right) \sin zx dz$. Отдельно вычислим внутренний интеграл, имеем:

$$\int_0^{\infty} f(u) \sin zu du = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sin zu du = -\frac{2}{\pi} \frac{\cos zu}{z} \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi} \frac{1 - \cos z}{z},$$

тогда интеграл Фурье для этой функции имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos z}{z} \sin zx dz = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \sin^2 \frac{z}{2} \cdot \sin zx \cdot \frac{dz}{z}.$$

2.3.5. Интеграл Фурье в комплексной форме. Преобразование Фурье

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. Если функция $f(x)$ определена в интервале $(-\infty, \infty)$ и удовлетворяет условиям разложимости в ряд Фурье и $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$,

то

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha(x-t)} dt \right) d\alpha$$

называется **интегралом Фурье в комплексной форме** или

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt \right) e^{i\alpha x} d\alpha,$$

а функция

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt$$

называется **преобразованием Фурье функции** $f(x)$, тогда

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

называется **обратным преобразованием Фурье**.

а) функция $f(x)$ – четная, то $F_C(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt$ называется

косинус-преобразованием Фурье функции $f(t)$, а

$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_C(\alpha) \cos \alpha x dx$ называется **обратным преобразованием**.

б) функция $f(x)$ – нечетная, то $F_S(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt$ называется

синус-преобразованием Фурье функции $f(t)$, а функция

$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_S(\alpha) \sin \alpha x d\alpha$ называется **обратным преобразованием**.

Преобразование Фурье обладает следующими основными свойствами

- 1) $F(C f(t)) = C F(f(t))$, $C - \text{const}$;
- 2) $F(f_1(t) + f_2(t)) = F(f_1(t)) + F(f_2(t))$;
- 3) $F(f'(t)) = i\alpha F(f(t))$.

ПРИМЕР 2.48. Функцию $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1 \end{cases}$ представить интегралом Фурье в комплексной форме.

Решение. $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt \right) e^{i\alpha x} d\alpha =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-1}^1 f(t) e^{-i\alpha t} dt \right) e^{i\alpha x} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{i\alpha} \right) e^{i\alpha x} d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} e^{i\alpha x} d\alpha \text{ итак } f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} e^{i\alpha x} d\alpha.$$

ПРИМЕР 2.49. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Решение. Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям, при которых существует преобразование Фурье этой функции, тогда

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(1+i\alpha)x} dx =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-(1+i\alpha)x}}{1+i\alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+i\alpha)}, \text{ итак, } F(\alpha) = \frac{1-i\alpha}{\sqrt{2\pi}(1+\alpha^2)}.$$

ПРИМЕР 2.50 Найти косинус- преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{3}{2}, \\ 0, & \text{если } \frac{3}{2} < x < \infty. \end{cases}$$

Решение. Согласно формулы косинус- преобразования Фурье имеем

$$F_C(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{3/2} (2x - 3) \cdot \cos \alpha x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (2x - 3) \times$$

$$\times \frac{\sin \alpha x}{\alpha} \Big|_0^{3/2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2}{\alpha} \cdot \int_0^{3/2} \sin \alpha x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2 \cos \alpha x}{\alpha^2} \Big|_0^{3/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2 \left(\cos \frac{3\alpha}{2} - 1 \right)}{\alpha^2}$$

итак,
$$F_C(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2\left(\cos \frac{3}{2}\alpha - 1\right)}{\alpha^2}.$$

2.3.6. Спектральные характеристики ряда и интеграла Фурье

Пусть функция $f(x)$ периодическая с периодом $T = \ell$ определена на интервале $\left(-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right)$ и удовлетворяет условиям разложимости в ряд Фурье.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10. *Спектральной функцией $S(v_n)$ ряда Фурье или спектральной плотностью* называется отношение коэффициента Фурье функции $f(x)$ периода ℓ

$$C_n = C(v_n) = \frac{1}{\ell} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} f(x) \cdot e^{-2\pi i v_n x} dx, \quad v_n = \frac{n}{\ell}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

к приращению частоты $\Delta v_n = \frac{n+1}{\ell} - \frac{n}{\ell} = \frac{1}{\ell}$, т.е.

$$S(v_n) = \frac{C(v_n)}{\Delta v_n} = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} f(x) \cdot e^{-2\pi i v_n x} dx.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.11. *Амплитудным спектром $\rho(v_n)$ называется модуль спектральной функции, а фазовым спектром $\Phi(v_n)$ — взятый с обратным знаком аргумент спектральной функции, т.е.*

$$\rho(v_n) = |S(v_n)| = \ell |C(v_n)|$$

и

$$\Phi(v_n) = -\arg S(v_n).$$

ПРИМЕР 2.51. Найти спектральную функцию ряда Фурье и амплитудный и фазовый спектр функции $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-2, -1), \\ 1 & \text{при } x \in (-1, 1), \\ 0 & \text{при } x \in (1, 2) \end{cases}$ и $f(x+4) = f(x)$.

Решение. Для взятой функции $v_n = \frac{n}{4}$ и

$$S(v_n) = \int_{-2}^2 f(x) e^{-2\pi i v_n x} dx = \int_{-1}^1 e^{-2\pi i v_n x} dx = \frac{e^{-2\pi i v_n x}}{-2\pi i v_n} \Big|_{-1}^1 =$$

$$= \frac{1}{\pi v_n} \frac{e^{2\pi i v_n} - e^{-2\pi i v_n}}{2i} = \frac{1}{\pi v_n} \sin 2\pi v_n, \quad S(v_n) = \frac{1}{\pi v_n} \cdot \sin 2\pi v_n,$$

следовательно, $\rho(v_n) = |S(v_n)| = \frac{|\sin 2\pi v_n|}{\pi |v_n|},$

$$\Phi(v_n) = -\arg S(v_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sin 2\pi v_n > 0, \\ -\pi, & \text{если } \sin 2\pi v_n < 0. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.12. *Спектральной функцией интеграла Фурье функции $f(x)$ называется преобразование Фурье этой функции*

$$S(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i v x} dx.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.13. Величина $\rho(v) = |S(v)|$ называется *амплитудным спектром*, а величина $\Phi(v) = -\arg S(v)$ — *фазовым спектром*.

$$\frac{2\ell}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{\ell}.$$

УЧЕБНО - МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

РАЗДЕЛ 10 «ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ»

2. Методические указания для студентов

2.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

2.1.1. Числовой ряд и его сумма

Задана последовательность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Выражение $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ называется *числовым рядом*, а числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — *членами ряда*, a_n называется его *общим членом*. Ряд часто записывают в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (2.1)$$

Сумму первых n членов числового ряда обозначают через S_n и называют n -й частичной суммой ряда:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Если существует конечный предел $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, ряд называется *сходящимся*, а число S — *суммой ряда*.

В этом случае пишут $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Ряд называется *расходящимся*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует (в частности $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Ряд $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$, полученный из ряда (2.1) отбрасыванием первых n членов, называется n -м *остатком ряда* (2.1).

Если сумму остатка сходящегося ряда обозначить через R_n , то $S_n + R_n = S$.

Приведем основные теоремы о сходящихся числовых рядах.

1. Отбрасывание от ряда или присоединением к ряду конечного числа начальных членов не меняет его сходимости или расходимости.

2. Если ряд (2.1) сходится, то предел его n -го остатка при $n \rightarrow \infty$ равен нулю, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$.

3. Если члены сходящегося ряда (2.1), имеющего сумму S , умножить на число λ , то полученный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda \cdot a_n)$ будет также сходящимся, а число $\lambda \cdot S$ — его суммой.

4. Если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, имеющие соответственно суммы A и B , то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, причем сумма последнего ряда равна $A + B$.

5. Необходимый признак сходимости ряда. Если ряд (2.1) сходится, то предел его общего члена равен нулю: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Отсюда вытекает, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится. Если же $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то о сходимости ряда еще ничего нельзя сказать, но есть смысл исследовать ряд дальше.

ПРИМЕР 2.1. Примером расходящегося ряда, удовлетворяющего необходимому признаку сходимости, является гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Здесь $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, но ряд расходится. Это вытекает из того, что $S_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Докажем это.

Известно, что возрастающая последовательность $\{a_n\}$, $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ сходится и ее предел равен e , $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ при этом $e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Логарифмируя это неравенство, имеем $\ln e > n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n(\ln(n+1) - \ln n)$

или, деля обе части на n , $\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n$.

При

$$n = 1 \quad 1 > \ln 2$$

$$n = 2 \quad \frac{1}{2} > \ln 3 - \ln 2$$

$$n = 3 \quad \frac{1}{3} > \ln 4 - \ln 3$$

.....

$$n = n \quad \frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n$$

Частичная сумма гармонического ряда, каждый член которой больше соответствующего члена больше суммы ряда.

$$\ln 2 + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + \dots + (\ln(n+1) - \ln n) = \ln(n+1)$$

удовлетворяет неравенству $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$, но

$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$ откуда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$.

ПРИМЕР 2.2. Дан общий член ряда $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. Написать первые четыре члена ряда и записать ряд.

Решение. Если $n = 1$, то $a_1 = \frac{1}{2}$; $n = 2$, $a_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$; $n = 3$, $a_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3$; $n = 4$, $a_4 = \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \left(\frac{4}{5}\right)^5$. Ряд можно записать в виде $\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{4}{5}\right)^4 + \dots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^n + \dots$

ПРИМЕР 2.3. Найти общий член ряда $\frac{10}{7} + \frac{100}{9} + \frac{1000}{11} + \frac{10000}{13} + \dots$

Решение. Запишем данный ряд в следующем виде: $\frac{10^1}{7} + \frac{10^2}{9} + \frac{10^3}{11} + \frac{10^4}{13} + \dots$

Показатель степени числителя совпадает с номером члена ряда, поэтому показатель степени n -го члена равен n . Числитель n -го члена будет 10^n . Знаменатель образуют арифметическую прогрессию с первым членом 7 и разностью 2. Следовательно, знаменатель n -го члена равен $2n + 5$.

Итак, общим членом ряда является $a_n = \frac{10^n}{2n+5}$.

ПРИМЕР 2.4. Найти сумму ряда и доказать его сходимость, если $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Решение. Общий член данного ряда $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Представим его в виде суммы простейших дробей $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}$. Определим A и B , для чего справа приведем к общему знаменателю

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A(n+1) + B(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}, \quad \text{откуда} \quad 1 = n(2A + 2B) + A - B.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях n , получаем $2A + 2B = 0$, $A - B = 1$. Решая полученную систему, находим

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}. \quad \text{Таким образом,} \quad a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right). \quad \text{Отсюда}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right), \quad a_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right), \quad a_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right), \quad a_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right),$$

$$a_5 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right), \dots, a_{n-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} \right) \quad \text{Найдем частичную сумму } n$$

$$\begin{aligned} \text{членов } S_n &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \right. \\ &- \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \Big) = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right). \quad \text{Итак,} \quad S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right). \end{aligned}$$

Найдем предел частичной суммы S_n при $n \rightarrow \infty$, то есть найдем сумму ряда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}$.

Таким образом, данный ряд сходится и его сумма $S = \frac{1}{2}$.

ПРИМЕР 2.5. Установить сходимость или расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+2}$.

Решение. Найдем предел общего члена a_n данного ряда при $n \rightarrow \infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(2 + \frac{1}{n} \right)}{n \left(3 + \frac{2}{n} \right)} = \frac{2}{3}. \quad \text{Необходимый признак сходимости}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ для этого ряда не выполняется, поэтому ряд расходится.

2.1.2. Сходимость рядов с положительными членами. Признаки сравнения

Пусть дан ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (2.2)$$

с положительными членами. Перечислим основные признаки сходимости и расходимости рядов с положительными членами.

Признак сравнения 1. Пусть даны ряды (2.2) и

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (2.3)$$

с положительными членами, причем для всех достаточно больших n $a_n \leq b_n$.

Тогда:

- из сходимости ряда (2.3) следует сходимость ряда (2.2);
- из расходимости ряда (2.2) следует расходимость ряда (2.3).

Этот признак остается в силе, если неравенства $a_n \leq b_n$ выполняются не при всех n , а лишь начиная с некоторого номера $n = N$.

Признак сравнения 2. Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, что оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ одновременно сходятся и расходятся.

ПРИМЕР 2.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Решение. Так как $n > \ln n$ или $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, а $\frac{1}{n}$ — общий член

расходящегося гармонического ряда, то в силу признака сравнения 1 данный ряд расходится.

ПРИМЕР 2.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n + \ln n}$.

Решение. Сравнение с гармоническим рядом по признаку сравнения 1 здесь ничего не дает, так как $\frac{1}{n + \ln n} < \frac{1}{n}$, и никакого заключения о сходимости данного ряда сделать нельзя. Воспользуемся признаком сравнения 2 с тем же гармоническим рядом. Имеем $a_n = \frac{1}{n + \ln n}$, $b_n = \frac{1}{n}$, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n + \ln n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\ln n}{n} + 1} = 1 \neq 0.$$

Получен конечный и отличный от нуля предел. Сравниваемые ряды ведут себя одинаково, и так как гармонический ряд расходится, то расходится и данный ряд.

2.1.3. Признак Даламбера

1. Пусть задан числовой ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (2.4)$$

с положительными членами.

Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = P$, то при $P < 1$ ряд (2.4) сходится, а при $P > 1$ – расходится (при $P = 1$ ряд может сходиться или расходиться – в этом случае вопрос о сходимости ряда остается открытым).

ПРИМЕР 2.8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

Решение. Применяем признак Даламбера. Здесь $a_n = \frac{2^n}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$,

$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \cdot n!}{2^n (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$, следовательно, ряд сходится.

ПРИМЕР 2.9. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$.

Решение. Применяем признак Даламбера. $a_n = \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$, $a_{n+1} = \frac{3^{2n+3}}{2^{3n+2}}$,

$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n+3} \cdot 2^{3n-1}}{2^{3n+2} \cdot 3^{2n+1}} = \frac{9}{8} > 1$, следовательно, ряд расходится.

2.1.4. Признак Коши

Пусть задан ряд числовой ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами.

Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = P$, то при $P < 1$ этот ряд сходится, а при $P > 1$ – расходится (при $P = 1$ возможны случаи как сходимости, так и расходимости ряда).

ПРИМЕР 2.10. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$.

Решение. Здесь удобно применить признак Коши, поскольку $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1} \right)^n} = \frac{n}{2n+1}$, а предел последней дроби находится просто: $P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1$, то ряд сходится.

ПРИМЕР 2.11. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$.

Решение. Снова применим признак Коши. $a_n = \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$; $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$, $P = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{1}{2} e$. Так как $P = \frac{1}{2} e > 1$, то ряд расходится.

2.1.5. Интегральный признак Коши

Рассмотрим числовой ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (2.5)$$

с положительными членами.

Этот признак основан на сравнении рядов с несобственными интегралами.

Если функция $f(x)$, принимающая в точках $x = n$, $n = 1, 2, \dots$ значения $f(n) = a_n$, монотонно убывает в некотором промежутке $a < x < \infty$, где $a \geq 1$, то числовой ряд (2.5) и несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно.

ПРИМЕР 2.12. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Решение. Применим интегральный признак Коши. Так как $f(n) = \frac{1}{n \ln n}$, то функцией принимающей в точках $x = n$ значения $f(n)$, будет функция

$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. Она непрерывна в промежутке $2 \leq x < \infty$ и монотонно в нем

убывает. Вычислим несобственный интеграл $\int_2^{\infty} f(x) dx$.

$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{d \ln x}{\ln x} = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln \ln b - \ln \ln 2) = \infty$. Интеграл $\int_2^{\infty} f(x) dx$ расходится. Из его расходимости следует расходимость данного ряда.

ПРИМЕР 2.13. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

Решение. Применим интегральный признак Коши, положив $f(x) = \frac{1}{x^s}$, эта функция при $x \geq 1$ непрерывна, положительная и монотонно убывающая.

Рассмотрим интеграл $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-s} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-s} x^{1-s} \Big|_1^b =$
 $= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-s} (b^{1-s} - 1) \right)$ при $s \neq 1$.

а) $s > 1$, $\lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-s} (b^{1-s} - 1) \right) = \frac{1}{s-1}$ предел конечен, несобственный интеграл сходится, следовательно, сходится и числовой ряд.

б) $s < 1$, $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-s} (b^{1-s} - 1) = \infty$ несобственный интеграл расходится, то расходится и числовой ряд.

в) $s = 1$. $\lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty$. Из расходимости несобственного интеграла следует расходимость числового ряда.

Итак, числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ при $s > 1$ сходится, при $s \leq 1$ расходится. Данный числовой ряд называется обобщенным гармоническим рядом.

2.1.6. Сходимость числовых рядов с членами произвольных знаков. Абсолютная и условная сходимость

Пусть дан числовой ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (2.6)$$

Среди членов этого ряда имеются бесконечно много как положительных, так и отрицательных членов.

Числовой ряд (2.6) с членами произвольных знаков сходится, если сходится ряд $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. В этом случае исходный

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **абсолютно сходящимся**.

Сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **условно сходящимся**, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то ряд, полученный после любой перестановки его членов, абсолютно сходится и имеет ту же сумму, что и первоначальный ряд.

Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ условно сходится, то при перестановке бесконечного множества его членов сумма ряда может измениться.

ПРИМЕР 2.14. Исследовать на сходимость числовой ряд $1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \dots$

Решение. Составим ряд из модулей членов данного ряда $1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Этот ряд сходится как обобщенный гармонический ряд с показателем $S = 2 > 1$. Следовательно, сходится и данный ряд, и притом абсолютно.

2.1.7. Знакопеременные ряды. Теорема Лейбница

Числовой ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad (2.7)$$

называется знакопеременным, где $a_n > 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Для знакопеременных рядов справедлива теорема Лейбница.

Если члены знакопеременного ряда (1) начиная с некоторого номера n монотонно убывают по абсолютной величине и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то ряд (2.7) сходится.

Исследование сходимости знакопеременных рядов следует начинать с исследования их абсолютной сходимости, так как это часто быстрее приводит к цели, чем применение теоремы Лейбница с последующим исследованием абсолютной сходимости ряда.

При исследовании знакочередующихся рядов на абсолютную сходимость пользуются всеми признаками сходимости для рядов с положительными членами.

ПРИМЕР 2.15. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Решение. Исследуем этот ряд на абсолютную сходимость, для этого составим числовой ряд из абсолютных величин членов исходного ряда, получаем ряд $1 + \left| \frac{-1}{2} \right| + \frac{1}{3} + \dots + \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Этот ряд является гармоническим с показателем $s = 1$, поэтому расходится.

Для исследования на сходимость применяем теорему Лейбница. Так как $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \dots$ (члены ряда монотонно убывают) и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, то по теореме Лейбница, данный ряд сходится. Однако он сходится условно, так как, составленный из модулей его членов, расходится.

ПРИМЕР 2.16. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot n^n}{(2n)!}$.

Решение. Исследуем данный знакочередующийся ряд на абсолютную сходимость. С этой целью составим ряд из модулей членов данного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$. Применим к этому ряду признак Даламбера: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot (2n)!}{(2n+2)! \cdot n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2(2n+1)} \right) = 0 < 1$. Ряд из модулей сходится. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

2.1.8. Приближенное вычисление суммы ряда

Для приближенного вычисления суммы S сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ полагают $S \approx S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, пренебрегая остатком $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Чтобы оценить ошибку, допускаемую при этом, нужно оценить остаток.

Для сходящихся знакоположительных рядов, члены которых монотонно убывают начиная с $n + 1$, справедливы следующие оценки остатка.

$R_n \leq \int_n^{\infty} f(x)dx$, $\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq R_n < \int_n^{\infty} f(x)dx$, где $f(n)$ – общий член данного ряда, а $f(x)$ – функция, принимающая в точках $x = n$, $n = 1, 2, \dots$ значения $f(n) = a_n$ и монотонно убывающая в промежутке интегрирования.

ПРИМЕР 2.17. Оценить n –й остаток ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Вычислить сумму ряда с точностью 10^{-2} .

Решение. Воспользовавшись оценкой остатка ряда, получим $R_n < \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2x^2} \right) \Big|_n^b = \frac{1}{2n^2}$. Найдем наименьшее значение n удовлетворяющее неравенству $R_n < \frac{1}{2n^2} < 10^{-2}$. Это значение n равно 8, тогда

$$S \approx S_8 = \sum_{n=1}^8 \frac{1}{n^3} = 1,1951.$$

Точное значение, взятое из справочника $S = 1,20215$. Ошибка, которая допущена равна $|S - S_8| = 0,00695 < 10^{-2}$.

Для знакочередующихся рядов, члены которых удовлетворяют условиям теоремы Лейбница, справедлива следующая оценка остатка $|R_n| \leq a_{n+1}$.

ПРИМЕР 2.18. С погрешностью 10^{-3} вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n}$.

Решение. Согласно выше приведенной оценке

$|R_n| \leq \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} < 10^{-3}$. Найдем наименьшее значение n , удовлетворяющее последнему неравенству, которое определяется непосредственной проверкой и $n = 7$, тогда $S \approx S_7 = \sum_{n=1}^7 \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n} = 0,405$.

2.2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

2.2.1. Функциональный ряд и область его сходимости

Ряд

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad (2.8)$$

членами которого являются функции от аргумента x , определенные на некотором множестве D называется **функциональным**.

Функциональный ряд (1) называется сходящимся при $x = x_0$, если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Множество всех значений x , для которых функциональный ряд сходится называется **областью сходимости функционального ряда**.

Для нахождения областей сходимости функциональных рядов можно использовать достаточные признаки сходимости числовых рядов.

ПРИМЕР 2.19. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.

Решение. Данный ряд представляет собой сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q = \ln x$. Так как прогрессия сходится лишь при $|q| < 1$, то он сходится, и притом абсолютно, при $|\ln x| < 1$, то есть при $-1 < \ln x < 1$, и, следовательно, неравенства $e^{-1} < x < e$ определяют область сходимости данного ряда.

ПРИМЕР 2.20. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$.

Решение. Применим признак Даламбера. Так как $f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$,
 $f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{1 + x^{2n+2}}$, то $P = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} \cdot (1 + x^{2n})}{(1 + x^{2n+2}) \cdot x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + x^{2n}}{1 + x^{2n+2}} =$
 $= \begin{cases} |x| & \text{при } |x| < 1 \\ 1 & \text{при } |x| = 1 \\ \frac{1}{|x|} & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$

Так как при $x = 0$ сходимость ряда очевидна, а при всех других $x \neq \pm 1$ $P < 1$, то по признаку Даламбера, данный ряд сходится для всех $x \neq \pm 1$. При $x = \pm 1$ получаются ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n}{2}$, не удовлетворяющие необходимому признаку сходимости и, следовательно расходящиеся. Таким образом, область сходимости данного ряда состоит из всех $x \neq \pm 1$.

2.2.2. Равномерная сходимость функциональных рядов

Рассмотрим функциональный ряд

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \quad (2.9)$$

Представим сумму ряда (2.9) в виде $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$, где $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$.

Сходящийся в некотором промежутке функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется равномерно сходящимся в этом промежутке, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N , не зависящий от x и такой, что для всех $n > N$ справедливо неравенство $|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ одновременно для всех значений x рассматриваемого промежутка.

Введение в рассмотрение понятия равномерно сходящихся рядов целесообразно потому, что последние обладают рядом важных свойств, связанных, в частности, с непрерывностью суммы ряда, с возможностью дифференцирования и интегрирования функциональных рядов.

Приведем достаточный признак равномерной сходимости функционального ряда.

Признак Вейерштрасса. Если члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ в некотором промежутке не превосходят по абсолютной величине соответствующих членов сходящегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами, то есть, если $|f_n(x)| \leq a_n$ для всех x упомянутого промежутка, то данный ряд функциональный ряд сходится в этом промежутке абсолютно и равномерно.

ПРИМЕР 2.21. Установить равномерную сходимость функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

Решение. Для всех значений x справедливо неравенство $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$.

Так как $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — сходящийся, то данный функциональный ряд, по признаку Вейерштрасса, сходится равномерно на любом отрезке.

ПРИМЕР 2.22. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ в интервале $(0,1)$.

Решение. Сумма данного ряда и модуль остатка равны $S(x) = \frac{1}{1-x}$,

$$|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| = \left| \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^n}{1-x} \right| = \frac{x^n}{1-x}.$$

Зададимся теперь произвольным числом $\varepsilon > 0$ и попытаемся отыскать номер N так, чтобы из справедливости неравенства $n > N$ вытекала справедливость неравенства $|R_n(x)| < \varepsilon$, т.е.

$$\frac{x^n}{1-x} < \varepsilon.$$

С этой целью разрешим последнее неравенство относительно n : $x^n < (1-x)\varepsilon$; $n \ln x < \ln(1-x)\varepsilon$; $n > \frac{\ln(1-x)\varepsilon}{\ln x}$ (смысл неравенства изменился так, как $\ln x < 0$).

Примем за число N целую часть последней дроби, т.е. положим

$$N = \left[\frac{\ln(1-x)\varepsilon}{\ln x} \right]. \quad (2.10)$$

Этой формулой определяется наименьшее из всех возможных целых положительных чисел N таких, что из $n > N$ следует справедливость неравенства

$$\frac{x^n}{1-x} < \varepsilon.$$

Из равенства (2.10) видна зависимость N от ε и x . Остается исследовать поведение функции $N(x)$ в интервале $(0,1)$. Нетрудно видеть, что в этом интервале она неограничена, так как при $x \rightarrow 1$ $\ln x \rightarrow 0$ и, следовательно, $N \rightarrow \infty$. А так как даже наименьшее из всех возможных N неограниченно возрастает при $x \rightarrow 1$, то не существует числа N такого, чтобы для всех x интервала $(0,1)$ остаток ряда был меньше ε . Таким образом, данный ряд в интервале $(0,1)$ сходится неравномерно.

2.2.3. Степенные ряды. Радиус и интервал сходимости

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \text{где } a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots -$$

действительные числа называется **степенным**.

Основное свойство степенных рядов состоит в том, что если степенной ряд сходится при $x = x_0$, то он сходится при всяком значении x , удовлетворяющем неравенству $|x| < |x_0|$ (теорема Абеля).

Одним из следствий теоремы Абеля является факт существования для всякого степенного ряда радиуса и интервал сходимости $-R < x < R$, внутри которого степенной ряд абсолютно сходится и вне которого он расходится. На концах которого интервал сходимости (в точках $x = \pm R$) различные степенные ряды ведут себя по-разному: одни сходятся абсолютно на обоих концах, другие – либо условно сходятся на обоих концах, либо на одном из них условно сходятся, на другом расходятся, третье – расходятся на обоих концах.

Радиус сходимости степенного ряда можно вычислить по одной из формул

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{или} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

при условии, что пределы в них входящие существуют. Так, например, этими формулами нельзя пользоваться в тех случаях, когда бесконечное число коэффициентов степенного ряда равно нулю. В частности, приведенные формулы неприменимы, если степенной ряд содержит лишь четные или нечетные степени x .

Характер сходимости степенного ряда характеризуется следующей теоремой.

Теорема 2.1. На всяком отрезке, целиком принадлежащем интервалу сходимости, степенной ряд сходится равномерно.

Исследовать степенной ряд на сходимость – значит найти его интервал сходимости и выяснить, сходится или расходится в граничных точках интервала сходимости. Область сходимости степенного ряда всегда состоит из его интервала сходимости и, быть может, граничных точек этого интервала.

ПРИМЕР 2.23. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2^n}$.

Решение. Здесь $a_n = \frac{n^2}{2^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$, следовательно,

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot 2^{n+1}}{2^n (n+1)^2} = 2. \quad \text{Интервал сходимости характеризуется}$$

неравенством $-2 < x < 2$. Исследуем сходимость ряда в граничных точках этого интервала. При $x = \pm 2$ степенной ряд принимает вид $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 (\pm 2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \cdot n^2$. Оба ряда расходятся, так как не удовлетворяют необходимому условию сходимости. Следовательно, область сходимости данного степенного ряда совпадает с его интервалом сходимости: $-2 < x < 2$.

ПРИМЕР 2.24. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$.

Решение. Так как $a_n = \frac{1}{n^n}$, то $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$. Ряд сходится при всех значениях: $-\infty < x < \infty$.

Одновременно с рядами вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ рассматривают степенные ряды более общего вида: $a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$.

Подстановка $x-a = y$ приводит последний ряд к виду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$. Если интервал сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ симметричен относительно точки $x=0$, то интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ характеризуется неравенствами $a-R < x < a+R$.

ПРИМЕР 2.25. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$.

Решение. Здесь $a_n = \frac{1}{n^2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$, следовательно, $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 = 1$. Интервал сходимости характеризуется неравенством $-1 < x-2 < 1$, т.е. $1 < x < 3$.

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка. Если $x = 3$, то получаем ряд $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$, который сходится, так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

сходится при $s > 1$. Если $x = 1$, то получается $-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots$. Этот ряд сходится (и притом абсолютно), так как сходится ряд из абсолютных величин его членов.

Итак, степенной ряд сходится для значений x , удовлетворяющих двойному неравенству: $1 \leq x \leq 3$.

Функциональный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (f(x))^n$ называется **обобщенным степенным**.

Подстановка $f(x) = y$ приводит его к виду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$. Если $|y| < R$ – область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$, то для нахождения области сходимости данного ряда следует решить неравенство $|f(x)| < R$ относительно x .

ПРИМЕР 2.26. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} \cdot e^{-nx}$.

Решение. Данный ряд является обобщенным степенным. Положив $e^{-x} = y$, получим степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} y^n$ с радиусом сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \text{ В граничной точке } y = e \text{ данный}$$

ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}$, и так как для любого n $\sqrt[n]{a_n} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > 1$

и $a_n > 1$, то этот ряд расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости.

Так как $y = e^{-x} > 0$, то областью сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} \cdot y^n$ будет множество чисел y , удовлетворяющих неравенству $0 < y < e$. Отсюда $0 < e^{-x} < e$, $-\infty < -x < 1$ и, следовательно, $x > -1$. Последнее неравенство определяет область сходимости данного ряда.

2.2.4. Разложение функций в степенные ряды

Всякая функция бесконечно дифференцируемая в интервале $|x - x_0| < r$, т.е. $x_0 - r < x < x_0 + r$, может быть разложена в этом интервале в сходящийся к ней степенной ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots,$$

если в этом интервале выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0,$$

где $R_n(x)$ — остаточный член формулы Тейлора, $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$.

При $x_0 = 0$ получается ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Приведем разложения в ряд Маклорена основных элементарных функций:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty;$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

$$-1 < x < 1.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n} + \dots, \quad -1 < x < 1;$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots, \quad -1 < x < 1;$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

Используя эти разложения, можно довольно просто находить разложения многих других функций. Так, например, для нахождения разложения в ряд по степеням x функции $\cos x^2$ нужно в ряде для $\cos x$ заменить x на x^2 . При этом отпадает необходимость исследовать остаточные члены соответствующих формул Тейлора с целью выяснения, можно ли между составленным рядом и самой функцией поставить знак равенства, так как области сходимости степенных рядов для основных элементарных функций известны.

ПРИМЕР 2.27. Разложить функцию 2^x в ряд Тейлора по степеням x .

Решение. Применим прием непосредственного разложения.

Составим для данной функции ряд Тейлора. С этой целью найдем сначала числовые значения производных всех порядков функции 2^x в точке $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^x, & f(0) &= 1; \\ f'(x) &= 2^x \ln 2, & f'(0) &= \ln 2; \\ f''(x) &= 2^x \ln^2 2, & f''(0) &= \ln^2 2; \\ &\dots & & \dots \\ f^{(n)}(x) &= 2^x \ln^n 2, & f^{(n)}(0) &= \ln^n 2; \\ &\dots & & \dots \end{aligned}$$

Подставляя теперь найденные значения производных в выражение для ряда Тейлора при $x_0 = 0$, получаем ряд Тейлора для функции 2^x по степеням x :

$$1 + \frac{\ln 2}{1!} x + \frac{\ln^2 2}{2!} x^2 + \dots + \frac{\ln^n 2}{n!} x^n + \dots$$

Находим область сходимости

полученного ряда. Так как $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \ln^n 2}{n! \ln^{n+1} 2} = \infty$, то ряд сходится для всех значений x .

Выясним, для каких значений x найденное разложение сходится к функции 2^x . С этой целью заметим, что производные всех порядков данной функции на любом отрезке $-R \leq x \leq R$ ввиду справедливости неравенства $\ln^n 2 < 1$ ограничены одним и тем же числом 2^R : $|f^{(n)}(x)| = |2^x \ln^n 2| \leq 2^R$.

Отсюда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln^{n+1} 2}{(n+1)!} = 0$, тогда найденное

разложение сходится к функции 2^x при всех значениях x :

$$2^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n 2}{n!} x^n.$$

ПРИМЕР 2.28. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \sin \frac{x^2}{3}$.

Решение. Полагаем $\frac{x^2}{3} = y$ и используем разложение для $\sin y$. Тогда

$$\begin{aligned} \sin \frac{x^2}{3} &= \sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \dots - \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \\ &= \frac{x^2}{3} - \frac{x^6}{3! \cdot 3^3} + \frac{x^{10}}{5! \cdot 3^5} + \dots + \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)! \cdot 3^{2n+1}} + \dots \end{aligned}$$

Так как разложение в ряд функции $\sin y$ имеет место для всех y , то и разложение в ряд функции $\sin^2 \frac{x^2}{3}$ имеет место для всех x .

ПРИМЕР 2.29. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Решение. Полагаем $y = -x^2$ и используем разложение для функции $\frac{1}{1-y}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + \dots + y^n + \dots = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + \\ &+ (-1)^n x^{2n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}. \end{aligned}$$

Разложение имеет место для $x \in (-1; 1)$.

ПРИМЕР 2.30. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Решение. Замечаем, что функцию $\operatorname{arctg} x$ можно получить интегрированием функции $\frac{1}{1+x^2}$, разложение которой имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \text{ поэтому} \\ \operatorname{arctg} x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned} \quad \text{Так как}$$

полученный ряд сходится к функции $\operatorname{arctg} x$ и в граничных точках интервала сходимости $x = \pm 1$, то найденное разложение имеет место для $x \in [-1; 1]$.

2.2.5. Вычисление сумм числовых и степенных рядов

Рассмотрим степенной ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можно почленно дифференцировать в каждой точке x его интеграла сходимости, т.е.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}.$$

Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можно почленно интегрировать на отрезке $[0, x]$ целиком принадлежащем интервалу сходимости, сколько угодно раз.

Дифференцирование и интегрирование рядов часто применяется для нахождения суммы $S(x)$ степенного ряда. Если сумму $S(x)$ некоторого ряда трудно найти непосредственно, но легко найти сумму ряда производных (или интегралов), то дифференцируя (или интегрируя) ряд с известной суммой можно вычислить и сумму исходного ряда.

Иногда после нескольких дифференцирований степенного ряда обнаруживается линейная зависимость между суммой $S(x)$ данного ряда и ее производными. Тогда вычисление суммы $S(x)$ сводится к решению некоторого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Дифференцирование и интегрирование степенных рядов применяется и для вычисления сумм некоторых числовых рядов. Для этого составляется дополнительный степенной ряд, который при $x = x_0$ совпадает с данным числовым рядом. Если сумма $S(x)$ функционального ряда найдена и он сходится при $x = x_0$, то число $S(x_0)$ является суммой данного числового ряда.

ПРИМЕР 2.31. Найти сумму ряда $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$.

Решение. Интервал сходимости данного ряда $(-1, 1)$. Сумму этого ряда обозначим через $S(x)$. Дифференцируя этот ряд, получаем $1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots + S'(x)$. Суммируя полученную бесконечно убывающую при $|x| < 1$ прогрессию, находим $S'(x) = \frac{1}{1-x}$, откуда $S(x) = \int \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x) + C$. Постоянную C можно вычислить, зная, что при $x = 0$ $S(0) = 0$ и, следовательно, $0 = -\ln(1-0) + C$, откуда $C = 0$. Таким образом, сумму данного ряда $S(x) = -\ln(1-x)$, т.е.

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots = -\ln(1-x).$$

ПРИМЕР 2.32. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x^2-1)^n$.

Решение. Положим $x^2 - 1 = y$ и найдем $S(y)$ степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)y^n$, сходящегося для $|y| < 1$. Интегрируя равенство $S(y) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)y^n$ на отрезке $[0, y]$ и затем дифференцируя полученное равенство по y , получаем $\int_0^y S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} y^{n+1} = \frac{y}{y-1}$;

$$S(y) = \left(\frac{y}{1-y} \right)' = \frac{1}{(1-y)^2}, \text{ но } y = x^2 - 1, \text{ поэтому}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x^2-1)^n = \frac{1}{(2-x^2)^2}.$$

Последнее равенство выполняется, если $|x^2 - 1| < 1$ или $-\sqrt{2} < x < 0$, $0 < x < \sqrt{2}$. Равенства и определяют область сходимости данного ряда к сумме $\frac{1}{(2-x^2)^2}$.

ПРИМЕР 2.33. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$.

Решение. Составим вспомогательный степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ и обозначим его сумму через $S(x)$. Необходимо найти $S(1)$. Для этого обе части равенства $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ продифференцируем по x и найдем сумму полученного ряда:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{1}{2-x}.$$

Теперь обе части равенства $S'(x) = \frac{1}{2-x}$ проинтегрируем на отрезке $[0, x]$: $S(x) = \int_0^x \frac{dt}{2-t} = -(\ln(2-t)) \Big|_0^x = -\ln(2-x) + \ln 2$, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = S(1) = \ln 2$.

2.2.6. Приближенные вычисления значений функций с помощью степенных рядов

Для вычисления приближенного значения функции $f(x)$ в ее разложении в степенной ряд сохраняют первые n членов, а остальные члены отбрасывают. Для оценки погрешности найденного приближенного значения нужно оценить сумму отброшенных членов. Если данный ряд знакопостоянный, то ряд, составленный из отброшенных членов, сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией. В случае знакопеременного ряда, члены которого удовлетворяют условиям теоремы Лейбница, используется оценка $|R_n| < a_{n+1}$, где a_{n+1} – первый из отброшенных членов ряда.

ПРИМЕР 2.34. Оценить погрешность приближенного равенства $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$, $0 < x < n + 1$.

Решение. Погрешность этого приближенного равенства определяется суммой членов, следующих после $\frac{x^n}{n!}$ в разложении функции e^x .

$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \dots$, заменив каждый из сомножителей $n+2, n+3, n+4, \dots$ меньшей величиной $n+1$, получим неравенство $R_n = \frac{x^n}{n!} \left(\frac{x}{n+1} + \left(\frac{x}{n+1} \right)^2 + \dots \right)$. Просуммируем бесконечно убывающую геометрическую

прогрессию в круглых скобках: $R_n < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{(n+1) \left(1 - \frac{x}{n+1} \right)}$, т.е.

$$R_n < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{n+1-x} = \frac{x^{n+1}}{n!(n+1-x)}.$$

ПРИМЕР 2.35. Вычислить $\sqrt[4]{e}$ с точностью до 0,00001.

Решение. В разложении функции e^x полагаем $x = \frac{1}{4}$, $e^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2 2!} + \frac{1}{4^3 3!} + \frac{1}{4^4 4!} + \dots$, если взять пять членов этого ряда, то ошибка вы-

числения не будет превышать 0,00001: $R_n < \frac{x^{4+1}}{4!(4+1-x)} = \frac{1}{4^5 \cdot 4! \left(5 - \frac{1}{4}\right)} < 0,0001$. Подсчитав сумму пяти выписанных выше членов

ряда, получим $\sqrt[4]{e} \approx 1,28403$.

ПРИМЕР 2.36. Вычислить $\sqrt[3]{68}$ с точностью до 0,001.

Решение. $\sqrt[3]{68} = \sqrt[3]{64+4} = 4 \sqrt[3]{1+\frac{4}{64}} = 4 \left(1 + \frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}}$. Раскладываем в

ряд функцию $(1+x)^{\frac{1}{3}}$:

$$\begin{aligned} (1+x)^{\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3 + \dots + \\ &= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1 \cdot 2}{3^2 \cdot 2!}x^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3!}x^3 - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{3^4 \cdot 4!}x^4 + \dots \end{aligned}$$

Пологая в полученном разложении $x = \frac{1}{16}$ и умножая ряд на 4, получаем

$$\sqrt[3]{68} = 4 \left(1 + \frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 4 \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 16} - \frac{1 \cdot 2}{3^2 \cdot 2! \cdot 16^2}\right) = 4 + \frac{1}{12} - \frac{1}{576} \approx 4,082.$$

Здесь взятые три члена ряда обеспечивают нужную точность, так как

$$|R_3| < 4 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3! \cdot 16^2} < 0,001.$$

2.2.7. Применение степенных рядов к вычислению определенных интегралов

Для приближенного вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ его предварительно

представляют в виде числового ряда, для суммирования которого берут необходимое число членов.

ПРИМЕР 2.37. Вычислить $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ с точностью до 0,0001.

Решение. Заменяв в подынтегральном выражении $\cos x$ его разложением в степенной ряд, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots}{x^2} dx = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \dots \right) dx = \left(\frac{1}{2!}x - \frac{x^3}{4!3!} + \frac{x^5}{6!5!} - \dots \right) \bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2! \cdot 2} - \frac{1}{4! \cdot 3 \cdot 2^3} + \\ &+ \frac{1}{6! \cdot 5 \cdot 2^5} - \dots \approx 0,25 - 0,0017 = 0,2483 \quad \text{так, как} \quad |R_2| < a_3 = \frac{1}{6! \cdot 5 \cdot 2^5} < \\ &< 0,0001. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2.38. Вычислить $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ с точностью ε при любом значении

x .

Решение. Раскладывая подынтегральную функцию в степенной ряд и интегрируя ряд, получим

$$\sin x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + \dots$$

Приведем программу для вычисления этой суммы на ФОРТРАНЕ

```

PROGRAM SI
C — ВВОД ЗНАЧЕНИЯ АРГУМЕНТА X И ТОЧНОСТИ E
  READ (*, 100) X, E
  100 FORMAT (F 5.2, E 10.3)
C — ПОИСК ЧИСЛА ЧЛЕНОВ В N — ЧАСТИЧНОЙ СУММЕ
  AX=ABC (X)
  N=0
  A=AX
200 N=N+1
  A=A*(AX/2*N+1)**2*(2*N-1)/(2*N)
  IF(A-E) 300, 200, 200
C — ВЫЧИСЛЕНИЕ N- ЧАСТИЧНОЙ СУММЫ
300 S=1.0
  DO 400 J=N,1,-1
400 S=1.0-S*(AX/2*J+1)**2*(2*J-1)/(2*J)
  S=S*X
C — ПЕЧАТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ

```

```

WRITE (*, 500) X, S
500 FORMAT (5 X, 'S I (', F 5.2, ') = ', F 7.5)
END

```

2.2.8. Применение степенных рядов к решению дифференциальных уравнений

Пусть требуется проинтегрировать дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = F(x, y, y'). \quad (2.11)$$

Если его решение не выражается через элементарные функции в конечном виде, то его решение удастся отыскать в виде некоторого степенного ряда. Рассмотрим два способа решения дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

Способ последовательных дифференцирований применяется, когда требуется найти частное решение $y = f(x)$ уравнения (2.11), удовлетворяющее начальным условиям $f(x_0) = y_0$, $f'(x_0) = y'_0$. Если в окрестности своих начальных условий (в окрестности точки (x_0, y_0, y'_0)) уравнение (2.11) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка, то частное решение ищут в виде ряда Тейлора

$$y = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \dots, \quad (2.12)$$

первые два члена которого известны, так как $f(x_0) = y_0$, $f'(x_0) = y'_0$.

Из уравнения (2.11) $f''(x_0) = F(x_0, y_0, y'_0)$. Если затем продифференцировать уравнение (2.11) по x , то можно найти сколько угодно производных искомой функции $f(x)$ в точке x_0 :

$$f'''(x_0) = \frac{dF(x_0, y_0, y'_0)}{dx}, \quad f^{(n)}(x_0) = \frac{d^{n-2}F(x_0, y_0, y'_0)}{dx^{n-2}}, \dots$$

Здесь под символами $\frac{dF}{dx}, \dots, \frac{d^{n-2}F}{dx^{n-2}}, \dots$ понимаются полные производные по x от функции $F(x, y, y')$ в предположении, что y и y' зависят от x , т.е.

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot F(x, y, y') \quad \text{и т.д.}$$

Подставляя значения найденных производных функции $f(x)$ в разложение (2.12) получаем искомое решение

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0) + \frac{1}{2!} y''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} y^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \dots$$

Рассмотренный метод можно применить для решения дифференциальных уравнений любого порядка.

Этот метод применим и для построения общего решения дифференциального уравнения, если y_0, y'_0 рассматривать как произвольные постоянные.

ПРИМЕР 2.39. Найти первые шесть членов разложения в ряд решения уравнения $y'' = x \sin y'$, удовлетворяющего условиям $y(1) = 0, y'(1) = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Решение будем искать в виде ряда

$$y = f(1) + \frac{1}{1!} f'(1)(x - 1) + \frac{1}{2!} f''(1)(x - 1)^2 + \frac{1}{3!} f'''(1)(x - 1)^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(1)(x - 1)^4 + \dots$$

Здесь $f(1) = 0, f'(1) = \frac{\pi}{2}$. Находим производные 2,3,4,5 порядков:

$f''(1) = 1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1, f'''(x) = \sin y' + x y'' \cos y', f'''(1) = 1,$ аналогично $f^{(4)}(1) = -1, f^{(5)}(1) = -6$. Подставляя найденные значения производных в искомый ряд, получаем решение данного уравнения

$$y = \frac{\pi}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{6}(x - 1)^3 - \frac{1}{24}(x - 1)^4 - \frac{1}{20}(x - 1)^5 + \dots$$

Способ неопределенных коэффициентов применяется, когда требуется найти либо частное решение $y = f(x)$ уравнения (2.11), удовлетворяющее начальным условиям $f(x_0) = y_0, f'(x_0) = y'_0$, либо общее решение в виде степенного ряда по степеням $(x - x_0)$.

Если дифференциальное уравнение (2.11) в окрестности точки (x_0, y_0, y'_0) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши, то его частное решение можно искать в виде ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n, \quad (2.13)$$

коэффициенты C_n которого подлежат определению.

Если точка (x_0, y_0, y'_0) является особой для уравнения (2.11), то его частное решение следует искать в виде обобщенного степенного ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^{n+\rho}, \quad (2.14)$$

где ρ — не обязательное целое число и подлежит определению вместе с коэффициентами ряда.

Чтобы определить коэффициенты C_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, искомого ряда (2.13) или (4) поступают следующим образом:

1) дважды дифференцируют ряд (2.13) или (2.14) с неизвестными коэффициентами и находят y' и y'' ;

2) подставляют разложения y, y', y'' в степенные ряды в исходное дифференциальное уравнение (2.11);

3) представляют функцию $F(x, y, y')$ в виде степенного ряда по степеням $x - x_0$, после чего равенство принимает вид равенства двух степенных рядов;

4) путем приравнивания коэффициентов полученных рядов при одинаковых степенях разностей $x - x_0$, получают уравнения для определения неизвестных коэффициентов C_n ; если решение ищется в виде ряда (2.14), то, приравнявая коэффициенты степени разности $x - x_0$, получают уравнения для определения ρ ;

5) из полученных уравнений находят коэффициенты C_n и подставляют их в искомый ряд (2.13).

Полученное в виде ряда решение может быть исследовано на сходимость известными признаками. Если полученный ряд сходится в некоторой области, то обязательно к решению дифференциального уравнения, так как его коэффициенты определялись из условия, чтобы сумма ряда была решением.

ПРИМЕР 2.40. Решить дифференциальное уравнение

$$\begin{cases} x y' = \sin x \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Решение. Решение будем искать в виде степенного ряда $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$. Подставляя в (2.15) и используя разложение для

$$\sin x, \text{ получим } \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ a_0 = 0. \end{cases} \quad \text{Приравнявая теперь коэффици-}$$

енты при одинаковых степенях аргумента, получаем

$$\begin{cases} 2n a_{2n} = 0, & n = 1, 2, 3, \dots \\ (2n+1)a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, & n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad \text{Поэтому окончательно получаем}$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} = \text{Si}(x), \text{ что совпадает с результатом разложения } \text{Si}(x) \text{ в степенной ряд.}$$

ПРИМЕР 2.41. Решить дифференциальное уравнение

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - k^2) y = 0. \quad (2.16)$$

Решение. Одно из решений этого уравнения неограниченно возрастает при $x \rightarrow 0$ другое может быть найдено в виде степенного ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \quad (2.17)$$

Найдем это второе решение. Дифференцируя (2.17) и подставляя в (2.16), получаем

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1};$$

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + 4 \cdot 3 a_4 x^2 + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2};$$

$$x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + (x^2 - k^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \text{ или:}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} - k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0. \text{ Учитывая то,}$$

$$\text{что } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n, \text{ и собирая коэффициенты при одинаковых степенях аргумента } x, \text{ получаем}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} ((n^2 - k^2) a_n + a_{n-2}) x^n + a_1 (1 - k^2) x - k^2 a_0 = 0.$$

Функция, разлагаемая в степенной ряд, тождественно равна нулю только в том случае, если все ее коэффициенты при степенях аргумента x равны нулю. Поэтому получаем следующую бесконечную систему уравнений для коэффициентов разложения (2.17):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}^0 : \mathbf{k}^2 \mathbf{a}_0 = \mathbf{0} \\ \mathbf{x} : (1 - \mathbf{k}^2) \mathbf{a}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^2 : (4 - \mathbf{k}^2) \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_0 = \mathbf{0} \\ \dots\dots\dots \\ \mathbf{x}^n : (\mathbf{n}^2 - \mathbf{k}^2) \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n-2} = \mathbf{0} \end{array} \right. . \quad (2.18)$$

При целом k из первых $|k|$ уравнений получается $a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$. Из $k+1$ -го уравнения следует, что a_k — произвольное число, играющее роль произвольной постоянной. Остальные коэффициенты, определяются из предыдущих посредством рекуррентной формулы, получающейся из (2.18):

$$\mathbf{a}_n = -\frac{\mathbf{a}_{n-2}}{n^2 - k^2}, \quad n = k+1, k+2, \dots \quad (2.19)$$

Поскольку $a_{k-1} = 0$, то из (2.19) получаем $a_{k+1} = a_{k+3} = \dots = 0$. Следовательно, ненулевыми коэффициенты будут только коэффициенты с индексом $n = k + 2\ell$, $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$. Используя то, что $n^2 - k^2 = (k + 2\ell)^2 - k^2 = 4\ell(k + \ell)$, получаем

$$\begin{aligned} a_{k+2\ell} &= -\frac{a_{k+2\ell-2}}{4\ell(k+\ell)} = +\frac{a_{k+2\ell-4}}{4^2 \ell(\ell-1)(k+\ell)(k+\ell-1)} = \dots \\ &= \frac{(-1)^\ell a_k}{4^\ell \ell!(k+\ell)(k+\ell-1)\dots(k+1)} = \frac{(-1)^\ell k! a_k}{4^\ell \ell!(k+\ell)!}. \end{aligned}$$

Подставляя получен-

ное выражение в (2.17), получаем

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{k! a_k (-1)^\ell}{\ell! (k + \ell)!} x^{k+2\ell} = 2^k k! a_k \left(\frac{x}{2}\right)^k \sum \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^\ell}{\ell! (k + \ell)!}.$$

Функция

$$\mathbf{J}_k(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mathbf{x}}{2}\right)^k \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{4}\right)^\ell}{\ell!(\ell+k)!} \quad (2.20)$$

называется функцией Бесселя k -го порядка, $2^k k! a_k = C$ – произвольная постоянная, поэтому общее решение уравнения (2.16), ограниченное при $x = 0$, имеет при целом k следующий вид:

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \mathbf{J}_k(\mathbf{x}).$$

ПРИМЕР 2.42. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0 \\ y(0) < \infty \\ y'(0) = 2 \end{cases} \quad \text{и вычислить } y(2) \text{ с точностью } \varepsilon = 10^{-6}.$$

Решение. Согласно приведенным выше выкладкам

$$y(x) = C J_1(x) = C \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^n}{n!(n+1)!} = C \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + \dots \right). \text{ Отсюда получаем}$$

$$y'(0) = \frac{C}{2} = 2 \Rightarrow C = 4; \text{ решение задачи Коши } y = 4 J_1(x).$$

При $x = 2$ получаем следующий знакочередующийся ряд:

$$y(2) = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}.$$

Программа на БЕЙСИКЕ может иметь следующий вид:

```
10 DIM A (100): A (1)=4
20 FOR I=1 TO 100: A (I+1)=-A(I)/(I+1)
30 IF ABS (A(I+1))<1. E-6 THEN 50
40 NEXT I
50 S=0: FOR K=I+1 TO 1 STEP 1: S=S+A(K): NEXT K
60 PRINT S: END
```

Полученное значение 2,306899309 ... и точное значение из справочника 2,306899231 ...

2.3. РЯДЫ ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

2.3.1. Разложение периодических функций в ряд Фурье

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. *Рядом Фурье* периодической функции $f(x)$ с периодом 2π , определенной на отрезке $[-\pi, \pi]$, называется функциональный ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Если ряд (1) сходится, то его сумма $S(x)$ есть периодическая функция с периодом 2π , т.е. $S(x + 2\pi) = S(x)$.

Теорема 2.2. Если функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ имеет конечное число экстремумов и является непрерывной за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, тогда ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке отрезка $[-\pi, \pi]$ и сумма $S(x)$:

1) $S(x) = f(x)$ во всех точках непрерывности функции $f(x)$, лежащих внутри отрезка $[-\pi, \pi]$;

2) $S(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0))$, где x_0 — точка разрыва первого рода функции $f(x)$;

3) $S(x) = \frac{1}{2}(f(-\pi + 0) + f(\pi - 0))$ на концах отрезка, т.е. при $x = \pm\pi$.

Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[-\ell, \ell]$, где ℓ — произвольное положительное число, то при выполнении условий выше приведенной теоремы эта функция $f(x)$ может быть представлена в виде ряда Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{\ell} x + b_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right),$$

где $a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi}{\ell} x dx$, $b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx$.

В случае, когда $f(x)$ — четная функция, ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{\ell} x, \text{ где } a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi}{\ell} x dx.$$

Если $f(x)$ — нечетная функция, то ее ряд Фурье содержит только синусы, т.е.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \text{ где } b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx.$$

ПРИМЕР 2.42. Разложить в ряд Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi < x < 0, \\ \pi - x, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Решение. Данная функция удовлетворяет условиям теоремы разложимости в ряд Фурье, вне предела интервала $(-\pi, \pi)$ продолжаем периодически с периодом $T = 2\pi$.

Вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \pi dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) dx = \frac{1}{\pi} \pi \cdot x \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(\pi - x)^2}{2} \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi \cos nx dx -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = - \frac{1}{\pi n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1} - 1}{\pi n^2};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi \sin nx dx -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{\cos nx}{n} = \frac{(-1)^n}{n}, \text{ тогда ряд Фурье для этой функции}$$

принимает вид:

$$f(x) = \frac{3}{4} \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^2 \pi} \cos nx + \frac{(-1)^n}{n} \sin nx \right). \text{ Найденные раз-}$$

ложения имеет место при всех значениях $x \in (-\pi; \pi)$.

ПРИМЕР 2.43. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом $T = 2$, заданную на отрезке $(-1, 1)$ уравнением $f(x) = x^2$.

Решение. Рассматриваемая функция является четной. Ее график – дуга параболы, заключенная между точками $(-1; 1)$ и $(1; 1)$. Так как $\ell = 1$, то

$$a_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3};$$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi}{\ell} x dx = 2 \int_0^1 x^2 \cos n\pi x dx. \text{ Здесь нужно дважды про-}$$

интегрировать по частям:

$$1) u = x^2, dv = \cos n\pi x, du = 2x dx, v = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x;$$

$$a_n = \frac{2x^2}{n\pi} \sin n\pi x \Big|_0^1 - \frac{4}{n\pi} \int_0^1 x \sin n\pi x dx = - \frac{4}{n\pi} \int_0^1 x \sin n\pi x dx;$$

$$2) u = x, dv = \sin n\pi x, du = dx, v = - \frac{1}{n\pi} \cos n\pi x;$$

$$a_n = \frac{4x}{n^2 \pi^2} \cos n \pi x \Big|_0^1 - \frac{4}{n^2 \pi^2} \int_0^1 \cos n \pi x dx = \frac{4}{n^2 \pi^2} (-1)^n.$$

Все коэффициенты $b_n = 0$, так как эта функция четная. Следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n \pi x.$$

2.3.2. Разложение в ряд Фурье непериодической функции

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[0, \ell]$. Дополняя определение этой функции произвольным образом на отрезке $[-\ell, 0]$ можно разложить эту функцию в ряд Фурье.

а) дополним определение данной функции так, чтобы при $-\ell \leq x < 0$ было $f(x) = f(-x)$, в результате получится четная функция. (В этом случае говорят, что функция $f(x)$ «продолжена четным образом»). Полученную функцию разлагают в ряд Фурье, этот ряд имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n \pi}{\ell} x, \quad x \in [0, \ell], \text{ где}$$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n \pi}{\ell} x dx.$$

б) продолжим определение $f(x)$ при $-\ell \leq x < 0$ так: $f(x) = -f(-x)$, то получим нечетную функцию, которая разлагается в ряд Фурье по синусам, т.е.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n \pi}{\ell} x, \quad x \in [0, \ell], \text{ где } b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n \pi}{\ell} x dx.$$

В этом случае говорят, что $f(x)$ «продолжение нечетным образом».

ПРИМЕР 2.44. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ на отрезке $[0, \pi]$ по синусам.

Решение. Продолжая эту функцию на отрезке нечетным образом, имеем

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin n \pi x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin n \pi x dx = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n} \text{ Тогда,}$$

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n x, \quad x \in [0, \ell].$$

ПРИМЕР 2.45. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ на отрезке $[0, \pi]$ по косинусу.

Решение. Продолжая эту функцию четным образом, получим $f(x) = |x|$, $x \in (-\pi; \pi]$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = -\frac{4}{\pi n^2}, \text{ тогда ряд Фурье}$$

имеет вид:

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad x \in [0, \pi].$$

2.3.3. Ряд Фурье в комплексной форме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8. Если функция $f(x)$ периодическая с периодом $T = 2\pi$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ удовлетворяют условиям разложимости в ряд, то ряд

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$$

называется **комплексной формой ряда Фурье**, где

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

C_n называется комплексным коэффициентом ряда Фурье функции $f(x)$.

Если функция $f(x)$ периодическая с периодом 2ℓ , то ряд Фурье в комплексной форме имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \ell^{\frac{in\pi}{\ell}}.$$

Коэффициенты ряда C_n выражаются формулами

$$C_n = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-\frac{in\pi}{\ell}x} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ПРИМЕР 2.46. Функцию $e^{\frac{1}{2}xi}$ разложить в ряд Фурье в комплексной форме на интервале $(-\pi, \pi)$.

Решение. Согласно вышеприведенной формуле для коэффициента C_n имеем:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{1}{2}xi} \cdot e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\left(\frac{1}{2}-n\right)ix} dx = \\ &= \frac{2}{\pi(1-2n)} \sin\left(\frac{1}{2}-n\right)\pi. \text{ Тогда ряд Фурье имеет вид:} \end{aligned}$$

$$e^{\frac{1}{2}xi} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{2} - n\right) i \pi}{1 - 2n} \cdot e^{inx}, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

2.3.4. Интеграл Фурье

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям разложимости в ряд Фурье и $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ — сходится, то

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos z(u-x) du \right) dz$$

называется интегралом Фурье для функции $f(x)$.

а) если $f(x)$ — четная функция, то $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(u) \cos zu du \right) \cos zx dz$;

б) если $f(x)$ — нечетная функция, тогда $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(x) \sin zu du \right) \sin zx dz$.

ПРИМЕР 2.47. Функцию $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| > 1, \\ 1, & \text{если } 0 < x < 1, \\ -1, & \text{если } -1 < x < 0 \end{cases}$ представить интегралом Фурье.

Решение.

Функция $f(x)$ является нечетной, поэтому $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(u) \sin zu du \right) \sin zx dz$. Отдельно вычислим внутренний интеграл, имеем:

$$\int_0^{\infty} f(u) \sin zu du = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sin zu du = -\frac{2}{\pi} \frac{\cos zu}{z} \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi} \frac{1 - \cos z}{z},$$

тогда интеграл Фурье для этой функции имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos z}{z} \sin zx dz = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \sin^2 \frac{z}{2} \cdot \sin zx \cdot \frac{dz}{z}.$$

2.3.5. Интеграл Фурье в комплексной форме. Преобразование Фурье

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. Если функция $f(x)$ определена в интервале $(-\infty, \infty)$ и удовлетворяет условиям разложимости в ряд Фурье и $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$,

то

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha(x-t)} dt \right) d\alpha$$

называется **интегралом Фурье в комплексной форме** или

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt \right) e^{i\alpha x} d\alpha,$$

а функция

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt$$

называется **преобразованием Фурье функции** $f(x)$, тогда

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

называется **обратным преобразованием Фурье**.

а) функция $f(x)$ – четная, то $F_C(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt$ называется

косинус-преобразованием Фурье функции $f(t)$, а

$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_C(\alpha) \cos \alpha x d\alpha$ называется **обратным преобразованием**.

б) функция $f(x)$ – нечетная, то $F_S(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt$ называется

синус-преобразованием Фурье функции $f(t)$, а функция

$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_S(\alpha) \sin \alpha x d\alpha$ называется **обратным преобразованием**.

Преобразование Фурье обладает следующими основными свойствами

- 1) $F(C f(t)) = C F(f(t))$, $C - \text{const}$;
- 2) $F(f_1(t) + f_2(t)) = F(f_1(t)) + F(f_2(t))$;
- 3) $F(f'(t)) = i\alpha F(f(t))$.

ПРИМЕР 2.48. Функцию $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1 \end{cases}$ представить интегралом Фурье в комплексной форме.

Решение.
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt \right) e^{i\alpha x} d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-1}^1 f(t) e^{-i\alpha t} dt \right) e^{i\alpha x} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{i\alpha} \right) e^{i\alpha x} d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} e^{i\alpha x} d\alpha \text{ итак } f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} e^{i\alpha x} d\alpha.$$

ПРИМЕР 2.49. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Решение. Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям, при которых существует преобразование Фурье этой функции, тогда

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(1+i\alpha)x} dx = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-(1+i\alpha)x}}{1+i\alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+i\alpha)}, \text{ итак, } F(\alpha) = \frac{1-i\alpha}{\sqrt{2\pi}(1+\alpha^2)}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2.50 Найти косинус- преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{3}{2}, \\ 0, & \text{если } \frac{3}{2} < x < \infty. \end{cases}$$

Решение. Согласно формулы косинус- преобразования Фурье имеем

$$\begin{aligned} F_C(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{3/2} (2x - 3) \cdot \cos \alpha x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (2x - 3) \times \\ &\times \frac{\sin \alpha x}{\alpha} \Big|_0^{3/2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2}{\alpha} \cdot \int_0^{3/2} \sin \alpha x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2 \cos \alpha x}{\alpha^2} \Big|_0^{3/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2 \left(\cos \frac{3\alpha}{2} - 1 \right)}{\alpha^2} \end{aligned}$$

итак,
$$F_C(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2\left(\cos \frac{3}{2}\alpha - 1\right)}{\alpha^2}.$$

2.3.6. Спектральные характеристики ряда и интеграла Фурье

Пусть функция $f(x)$ периодическая с периодом $T = \ell$ определена на интервале $\left(-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right)$ и удовлетворяет условиям разложимости в ряд Фурье.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10. *Спектральной функцией $S(v_n)$ ряда Фурье или спектральной плотностью* называется отношение коэффициента Фурье функции $f(x)$ периода ℓ

$$C_n = C(v_n) = \frac{1}{\ell} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} f(x) \cdot e^{-2\pi i v_n x} dx, \quad v_n = \frac{n}{\ell}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

к приращению частоты $\Delta v_n = \frac{n+1}{\ell} - \frac{n}{\ell} = \frac{1}{\ell}$, т.е.

$$S(v_n) = \frac{C(v_n)}{\Delta v_n} = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} f(x) \cdot e^{-2\pi i v_n x} dx.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.11. *Амплитудным спектром $\rho(v_n)$ называется модуль спектральной функции, а фазовым спектром $\Phi(v_n)$ — взятый с обратным знаком аргумент спектральной функции, т.е.*

$$\rho(v_n) = |S(v_n)| = \ell |C(v_n)|$$

и

$$\Phi(v_n) = -\arg S(v_n).$$

ПРИМЕР 2.51. Найти спектральную функцию ряда Фурье и амплитудный и фазовый спектр функции $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-2, -1), \\ 1 & \text{при } x \in (-1, 1), \\ 0 & \text{при } x \in (1, 2) \end{cases}$ и $f(x+4) = f(x)$.

Решение. Для взятой функции $v_n = \frac{n}{4}$ и

$$S(v_n) = \int_{-2}^2 f(x) e^{-2\pi i v_n x} dx = \int_{-1}^1 e^{-2\pi i v_n x} dx = \frac{e^{-2\pi i v_n x}}{-2\pi i v_n} \Big|_{-1}^1 =$$

$$= \frac{1}{\pi v_n} \frac{e^{2\pi i v_n} - e^{-2\pi i v_n}}{2i} = \frac{1}{\pi v_n} \sin 2\pi v_n, \quad S(v_n) = \frac{1}{\pi v_n} \cdot \sin 2\pi v_n,$$

следовательно, $\rho(v_n) = |S(v_n)| = \frac{|\sin 2\pi v_n|}{\pi |v_n|},$

$$\Phi(v_n) = -\arg S(v_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sin 2\pi v_n > 0, \\ -\pi, & \text{если } \sin 2\pi v_n < 0. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.12. *Спектральной функцией интеграла Фурье функции $f(x)$ называется преобразование Фурье этой функции*

$$S(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i v x} dx.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.13. Величина $\rho(v) = |S(v)|$ называется *амплитудным спектром*, а величина $\Phi(v) = -\arg S(v)$ — *фазовым спектром*.

$$\frac{2\ell}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{\ell}.$$